

УДК 502/504:532.543

В. Н. КОХАНЕНКО

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Донской государственный аграрный университет»

М. Ф. МИЦИК

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СВОБОДНО РАСТЕКАЮЩЕГОСЯ БУРНОГО ПОТОКА С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ТЕЧЕНИЯ НА УЧАСТКЕ, ПРИМЫКАЮЩЕМ К ВЫХОДУ ИЗ ТРУБЫ

Предложен метод определения параметров двумерного бурного потока в окрестности выхода потока из безнапорной прямоугольной трубы при его свободном растекании. Параметры потока определяются в предположении, что вдоль каждого живого сечения гидродинамический напор потока мало изменяется. Результаты расчета сравниваются с расчетом параметров потока без учета сил сопротивления.

Безнапорная прямоугольная труба, широкое отводящее горизонтальное русло, бурный поток, учет сил сопротивления, живое сечение потока, свободное растекание потока.

We propose a method of determining parameters of the two-dimensional rapid flow in the vicinity of the flow outlet from the non-pressure rectangular tube under its free spreading. The flow parameters are determined on the assumption that along each of the effective cross-section the hydrodynamic pressure of the flow varies little. The calculation results are compared with the calculation of the flow parameters without taking into account resistance forces.

Non-pressure rectangular tube, wide discharge horizontal channel, rapid flow, taking into account resistance forces, flow effective cross-section, flow free spreading.

В работе [1] приведены уравнения гидродинамики двумерных в плане потоков воды в естественных координатах. Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial(hu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

следует существование функции тока для стационарного течения, определяемой следующим уравнением:

$$\frac{h_0}{h} d\psi = -u_y dx + u_x dy. \quad (2)$$

Вводя семейство линий $S(x; y) = \text{const}$, авторы полагают, что оно удовлетворяет условию

$$dS = f(x; y; \theta) \cdot (\cos\theta dx + \sin\theta dy), \quad (3)$$

где θ – угол наклона вектора скорости \vec{v} к оси OX; $f = f(x; y; \theta)$ функция, определяемая из условия, что выражение (3) является полным дифференциалом.

В случае $f = v$ движение потока – потенциальное.

В случае учета сил сопротивления потоку, как в работе [1], изменение гидродинамического напора следующее:

$$H = - \int_{S_0}^S N ds + H_0(\psi), \quad (4)$$

где N – величина пропорциональна модулю силы сопротивления T и направлена в сторону, противоположную скорости движения потока; $H_0(\psi)$ – произвольная функция.

Однако, если $H_0(\psi) = \text{const}$ – поток равномерный, тогда

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \quad (5)$$

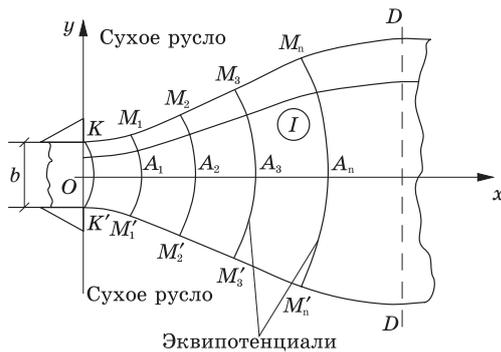
$$\text{и } f = v \cdot \exp\left(-\int_{\psi_0}^{\psi} S \cdot M^{-1} d\psi\right) = v, \quad (6)$$

то поток может быть потенциальным и при наличии сил сопротивления потоку, так как в (6), согласно [1], $S(x; y) = 0$,

$$\text{если } \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0.$$

Экспериментальные исследования поведения потока при его свободном растекании из безнапорной трубы в широкое отводящее русло подтверждают факт близости реального потока к потенциальному в некоторой окрестности выхода потока из трубы и малое отличие гидродинамического напора от постоянного вдоль живого сечения на выходе из трубы. Назовем такой поток потенциальным в среднем по течению потока. Это упрощение позволило в работе [2] определить границы первого участка в лепестке растекания потока и напор вдоль

живого сечения потока в лепестке растекания с учетом сил сопротивления потоку (рисунок).



План свободного растекания потока (D-D – сечение предельного расширения)

Как отмечено в работе [2], на I-м участке растекания скорости возрастают, а глубины уменьшаются по течению потока.

Целью настоящей работы является определение параметров потока внутри области I, если известны параметры потока на выходе из трубы b, v_0, h_0 , координаты точек $M_i(x_i; y_i)$ вдоль крайней линии тока, радиусы живых сечений R_i , проходящих через точки M_i, A_i, M_i и углы θ_i в точках M_i .

Координаты точек x_{A_i} и значения гидродинамического напора $H_i(x_{A_i})$ также известны. Согласно принятому ранее допущению, считаем, что H_i не изменяется вдоль живого сечения потока:

$$H_i(x) = \frac{v^2}{2g} + h. \quad (7)$$

Поскольку поток потенциальный, то

$$dS = d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy, \quad (8)$$

$$\text{где } \frac{\partial\varphi}{\partial x} = u_x; \frac{\partial\varphi}{\partial y} = u_y. \quad (9)$$

В этом случае дифференциальная связь между планом течения потока и плоскостью годографа скорости будет иметь вид [3]:

$$dz = \frac{1}{v} e^{i\theta} \left(d\varphi + i \frac{h_0}{h} d\psi \right), \quad (10)$$

где $z = x + iy, i$ – мнимая единица.

Система уравнений движения потока соответственно может быть представлена так:

$$\begin{cases} \frac{h_0}{h} \frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{1}{v} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}; \\ \frac{1}{v} \frac{\partial\varphi}{\partial v} = h_0 \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{hv} \right), \end{cases} \quad (11)$$

где h_0 – глубина потока на выходе из трубы.

Выражаем производную $\frac{d}{dv} \left(\frac{1}{hv} \right)$:

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{1}{hv} \right) = \frac{d}{dv} \left(\frac{2g}{2gHv - v^3} \right) = \frac{2g(3v^2 - 2gH)}{(2gHv - v^3)^2}. \quad (12)$$

Ввиду малости изменения гидродинамического напора H считаем его приближенно постоянным на рассматриваемом участке потока.

Преобразуя далее систему (11), получим:

$$\begin{cases} H(\varphi) \frac{d\varphi}{d\theta} = 2h_0 \frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}; \\ H(\varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{h_0}{2} \frac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \end{cases} \quad (13)$$

где $H(\varphi) = \frac{v^2}{2g} + h$ для эквипотенциали φ_i , проходящей через точки M_i, A_i, M_i .

Систему (13) преобразуем к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\tau} \left[H(\varphi) \frac{d\varphi}{d\theta} \right] = 2h_0 \frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \right); \\ \frac{\partial}{\partial\theta} \left[H(\varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} \right] = \frac{h_0}{2} \frac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}. \end{cases} \quad (14)$$

В силу гладкости функций $\varphi(\tau; \theta)$ и $\psi(\tau; \theta)$ получим уравнение в частных производных второго порядка относительно функции $\psi = \psi(\tau; \theta)$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \right) - \frac{3\tau-1}{4\tau(1-\tau)^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0. \quad (15)$$

Поскольку крайняя линия тока на участке потока I – плавная кривая, то полагаем в уравнении (15) замену

$$\psi(\tau; \theta) = \psi_1(\tau) \sin\theta. \quad (16)$$

В результате разделения переменных в уравнении (15) получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{\tau}{1-\tau} \frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} \right) - \frac{3\tau-1}{4\tau(1-\tau)^2} \psi_1(\tau) = 0. \quad (17)$$

Для нахождения решения поставленной в работе задачи воспользуемся решением уравнения (17):

$$\psi = \frac{A \sin\theta}{\tau^{1/2}}. \quad (18)$$

Соответственно для потенциальной функции из системы (13) интегрированием первого уравнения получим:

$$\varphi = \frac{Ah_0}{H} \frac{\cos\theta}{\tau^{1/2}(1-\tau)}. \quad (19)$$

Определим постоянную A из условия, что на выходе потока из трубы (точка K , рисунок) параметры τ_K, θ_K известны [4].

Полагая вдоль крайней линии тока $\psi = \frac{v_0 b}{2}$, из (18) получим:

$$\frac{v_0 b}{2} = \frac{A \sin \theta_K}{\tau_K^{1/2}} \quad (20)$$

Из (20) следует:

$$A = \frac{v_0 b \cdot \tau_K^{1/2}}{2 \sin \theta_K} \quad (21)$$

Уравнение, связывающее параметры τ, θ вдоль крайней линии тока будет следующим:

$$\frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} = \frac{\sin \theta_K}{\tau_K^{1/2}} \quad (22)$$

Таким образом, для точек M_i определяются значения:

τ_i при известных углах θ_i –

$$\tau_i = \frac{\tau_K \sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_K} \quad (23)$$

а также глубины и скорости –

$$h_i = H(1 - \tau_i); v_i = \tau_i^{1/2} \sqrt{2gH} \quad (24)$$

Параметры потока в точках A_i определим из решения уравнения:

$$\frac{\cos \theta_i}{\tau_i^{1/2} (1 - \tau_i)} = \frac{1}{\tau_{A_i}^{1/2} (1 - \tau_{A_i})} \quad (25)$$

В уравнении (24) известны все параметры, кроме τ_{A_i} .

Определив τ_{A_i} , по формулам

$$h_{A_i} = H(1 - \tau_{A_i}); v_{A_i} = \tau_{A_i}^{1/2} \sqrt{2gH} \quad (26)$$

найдем скорости и глубины в рассматриваемых точках A_i .

Для определения параметров потока в произвольной точке C области течения потока, через которую проходит линия тока с расходом K_T и эквипотенциаль с параметром τ_A на оси симметрии, необходимо решить систему (см. рисунок):

$$\begin{cases} \frac{\cos \theta_{C_i}}{\tau_{C_i}^{1/2} (1 - \tau_{C_i})} = \frac{1}{\tau_{A_i}^{1/2} (1 - \tau_{A_i})}; \\ \frac{\sin \theta_{C_i}}{\tau_{C_i}^{1/2}} = K_T \frac{\sin \theta_K}{\tau_K^{1/2}}. \end{cases} \quad (27)$$

Координаты точки C_i определяем, пользуясь дифференциальной связью (10) и интегрируя ее вдоль линии тока.

Если точка C_i принадлежит эквипо-

тенциали M, A, M' , то точка C_i принадлежит дуге окружности радиуса R_i , тогда

$$\begin{cases} y_{C_i} = R_i \sin \theta_{C_i}; \\ x_{C_i} = x_{A_i} - R_i + R_i \cos \theta_{C_i}. \end{cases} \quad (28)$$

Таким образом определяются параметры потока в области течения потока на участке I .

Выводы

Область течения потока с учетом сил сопротивления потоку более сжата к оси симметрии.

Линии тока в конкретных створах менее уположены по сравнению с линиями тока без учета сил сопротивления потоку.

Скорости потока возрастают, а глубины убывают менее интенсивно по сравнению со случаем модели без учета сил сопротивления потоку.

Крайние линии тока независимо от граничных условий проходят выше экспериментальных кривых.

Рассогласование по всему комплексу параметров потока на участке I не превышает 5 %.

1. **Есин А. И.** Задачи технической механики жидкости в естественных координатах. – Саратов: ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ», 2003. – 144 с.

2. **Косиченко Н. В.** О лепестке свободного растекания бурного потока в широкое укрепленное русло // Природообустройство. – 2011. – № 3. – С. 58–62.

3. **Коханенко В. Н., Волосухин Я. В., Ширяев В. В., Коханенко Н. В.** Моделирование одномерных и двумерных открытых водных потоков: монография; под общей ред. В.Н. Коханенко. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2007. – 168 с.

4. **Ширяев В. В., Мицик М. Ф., Дуванская Е. В.** Развитие теории двумерных плановых потоков в современных условиях: монография; под общей ред. В. В. Ширяева. – Шахты: ЮРГУЭС, 2007. – 193 с.

Материал поступил в редакцию 03.10.12.
Коханенко Виктор Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Механика и оборудование процессов пищевых производств»

Тел. 8 (8951) 490-70-09

Email: krutoi_ded08@rambler.ru

Мицик Михаил Федорович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Математика»

Тел. 8 (8906) 424-27-16

E-mail: m_mits@mail.ru