

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ –  
МСХА имени К.А. ТИМИРЯЗЕВА**

**Ш.Г. Хусаинов**

# **ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ**

**Часть III**

**Оптика. Атомная физика.  
Физика твердого тела. Физика атомного  
ядра и элементарных частиц**

*Учебное пособие*

Москва  
РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева  
2023

УДК 53(075.8)  
ББК 22.3я73  
Х98

*Рецензенты:*

**Тимеркаев Б.А.**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики ФГБОУ ВО «КНИТУ-КАИ» (Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева - КАИ)

**Никитин О.Р.**, доктор технических наук, профессор кафедры радиотехники и радиосистемы ФГБОУ ВО «ВлГУ» (Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых)

**Х98 Хусаинов, Ш. Г.** Лекции по физике. Ч. III : Оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов ; Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К. А. Тимирязева. – Москва : РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева, 2023. – 305 с. – Текст электронный.

ISBN 978-5-9675-1985-7

Учебное пособие написано в соответствии с государственными образовательными стандартами для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. В нем в краткой и доступной форме изложен теоретический материал лекций по третьей части курса общей физики. Приведенные в пособии материалы будут полезны для самостоятельного написания обучающимися конспектов лекций, на практических занятиях, при выполнении индивидуальных домашних заданий и при подготовке к зачетам и экзамену.

Учебное пособие адресовано студентам РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева инженерно-технических направлений подготовки с углубленным изучением дисциплины «Физика»: 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 15.03.02 «Технологические машины и оборудование» и 35.03.06 «Агроинженерия» для получения теоретических и практических навыков и углубления знаний по физике.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией Института механики и энергетики имени В.П. Горячкина РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, протокол №3 от 01.04. 2022 г.

**Khusainov, Sh. G.** Lectures on physics. Part III : Optics. Atomic physics. Solid state physics. Physics of the atomic nucleus and elementary particles : textbook / Sh. G. Khusainov ; Russian state agrarian University – Moscow state Agricultural Academy named after K. A. Timiryazev. – Moscow: RSAU-MTAA named after K. A. Timiryazev, 2023. – 305 p. –Text: electronic.

The textbook is written in accordance with state educational standards for engineering and technical specialties of higher educational institutions. It contains in a concise and accessible form the theoretical material of lectures on the third part of the general physics course. The materials provided in the manual will be useful for students to write lecture notes on their own, in practical classes, when doing individual homework and preparing for tests and exams.

The textbook is addressed to students of the RSAU-MTAA named after K.A. Timiryazev, engineering training areas with in-depth study of discipline of «Physics»: 13.03.01 «Thermal Engineering»; 13.03.02 «Power engineering and electrical engineering»; 15.03.02 «Technological machines and equipment» and 35.03.06 «Agroengineering» to gain theoretical and practical skills and deepen my knowledge in physics.

УДК 53(075.8)

ББК 22.3я73

© Хусаинов Ш.Г., 2023

© ФГБОУ ВО РГАУ–МСХА имени  
К.А. Тимирязева, 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	7
<b>Часть 1. ОПТИКА. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ.....</b>	<b>8</b>
<b>Лекции 1 – 1*. Геометрическая оптика. Интерференция света.....</b>	<b>8</b>
1.1. Элементы геометрической оптики.....	8
1.1.1. Основные законы оптики. Полное отражение.....	8
1.1.2. Зеркала .....	13
1.1.3. Линзы и их основные характеристики.....	16
1.1.4. Аберрации оптических систем.....	21
1.1.5. Фотометрические величины и их единицы .....	24
1.2. Интерференция света.....	28
1.2.1. Монохроматичность и когерентность света.....	28
1.2.2. Интерференция света.....	31
1.2.3. Методы наблюдения интерференции.....	34
1.2.4. Расчет интерференционной картины от двух источников.....	35
1.2.5. Интерференция света при отражении в тонких пленках.....	37
1.2.6. Примеры применения интерференции света.....	42
Примеры решения задач.....	45
Задачи.....	49
<b>Лекция 2. Дифракция и дисперсия света.....</b>	<b>50</b>
2.1. Дифракция света.....	50
2.1.1. Принципы Гюйгенса и Гюйгенса – Френеля.....	50
2.1.2. Зоны Френеля.....	51
2.1.3. Дифракция в сходящихся лучах (дифракция Френеля) .....	54
2.1.4. Дифракция в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера) .....	56
2.1.5. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке.....	58
2.1.6. Дифракция на пространственной решетке.....	61
2.1.7. Разрешающая способность спектрального прибора.....	62
2.2. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом.....	64
2.2.1. Дисперсия света.....	64
2.2.2. Электронная теория дисперсии.....	66
2.2.3. Поглощение (абсорбция) света.....	69
Примеры решения задач.....	71
Задачи.....	75
<b>Лекция 3. Поляризация света.....</b>	<b>77</b>
3.1. Естественный и поляризованный свет.....	77
3.2. Получение плоскополяризованного света. Закон Малюса.....	79

3.3. Поляризация света при отражении и преломлении.....	81
3.4. Двойное лучепреломление.....	82
3.5. Положительные и отрицательные кристаллы.....	84
3.6. Поляризационные призмы и поляроиды.....	85
3.7. Получение поляризованного света.....	87
3.8. Искусственная оптическая анизотропия.....	89
3.9. Вращение плоскости поляризации.....	90
Примеры решения задач.....	92
Задачи.....	94
<b>Л е к ц и я 4. Основы квантовой оптики.....</b>	<b>95</b>
4.1. Тепловое излучение.....	95
4.2. Законы Кирхгофа, Стефана – Больцмана и Вина.....	98
4.3. Формулы Рэлея – Джинса и Планка.....	100
4.4. Фотоэлектрический эффект (фотоэффект).....	103
4.4.1. Законы фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна.....	105
4.5. Энергия и импульс фотона.....	107
4.6. Давление света.....	108
4.7. Эффект Комптона.....	109
4.8. Корпускулярно-волновой дуализм свойств света.....	111
Примеры решения задач.....	112
Задачи.....	116
Теоретические вопросы по первой части.....	119
<b>Ч а с т ь 2. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ.....</b>	<b>123</b>
<b>Л е к ц и я 5. Строение атома.....</b>	<b>123</b>
5.1. Модель атома Томсона. Ядерная модель атома.....	123
5.2. Линейчатый спектр атома водорода.....	125
5.3. Постулаты Бора.....	126
5.4. Энергия атомов водорода по Бору.....	127
5.5. Спектр атома водорода по Бору.....	129
5.6. Водородоподобные ионы.....	130
Примеры решения задач.....	132
Задачи.....	135
<b>Л е к ц и я 6. Элементы квантовой механики.....</b>	<b>136</b>
6.1. Корпускулярно-волновой дуализм. Волны де Бройля.....	136
6.1.1. Некоторые свойства волн де Бройля.....	137
6.2. Соотношения неопределенностей Гейзенберга.....	140
6.3. Волновая функция.....	143

6.4. Общее уравнение Шредингера.....	145
6.5. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.....	146
6.6. Движение свободной частицы.....	147
6.7. Частица в потенциальном ящике. Квантование энергии.....	148
6.8. Прохождение частиц сквозь потенциальный барьер.....	152
6.9. Линейный гармонический осциллятор в квантовой механике.....	156
Примеры решения задач.....	158
Задачи.....	163
<b>Л е к ц и я 7. Элементы квантовой физики атомов и молекул.....</b>	<b>165</b>
7.1. Атом водорода в квантовой механике.....	165
7.2. Квантовые числа.....	166
7.3. Правило отбора. Энергетический спектр атома водорода.....	169
7.4. Спин электрона.....	170
7.5. Принцип Паули. Распределение электронов по энергетическим уровням атома.....	171
7.6. Периодическая система элементов Менделеева.....	173
7.7. Рентгеновское излучение. Закон Мозли.....	176
7.8. Молекулярные спектры.....	179
7.9. Поглощение. Спонтанное и вынужденное излучения.....	182
7.10. Лазеры.....	184
Примеры решения задач.....	188
Задачи.....	191
<b>Л е к ц и я 8. Элементы квантовой статистики.....</b>	<b>193</b>
8.1. Статистическое распределение. Фазовое пространство.....	193
8.2. Распределения Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака.....	195
8.3. Вырожденный электронный газ в металлах.....	198
8.4. Электронная теплоемкость металлов. Теплоемкость кристаллической решетки. Фононы.....	200
8.5. Электрическая проводимость металлов. Сверхпроводимость.....	206
Примеры решения задач.....	210
Задачи.....	214
<b>Л е к ц и я 9. Элементы физики твердого тела.....</b>	<b>216</b>
9.1. Энергетические зоны в кристаллах.....	216
9.2. Классификация кристаллов по зонной теории.....	218
9.3. Электропроводность полупроводников.....	220
9.3.1. Собственная проводимость полупроводников.....	220
9.3.2. Примесная проводимость полупроводников.....	225

9.3.3. Фотопроводимость полупроводников.....	229
9.4. Люминесценция твердых тел.....	230
9.5. Контакт электронного и дырочного полупроводников ( <i>p-n</i> -переход).....	232
9.6. Полупроводниковые диоды и триоды (транзисторы).....	235
Примеры решения задач.....	237
Задачи.....	239
<b>Л е к ц и я 10. Элементы ядерной физики и элементарных частиц.....</b>	<b>240</b>
10.1. Элементы физики атомного ядра.....	240
10.1.1. Состав и характеристики атомного ядра.....	240
10.1.2. Энергия связи ядра и ядерные силы. Ядерные модели.....	243
10.1.3. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада.....	249
10.1.4. Правила смещения. Альфа ( $\alpha$ )- и бета ( $\beta$ )-распады.....	252
10.1.5. Гамма ( $\gamma$ )-излучение.....	254
10.1.7. Ядерные реакции.....	256
10.1.8. Реакция деления тяжелых ядер.....	259
10.1.9. Цепная ядерная реакция.....	261
10.1.10. Реакции синтеза атомных ядер.....	263
10.2. Элементы физики элементарных частиц.....	265
10.2.1. Фундаментальные взаимодействия.....	265
10.2.2. Элементарные частицы и античастицы.....	267
Примеры решения задач.....	273
Задачи.....	277
Теоретические вопросы по второй части.....	279
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ .....</b>	<b>285</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....</b>	<b>304</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с действующей программой курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений и содержит последовательное изложение основных положений классической и современной физики. Отбор материала и его содержание ориентированы на будущих специалистов в области агропромышленного комплекса и являются обобщением методических приемов, выработанных автором за долгие годы работы. В доступной форме в книге приведены лекции, состоящие из теоретических сведений и вопросов по всем разделам третьей части курса общей физики. Предлагаемый материал может быть использован студентами для самостоятельного изучения соответствующих тем, составления конспектов лекций, на практических занятиях или лабораторных практикумах, при выполнении индивидуальных домашних заданий, а также при подготовке к зачетам и экзамену.

Учебное пособие окажется полезным для студентов технических и аграрных вузов всех направлений подготовки, преподавателей курса общей физики и широкого круга читателей, интересующихся физикой.

Книга состоит из двух частей и десяти лекций, в лекциях материал структурирован по темам, содержит 171 рисунок, 7 таблиц. В учебное пособие включено 47 задач с подробными решениями и разбором основных методов и математических приемов, 125 задач содержат краткие ответы и предложены для самостоятельного решения, с целью повторения материала представлено 130 теоретических вопросов, в приложении – 45 таблиц, библиографический список, включающий 13 источников (учебников, учебных пособий и справочников).

Приведенный в учебном пособии справочный материал опирается на современные достижения науки и охватывает геометрическую, волновую и квантовую оптику, строение атома, квантовую механику, квантовую физику атомов и молекул, квантовую статистику, физику твердого тела и элементы ядерной физики и элементарных частиц. Книга дополняет широко известные курсы физики, не дублируя их содержания. Ее удобно использовать для повторения пройденного материала непосредственно перед зачетом или экзаменом, а также для быстрого восстановления в памяти забытого теоретического или практического материала.

Автор выражает искреннюю благодарность профессорам О.Р. Никитину и Б.А. Тимеркаеву за рецензирование книги и важные замечания, а также кандидату технических наук, доценту департамента анализа данных и машинного обучения Финансового университета при Правительстве Российской Федерации К.А. Горшкову за помощь в подготовке учебного пособия.

*Автор*

# Часть 1. ОПТИКА. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

**Оптика** (от греч. *ὀπτική* – наука о зрительных восприятиях) – раздел физики, в котором изучаются оптическое излучение (свет в широком понимании), его распространение и явления, наблюдаемые при взаимодействии света с веществом. (Большая российская энциклопедия)

## Лекции 1 – 1\*. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

### 1.1. Элементы геометрической оптики

#### 1.1.1. Основные законы оптики. Полное отражение

Оптическое излучение или *свет* представляет собой электромагнитные волны. Поэтому оптика – это часть общего учения об электромагнитном поле. Под светом в настоящее время понимают не только *видимое излучение*, но и прилегающие к нему широкие области *инфракрасного* (ИК) и *ультрафиолетового* (УФ) излучения. В таком понимании оптический спектр занимает диапазон от границы ИК излучения  $\lambda = 2$  мм ( $\nu = 1,5 \cdot 10^{11}$  Гц) до коротковолновой границы УФ  $\lambda = 10^{-6}$  см ( $\nu = 3 \cdot 10^{16}$  Гц). Выделение указанной области обусловлено не только близостью соответствующих участков спектра, но и, главным образом, сходством методов и приборов, применяемых для ее исследования и разработанных исторически, в основном, при изучении видимого света (линзы, зеркала, призмы, дифракционные решетки, интерференционные приборы и т. д.).

*Собственно видимое излучение* занимает диапазон  $\lambda = 400 - 760$  нм, УФ –  $\lambda = 10 - 400$  нм, ИК –  $\lambda = 760$  нм – 2 мм. Указанные границы достаточно условны.

**Геометрическая оптика** – раздел оптики, в котором законы распространения света в прозрачных средах и получение изображений рассматриваются на



основе представления о световом луче как линии, вдоль которой распространяется световая энергия. [Геометрическая оптика отвлекается от *волнового характера* и поляризации светового излучения; понятием луча можно пользоваться, когда можно пренебречь дифракцией света на оптических неоднородностях, а это допустимо, если длина волны  $\lambda$  света намного меньше размера  $l$  неоднородностей ( $\lambda \ll l$ )].

*Основные законы геометрической оптики.*

**1. Закон прямолинейного распространения света:** *в оптически однородной среде свет распространяется прямолинейно, т. е. лучи света представляют собой прямые линии.* [Прямолинейным распространением света объясняется образование теней, то есть областей, в которые не поступает световая энергия. Тень наблюдается в том случае, когда линейными размерами источника можно пренебречь по сравнению с расстояниями, рассматриваемыми в данной задаче. Однако эксперименты показали, что этот закон нарушается, если свет проходит сквозь очень малые отверстия, причем отклонение от прямолинейности распространения тем больше, чем меньше отверстия].

**2. Закон независимости световых пучков:** *отдельные пучки не влияют друг на друга и распространяются независимо.* [Энергия в каждом пучке распространяется независимо от других пучков; освещенность поверхности, на которую падает несколько пучков, равна сумме освещенностей, создаваемых каждым пучком в отдельности. Представление о независимом распространении световых пучков возникло еще в античности].

**3. Закон отражения света** (рис. 1): *отраженный и падающий лучи лежат в одной плоскости с нормалью к отражающей поверхности в точке падения; угол отражения  $i'_1$  равен углу падения  $i$ :*

$$i'_1 = i.$$

Углы  $i$  и  $i'_1$  отсчитываются от нормали. [Евклид, обобщив достижения своих предшественников, примерно в 300 г. до нашей эры сформулировал законы прямолинейного распространения и зеркального отражения света].

**4. Закон преломления света** (рис. 1): *падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости с нормалью к преломляющей поверхности в точке падения луча; отношение синуса угла падения  $i_1$  к синусу угла преломления  $i_2$  зависит от длины волны, но не зависит от угла падения  $i_1$  [закон Снеллиуса]:*

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (1.1)$$

где  $n_{21}$  – **относительный показатель преломления** второй среды относительно первой;  $n_1$  и  $n_2$  – **абсолютные показатели преломления** первой и второй сред. [В. Снеллиус (1621 г.) и Р. Декарт (1637 г.) экспериментально установили законы, описывающие поведение световых лучей на границе раздела двух сред. Построение теоретических основ геометрической оптики было завершено установлением **принципа Ферма** (около 1660 г.) – **основного принципа геометрической оптики**, утверждающего, что свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время (точнее за экстремальное время)].

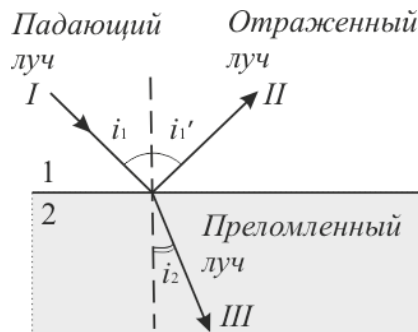


Рис. 1

**Абсолютный показатель преломления среды ( $n$ )** – величина равная отношению скорости  $c$  электромагнитных волн в вакууме к их фазовой скорости  $v$  в среде:

$$n = \frac{c}{v}. \quad (1.2)$$

С точки зрения волновой оптики абсолютный показатель преломления  $n$  указывает, во сколько раз фазовая скорость  $v$  световой волны данной частоты меньше, чем скорость этой волны в вакууме  $c$ . При сравнении выражения (1.2) с

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (1.3)$$

ВИДНО, ЧТО

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}, \quad (1.4)$$

где  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  – скорость распространения света в вакууме;  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – соответственно электрическая и магнитная постоянные;  $\varepsilon$  и  $\mu$  – соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды.

Учитывая (1.1), закон преломления можно записать в виде

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (1.5)$$

К перечисленным законам геометрической оптики следует добавить **принцип обратимости световых лучей (пучков)** [вытекает из принципа Ферма]: *оптический путь, который минимален в случае распространения света из точки 1 в точку 2, окажется минимальным и в случае распространения в обратном направлении*; или из симметрии (1.5): *если обратить луч III (см. рис. 1), заставив его падать на границу раздела под углом  $i_2$ , то преломленный луч в первой среде будет распространяться под углом  $i_1$ , т. е. пойдет в обратном направлении вдоль луча I.*

Если свет распространяется из среды с большим показателем преломления  $n_1$  (*оптически более плотной*) в среду с меньшим показателем преломления  $n_2$  (*оптически менее плотную*), т. е.  $n_2 < n_1$ , например, из стекла в воду, то, согласно (1.5),

$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{n_1}{n_2} > 1. \quad (1.5')$$

Из (1.5') следует, что преломленный луч удаляется от нормали. С увеличением угла падения  $i_1$  увеличивается угол преломления  $i_2$  до тех пор (рис. 2, а, б), пока при некотором угле падения ( $i_1 = i_{\text{пр}}$ ) угол преломления не окажется равным  $\pi/2$  (рис. 2, в). Угол  $i_{\text{пр}}$  называется **предельным углом полного внутреннего отражения**. При углах падения  $i_1 > i_{\text{пр}}$  весь падающий свет полностью отражается (рис. 2, г). Таким образом, при углах падения в пределах от  $i_{\text{пр}}$  до  $\pi/2$  луч полностью отражается в первую среду, причем интенсивности отраженного и падающего лучей одинаковы. Это явление называется **полным внутренним отражением**.

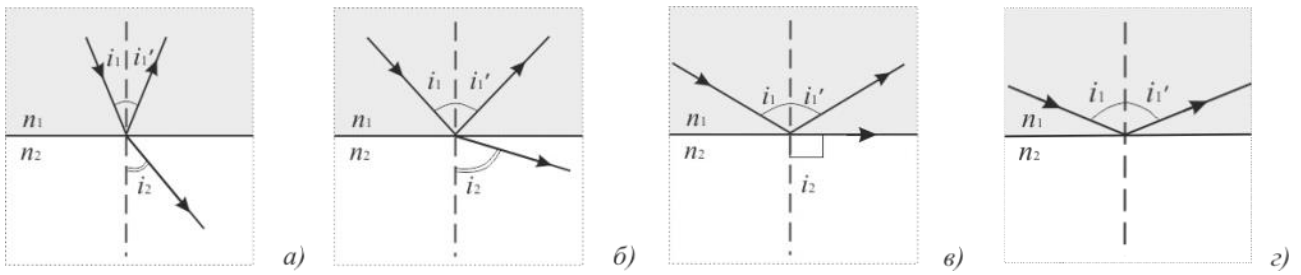


Рис. 2

Предельный угол  $i_{\text{пр}}$  можно определить из формулы (1.5), подставив в нее  $i_2 = \pi/2$ :

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (1.6)$$

[Явление полного внутреннего отражения находит применение в призмах полного отражения (рис. 3). Показатель преломления стекла равен  $n \approx 1,5$ , поэтому предельный угол для границы стекло – воздух равен  $i_{\text{пр}} = \arcsin(1/1,5) = 42^\circ$ . Поэтому при падении света на границу стекло – воздух при  $i > 42^\circ$  всегда будет иметь место полное отражение. На рис. 3, а – в показаны призмы полного отражения, позволяющие: а) повернуть луч на  $90^\circ$ ; б) повернуть изображение; в) обернуть лучи. Такие призмы применяются в оптических приборах (например, в биноклях, перископах), а также в рефрактометрах, позволяющих определять показатели преломления тел.

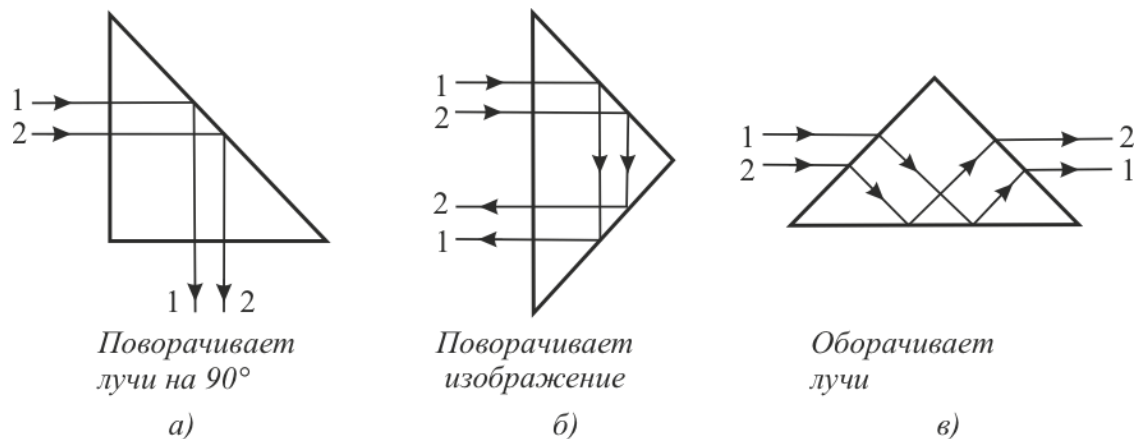


Рис. 3

Явление полного внутреннего отражения используется также в *световодах* (светопроводах), которые представляют собой тонкие нити (волокна) из оптически прозрачного материала. С помощью световодов можно искривлять путь светового пучка (рис. 4).

Световоды используются при создании телеграфно-телефонных кабелей большой емкости. Кабель состоит из сотен и тысяч оптических волокон тонких, как человеческий волос.

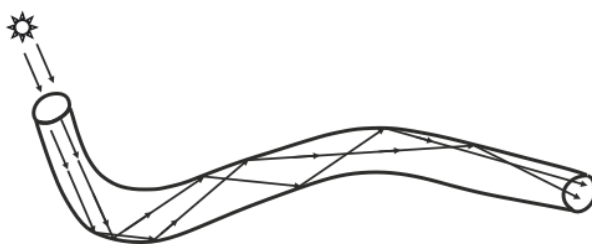


Рис. 4

По такому кабелю, толщиной в обычный карандаш, можно одновременно передавать до восьмидесяти тысяч телефонных разговоров. Кроме того, световоды используются в оптоволоконных электронно-лучевых трубках, в электронно-счетных машинах, для кодирования информации, в медицине – например при диагностике органов желудочно-кишечного тракта].

Законы геометрической оптики действуют тогда, когда оказываются несущественными явления интерференции, дифракции и поляризации. Это происходит в тех случаях, когда амплитуда волны и ее первые пространственные производные мало меняются на длине волны. Это условие нарушается на границе тени, вблизи геометрической точки схождения лучей (фокуса), при прохождении света через узкие диафрагмы, при распространении света в средах с резко меняющимся показателем преломления или с большим поглощением. Например, при прохождении света через круглую диафрагму с диаметром  $d$  (для отверстия неправильной формы под  $d$  надо понимать минимальный поперечный размер) пучок света расплывается за счет дифракции на расстоянии  $l \sim d^2/l$ ; на расстояниях, малых по сравнению с  $l$ , можно пользоваться законами геометрической оптики.

### 1.1.2. Зеркала

Одной из важных задач геометрической оптики является построение *изображений*, формируемых оптическими системами, и изучение их свойств. **Изображением** называется точка схождения лучей, прошедших оптическую систему. Система отражающих и преломляющих сферических (и плоских) поверхностей, перпендикулярных к некоторой оси, формирует изображение точечного источника лучами, падающими малыми углами к оси (*параксиальное приближение*).

**Плоское зеркало** – оптическое устройство, позволяющее создавать изображение предмета. Изображение предмета, даваемое плоским зеркалом, формируется за счет лучей, отраженных от зеркальной поверхности. Это изображение является *мнимым*, поскольку оно образуется пересечением не самих отраженных лучей, а их продолжений в «зазеркалье» (рис. 5). [Вследствие закона отражения света мнимое изображение предмета (точка  $S_1$  является мнимым изображением точки  $S$ ) располагается симметрично относительно зеркальной поверхности; размер изображения равен размеру самого предмета].

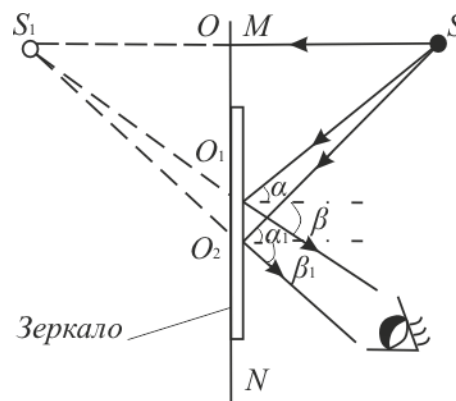


Рис. 5

**Сферическое зеркало** – зеркально отражающая поверхность, имеющую форму сферического сегмента. Центр сферы, из которой вырезан сегмент, называется *оптическим центром* ( $O$ ) зеркала. Вершина сферического сегмента называется *полюсом* ( $P$ ). Прямая, проходящая через оптический центр и полюс зеркала, называется *главной оптической осью* ( $OP$ ) сферического зеркала.

Сферические зеркала бывают *вогнутыми* и *выпуклыми*. Если на *вогнутое сферическое зеркало* падает пучок лучей, параллельный главной оптической оси, то после отражения от зеркала лучи пересекутся в точке, которая называется *главным фокусом* ( $F$ ) зеркала [для вогнутого зеркала  $F = R/2$ , где  $R$  – радиус кривизны зеркала]. Расстояние от фокуса до полюса зеркала называется *фокусным расстоянием* ( $f$ ). У вогнутого сферического зеркала главный фокус  $F$  действительный – расположен посередине между центром  $O$  и полюсом  $P$  зеркала (рис. 6).

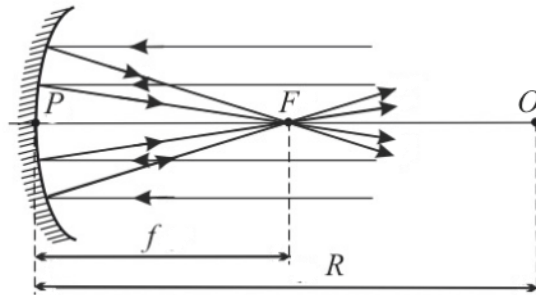


Рис. 6

Главный фокус  $F$  *выпуклого* зеркала является мнимым. Если на выпуклое зеркало падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси  $OP$ , то после отражения в фокусе пересекутся не сами лучи, а их продолжения (рис. 7).

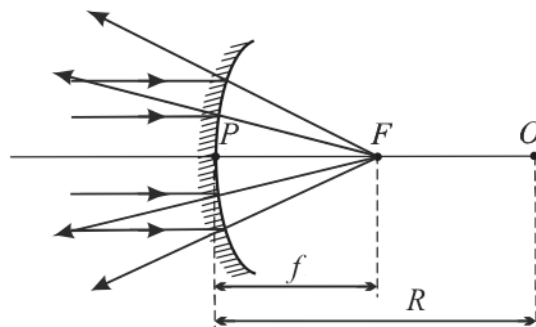


Рис. 7

На рис 7:  $F$  – мнимый фокус зеркала;  $O$  – оптический центр;  $OP$  – главная оптическая ось;  $f = -R/2$  – фокусное расстояние выпуклого зеркала.

Изображение точки  $A$  в сферическом зеркале можно построить с помощью любой пары стандартных лучей (см. рис. 8):

- луч  $AOC$ , проходящий через оптический центр  $O$  зеркала; отраженный луч  $COA$  идет по той же прямой;
- луч  $AFD$ , идущий через фокус  $F$  зеркала; отраженный луч идет параллельно главной оптической оси  $OP$ ;
- луч  $AP$ , падающий на зеркало в его полюсе  $P$ ; отраженный луч симметричен с падающим относительно главной оптической оси  $OP$ ;
- луч  $AE$ , параллельный главной оптической оси  $OP$ ; отраженный луч  $EFA'$  проходит через фокус  $F$  зеркала.

Положение изображения и его размер можно определить с помощью **формулы сферического зеркала**:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (1.7)$$

где  $a$  – расстояние от предмета до зеркала;  $b$  – расстояние от зеркала до изображения;  $f$  – фокусное расстояние. Величины  $a$  и  $b$  подчиняются определенному правилу знаков:  $a > 0$  и  $b > 0$  – для действительных предметов и изображений;  $a < 0$  и  $b < 0$  – для мнимых предметов и изображений.

Линейное увеличение *сферического зеркала*  $\Gamma$  определяется как отношение линейных размеров изображения  $h'$  и предмета  $h$  (рис. 8):

$$\Gamma = \frac{h'}{h} = \frac{b}{a} \quad (1.8)$$

[величина  $h$  всегда считается положительной;  $h' > 0$  – если изображение прямое;  $h' < 0$  – если изображение перевернутое].

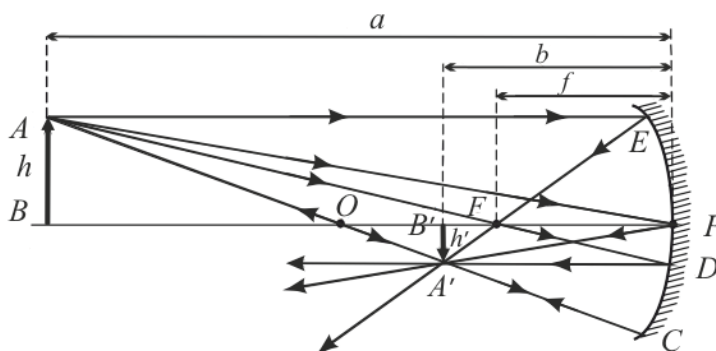


Рис. 8

### 1.1.3. Линзы и их основные характеристики

**Линза** (нем. *Linse*, от лат. *lens* – чечевица) представляет собой прозрачное тело, ограниченное двумя поверхностями, преломляющими световые лучи, способное формировать оптические изображения предметов, светящихся собственным или отраженным светом. *Материалом* для линз обычно служит оптическое и органическое стекло. [Специальные линзы, предназначенные для работы в *ультрафиолетовой (УФ) области спектра*, изготавливают из кристаллов кварца, флюорита, фтористого



лития и др., в *инфракрасной (ИК) области спектра* – из особых сортов стекла, кремния, германия, сапфира, флюорита, фтористого лития, йодистого цезия и др.].

По *внешней форме* (рис. 9) линзы делятся на: 1) двояковыпуклые; 2) плосковыпуклые; 3) двояковогнутые; 4) плосковогнутые; 5) выпукло-вогнутые; 6) вогнуто-выпуклые.

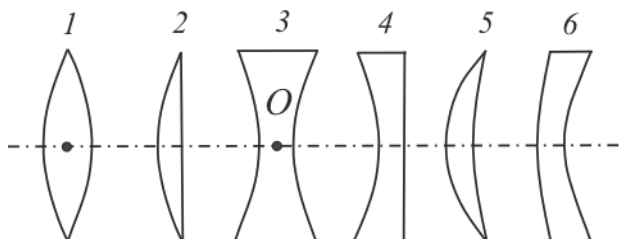


Рис. 9

По *оптическим свойствам линзы* делятся на *собирающие* и *рассеивающие*.

**Тонкая линза** – линза, толщина (расстояние между ограничивающими поверхностями) которой значительно меньше по сравнению с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$  ограничивающих поверхностей (рис. 10).

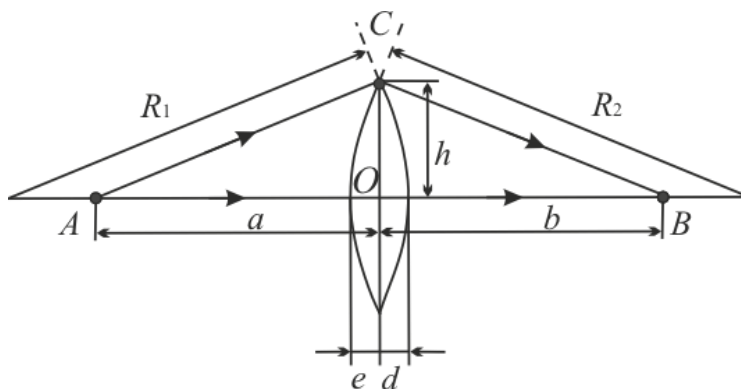


Рис. 10

Прямая, проходящая через центры кривизны  $O_1$  и  $O_2$  поверхностей, называется *главной оптической осью линзы* ( $O_1O_2$ ). **Оптический центр линзы** ( $O$ ) – это точка, лежащая на главной оптической оси и обладающая тем свойством, что лучи проходят сквозь нее не преломляясь. Прямые, проходящие через оптический центр  $O$ , называются *побочными оптическими осями*.

Если на линзу направить пучок лучей (рис. 11, а), параллельных главной оптической оси  $O_1O_2$ , то после прохождения линзы все лучи соберутся в одной точке  $F$ , называемой **главным фокусом линзы**. В отличие от собирающей линзы, рассеивающая линза имеет мнимые фокусы. В мнимом фокусе сходятся (после преломления) воображаемые продолжения лучей, падающих на рассеивающую линзу параллельно главной оптической оси (рис. 11, б).

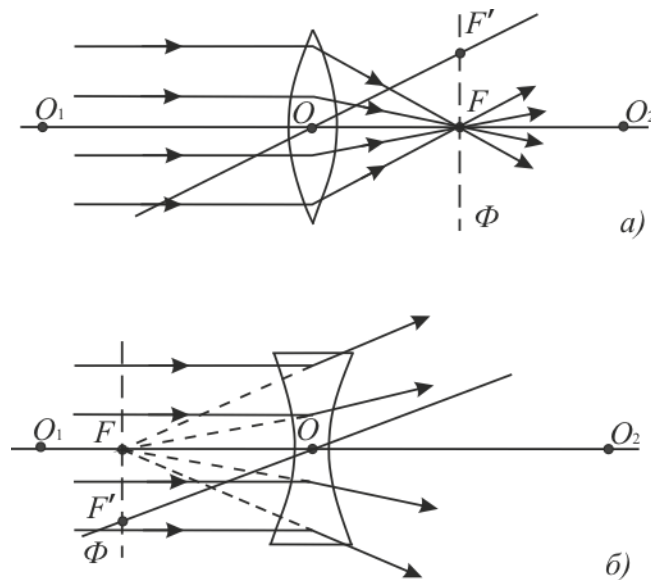


Рис. 11

У тонкой линзы имеются два главных фокуса, симметрично расположенных относительно линзы на главной оптической оси  $O_1O_2$ . У *собирающих линз фокусы действительные, у рассеивающих – мнимые*. Все фокусы линзы лежат в одной плоскости, перпендикулярной главной оптической оси  $O_1O_2$  и проходящей через главный фокус  $F$ . Эта плоскость называется **фокальной плоскостью** ( $\Phi$ ). Пучки лучей, параллельных одной из побочных оптических осей, также фокусируются после прохождения через линзу в точку  $F'$  ( $F'$  – называется **побочным фокусом**), которая расположена при пересечении побочной оси с фокальной плоскостью  $\Phi$  (рис. 11, а, б).

Расстояние между оптическим центром линзы  $O$  и главным фокусом  $F$  называется **фокусным расстоянием** ( $f$ ).

Величина  $D$ , обратная главному фокусному расстоянию  $f$ , называется **оптической силой линзы**:

$$D = \frac{1}{f} = (n_{21} - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.9)$$

где  $n_{21} = n_2/n_1$  – относительный показатель преломления ( $n_2$  и  $n_1$  – соответственно абсолютные показатели преломления линзы и окружающей среды);  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны сферических поверхностей линзы.

Единица оптической силы  $D$  – *диоптрия* [дптр]; диоптрия – оптическая сила линзы с фокусным расстоянием 1 м: 1 дптр = 1 м<sup>-1</sup>.

*Линзы с положительной оптической силой ( $D > 0$ ) являются собирающими, с отрицательной ( $D < 0$ ) – рассеивающими.*

Для *тонкой линзы* справедлива следующая формула, называемая *формулой тонкой линзы*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (1.10)$$

где  $a$  – расстояние от предмета (источника) до линзы;  $b$  – расстояние от линзы до изображения;  $f$  – фокусное расстояние линзы [для *рассеивающей линзы* расстояния  $a$  и  $b$  надо считать отрицательными, т. е.  $a < 0$  и  $b < 0$ ].

Построение изображения предмета в линзах осуществляется с помощью следующих лучей:

- 1) луча, идущего параллельно главной оптической оси; после преломления в линзе этот луч (или его продолжение) проходит через второй фокус линзы;
- 2) луча, проходящего через оптический центр линзы и не изменяющего своего направления;
- 3) луча (или его продолжения), проходящего через первый фокус линзы; после преломления в ней он выходит из линзы параллельно ее главной оптической оси.

Комбинации собирающих и рассеивающих линз применяются в оптических приборах, используемых для решения различных научных и технических задач.

Примеры построения изображений в собирающей и рассеивающей линзах приведены на рис. 12, *a*, *б* и рис. 13.

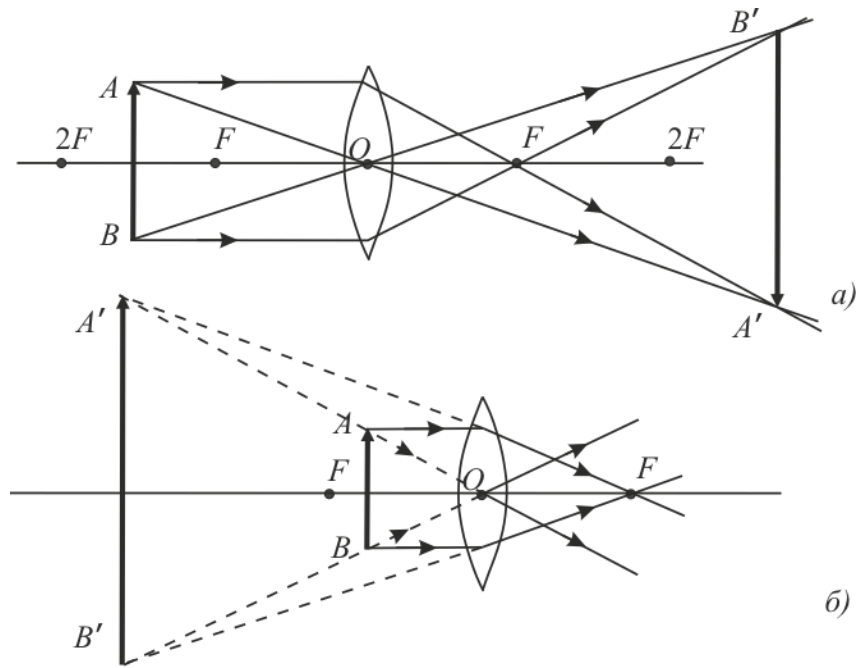


Рис. 12

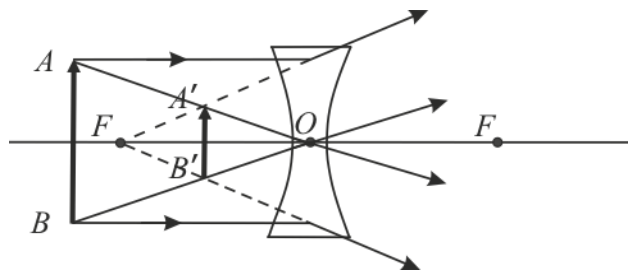


Рис. 13

**Линейным увеличением линзы  $\Gamma$**  называется отношение линейных размеров изображения  $h'$  и предмета  $h$ . Величине  $h'$ , как и в случае сферического зеркала [см. п. 1.1.2], удобно приписывать знаки плюс или минус в зависимости от того, является изображение прямым или перевернутым. Величина  $h$  всегда считается положительной ( $h > 0$ ). Поэтому для прямых изображений  $\Gamma > 0$ , для перевернутых  $\Gamma < 0$ . Из подобия треугольников (рис. 12, а, и рис. 13) легко получить формулу для линейного увеличения тонкой линзы

$$\Gamma = \frac{h'}{h} = \frac{b}{a}. \quad (1.11)$$

### 1.1.4. Аберрации оптических систем

Линзы обладают рядом недостатков, не позволяющих получать высококачественные изображения. Искажения изображений, создаваемые оптическими системами, называются *абберациями оптических систем* (от лат. *aberratio* – уклонение), – проявляются в том, что оптические изображения не вполне отчетливы, неточно соответствуют объектам или оказываются окрашенными. Существует несколько видов аберраций. Наиболее распространенными являются *хроматическая* и *геометрическая аберрации* (*сферическая, астигматизм, кома, дисторсия, кривизна поля изображения*).

**1. Хроматическая аберрация** – одна из основных аберраций оптических систем, обусловленная зависимостью показателя преломления  $n$  прозрачных сред от длины волны  $\lambda$  света, т. е. дисперсией света. Существуют два типа хроматической аберрации – *хроматизм положения* и *хроматизм увеличения*.

*Хроматизм положения* (или *продольная хроматическая аберрация*) состоит в том, что изображения удаленной точки, формируемые лучами разной длины волны, не совпадают, располагаясь на некотором отрезке вдоль оптической оси. [Иными словами, лучи синего цвета фокусируются ближе к задней главной плоскости объектива, а лучи красного цвета – дальше, чем лучи зеленого цвета, т. е. для синего цвета наблюдается фронт-фокус, а для красного – бэк-фокус. На экране, установленном перпендикулярно оптической оси, в области формирования изображения вместо светлой точки наблюдаются цветные кружки]. Объективы, в которых исправлен хроматизм положения, называются *ахроматическими*.

*Хроматизм увеличения* (*хроматическая разность увеличения*) заключается в том, что поперечные увеличения изображения объекта, формируемые лучами разной длины волны, могут оказаться различными вследствие разного фокусного расстояния для лучей разного цвета. [Поскольку изображения разного цвета отцентрированы по оптической оси объектива, хроматизм увеличения отсутствует в центре кадра, но возрастает к его краям. В этом случае изображение предмета конечного размера окружено цветной каймой. Наименьшее фокусное расстояние у фиолетовых лучей, наибольшее – у красных, поэтому изображение становится нечетким и окрашенным].

**2. Сферическая aberrация** заключается в том, что световые лучи, испущенные одной точкой объекта и прошедшие одни из них вблизи оптической оси, а другие через отдаленные от оси части системы, не собираются в одной точке (рис. 14). Вследствие этого изображение, создаваемое параллельным пучком лучей на перпендикулярном оси на экране, имеет вид не точки, а кружкá с ярким ядром и ослабевающим по яркости ореолом. Специальным подбором собирающих и рассеивающих линз сферическую aberrацию можно полностью устранить.

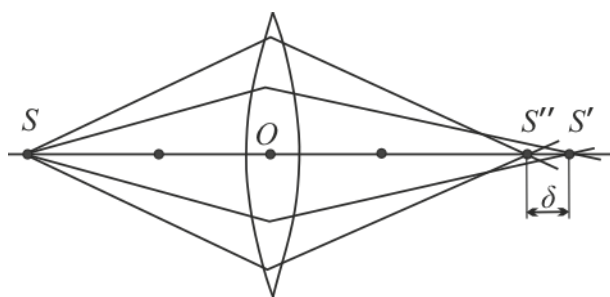


Рис. 14

**3. Астигматизм** проявляется в том, что изображение точки, не лежащей на главной оптической оси, представляет собой не точку, а две взаимно перпендикулярные линии, расположенные в разных плоскостях на некотором расстоянии друг от друга. [Астигматизм обусловлен неодинаковостью кривизны оптической поверхности в разных плоскостях сечения падающего на нее светового пучка и возникает либо вследствие асимметрии оптической системы (например, в цилиндрических линзах), либо в обычных сферических линзах при падении светового пучка под большим углом к оси. Астигматизм исправляется подбором радиусов кривизны преломляющих поверхностей и их фокусных расстояний. Астигматизмом может обладать человеческий глаз].

Системы, исправленные на сферическую и хроматическую aberrации и астигматизм, называются **анастигматами**.

**4. Коматическая aberrация** (или **кома**) возникает, когда лучи света проходят через линзу под углом к оптической оси. В результате изображение точечных источников света приобретает по краям кадра вид ассиметричных пятен каплеобразной или кометообразной формы. Размеры изображений пропорциональны квадрату угловой апертуры оптической системы и угловому удалению точки-

объекта от оптической оси. Кома велика в телескопах с параболическими зеркалами. Исправляют кому подбором линз.

**5. Дисторсия** – это aberrация, при которой объектив отказывается изображать прямые линии прямыми. Геометрически это означает нарушение подобия между объектом [прямоугольная сетка, рис. 15, а] и его изображением вследствие изменения линейного увеличения по полю зрения объектива. Выделяют два наиболее распространенных типа дисторсии: *подушкообразную* (рис. 15, б) и *бочкообразную* (рис. 15, в). Дисторсия устраняется подбором линз. [При *подушкообразной дисторсии* линейное увеличение возрастает с удалением от оптической оси. Прямые линии изгибаются внутрь, и изображение кажется вогнутым. При *бочкообразной дисторсии* линейное увеличение, напротив, уменьшается по мере удаления от оптической оси объектива, в результате чего прямые линии по краям кадра изгибаются наружу, и изображение выглядит выпуклым].

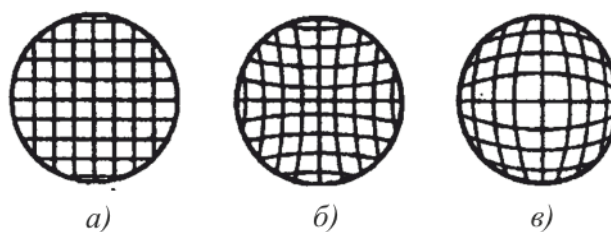


Рис. 15

Кроме того, встречается *комплексная дисторсия*, когда линейное увеличение сперва уменьшается по мере удаления от оптической оси, но ближе к углам кадра снова начинает возрастать. В таком случае прямые линии приобретают форму усов.

**6. Кривизна поля изображения** – aberrация осесимметричной оптической системы – заключается в том, что резкое изображение плоского предмета получается плоским не в плоскости, как должно быть в идеальной системе, а на искривленной поверхности. [У многих широкоугольных объективов наблюдается выраженная кривизна поля изображения, в результате которой края кадра оказываются сфокусированы как бы ближе к наблюдателю, чем центр. У телеобъективов кривизна поля изображения обычно выражена слабо, а у макрообъективов исправляется практически полностью – плоскость идеального фокуса становится действительно плоской. В сложных оптических системах кривизну поля исправляют, сочетая линзы с поверхностями разной кривизны].

Оптические системы могут обладать одновременно несколькими aberrациями, устранить их все сразу – очень сложная задача. Обычно aberrации устраняют частично в зависимости от назначения оптической системы. В некоторых случаях используют методы *адаптивной оптики* – раздел оптики, изучающий методы устранения нерегулярных искажений, возникающих при распространении света в неоднородной среде, с помощью управляемых оптических элементов. Основные задачи адаптивной оптики – это повышение предела разрешения наблюдательных приборов, концентрация оптического излучения на приемнике или мишени и т. п.

### 1.1.5. Фотометрические величины и их единицы

**Фотометрия** (от греч. *photós* – свет и *metréo* – измеряю) – раздел оптики, занимающийся измерением световых потоков и величин, связанных с такими потоками.

**Точечный источник света** – источник света, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

**Ламбертовская поверхность** – поверхность, излучающая свет одинаково во все стороны, т. е. изотропно.

**Телесный угол**  $\Omega$  равен отношению площади поверхности  $S$ , вырезанной на сфере конусом с вершиной в центре этой сферы, к квадрату радиуса  $R$  этой же сферы:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}. \quad (1.12)$$

Отношение  $S/R^2$  не зависит от радиуса  $R$ , так как с ростом радиуса вырезаемая конусом поверхность увеличивается, пропорциональна квадрату радиуса.

Единицей телесного угла  $\Omega$  – *стерадиан* [ср]; 1 ср равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь  $S = 1 \text{ м}^2$ , если радиус сферы  $R = 1 \text{ м}$ . Телесный угол, охватывающий все пространство вокруг точечного источника, равен  $4\pi$  ср.



В *сферических координатах* элементарный телесный угол  $d\Omega$  определяется по формуле:

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (1.13)$$

где  $\theta$  – угол, отчитываемый от нормали  $\vec{n}$  к поверхности сферы в направлении телесного угла  $d\Omega$ .

*Излучение* является *равномерным*, если в любые одинаковые телесные углы излучается одинаковая мощность.

В фотометрии используются следующие величины:

*а) энергетические* – характеризуют энергетические параметры оптического излучения безотносительно к его действию на приемники излучения;

*б) световые* – характеризуют физиологические действия света и оцениваются по воздействию на глаз (исходят из так называемой средней чувствительности светоадаптированного глаза) или другие приемники излучения.

### **I. Энергетические величины.**

**1. Поток излучения**  $\Phi_e$  – величина, равная отношению энергии  $W$  излучения ко времени  $t$ , за которое излучение произошло:

$$\Phi_e = \frac{W}{t}. \quad (1.14)$$

Единица потока излучения  $\Phi_e$  – *ватт* [Вт].

**2. Энергетическая светимость (излучательность)**  $R_e$  – величина, равная отношению потока излучения  $\Phi_e$ , испускаемого поверхностью, к площади  $S$  сечения, сквозь которое этот поток проходит:

$$R_e = \frac{\Phi_e}{S} \quad (1.15)$$

[ $R_e$  представляет собой поверхностную плотность потока излучения].

Единица энергетической светимости  $R_e$  – *ватт на метр в квадрате* [Вт/м<sup>2</sup>].

**3. Энергетическая сила света (или сила света)**  $I_e$  – величина, равная отношению потока излучения  $\Phi_e$  источника к телесному углу  $\Omega$ , в пределах которого это излучение распространяется:

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\Omega}. \quad (1.16)$$

Единица энергетической силы света  $I_e$  – *ватт на стерадиан* [Вт/ср].

**4. Энергетическая яркость** (или *лучистость*)  $B_e$  – величина, равная отношению энергетической силы света  $\Delta I_e$  элемента излучающей поверхности к площади  $\Delta S$  проекции этого элемента на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения:

$$B_e = \frac{\Delta I_e}{\Delta S}. \quad (1.17)$$

Единица энергетической яркости  $B_e$  – *ватт на стерадиан-метр в квадрате* [Вт/(ср · м<sup>2</sup>)].

**5. Энергетическая освещенность** (или *облученность*)  $E_e$  характеризует величину потока излучения, падающего на единицу освещаемой поверхности.

Единица энергетической освещенности  $E_e$  – *ватт на метр в квадрате* [Вт/м<sup>2</sup>], т. е. совпадает с единицей энергетической светимости  $R_e$ .

**II. Световые величины** [определение световых единиц аналогично энергетическим].

**1. Световым потоком**  $\Phi$  называется величина, равная энергии, которая переносится световыми волнами через определенную поверхность за единицу времени:

$$\Phi = \frac{dW}{dt} \quad (1.18)$$

[световой поток  $\Phi$  определяется как мощность оптического излучения по вызываемому им световому ощущению (по его действию на селективный приемник света с заданной спектральной чувствительностью)].

Единица светового потока  $\Phi$  – *люмен* [лм]; 1 лм – световой поток, испускаемый точечным источником силой света в 1 кд внутри телесного угла в 1 ср (при равномерности поля излучения внутри телесного угла): 1 лм = 1 кд · ср.

Единицей силы света  $I$  – *кандела* [кд]. [Кандела – сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср].

**2. Светимость  $R$**  определяется соотношением

$$R = \frac{\Phi}{S}. \quad (1.19)$$

Единица светимости  $R$  – люмен на метр в квадрате [лм/м<sup>2</sup>]. [Светимость может возникнуть за счет отражения поверхностью падающего на нее света. Тогда под  $\Phi$  в формуле (1.19) следует понимать поток, отраженный поверхностью площадью  $S$  по всем направлениям].

**3. Яркость.** Светимость  $R$  характеризует излучение (или отражение) света данным местом поверхности по всем направлениям. Для характеристики излучения (отражения) света в заданном направлении  $\theta$  служит **яркость светящейся поверхности** ( $B_\theta$ ) – величина, равная отношению силы света  $I$  в этом направлении к площади  $S$  проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную данному направлению:

$$B_\theta = \frac{I}{S \cos \theta}. \quad (1.20)$$

Единица яркости  $B_\theta$  – кандела на метр в квадрате [кд/м<sup>2</sup>]. [Источники, яркость которых одинакова по всем направлениям ( $B_\theta = \text{const}$ ), называются **ламбертовскими** (подчиняющимися закону Ламберта, 1760 г.) или **косинусными** (поток, посылаемый элементом поверхности такого источника, пропорционален  $\cos \theta$ . Строго следует закону Ламберта только абсолютно черное тело (см. п. 4.1)].

**4. Освещенность  $E$**  – величина, равная отношению светового потока  $\Phi$ , падающего на поверхность, к площади  $S$  этой поверхности:

$$E = \frac{\Phi}{S}. \quad (1.21)$$

Единица освещенности  $E$  – люкс [лк]; 1 лк – освещенность, создаваемая световым потоком 1 лм при равномерном распределении его по площади 1 м<sup>2</sup>:  
1 лк = 1 лм/м<sup>2</sup>.

Освещенность  $E$ , создаваемую точечным источником, можно выразить через силу света  $I$ , расстояние  $r$  от поверхности до источника и угла  $\alpha$  между нормалью к поверхности  $\vec{n}$  и направлением на источник (рис. 16).

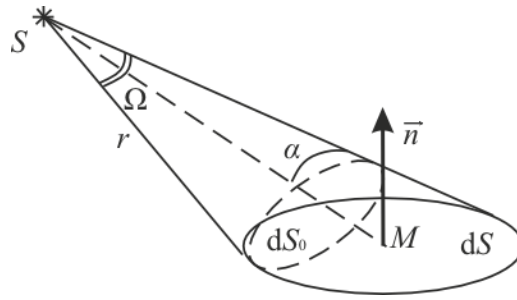


Рис. 16

На площадку  $dS$  падает поток  $d\Phi_{\text{пад}} = Id\Omega$ , заключенный в пределах телесного угла  $d\Omega = dS \cos \alpha / r^2$ , опирающегося на  $dS$ . Следовательно,

$$d\Phi_{\text{пад}} = \frac{IdS}{r^2} \cos \alpha.$$

Разделив этот поток на  $dS$ , получим

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha. \quad (1.22)$$

## 1.2. Интерференция света

### 1.2.1. Монохроматичность и когерентность света

В **волновой оптике** рассматриваются оптические явления, в которых проявляется волновая природа света, например, явления интерференции, дифракции, поляризации и дисперсии света. Так как свет представляет собой электромагнитные волны, то в основе волновой оптики лежат уравнения Максвелла и вытекающие из них соотношения для электромагнитных волн. В волновой оптике справедлив принцип суперпозиции волн.

Волновая теория основывается на **принципе Гюйгенса**: *каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн дает положение волнового фронта в следующий момент времени. Волновым фронтом* называется геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ .

[Принцип Гюйгенса позволяет анализировать распространение света и вывести **законы отражения** и **преломления**. Пусть на границу раздела двух сред падает плоская волна (фронт

волны – плоскость  $AB$ ), распространяющаяся вдоль направления  $I$  (рис. 17 и 18). Когда фронт волны достигнет отражающей поверхности в точке  $A$ , эта точка начнет излучать вторичную волну. Пока фронт проходит расстояние  $BC$  (за время  $t$ ), фронт вторичных волн из точки  $A$  проходит расстояние  $AD$ .

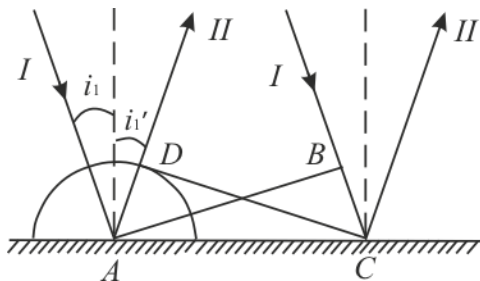


Рис. 17

При *отражении* (рис. 17): из равенства  $\triangle ABC = \triangle ADC$ , следовательно  $i'_1 = i_1$ .

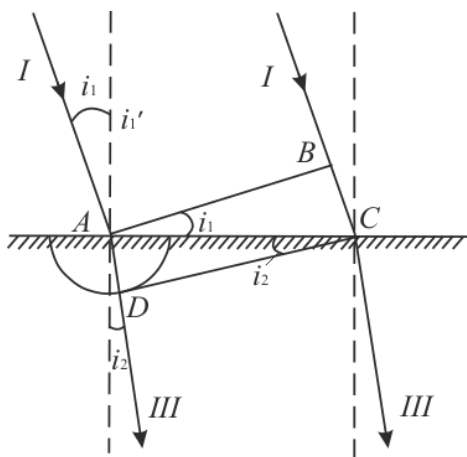


Рис. 18

При *преломлении* (рис. 18): за время  $t$  фронт волны пройдет расстояние  $BC = v_1 t$ , а фронт преломленной –  $AD = v_2 t$ . Из соотношения

$$AC = \frac{BC}{\sin i_1} = \frac{AD}{\sin i_2}$$

следует

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{n_1} : \frac{c}{n_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}].$$

Явление **интерференции света** состоит в отсутствии суммирования интенсивностей световых волн при их наложении, т. е. во взаимном усилении этих волн в одних точках пространства и ослаблении в других. Необходимым условием интерференции волн является их **когерентность**, т. е. согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых

процессов. Этому условию удовлетворяю *монохроматические волны* – неограниченные в пространстве волны одной определенной и строго постоянной частоты. [Однако из-за поперечности электромагнитных волн условие их когерентности еще недостаточно для получения интерференционной картины, необходимо, кроме того, чтобы колебания векторов  $\vec{E}$  электромагнитных полей интерферирующих волн совершались вдоль одного и того же или близких направлений].

Так как реальные источники не дают строго монохроматического света, то волны, излучаемые любыми независимыми источниками света, всегда некогерентны. В источнике свет излучается атомами, каждый из которых испускает свет лишь в течение времени  $\approx 10^{-8}$  с. Только в течение этого времени волны, испускаемые атомом, имеют постоянные амплитуду и фазу колебаний.

Немонохроматический свет можно представить в виде совокупности сменяющихся друг друга коротких гармонических импульсов, излучаемых атомами – *волновых цугов*. **Время когерентности** ( $\tau_{\text{ког}}$ ) – средняя продолжительность одного цуга. Когерентность существует только в пределах одного цуга, и время когерентности  $\tau_{\text{ког}}$  не может превышать *время излучения*  $\tau$ , т. е.  $\tau_{\text{ког}} < \tau$ .

Если волна распространяется в однородной среде, то фаза колебаний в определенной точке пространства сохраняется только в течение времени когерентности  $\tau_{\text{ког}}$ . За время когерентности волна распространяется в вакууме на расстояние

$$l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}, \quad (1.23)$$

называемое *длиной когерентности* (или *длиной цуга*). [Длина когерентности  $l_{\text{ког}}$  есть расстояние, при прохождении которого две или несколько волн утрачивают когерентность. Отсюда следует, что *наблюдение интерференции света возможно лишь при оптических разностях хода меньших длины когерентности для используемого источника света*. Чем ближе волна к монохроматической, тем меньше ширина  $\Delta\omega$  спектра ее частот, т. е. больше ее время когерентности  $\tau_{\text{ког}}$ , а следовательно, и длина когерентности  $l_{\text{ког}}$ ].

**Когерентность** волн бывает:

– *временной* – когерентность колебаний, совершающихся в одной и той же точке, но в разные моменты времени [мерой временной когерентности служит *время*

**когерентности**  $\tau_{\text{ког}}$  – максимально возможное время отставания одного луча по отношению к другому, при котором их взаимная когерентность еще сохраняется];

– **пространственной** – когерентность колебаний, совершающихся в один и тот же момент времени в разных точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны [мерой пространственной когерентности служит **радиус когерентности** (или **длина пространственной когерентности**) – максимальное поперечное направлению распространения волны расстояние, на котором возможно проявление интерференции; радиус когерентности:

$$r_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda}{\varphi}, \quad (1.24)$$

где  $\lambda$  – длина волны света;  $\varphi$  – угловой размер источника; минимальный радиус когерентности для солнечных лучей (при угловом размере Солнца на Земле  $\varphi \approx 10^{-2}$  рад и  $\lambda \approx 0,5$  мкм) составляет примерно 0,05 мм].

Источники должны быть **пространственно когерентными**, чтобы возможно было наблюдать интерференцию излучаемых ими световых волн.

### 1.2.2. Интерференция света

**Интерференция света** – сложение в пространстве двух или нескольких когерентных световых волн, при котором в разных его точках получается устойчивое во времени усиление или ослабление амплитуды результирующей волны.

Предположим, что в некоторую точку пространства приходят две монохроматические световые волны, напряженности электрического поля которых  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  совершают колебания вдоль одной прямой:

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t + \varphi_1); \quad E_2 = E_{02} \cos(\omega t + \varphi_2),$$

где  $E_{01}$  и  $E_{02}$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – амплитуды и начальные фазы колебаний.

Амплитуда результирующего колебания в рассматриваемой точке

$$E^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Поскольку волны когерентны [если разность фаз  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  возбуждаемых волнами колебаний остается постоянной во времени – **волны** называются **когерентными**], то  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  имеет постоянное во времени значение (но свое для

каждой точки пространства), поэтому интенсивность результирующей волны ( $I \sim E^2$ )

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.25)$$

Если колебания *синфазны* [фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  одинаковы или отличаются на четное число  $\pi$ ], то *интенсивность максимальна*:

$$I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2, \quad (1.26)$$

если колебания *противофазны* (фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  отличаются на нечетное число  $\pi$ ), то *интенсивность минимальна*:

$$I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2. \quad (1.27)$$

Таким образом, при наложении *когерентных световых волн* происходит перераспределение светового потока в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других – минимумы интенсивности. Это явление называется *интерференцией света*.

[Для *некогерентных волн* разность фаз ( $\varphi_2 - \varphi_1$ ) непрерывно изменяется, поэтому среднее во времени значение  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  равно нулю, а интенсивность результирующей волны всюду одинакова и при  $I_1 = I_2$  равна  $2I_1$ ].

Произведение геометрической длины  $s$  пути световой волны в данной среде на показатель  $n$  преломления этой среды называется *оптической длиной пути* ( $L$ ), а  $\Delta = L_2 - L_1$  – разность оптических длин проходимых волнами путей – *оптической разностью хода* ( $\Delta$ ).

Когерентные световые волны можно получить, разделив (с помощью отражений или преломлений) волну, излучаемую одним источником, на две части. Если заставить эти две волны пройти разные оптические пути, а потом наложить их одна на другую, наблюдается интерференция. [Разность оптических длин путей, проходимых интерферирующими волнами, не должна быть очень большой, так как складывающиеся колебания должны принадлежать одному и тому же результирующему цугу волн. Если эта разность будет порядка 1 м, наложатся колебания, соответствующие разным цугам, и разность фаз между ними будет непрерывно меняться хаотическим образом].

Пусть разделение на два когерентных волны происходит в точке  $O$  [в ней фаза колебаний равна  $\omega t$ ] (рис.19).



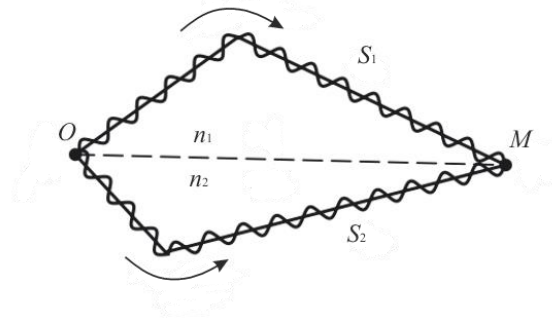


Рис.19

До точки  $M$ , в которой наблюдается интерференционная картина, одна волна проходит в среде с показателем преломления  $n_1$  путь  $S_1$ , вторая – в среде с показателем преломления  $n_2$  – путь  $S_2$ . Тогда в точке  $M$  первая волна возбуждит колебание  $E_{01} \cos \omega (t - s_1/v_1)$ , вторая –  $E_{02} \cos \omega (t - s_2/v_2)$ , где  $v_1 = c/n_1$ ,  $v_2 = c/n_2$  – соответственно фазовая скорость первой и второй волн. Следовательно, *разность фаз колебаний*, возбуждаемых волнами в точке наблюдения  $M$ ,

$$\delta = \omega \left( \frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (s_2 n_2 - s_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta \quad (1.28)$$

**Условие интерференционного максимума.** Если оптическая разность хода  $\Delta$  равна целому числу длин волн в вакууме

$$\Delta = \pm m \lambda_0 = \pm 2m \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.29)$$

то  $\delta = \pm 2m\pi$ , и колебания, возбуждаемые в точке  $M$  обеими волнами, будут происходить в *одинаковой фазе*.

**Условие интерференционного минимума.** Если оптическая разность хода  $\Delta$  равна нечетному числу полуволн в вакууме

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.30)$$

то  $\delta = \pm (2m + 1)\pi$ , и колебания, возбуждаемые в точке  $M$  обеими волнами, будут происходить в *противофазе*.

Итак, **интерференция света** – это частный случай общего явления интерференции волн, заключающийся в пространственном перераспределении энергии светового излучения при суперпозиции когерентных электромагнитных волн.

### 1.2.3. Методы наблюдения интерференции

До появления лазеров во всех приборах для наблюдения интерференции когерентные пучки получали делением и последующим сведением световых лучей, исходящих из одного и того же источника. Практически это можно осуществить с помощью экранов и щелей, зеркал и преломляющих тел.

**1. Метод Юнга** (рис.20). Свет от ярко освещенной щели  $S$  падает на две щели  $S_1$  и  $S_2$ , играющие роль когерентных источников. Интерференционная картина  $BC$  наблюдается на экране  $\mathcal{E}$ .

Т. Юнгу (1802 г.) принадлежит первое наблюдение явления интерференции.

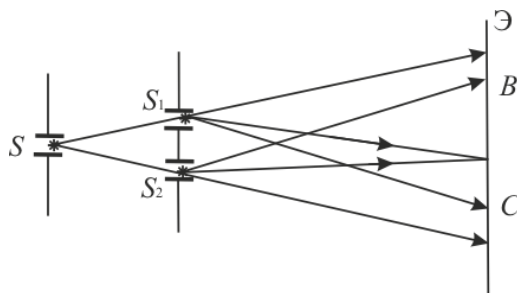


Рис. 20

**2. Зеркала Френеля** (рис. 21). Свет от источника  $S$  падает расходящимся пучком на два плоских зеркала  $A_1O$  и  $A_2O$ , расположенных под малым углом  $\varphi$ . Роль когерентных источников играют мнимые  $S_1$  и  $S_2$  изображения (угловое расстояние между ними равно  $2\varphi$ ) источника  $S$ . Интерференционная картина наблюдается на экране  $\mathcal{E}$  (область взаимного перекрытия отраженных пучков), защищенном от прямого попадания света заслонкой  $З$ .

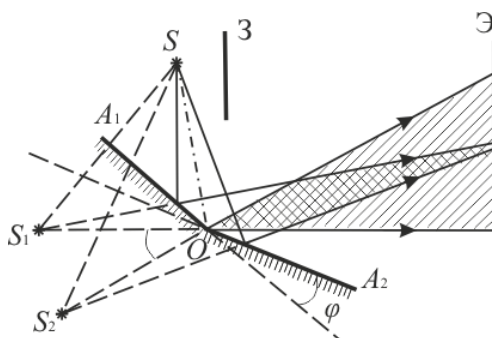


Рис. 21

**3. Бипризма Френеля (рис. 22).** Свет от источника  $S$  преломляется в обеих призмах, в результате чего за бипризмой распространяются световые лучи, как бы исходящие из мнимых когерентных источников  $S_1$  и  $S_2$ . На экране  $\mathcal{E}$  в области перекрытия преломленных пучков наблюдается интерференционная картина: в случае освещения бипризмы монохроматическим светом – в виде светлых и темных полос, в случае белого света – в виде радужно окрашенных.

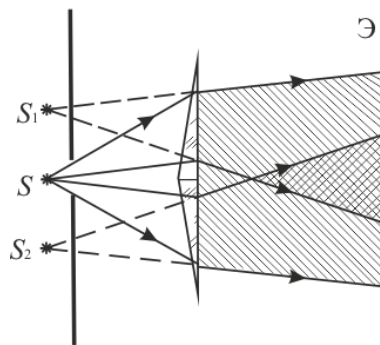


Рис. 22

**4. Зеркало Ллойда (рис.23).** Точечный источник  $S$  находится на очень близком расстоянии от поверхности плоского зеркала  $M$ , поэтому свет отражается зеркалом под углом, близком к скользющему. Когерентными источниками служат сам источник  $S$  и его мнимое изображение  $S_1$  в зеркале.

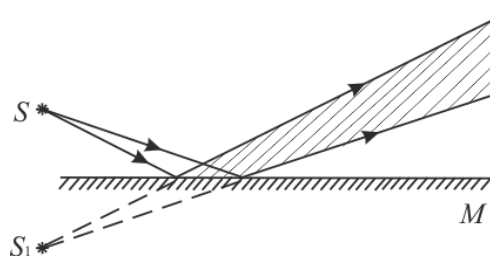


Рис. 23

#### 1.2.4. Расчет интерференционной картины от двух источников

Две узкие щели  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 24) находятся на расстоянии  $d$  друг от друга и являются когерентными источниками – реальными или мнимыми изображениями источника в какой-то оптической системе. Экран  $\mathcal{E}$  параллелен щелям и находится от них на расстоянии  $l$  ( $l \gg d$ ). Интенсивность в любой точке  $A$

экрана, лежащей на расстоянии  $x$  от точки  $O$ , определяется оптической разностью хода  $\Delta = s_2 - s_1$  (см. п. 1.2.2), где

$$s_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 ; \quad s_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 ,$$

откуда  $s_2^2 - s_1^2 = 2xd$ , или

$$\Delta = s_2 - s_1 = \frac{2xd}{s_1 + s_2}.$$

Из условия  $l \gg d$  следует, что  $s_1 + s_2 \approx 2l$ , поэтому

$$\Delta = \frac{xd}{l}. \quad (1.31)$$

Подставив (1.31) в условия (1.29) и (1.30), получим, что *максимумы интенсивности* будут наблюдаться в случае, если

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.32)$$

а *минимумы* – при

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.33)$$

Расстояние  $\Delta x$  между двумя соседними максимумами (минимумами) называется *шириной интерференционной полосы*:

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda_0. \quad (1.34)$$

[Величина  $\Delta x$  не зависит от порядка интерференции (от  $m$ ) и является постоянной для данных  $l$ ,  $d$  и  $\lambda_0$ . Согласно формуле (1.34),  $\Delta x$  обратно пропорционально  $d$ , следовательно, при большом расстоянии между источниками, например при  $d \approx l$ , отдельные полосы становятся неразличимыми. Для видимого света  $\lambda_0 \approx 10^{-7}$  м, поэтому четкая, доступная для визуального наблюдения интерференционная картина имеет место при  $l \gg d$ ].

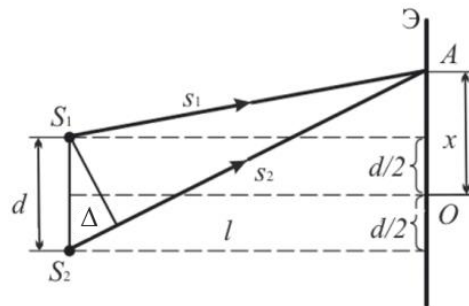


Рис. 24

Согласно выражениям (1.32) и (1.33), интерференционная картина, создаваемая на экране двумя когерентными источниками света, представляет собой чередование на экране светлых и темных полос, параллельных друг другу. Главный максимум, соответствующий  $m = 0$ , проходит через точку  $O$ . Вверх и вниз от него на равных расстояниях друг от друга располагаются максимумы (минимумы) первого ( $m = 1$ ), второго ( $m = 2$ ) порядков и т. д.

### 1.2.5. Интерференция света при отражении в тонких пленках

При падении световой волны на *тонкую пленку (пластинку)* происходит отражение от обеих поверхностей пленки. В результате возникают две световые волны, которые при известных условиях могут интерферировать.

Пусть на плоскопараллельную прозрачную пленку с показателем преломления  $n$  и толщиной  $d$  (рис. 25) под углом  $i_1$  падает параллельный пучок света (луч  $I$ ). В точке  $A$  луч разделится на два: частично отражающийся от верхней поверхности пленки (луч  $I'$ ), частично преломляющийся (луч  $AC$ ). Преломленный луч, дойдя до точки  $C$ , частично преломляется в воздух ( $n_0$ ), частично отражается и преломляясь в точке  $B$ , выходит из пленки (луч  $I''$ ). Лучи  $I'$  и  $I''$  когерентны (поскольку получены от одного луча  $I$ ) и параллельны. С помощью собирающей линзы  $L$  их можно свести в точке  $P$  фокальной плоскости линзы.

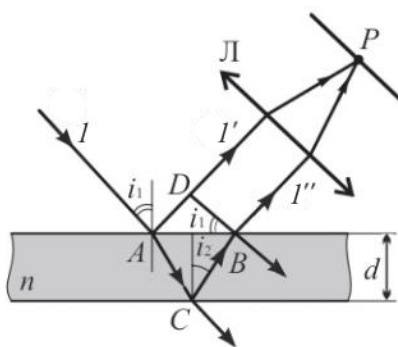


Рис. 25

Оптическая разность хода  $\Delta$ , возникающая между интерферирующими лучами от точки  $A$  до плоскости  $DB$ ,

$$\Delta = n(AC + CB) - \left(AD \pm \frac{\lambda}{2}\right)$$

[ $BD$  – перпендикуляр, восстановленный из точки  $B$  к лучу  $I'$ ; оптические пути лучей  $I'$  и  $I''$  от нормали  $BD$  до точки  $P$  одинаковы; луч  $I'$  проходит в воздухе оптический путь  $AD$ , а луч  $I''$  в пленке (показатель преломления  $n$ ) – оптический путь  $(AC + CB)n$ ; член  $\pm\lambda/2$  обусловлен потерей полуволны при отражении света от границы раздела; ].

Из рис. 25 следует, что

$$AC = CB = \frac{d}{\cos i_2}; \quad AD = AB \sin i_1 = 2d \operatorname{tg} i_2 \sin i_1.$$

Согласно закону преломления (1.1),  $\sin i_1 = n \sin i_2$ , получим

$$\Delta = 2dn \cos i_2 = 2dn \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}. \quad (1.35)$$

[Световые волны, отражаясь от более плотной среды (от среды с большим показателем преломления), изменяют фазу на  $\pi$ . Сдвиг по фазе на  $\pi$  при отражении эквивалентен дополнительному пути света в первой среде (в воздухе), равному  $\lambda_0/2$ ].

Оптическая разность хода  $\Delta$  интерферирующих лучей с учетом потери полуволны и формулы (1.35) такова:

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} \pm \frac{\lambda_0}{2}. \quad (1.36)$$

Для случая, изображенного на рис. 25 ( $n > n_0$ ),

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

В точке  $P$  будет *интерференционный максимум*, если [см. (1.29)]

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \frac{\lambda_0}{2} = m \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.37)$$

и *интерференционный минимум*, если [см. (1.30)]

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.38)$$

[Интерференция наблюдается только в том случае, если удвоенная толщина пластинки меньше длины когерентности падающей волны. При освещении пленки *белым светом* интерференционная картина в отраженном свете кажется окрашенной, поскольку каждая составляющая со своей длиной волны (от 390 до 750 нм) дает усиления в разных точках экрана].

**1. Полосы равного наклона** – интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами. Из (1.37) и (1.38) следует, что интерференционная картина в плоскопараллельных пластинках (*пленках*) определяется величинами  $\lambda_0$ ,  $d$ ,  $n$  и  $i_1$  [или  $i$  – угол падения пучка света]. Для данных  $\lambda_0$ ,  $d$  и  $n$  каждому наклону  $i$  лучей соответствует своя интерференционная полоса. Толщина пленки  $d$  постоянна, освещение ведется рассеянным светом от удаленного источника (рис. 26).

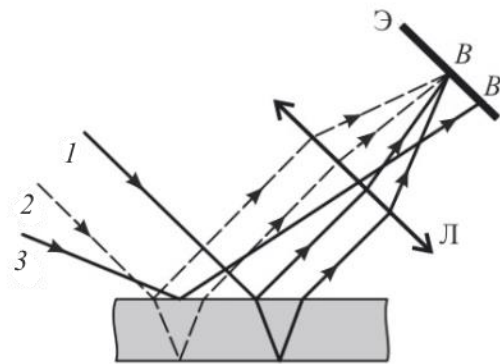


Рис. 26

[Все лучи, падающие на плоскопараллельную пластинку под одинаковым углом (например, лучи 1 и 2), соберутся на экране Э (расположен в фокальной плоскости линзы Л) в одной точке В. Лучи, падающие под другими углами (например, луч 3), соберутся в другой точке экрана В']. Меняя угол наблюдения, мы будем получать то условие максимума, то минимума [каждому углу падения соответствует своя полоса, локализованная в бесконечности]. Таким образом, интерференционная картина (*интерференционная полоса равного наклона*) локализована на бесконечности (или фокальной плоскости линзы Л). Для очень тонких пленок свет может быть не монохроматичным, наблюдение под данным углом выделяет ту длину волны, для которой выполнено условие максимума.

**2. Полосы равной толщины** – интерференционные полосы, возникающие в результате интерференции от мест одинаковой толщины. Если лучи падают под почти постоянным углом, например, нормально, а толщина пленки меняется, то линии постоянной толщины есть линии постоянной разности хода. При освещении *монохроматическим светом* эти линии будут видны в виде темных или

светлых полос. При наблюдении *в белом свете* (при условии малой толщины пленки) линии будут цветными. Интерференция происходит вблизи поверхности пленки (интерференционная картина локализована на поверхности).

[Пусть на прозрачную пластинку *переменной толщины* – **клин** с малым углом  $\alpha$  между боковыми гранями – падает плоская волна в направлении параллельных лучей 1 и 2 (рис. 27).

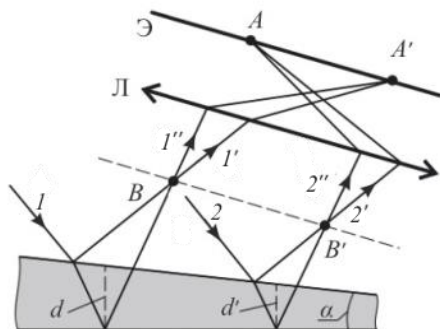


Рис. 27

Интенсивность интерференционной картины, формируемой лучами, отраженными от верхней и нижней поверхностей клина, зависит от толщины клина в данной точке ( $d$  и  $d'$  для лучей 1 и 2 соответственно). Когерентные пары лучей ( $1'$  и  $1''$ ;  $2'$  и  $2''$ ) пересекаются вблизи поверхности клина (точки  $B$  и  $B'$ ) и собираются линзой  $L$  на экране  $\mathcal{E}$  (в точках  $A$  и  $A'$ ). Таким образом, на экране  $\mathcal{E}$  возникает система интерференционных полос – *полос равной толщины* – каждая из которых возникает при отражении от мест пластинки, имеющих одинаковую толщину. Полосы равной толщины локализованы вблизи поверхности клина (в плоскости, отмеченной пунктиром  $B - B'$ ). Если свет падает на пластинку нормально, то полосы равной толщины локализуются на верхней поверхности клина].

**3. Кольца Ньютона.** Если плосковыпуклую линзу с большим радиусом  $R$  кривизны положить на поверхность стеклянной плоскопараллельной пластинки (рис. 28) и освещать *монохроматическим светом*, падающим нормально, то на воздушном зазоре ( $d$  – ширина зазора) будут наблюдаться полосы равной толщины, имеющие форму окружностей – концентрических колец. В *отраженном свете* в центре наблюдается темное пятно [см. (1.40)], окруженное чередующимися концентрическими светлыми и темными кольцами убывающей толщины (рис. 28).

С учетом  $d^2 \rightarrow 0$ ,



$$R^2 = (R - d)^2 + r^2 = R^2 - 2Rd + d^2 + r^2,$$

откуда

$$d = \frac{r^2}{2R}$$

[ $r$  – радиус кривизны окружности, всем точкам которой соответствует одинаковый зазор  $d$ ].

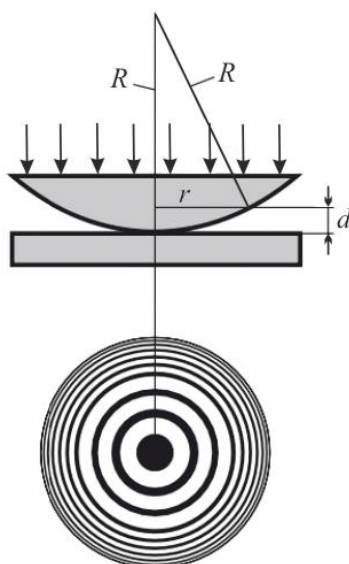


Рис. 28

В отраженном свете оптическая разность хода  $\Delta$  (с учетом полуволны при отражении света от менее плотной оптической среды) [см. (1.36)], равна

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} \quad (1.39)$$

[учли, что показатель преломления воздуха  $n = 1$ , и свет падает на систему нормально, т. е.  $i_1 = i = 0$ ].

Приравняв (1.39) к условиям максимума (1.29) и минимума (1.30), получим выражения для радиусов  $m$ -го светового кольца и  $m$ -го темного кольца соответственно:

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda_0 R} \quad (m = 1, 2, 3, \dots); \quad (1.40)$$

$$r_m^* = \sqrt{m \lambda_0 R} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.41)$$

В случае освещения *белым светом* в месте соприкосновения линзы и пластинки в *отраженном свете* наблюдается темное пятно, вокруг которого располагаются радужные кольца. Измерив диаметры соответствующих колец, можно определить длину волны  $\lambda_0$  света или радиус  $R$  кривизны линзы.

Интерференцию можно наблюдать и в *проходящем свете*, причем в *проходящем свете максимумы интерференции соответствуют минимумам интерференции в отраженном свете* [см. (1.41)] и *наоборот*.

### 1.2.6. Примеры применения интерференции света

1. Явление интерференции обусловлено волновой природой света, а его количественные закономерности зависят от длины волны  $\lambda_0$ . Явление интерференции подтверждает волновую природу света и лежит в основе измерения длины волны света (*интерференционная спектроскопия*).

2. Интерференция при отражении от тонких пленок лежит в основе *просветления оптики*. Прохождение света через каждую преломляющую поверхность линзы сопровождается отражением примерно 4 % падающего света. В сложных объективах такие отражения совершаются многократно, и суммарная потеря светового потока достигает заметной величины. Кроме того, отражения от поверхностей линз приводят к возникновению бликов. В просветленной оптике для устранения отражения света на каждую свободную поверхность линзы наносится тонкая пленка вещества с показателем преломления иным, чем у линзы. При отражении света от границ раздела воздух-пленка и пленка-стекло возникает интерференция когерентных пучков. Толщину пленки, показатели преломления пленки и стекла подбирают таким образом, чтобы пучки гасили друг друга. Особенно хороший результат достигается в том случае, если показатель преломления пленки равен корню квадратному из показателей преломления линзы ( $n = \sqrt{n_c}$ ). При этом условии интенсивность обеих отраженных от поверхностей пленки волн одинакова. [При отражении света от границ раздела *воздух – пленка* и *пленка – стекло* возникает интерференция когерентных лучей  $1'$  и  $2'$  (рис. 29).

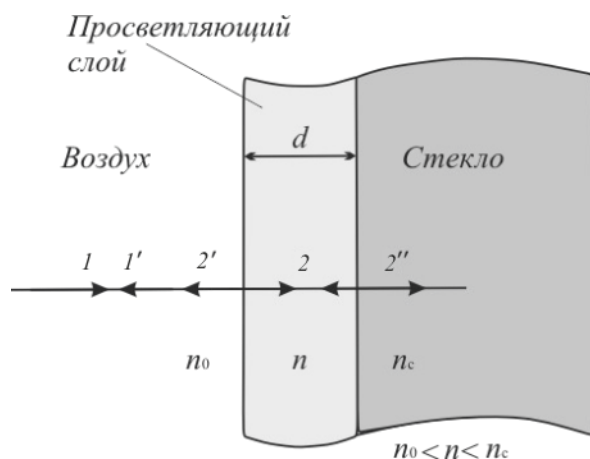


Рис. 29

Толщину пленки  $d$  и показатели преломления стекла  $n_c$  и пленки  $n$  можно подобрать так, чтобы волны, отраженные от обеих поверхностей пленки, гасили друг друга. Для этого их амплитуды должны быть равны, а оптическая разность хода равна  $(2m + 1)\lambda_0/2$  (см. (1.30)). Расчет показывает, что амплитуды отраженных лучей равны, если

$$n = \sqrt{n_c}. \quad (1.42)$$

Так как  $n_c$ ,  $n$  и показатель преломления воздуха  $n_0$  удовлетворяют условиям  $n_c > n > n_0$ , то потеря полуволны происходит на обеих поверхностях; следовательно, условие минимума для отраженных лучей (свет падает нормально, т. е.  $i = 0$ ) будет

$$2nd = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}.$$

При  $m = 0$  оптическая толщина пленки  $nd$  удовлетворяет условию  $nd = \lambda_0/4$ , и происходит гашение отраженных лучей. Для каждой длины волны  $\lambda_0$  должна быть своя толщина пленки  $d$ . Поскольку этого добиться невозможно, обычно оптику просветляют для длины волны  $\lambda_0 = 550$  нм, к которой наиболее чувствителен глаз человека].

3. При плавном изменении разности хода интерферирующих пучков на  $\lambda_0/2$  интерференционная картина сместится настолько, что на месте максимумов окажутся минимумы. Поэтому явление интерференции используют **в интерферометрах** – оптических приборах, с помощью которых можно пространственно разделить пучок света на два или большее число когерентных пучков и создать между ними определенную разность хода. После сведения этих пучков вместе наблюдается их интерференция.

[**В интерферометре Майкельсона** (рис. 30), монохроматический свет от источника  $S$  падает под углом  $\alpha = 45^\circ$  на плоскопараллельную пластинку  $P_1$ . Сторона пластинки, удаленная

от  $S$ , посеребренная и полупрозрачная, разделяет луч на две части: луч  $I$  (отражается от посеребренного слоя) и луч  $2$  (проходит через него). Луч  $I$  отражается от зеркала  $Z_1$  и, возвращаясь обратно, вновь проходит через пластинку  $P_1$  (луч  $I'$ ). Луч  $2$  идет к зеркалу  $Z_2$ , отражается от него, возвращается обратно и отражается от пластинки  $P_1$  (луч  $2'$ ). Так как первый из лучей проходит сквозь пластинку  $P_1$  дважды, то для компенсации возникающей разности хода на пути второго луча ставится пластинка  $P_2$  (точно такая же, как и  $P_1$ , только не покрытая слоем серебра). Лучи  $I'$  и  $2'$  когерентны; следовательно, будет наблюдаться интерференция, результат которой зависит от оптической разности хода луча  $I$  от точки  $O$  до зеркала  $Z_1$  и луча  $2$  от точки  $O$  до зеркала  $Z_2$ . При перемещении одного из зеркал на расстояние  $\lambda_0/4$  разность хода обоих лучей увеличится на  $\lambda_0/2$  и произойдет смена освещенности зрительного поля. Следовательно, по незначительному смещению интерференционной картины можно судить о малом перемещении одного из зеркал и использовать интерферометр Майкельсона для точного (порядка  $10^{-7}$  м) измерения длин тел, световой волны, а также длины тела при изменении температуры, сравнимых с  $\lambda_0$ , для сравнения и проверки точности изготовления технических эталонов длины, для точных измерений коэффициентов линейного расширения и проверки качества линз, для исследования ударных волн в газах и т. д.].

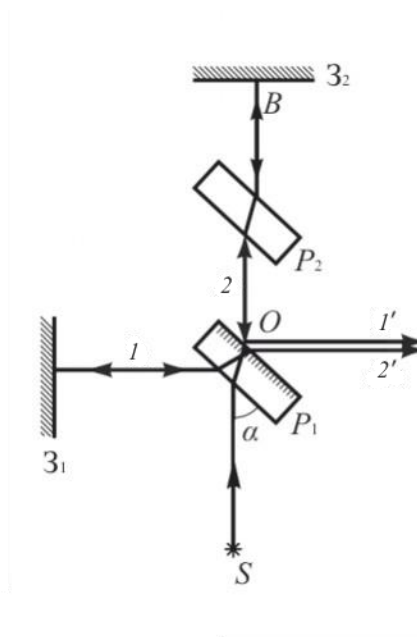


Рис. 30

Применяя интерферометр, Майкельсон (1892 г.) впервые провел сравнение международного эталона метра с длиной стандартной световой волны.

## Примеры решения задач

**1.1.** Луч света выходит из кварца ( $n_1 = 1,54$ ) в глицерин ( $n_2 = 1,47$ ). Найдите предельный угол  $i_{\text{пр}}$  падения света на границе раздела этих сред.

**Дано:**  $n_1 = 1,54$ ;  $n_2 = 1,47$ .

**Найти:**  $i_{\text{пр}}$ .

**Решение.** Если свет распространяется из среды с большим показателем преломления  $n_1$  (оптически более плотной) в среду с меньшим показателем преломления  $n_2$  (оптически менее плотную) [в нашем случае из кварца в глицерин, т. е.  $n_1 > n_2$ ], может наблюдаться явление полного отражения.

Согласно закону преломления,

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (1)$$

где  $i_1$  – угол падения;  $i_2$  – угол преломления.

С увеличением угла падения увеличивается угол преломления до тех пор, пока при некотором угле падения ( $i_1 = i_{\text{пр}}$ ) угол преломления не окажется равным  $\pi/2$ . Угол  $i_{\text{пр}}$  называется предельным углом.

Таким образом, для нахождения предельного угла положим  $i_1 = i_{\text{пр}}$ ,  $i_2 = \pi/2$ , тогда формула (1) запишется в виде:

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2)$$

откуда искомый предельный угол

$$i_{\text{пр}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) числовые значения, получим:

$$i_{\text{пр}} = \arcsin \left( \frac{1,47}{1,54} \right) = \arcsin 0,95(45); \quad i_{\text{пр}} = 72,66^\circ.$$

**Ответ:**  $i_{\text{пр}} = 72,66^\circ$ .

**1.2.** От двояковыпуклой тонкой линзы с оптической силой 10 дптр, перпендикулярно к главной оптической оси, на расстоянии 15 см, находится предмет высотой 7 см. Найдите расстояние  $b$  изображения от линзы и высоту  $H$  этого изображения.

**Дано:**  $a = 0,15$  м;  $h = 0,07$  м;  $D = 10$  дптр.

**Найти:**  $b$ ;  $H$ .

**Решение.** Согласно формуле тонкой линзы,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = D, \quad (1)$$

где  $a$  – расстояние от линзы до предмета;  $b$  – расстояние от линзы до изображения предмета;  $f$  – фокусное расстояние линзы;  $D$  – оптическая сила тонкой линзы.

Откуда расстояние изображения от линзы

$$b = \frac{af}{a-f} = \frac{a}{aD-1}. \quad (2)$$

Искомая высота изображения (из подобия треугольников «предмета» и «изображения»):

$$H = \frac{bh}{a}. \quad (3)$$

**Ответ:**  $b = 0,3$  м;  $H = 0,14$  м.

**1.3.** Найдите светимость и полный световой поток, излучаемый светильником в виде равномерно светящегося шара диаметром 40 см. Сила света светильника при этом равна 300 кд.

**Дано:**  $d = 0,4$  м;  $I = 300$  кд.

**Найти:**  $R$ ;  $\Phi$ .

**Решение.** Светимость источника света  $R$  определяется соотношением:

$$R = \frac{\Phi}{S}, \quad (1)$$

где  $\Phi$  – световой поток, излучаемый светильником;  $S$  – площадь поверхности светильника (площадь сферы:  $S = 4\pi r^2 = \pi d^2$ ).

Полный световой поток  $\Phi$ , испускаемый изотропным [сила света источника не зависит от направления] точечным источником,

$$\Phi = 4\pi I. \quad (2)$$

Тогда

$$R = \frac{4\pi I}{\pi d^2} = \frac{4I}{d^2}. \quad (3)$$

**Ответ:**  $R = 7500$  лм/м<sup>2</sup>;  $\Phi = 3768$  лм.

**1.4.** На мыльную пленку ( $n = 1,33$ ) под углом  $60^\circ$  падает белый свет. Найдите, минимальную толщину пленки, при которой отраженные лучи будут иметь синюю окраску ( $\lambda = 460$  нм).

**Дано:**  $n = 1,33$ ;  $i = 60^\circ$ ;  $\lambda = 460$  нм =  $4,6 \cdot 10^{-7}$  м.

**Найти:**  $d_{\min}$ .

**Решение.** При интерференции на тонкой пленке толщиной  $d$ , обладающей показателем преломления  $n$ , в отраженном свете оптическая разность хода между интерферирующими лучами определяется выражением:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – длина волны.

По условию задачи, пленка кажется окрашенной в синий цвет, поэтому используя условие интерференционного максимума  $\Delta = m\lambda$  (где  $m$  – порядок интерференционного максимума), можем записать

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = m\lambda. \quad (2)$$

Для минимальной толщины пленки  $m = 1$ . Тогда из выражения (2) искомая минимальная толщина пленки

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}. \quad (3)$$

[Интерференция наблюдается только в том случае, если удвоенная толщина пластинки (пленки) меньше когерентности падающей волны].

**Ответ:**  $d_{\min} = 113,93$  нм.

**1.5.** Освещая плосковыпуклую линзу (такая линза используется для получения колец Ньютона) монохроматическим светом с длиной волны 620 нм, установили, что расстояние между 3 и 4 светлыми кольцами в отраженном свете равно 0,42 мм. Найдите радиус кривизны линзы.

**Дано:**  $\lambda = 620$  нм =  $6,2 \cdot 10^{-7}$  м;  $m_1 = 3$ ;  $m_2 = 4$ ;  $\Delta r = 0,42$  мм =  $4,2 \cdot 10^{-4}$  м.

**Найти:**  $R$ .

**Решение.** Радиус светлого кольца Ньютона в отраженном свете определяется по формуле:

$$r_m = \sqrt{(2m - 1) \frac{\lambda R}{2}}, \quad (1)$$

где  $m$  – номер кольца.

По условию задачи расстояние  $\Delta r$  между кольцами есть разность радиусов  $r_4$  и  $r_3$  колец

$$\Delta r = r_4 - r_3. \quad (2)$$

Учитывая (2), получим:

$$\Delta r = r_4 - r_3 = \sqrt{\frac{7\lambda R}{2}} - \sqrt{\frac{5\lambda R}{2}} = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}} (\sqrt{7} - \sqrt{5}), \quad (3)$$

откуда

$$R = \frac{2 \cdot (\Delta r)^2}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 \lambda}. \quad (4)$$

**Ответ:**  $R = 3,39$  м.

**1.6.** Найдите длину волны  $\lambda$  света, падающего нормально на плосковыпуклую линзу, радиус кривизны которой равен 8 м, если радиус четвертого ( $m = 4$ ) светлого кольца Ньютона в отраженном свете 3,72 мм.

**Дано:**  $R = 8$  м;  $m = 4$ ;  $r_4 = 3,72$  мм =  $3,72 \cdot 10^{-3}$  м.

**Найти:**  $\lambda$ .

**Решение.** Радиус светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем свете) определяются по формуле:

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda R}, \quad (1)$$

откуда искомая длина волны

$$\lambda = \frac{2r_m^2}{(2m - 1)R}. \quad (2)$$

**Ответ:**  $\lambda = 494,23$  нм.

### Задачи

1. Найдите величину смещения  $x$  луча, прошедшего через плоскопараллельную стеклянную пластину ( $n = 1,5$ ) толщиной 8 см, если угол падения луча равен  $45^\circ$ . Ответ: 2,63 см

2\*. Найдите пределы, в которых может меняться угол отклонения  $\varphi$  луча при прохождении стеклянной призмы ( $n = 1,5$ ) с преломляющим углом  $\vartheta = 60^\circ$ . Ответ: от  $37^\circ$  до  $58^\circ$

3. Луч света выходит из рубина ( $n_1 = 1,76$ ) в спирт ( $n_2 = 1,36$ ). Найдите предельный угол  $i_{\text{пр}}$  падения света на границе раздела этих сред. Ответ:  $50,6^\circ$

4. Найдите, на какой угол  $\delta$  повернется луч, отраженный от плоского зеркала, если повернуть зеркало на угол  $30^\circ$ . Ответ:  $60^\circ$

5. Найдите, на каком расстоянии от полюса *вогнутого зеркала*, с радиусом кривизны 60 см, следует поместить предмет, чтобы его действительное изображение было в 1,5 раза больше предмета. Ответ: 75 см

6\*. Найдите для *выпуклого* сферического зеркала, с радиусом кривизны 30 см, расстояние от полюса зеркала до изображения и высоту этого изображения, если предмет высотой 8 см поставлен на расстоянии 8 см от полюса зеркала. Ответ: 6 см; 4,8 см



7. От двояковыпуклой тонкой линзы с оптической силой 20 дптр, перпендикулярно к главной оптической оси, на расстоянии 12 см, находится предмет высотой 6 см. Найдите расстояние изображения от линзы и высоту этого изображения.

Ответ: 8,57 см; 6,43 см

8. От рассеивающей линзы с фокусным расстоянием 45 см, перпендикулярно к главной оптической оси, на расстоянии 20 см, находится предмет высотой 10 см. Найдите расстояние изображения от линзы и высоту этого изображения.

Ответ: 13,85 см; 6,93 см

9. Найдите силу света точечного изотропного источника света, испускающего по всем направлениям световой поток, равный 3768 лм.

Ответ: 300 кд

10\*. Считая светильник точечным источником света, который помещен в центре квадратной комнаты площадью  $S = 36 \text{ м}^2$ , найдите высоту  $h$  этого светильника от пола комнаты, чтобы освещенность в углах комнаты была максимальной.

Ответ: 3 м

11\*. Точечный изотропный источник света с силой света 300 кд висит над центром комнаты круглой формы, радиуса 3 м. Высота источника света, над полом комнаты, 2,8 м. Найдите значение полного светового потока, испускаемого источником, и значение освещенности в центре и на краю пола.

Ответ: 3768 лм; 38,27 лк; 12,16 лк

12. На мыльную пленку ( $n = 1,33$ ) под углом  $45^\circ$  падает белый свет. Найдите, минимальную толщину пленки, при которой отраженные лучи будут иметь зеленую окраску ( $\lambda = 530 \text{ нм}$ ).

Ответ: 0,12 мкм

13. Освещая плосковыпуклую линзу (такая линза используется для получения колец Ньютона) монохроматическим светом с длиной волны 704 нм, установили, что расстояние между 4 и 5 светлыми кольцами в отраженном свете равно 0,47 мм. Найдите радиус кривизны линзы.

Ответ: 5 м

14. Монохроматический свет длиной волны 0,64 мкм падает на пленку из глицерина ( $n = 1,47$ ) толщиной 0,12 мкм, находящуюся в воздухе. Найдите наименьший угол падения, при котором пленка в проходящем свете кажется темной.

Ответ:  $38,24^\circ$

15. В опыте Юнга расстояние между двумя когерентными источниками (источники испускают свет длины волны  $6720 \text{ \AA}$ ) равно 0,7 мм. Найдите расстояние от щелей до экрана, если расстояние между соседними темными полосами на экране равно 1,2 мм.

Ответ: 1,25 м

16\*. Расстояние от бипризмы Френеля (показатель преломления и преломляющий угол призмы соответственно равны 1,58 и  $12'$ ) до узкой щели равно 0,3 м. Найдите число полос, наблюдаемых на экране, если расстояние от нее до щели 5,3 м. Длина волны монохроматического света в вакууме равна  $5500 \text{ \AA}$ .

Ответ: 8

## Лекция 2. ДИФРАКЦИЯ И ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

### 2.1. Дифракция света

#### 2.1.1. Принцип Гюйгенса и Гюйгенса – Френеля

**Дифракция** (от лат. *diffractus* – разломанный) – явление огибания волнами препятствий, в более широком смысле – любое отклонение распространения волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики. Дифракция является общим свойством для волн любой природы. [Поскольку свет имеет волновую природу, то и для него (при определенных условиях) характерно явление дифракции. Для наблюдения дифракции световых волн необходимо создание специальных условий. Это обусловлено малостью длин световых волн. В пределе при  $\lambda \rightarrow 0$  законы волновой оптики переходят в законы геометрической оптики. Следовательно, отклонения от законов геометрической оптики при прочих равных условиях оказываются тем меньше, чем меньше длина волны].

Согласно **принципу Гюйгенса** (1690 г.), лежащему в основе волновой оптики, *каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн дает положение (волнового фронта) в следующий момент времени.*

**Волновая поверхность** – геометрическое место точек, в которых в рассматриваемый момент времени фаза волны имеет одно и то же значение.

Пусть плоская волна нормально падает на отверстие  $CC$  в непрозрачном экране (рис. 31).

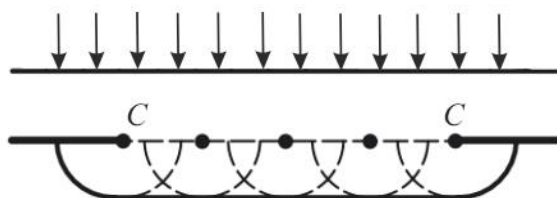


Рис. 31

Согласно Гюйгенсу, каждая точка выделяемого отверстием участка волнового фронта служит источником вторичных волн (в однородной изотропной среде они сферические). Построив огибающую вторичных волн для некоторого

момента времени, видим, что фронт волны заходит в область геометрической тени, т. е. волна огибает края отверстия.

Для наблюдения дифракции света необходимо, чтобы *длина волны  $\lambda$  была много меньше размеров отверстий или преград*.

Принцип Гюйгенса решает лишь задачу о направлении распространения волнового фронта, но не затрагивает вопросы об амплитуде, следовательно, и об интенсивности волн, распространяющихся за преградой световых волн.

Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением о когерентности вторичных волн и их интерференции. Согласно *принципу Гюйгенса – Френеля*, световая волна, возбуждаемая каким-либо источником  $S$ , может быть представлена как результат суперпозиции когерентных вторичных волн, излучаемых вторичными («фиктивными») источниками – бесконечно малыми элементами любой замкнутой поверхности, охватывающей источник  $S$ . Учет амплитуд и фаз вторичных волн позволяет найти амплитуду результирующей волны в любой точке пространства, т. е. определить закономерности распространения света как в случае свободного распространения световых волн (*прямолинейное распространение света*), так и в случае наличия преград (*дифракция*).

### 2.1.2. Зоны Френеля

Рассмотрим в произвольной точке  $M$  амплитуду световой волны, распространяющейся в однородной среде из точечного источника  $S$  (рис. 32).

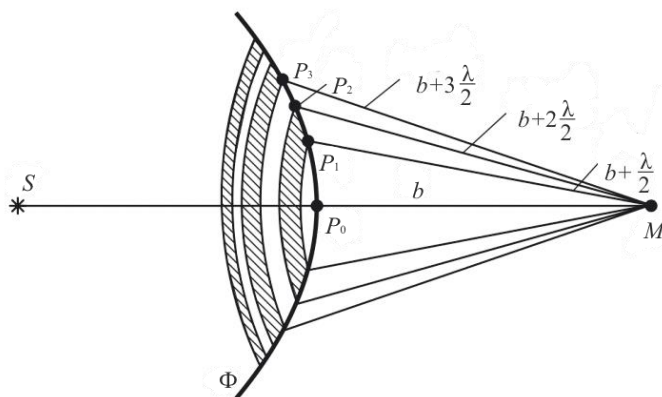


Рис. 32

Согласно принципу Гюйгенса – Френеля, заменим действие источника  $S$  действием воображаемых источников, расположенных на вспомогательной поверхности  $\Phi$ , являющейся поверхностью фронта волны, идущей из  $S$  (поверхность сферы с центром  $S$ ). Разобьем волновую поверхность  $\Phi$  на кольцевые зоны такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до  $M$  отличались на  $\lambda/2$  ( $\lambda$  – длина волны в среде, где волна распространяется), т. е.

$$P_1M - P_0M = P_2M - P_1M = P_3M - P_2M = \dots = \frac{\lambda}{2}.$$

Колебания, возбуждаемые в точке  $M$  двумя соседними зонами, противоположны по фазе, так как разность хода соответствующих лучей от этих зон до точки наблюдения  $M$  равна  $\lambda/2$ , а поэтому при наложении эти колебания будут ослаблять друг друга. Следовательно, *амплитуда результирующего колебания*, возбужденного в точке  $M$  всей совокупностью зон,

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots, \quad (2.1)$$

где  $A_1, A_2, \dots$  – амплитуды колебаний, возбуждаемых 1-й, 2-й, ...,  $m$ -й зонами.

**Площади зон Френеля.** Пусть внешняя граница  $m$ -й зоны выделяет на волновой поверхности сферический сегмент высоты  $hm$  (рис. 33). Обозначив площадь этого сегмента через  $\sigma_m$ , найдем, что площадь  $m$ -й зоны Френеля равна  $\Delta\sigma_m = \sigma_m - \sigma_{m-1}$ , где  $\sigma_{m-1}$  – площадь сферического сегмента, выделяемого внешней границей  $(m - 1)$ -й зоны.

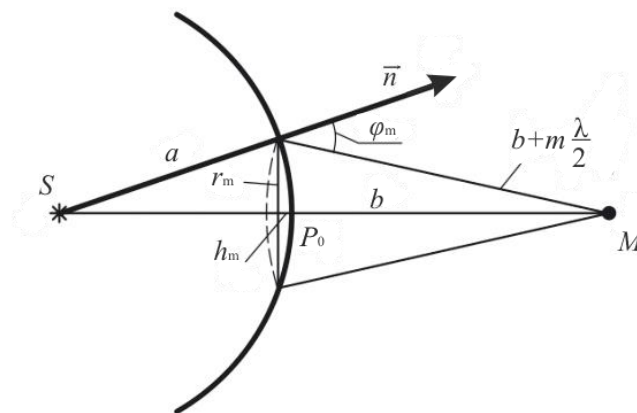


Рис. 33

Из рис. 33 следует, что

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2. \quad (2.2)$$

При не слишком больших  $m$  ввиду малости  $\lambda$  можно пренебречь слагаемым с  $\lambda^2$ , тогда

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \quad (2.3)$$

Площадь сферического сегмента и площадь  $m$ -й зоны Френеля соответственно равны

$$\sigma_m = 2\pi a h_m = \frac{\pi ab\lambda}{a+b} m; \quad (2.4)$$

$$\Delta\sigma_m = \sigma_m - \sigma_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}. \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) не зависит от  $m$ , следовательно, при не слишком больших  $m$  площади зон Френеля  $\Delta\sigma_m$  одинаковы.

Общее число зон Френеля, уместяющихся на полусфере, очень велико; например, при  $a = b = 10$  см и  $\lambda = 0,5$  мкм:

$$N = \frac{2\pi a^2}{\pi ab\lambda} (a+b) = 8 \cdot 10^5.$$

Поэтому в качестве допустимого приближения можно считать, что амплитуда колебания  $A_m$  от некоторой  $m$ -й зоны Френеля равна среднему арифметическому от амплитуд примыкающих к ней зон, т. е.

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}. \quad (2.6)$$

Тогда результирующая амплитуда [см. (2.1)] в точке  $M$  будет

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots = \frac{A_1}{2}. \quad (2.7)$$

Если в выражении (2.2) положить, что высота сегмента  $h_m \ll a$  (при не слишком больших  $m$ ), тогда  $r_m^2 = 2ah_m$ . Подставив сюда значение (2.3), найдем радиус внешней границы  $m$ -й зоны Френеля:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda. \quad (2.8)$$

[При  $a = b = 10$  см и  $\lambda = 0,5$  мкм радиус первой (центральной) зоны  $r_1 = 0,158$  мм].

Таким образом, распространение света от  $S$  к  $M$  происходит так, будто световой поток распространяется внутри очень узкого канала вдоль  $SM$ , т. е. прямолинейно. Следовательно, *принцип Гюйгенса – Френеля позволяет объяснить прямолинейное распространение света в однородной среде.*

### 2.1.3. Дифракция в сходящихся лучах (дифракция Френеля)

*Дифракция в сходящихся лучах* (или *дифракция Френеля*, 1818 г.) наблюдается в том случае, когда на препятствие падает сферическая или плоская волна, а дифракционную картину можно увидеть на экране, находящемся за препятствием на конечном от него расстоянии.

При рассмотрении этого типа дифракции пользуются *гипотезой Френеля* (см. п. 2.1.1), согласно которой часть волнового фронта, закрытая экраном, не действует вообще, а незакрытые участки волнового фронта действуют, как в случае отсутствия экрана. Это приближение вполне допустимо в случаях, когда размеры  $d$  отверстия значительно больше длины волны  $\lambda$ , так как влияние экрана существенно лишь в непосредственной близости от его края (на расстояниях, сравнимых с длиной волны  $\lambda$ ).

**1. Дифракция на круглом отверстии.** Сферическая монохроматическая волна, распространяющаяся из точечного источника  $S$ , встречает на своем пути диск с небольшим круглым отверстием (рис. 34). Дифракционная картина наблюдается в точке  $B$  экрана  $\mathcal{E}$ , лежащей на линии, соединяющей  $S$  с центром круглого отверстия. Экран находится на расстоянии  $b$  от отверстия и параллелен ему.

Вид дифракционной картины зависит от числа зон Френеля, укладывающихся в отверстие. Амплитуда результирующего колебания, возбуждаемого в точке  $B$  всеми зонами [см. (2.1) и (2.6)],

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} \quad (m - \text{нечетное}); \quad A = \frac{A_1}{2} - \frac{A_m}{2} \quad (m - \text{четное}).$$

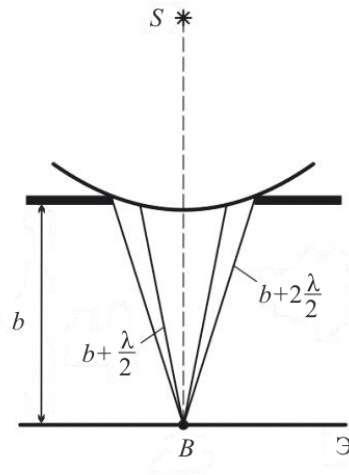


Рис. 34

Если отверстие открывает четное число зон Френеля, то в точке  $B$  наблюдается минимум (рис. 35,  $a$ ), если нечетное – то максимум (рис. 35,  $b$ ). Наименьшая интенсивность соответствует двум открытым зонам Френеля, максимальная – одной зоне Френеля (в данном случае  $A = A_1$ , т. е. интенсивность вдвое больше, чем в отсутствие непрозрачного экрана с отверстием).

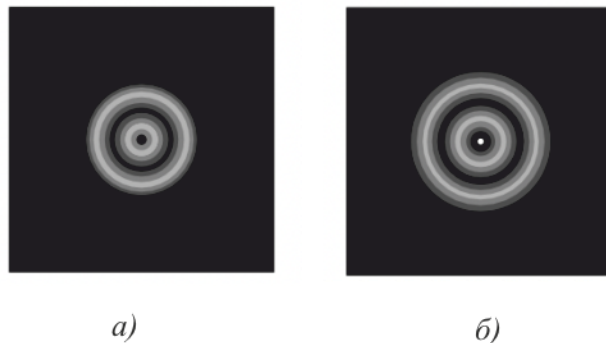


Рис. 35

При большом диаметре отверстия  $A_m \ll A_1/2$  интерференционная картина не наблюдается, свет распространяется так же, как и в отсутствие непрозрачного диска с отверстием, т. е. прямолинейно.

**2. Дифракция на диске.** Сферическая монохроматическая волна, распространяющаяся от точечного источника  $S$  (рис. 36), встречает на своем пути непрозрачный диск. Если диск закрывает  $m$  первых зон Френеля, то амплитуда результирующего колебания в точке  $B$  экрана  $\mathcal{E}$  равна

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left( \frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots = \frac{A_{m+1}}{2},$$

т. е.

$$A = \frac{A_{m+1}}{2},$$

так как выражения, стоящие в скобках, равны нулю.

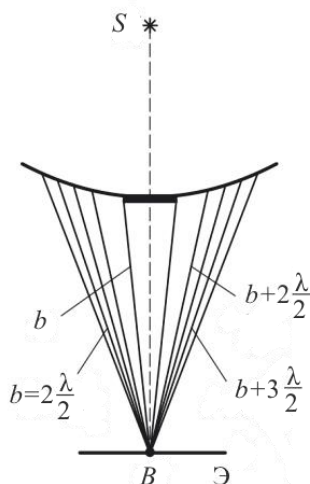


Рис. 36

Следовательно, в точке  $B$  всегда наблюдается интерференционный максимум (светлое пятно), соответствующий половине действия первой открытой зоны Френеля (см. рис. 35, б). Центральный максимум окружен концентрическими с ним темными и светлыми кольцами, а интенсивность в максимумах убывает с расстоянием от центра картины.

#### 2.1.4. Дифракция в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера)

*Дифракция в параллельных лучах* (или *дифракция Фраунгофера*, 1820 г.) наблюдается в том случае, когда на препятствие падает плоская волна, а дифракционную картину можно увидеть на экране, находящемся в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной на пути прошедшего за препятствие света. Для получения параллельного пучка света источник света помещают в фокусе собирающей линзы.



Рассмотрим дифракцию Фраунгофера плоской монохроматической световой волны длиной  $\lambda$  на одной бесконечно длинной щели (рис. 37, а) шириной  $a = MN$  (т. е. длина щели  $l \gg a$ ). [Дифракционная картина наблюдается на экране Э, расположенном в фокальной плоскости собирающей линзы Л, установленной на пути прошедшего через щель света. Согласно принципу Гюйгенса – Френеля (см. п. 2.1.1), каждая точка щели является источником вторичных волн, колеблющихся в одинаковой фазе, поскольку плоскость щели совпадает с волновым фронтом падающей плоской волны].

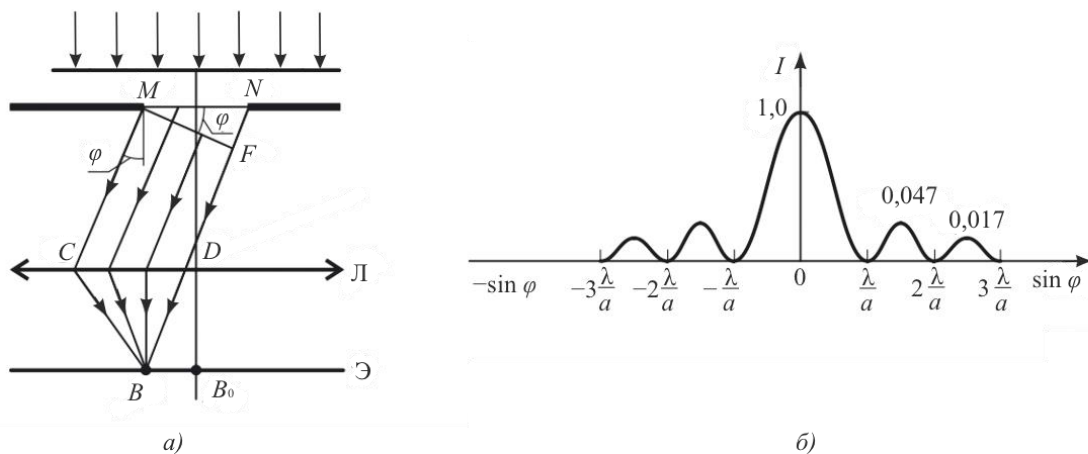


Рис. 37

Оптическая разность хода  $\Delta$  между крайними лучами  $MC$  и  $ND$ , идущими от щели в произвольном направлении  $\varphi$ :

$$\Delta = NF = a \sin \varphi, \quad (2.9)$$

где  $F$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на луч  $ND$ .

Всего на ширине щели  $a$  уместится  $\Delta/(\lambda/2)$  зон, т. е. число зон, уместившихся на открытой части волнового фронта в плоскости щели,  $a \sin \varphi /(\lambda/2)$  [учли (2.9)].

Все точки волнового фронта в плоскости щели имеют одинаковую фазу и амплитуду колебаний (зоны одинаковы по площади и одинаково наклонены к направлению наблюдения). Следовательно, колебания, возбуждаемые в точке  $B$  двумя соседними зонами, равны по амплитуде и противоположны по фазе:

1) если число зон Френеля четное, то

$$a \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.10)$$

– условие дифракционного минимума (полная темнота);

2) если число зон Френеля *нечетное*, то

$$a \sin \varphi = \pm(2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.11)$$

– *условие дифракционного максимума*, соответствующего действию одной некомпенсированной зоны Френеля. В направлении  $\varphi = 0$  наблюдается *центральный дифракционный максимум*, поскольку колебания, вызываемые в точке  $B_0$  всеми участками щели, происходят в одинаковой фазе (в этом направлении свет распространяется с наибольшей интенсивностью).

Направления на максимумы и минимумы рассчитываются согласно (2.10) и (2.11); направления, в которых *амплитуда максимальна*

$$\sin \varphi_{\max} = \pm \frac{(2m + 1)\lambda}{2a}, \quad (2.12)$$

или *равна нулю*

$$\sin \varphi_{\min} = \pm \frac{m\lambda}{a}. \quad (2.13)$$

На рис. 37, б приведен *дифракционный спектр* – зависимость распределения интенсивности  $I$  на экране от синуса угла дифракции ( $\sin \varphi$ ). [Интенсивности в центральном и последующих максимумах относятся как  $I_0 : I_1 : I_2 : I_3 \dots = 1 : 0,047 : 0,017 : 0,0083 : \dots$ , т. е. основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме. Положение дифракционных максимумов зависит от  $\lambda$ . При освещении щели белым светом, центральный максимум наблюдается в виде белой полосы (при  $\varphi = 0$  разность хода равна нулю для всех  $\lambda$ ) – он общий для всех длин волн. Боковые максимумы радужно окрашены фиолетовым краем к центру дифракционной картины (поскольку  $\lambda_{\text{ф}} < \lambda_{\text{к}}$ ].

### 2.1.5. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке

*Одномерная дифракционная решетка* – система параллельных щелей равной ширины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками (рис. 38).

Распределение интенсивности в дифракционном спектре каждой щели определяется направлением дифрагированных лучей и дифракционные картины, создаваемые каждой щелью, будут одинаковыми.

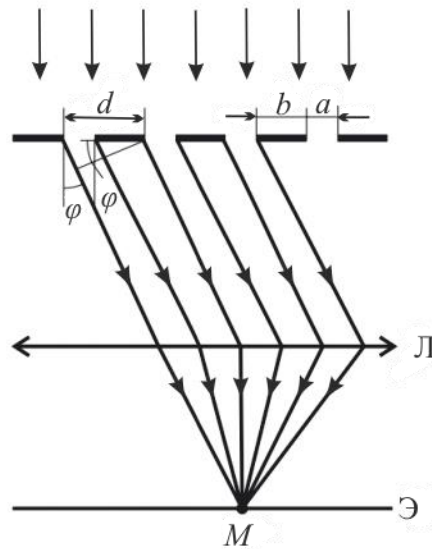


Рис. 38

Суммарная дифракционная картина есть результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей, – в дифракционной решетке осуществляется многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света, идущих от всех щелей.

Суммарная ширина щели  $a$  и непрозрачного участка  $b$  между щелями называется **постоянной** (или **периодом**) **дифракционной решетки**

$$d = a + b.$$

[Когда фронт волны достигнет решетки, то, согласно принципу Гюйгенса – Френеля (см. п. 2.1.1), каждая щель становится источником когерентных вторичных волн, способных интерферировать друг с другом. На экране Э, расположенном в фокальной плоскости собирающей линзы Л (рис. 38), в результате интерференции света от различных щелей будет наблюдаться система дифракционных максимумов и минимумов].

Оптическая разность хода лучей, идущих от двух соседних щелей, будет для данного направления  $\varphi$  одинакова в пределах всей дифракционной решетки:

$$\Delta = (a + b) \sin \varphi = d \sin \varphi. \quad (2.14)$$

Очевидно, что в тех направлениях, в которых ни одна из щелей не распространяет свет, он не будет распространяться и при двух щелях, т. е. **прежние (главные) минимумы** интенсивности будут наблюдаться в направлениях, определяемых условием (2.10):

$$a \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.15)$$

Кроме того, вследствие взаимной интерференции, в направлениях, определяемых условием (2.11), с учетом (2.14)

$$d \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.16)$$

световые лучи, посылаемые двумя соседними щелями, будут гасить друг друга – возникнут **дополнительные минимумы**. Наоборот, действие одной щели будет усиливать действие другой, если

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.17)$$

– **условие главных максимумов**.

Число **главных максимумов**, наблюдаемое с помощью дифракционной решетки, ограничено условием  $|\sin \varphi| \leq 1$ , поэтому из формулы (2.17) вытекает **максимальный порядок спектра**

$$n_{\max} \leq \frac{d}{\lambda}. \quad (2.18)$$

Следовательно, чтобы получить спектр хотя бы первого порядка, период решетки  $d$  должен быть больше длины световой волны  $\lambda$ .

Если дифракционная решетка состоит из  $N$  щелей, то **условием главных минимумов** является (2.15), **условием главных максимумов** – условие (2.17), а **условием дополнительных минимумов**

$$d \sin \varphi = \pm \frac{m' \lambda}{N} \quad (m' = 1, 2, \dots, N - 1, N + 1, \dots, 2N - 1, 2N + 1, \dots), \quad (2.19)$$

где  $m'$  может принимать все целочисленные значения, кроме  $0, N, 2N, \dots$ , т. е. кроме тех, при которых условие (2.19) переходит в (2.17). Следовательно, в случае  $N$  щелей между двумя главными максимумами располагается  $N - 1$  дополнительных минимумов, разделенных вторичными максимумами, создающими слабый фон.

## 2.1.6. Дифракция на пространственной решетке

Дифракция света наблюдается *на одномерных решетках* (система параллельных штрихов); *на двумерных решетках* (штрихи нанесены во взаимно перпендикулярных направлениях в одной и той же плоскости) и *на пространственных (трехмерных) решетках* – пространственных образованиях, в которых элементы структуры подобны по форме, имеют геометрически правильное и периодически повторяющееся расположение, а также постоянные (периоды) решеток, соизмеримые с длиной волны электромагнитного излучения.

*Кристаллы*, являясь трехмерными пространственными образованиями с постоянной решетки порядка 0,1 нм, могут быть использованы для наблюдения дифракции рентгеновского излучения ( $\lambda \approx 10^{-12} \div 10^{-8}$  м). [Метод расчета дифракции рентгеновского излучения от кристаллической решетки предложен независимо друг от друга Г.В. Вульфом и английскими физиками Г. Брэггом и Л. Брэггом (1913 г.)].

Представим кристаллы в виде совокупности параллельных кристаллографических плоскостей (рис. 39), отстоящих друг от друга на расстоянии  $d$ . Пучок параллельных монохроматических лучей (1, 2) падает под *углом скольжения*  $\theta$  (угол между направлением падающих лучей и кристаллографической плоскостью) и возбуждает атомы кристаллической решетки, которые становятся источниками когерентных вторичных волн (1' и 2'), интерферирующих между собой, подобно вторичным волнам, от щелей дифракционной решетки.

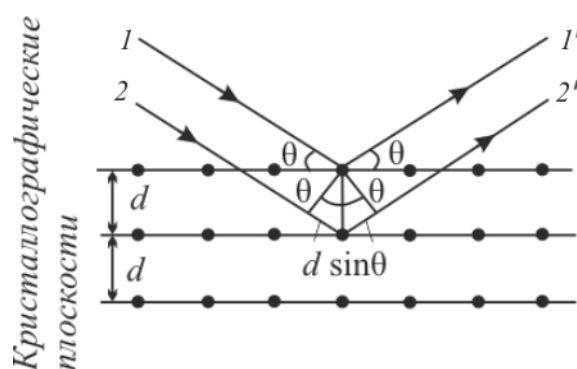


Рис. 39

Максимумы интенсивности (*дифракционные максимумы*) будут наблюдаться в тех направлениях, в которых все отраженные атомными плоскостями волны будут находиться в одинаковой фазе:

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.20)$$

– *формула Вульфа – Брэггов*, т. е. при разности хода между двумя лучами, отраженными от соседних кристаллографических плоскостей, кратной целому числу длин волн  $\lambda$ , наблюдается дифракционный максимум.

Формула Вульфа – Брэггов используется:

– *в рентгеноструктурном анализе* – если известна  $\lambda$  рентгеновского излучения, то, наблюдая дифракцию на кристаллической структуре неизвестного строения и измеряя  $\theta$  и  $m$ , можно найти  $d$ , т. е. определить структуру вещества;

– *в рентгеновской спектроскопии* – если известна  $d$ , то измеряя  $\theta$  и  $m$ , можно найти длину волны  $\lambda$  падающего рентгеновского излучения.

### 2.1.7. Разрешающая способность спектрального прибора

Изображение любой светящейся точки в монохроматическом свете представляет собой дифракционную картину, т. е. точечный источник отображается в виде центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами.

Согласно *критерию Рэля*, изображения двух близлежащих одинаковых точечных источников или двух близлежащих спектральных линий с равными интенсивностями и одинаковыми симметричными контурами разрешимы (разделены для восприятия), если *центральный максимум* дифракционной картины от одного источника (линии) *совпадает с первым минимумом* дифракционной картины от другого (рис. 40, а). При этом интенсивность «провала» между максимумами составляет 80 % интенсивности в максимуме, что является достаточным для разрешения линий  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Если критерий Рэля нарушен, то наблюдается одна линия (рис. 40, б).

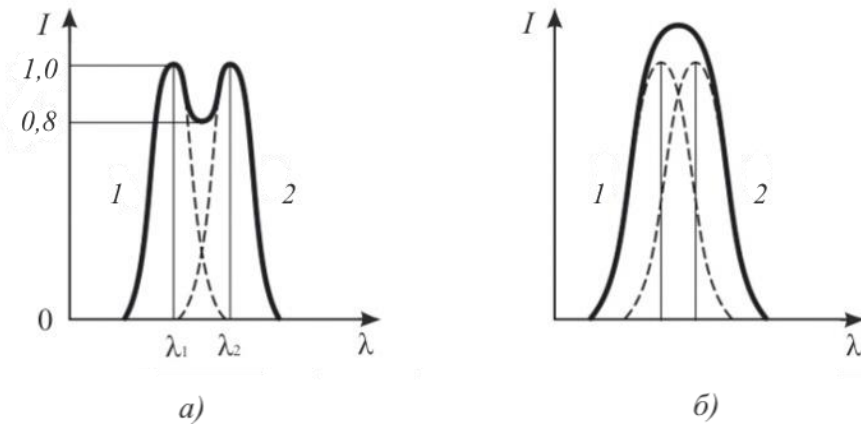


Рис. 40

**1. Разрешающей способностью спектрального прибора** называется безразмерная величина

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \quad (2.21)$$

где  $\delta\lambda$  – абсолютное значение минимальной разности длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются раздельно.

**2. Разрешающая способность дифракционной решетки.** Пусть максимум  $m$ -го порядка для длины волны  $\lambda_2$  наблюдается под углом  $\varphi_{\max}$ , т. е., согласно (2.17),  $d\sin\varphi_{\max} = m\lambda_2$ . В том же порядке ближайший дифракционный минимум для волны  $\lambda_1$  находится под углом  $\varphi_{\min}$ , удовлетворяет условию  $d\sin\varphi_{\min} = m\lambda_1 + \lambda_1/N$  [при переходе от максимума к соседнему минимуму разность хода меняется на  $\lambda/N$  (см. (2.19)), где  $N$  – число щелей решетки]. По критерию Рэля,  $\varphi_{\max} = \varphi_{\min}$ , т. е.  $m\lambda_2 = m\lambda_1 + \lambda_1/N$  или  $\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) = mN$ . Так как  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$  близки между собой, т. е.  $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_1/mN$ , то, согласно (2.21),

$$R_{\text{диф.реш.}} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN. \quad (2.22)$$

Таким образом, разрешающая способность дифракционной решетки пропорциональна порядку  $m$  спектра и числу  $N$  щелей.

## 2.2. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

### 2.2.1. Дисперсия света

*Дисперсией света* называется зависимость показателя преломления  $n$  от частоты  $\nu$  (длины волны  $\lambda$ ) света или зависимость фазовой скорости  $v$  световых волн от его частоты  $\nu$ . [Термин «дисперсия света» введен И. Ньютоном (1672 г.) для описания разложения белого света в спектр при преломлении в стеклянной призме].

Ньютон обнаружил (1666 г.), что пучок белого света, проходя сквозь призму из прозрачного материала, разлагается на все цвета радуги – от красного до фиолетового (рис. 41).

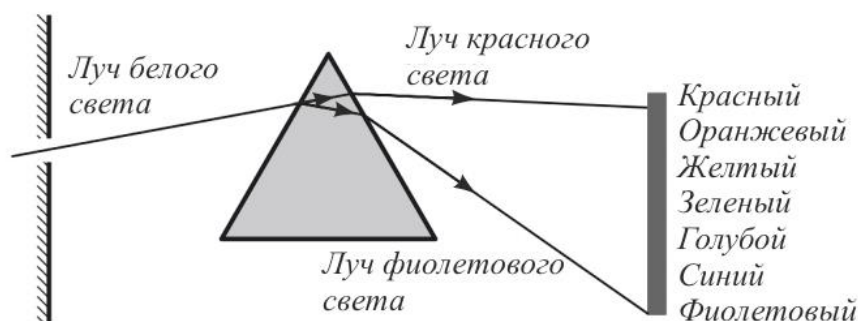


Рис. 41

Так как  $v = c/n$  ( $c$  – скорость распространения света в вакууме, одинаковая для электромагнитных волн любой частоты), то показатель преломления  $n$  среды оказывается зависящим от частоты  $\nu$  (длины волны  $\lambda$ ):

$$n = f(\lambda). \quad (2.23)$$

Дисперсия проявляется лишь при распространении *немонохроматических волн*.

Рассмотрим дисперсию света в призме. Пусть монохроматический пучок света падает на призму с преломляющим углом  $A$  и показателем преломления  $n$  (рис.42) под углом  $\alpha_1$ . После двукратного преломления на левой и правой гранях призмы луч отклоняется на угол  $\varphi$ :

$$\varphi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - A. \quad (2.24)$$



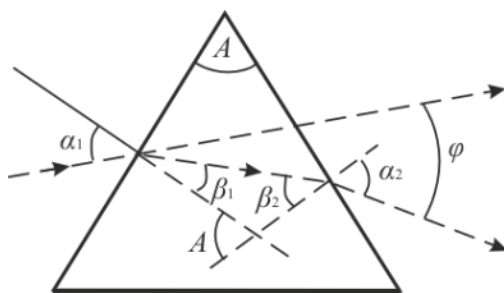


Рис. 42

Если углы  $A$  и  $\alpha_1$  малы, тогда углы  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  будут также малы (вместо синусов этих углов можно воспользоваться их значениями), то

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = n; \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{1}{n}, \text{ а так как } \beta_1 + \beta_2 = A, \text{ то } \alpha_2 = \beta_2 n = n(A - \beta_1) = nA - \alpha_1,$$

откуда

$$\alpha_1 + \alpha_2 = nA. \quad (2.25)$$

Из (2.24) и (2.25) следует, что

$$\varphi = A(n - 1), \quad (2.26)$$

т. е. угол отклонения лучей призмой тем больше, чем больше угол  $A$  призмы.

Величина

$$D = \frac{dn}{d\lambda} \quad (2.27)$$

называется **дисперсией вещества** – показывает, как быстро изменяется показатель преломления  $n$  с длиной волны  $\lambda$ . На рис. 43 приведена зависимость показателя преломления  $n$  для двух прозрачных веществ от длины волны  $\lambda$ :  $n$  увеличивается с уменьшением  $\lambda$  (увеличением  $\nu$ ). Такую **дисперсию света** называют **нормальной**.

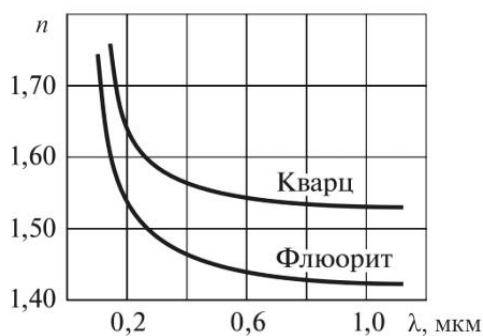


Рис. 43

*Дисперсию света* называют *аномальной*, если  $n$  уменьшается с уменьшением  $\lambda$  (увеличением  $\nu$ ). Этот вид дисперсии наблюдается в областях длин волн, соответствующих полосам интенсивного поглощения света в данной среде.

*Среду*, обладающую дисперсией, называют *диспергирующей*. В диспергирующих средах скорость световых волн зависит от длины волны  $\lambda$  (частоты  $\nu$ ).

Как дифракционная решетка (см. п.2.1.5), так и призма являются спектральными приборами. С их помощью можно исследовать спектры излучения. Спектр, получаемый с помощью дифракционной решетки, называется *дифракционным спектром*, с помощью призмы – *призматическим*.

Составные цвета в дифракционном и призматическом спектрах располагаются различно. Из выражения (2.17) следует, что в дифракционной решетке синус угла отклонения пропорционален длине волны [ $\sin \varphi \sim \lambda$ ]. Следовательно, красные лучи, имеющие бóльшую длину волны, чем фиолетовые, отклоняются дифракционной решеткой сильнее. Призма же разлагает лучи в спектр по значениям показателя преломления  $n$ , который для всех прозрачных веществ с увеличением длины волны  $\lambda$  уменьшается (см. рис. 43).

На явлении нормальной дисперсии основано действие *призменных спектрографов*. [Принцип призмального спектрографа основан на том, что длины волн, из которых состоит свет, имеют разные показатели преломления. Когда свет проходит через призму, его путь отклоняется. Отклонение, как и показатель преломления, увеличивается с увеличением длины волны. Поэтому синий луч отклоняется больше, чем красный].

### 2.2.2. Электронная теория дисперсии

*Электронная теория дисперсии Лоренца* рассматривает дисперсию света как результат взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами, входящими в состав вещества и совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны.

Из макроскопической электромагнитной теории Максвелла следует, что абсолютный показатель преломления среды

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu},$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно. В оптической области спектра для всех веществ  $\mu \approx 1$ , поэтому

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \quad (2.28)$$

Согласно теории Лоренца, дисперсия света – следствие зависимости  $\varepsilon$  от частоты  $\nu$  (длины волны  $\lambda$ ) световых волн. По определению [см. п. 2.2 (Лекции по физике. Ч. II: Электромагнетизм и волны)]

$$\varepsilon = 1 + \varkappa = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E},$$

где  $\varkappa$  – диэлектрическая восприимчивость среды;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная;  $P$  и  $E$  – мгновенные значения поляризованности и напряженности внешнего электрического поля.

Следовательно,

$$n^2 = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}, \quad (2.29)$$

т. е. зависит от  $P$ .

В оптической области спектра частота колебаний электрического поля световой волны очень высока ( $\nu \approx 10^{15}$  Гц), поэтому ориентационная поляризация диэлектриков несущественна, и главную роль играет *электронная (деформационная) поляризация* – вынужденные колебания электронов под действием электрической составляющей поля световой волны.

Пусть вынужденные колебания совершает только один внешний, слабо связанный с ядром атома, электрон – *оптический электрон*. Его наведенный дипольный момент равен  $p = ex$ , где  $e$  – заряд электрона;  $x$  – смещение электрона под действием электрического поля световой волны. Если концентрация атомов в диэлектрике равна  $n_0$ , то мгновенное значение поляризованности

$$P = n_0 p = n_0 ex. \quad (2.30)$$

Из (2.29) и (2.30) получим

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 ex}{\varepsilon_0 E}. \quad (2.31)$$

Пусть внешнее поле  $E$  изменяется по гармоническому закону:  $E = E_0 \cos \omega t$ . Тогда уравнение вынужденных колебаний электрона (без учета силы сопротивления, обуславливающей поглощение энергии падающей волны) запишется в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t, \quad (2.32)$$

где  $F_0 = eE_0$  – амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны;  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – собственная частота колебаний электрона;  $m$  – масса электрона. [Решив уравнение (2.32), найдем  $\varepsilon = n^2$  в зависимости от констант атома ( $e, m, \omega_0$ ) и частоты  $\omega$  внешнего поля, т. е. решим задачу дисперсии].

Решение уравнения (2.32) имеет вид

$$x = A \cos \omega t, \quad (2.33)$$

где

$$A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.34)$$

Подставив (2.33) и (2.34) в (2.31), получим

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.35)$$

В общем случае, если в веществе имеются различные заряды  $e_i$  с массами  $m_i$  совершающие вынужденные колебания с различными собственными частотами  $\omega_{0i}$ , то

$$n^2 = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{m_i} \frac{1}{(\omega_{i0}^2 - \omega^2)}. \quad (2.36)$$

Из выражений (2.35) и (2.36) следует, что показатель преломления  $n$  зависит от частоты  $\omega$  внешнего поля. График зависимости  $n = n(\omega)$  приведен на рис. 44. Разрыв  $n$  вблизи  $\omega_0$  обусловлен тем, что не учтены силы сопротивления среды (поглощение электромагнитных волн средой). Если учесть поглощение, то в области  $\omega_0$  зависимость  $n(\omega)$  задается пунктирной линией  $AB$  – это область *аномальной дисперсии* ( $n$  убывает с ростом  $\omega$ ); остальные участки описывают *нормальную дисперсию* ( $n$  растет с ростом  $\omega$ ).

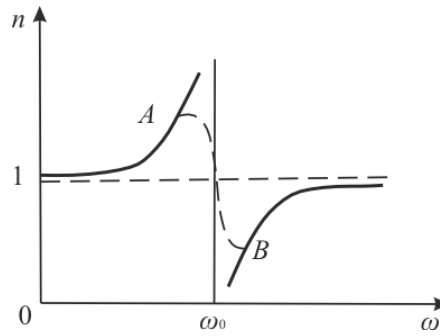


Рис. 44

### 2.2.3. Поглощение (абсорбция) света

**Поглощением (абсорбцией) света** называется явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в веществе вследствие преобразования энергии волны в другие виды энергии (внутреннюю энергию вещества, энергию вторичного излучения в других направлениях и другого спектрального состава и др.). В результате поглощения интенсивность света при прохождении через вещество уменьшается.

Поглощение света в веществе описывается **законом Бугера**:

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (2.37)$$

где  $I_0$  и  $I$  – интенсивности плоской монохроматической световой волны соответственно на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной  $x$ ;  $\alpha$  – **коэффициент поглощения**, зависящий от длины волны света, химической природы и состояния вещества и не зависящий от интенсивности света. При  $x = 1/\alpha$  – интенсивность света  $I$  по сравнению с  $I_0$  уменьшается в  $e \approx 2,718$  раза.

**Виды спектров поглощения:**

– **линейчатый спектр поглощения** – характерен для одноатомных газов (или паров). [Очень резкие и узкие линии спектра соответствуют частотам собственных колебаний электронов в атомах];

– **спектр поглощения в виде полос поглощения** – характерен для поглощения молекул. [Колебания атомов (и вращение групп атомов) в молекулах приводит к тому, что образуются широкие полосы поглощения];

– *сплошной спектр поглощения* – характерен для жидкостей и твердых тел, в которых образуются коллективные возбуждения (например, электроны проводимости в металлах) – обуславливают поглощение света в широкой области частот (длин волн).

На рис. 45 представлены типичная зависимость коэффициента поглощения  $\alpha$  от длины волны света  $\lambda$  и зависимость показателя преломления  $n$  от  $\lambda$  в области полосы поглощения. Внутри полосы поглощения наблюдается аномальная дисперсия ( $n$  убывает с уменьшением  $\lambda$ ).

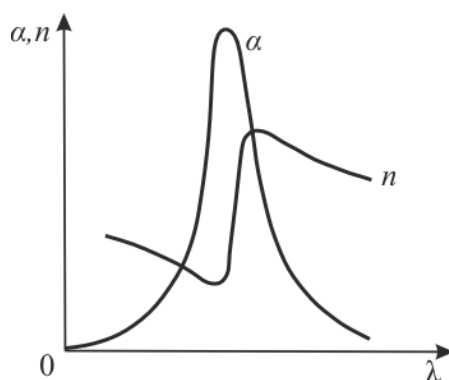


Рис 45

Зависимостью коэффициента поглощения  $\alpha$  от длины волны  $\lambda$  объясняется окрашенность поглощающих тел. [Стекло, слабо поглощающее красные и оранжевые лучи и сильно поглощающее зеленые и синие, при освещении белым светом будет казаться красным. Если на такое стекло направить зеленый и синий свет, то из-за сильного поглощения света этих длин волн стекло будет казаться черным. Это явление используется для изготовления *светофильтров*, которые в зависимости от химического состава пропускают свет только определенных длин волн  $\lambda$ , поглощая остальные].

Явление поглощения используется в *абсорбционном спектральном анализе* смеси газов, основанном на измерениях спектров частот и интенсивностей линий (полос) поглощения. Структура спектров поглощения определяется составом и строением молекул, поэтому изучение спектров поглощения является одним из основных методов количественного и качественного исследования веществ.

## Примеры решения задач

**2.1.** Найдите наибольший порядок спектра, общее число главных максимумов в дифракционной решетке и угол дифракции в спектре четвертого ( $m = 4$ ) порядка при нормальном падении монохроматического света с длиной волны 520 нм. Постоянная дифракционной решетки равна 3,84 мкм.

**Дано:**  $m = 4$ ;  $\lambda = 520 \text{ нм} = 0,52 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ;  $d = 3,84 \text{ мкм} = 3,84 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ .

**Найти:**  $m_{\max}$ ;  $N_{\max}$ ;  $\varphi_4$ .

**Решение.** Условие главных максимумов при дифракции на решетке, на которую свет падает нормально:

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где  $d$  – период дифракционной решетки;  $\varphi$  – угол дифракции;  $\lambda$  – длина волны;  $m$  – порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.

Для определения максимального числа максимумов (наибольшего порядка спектра), полученных с помощью дифракционной решетки, следует максимальный угол отклонения лучей решеткой принять равным  $\pi/2$ , откуда  $\sin \varphi_{\max} = 1$ . Тогда

$$m_{\max} = \frac{d}{\lambda}; \quad m_{\max} = \frac{3,84 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-6}} = 7,385.$$

Число  $m$  должно быть целым, т. е.  $m_{\max} = 7$ .

Общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой,

$$N_{\max} = 2m_{\max} + 1; \quad N_{\max} = 2 \cdot 7 + 1 = 15.$$

Угол дифракции  $\varphi_4$ , в спектре четвертого порядка, определяем по формуле:

$$d \sin \varphi_4 = 4\lambda, \quad (2)$$

откуда

$$\sin \varphi_4 = \frac{4\lambda}{d}; \quad \sin \varphi_4 = \frac{4 \cdot 0,52 \cdot 10^{-6}}{3,84 \cdot 10^{-6}} = 0,541(6);$$
$$\varphi_4 = \arcsin 0,541(6) = 32,8^\circ.$$

**Ответ:**  $m_{\max} = 7$ ;  $N_{\max} = 15$ ;  $\varphi_4 = 32,8^\circ$ .

**2.2.** На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны 590 нм. Найдите период решетки, наибольший порядок спектра и общее число главных максимумов в дифракционной картине, если решетка содержит 250 штрихов на каждый миллиметр.

**Дано:**  $\lambda = 590 \text{ нм} = 0,59 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ;  $N = 250 \text{ мм}^{-1}$ .

Найти:  $d$ ;  $m_{\max}$ ;  $n$ .

**Решение.** Период дифракционной решетки  $d$  определяется из соотношения:

$$d = \frac{1}{N}, \quad (1)$$

где  $N$  – число штрихов на единицу длины, тогда

$$d = \frac{1}{250} \text{ (мм)} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Постоянная дифракционной решетки  $d$  и угол  $\varphi$  отклонения лучей (угол дифракции), соответствующий  $m$ -му главному дифракционному максимуму, связаны соотношением:

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где  $m$  – порядок спектра (в случае монохроматического света порядок максимума).

Для определения числа главных максимумов, даваемых решеткой, следует максимальный угол  $\varphi_{\max}$  отклонения лучей решеткой принять равным  $\pi/2$ , откуда  $\sin \varphi_{\max} = 1$ .

Из формулы (2) при данных допущениях получаем

$$m_{\max} = \frac{d}{\lambda}. \quad (3)$$

Подставляя числовые значения, имеем:

$$m_{\max} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{0,59 \cdot 10^{-6}} = 6,78.$$

Число  $m$  должно быть целым (оно не может принять значение, равное 7, так как при этом значении  $\sin \varphi$  должен быть больше 1, т. е.  $\sin \varphi > 1$ , что не возможно). Следовательно,  $m_{\max} = 6$ .

Общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой,

$$n = 2m_{\max} + 1 = 13$$

[учли, что максимумы наблюдаются как справа, так и слева от центрального максимума, т. е. по одинаковому числу главных максимумов, равному  $2m_{\max}$ ; единица учитывает центральный максимум].

**Ответ:**  $d = 4 \cdot 10^{-6}$  м;  $m_{\max} = 6$ ;  $n = 13$ .

**2.3.** Найдите, при какой длине волны рентгеновского излучения четвертый дифракционный максимум будет наблюдаться при отражении лучей под углом  $60^\circ$  к поверхности кристалла каменной соли. Расстояние между атомными плоскостями кристалла равно 0,28 нм.

**Дано:**  $m = 4$ ;  $\vartheta = 60^\circ$ ;  $d = 0,28 \text{ нм} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ .

**Найти:**  $\lambda$ .



**Решение.** При разности хода между двумя лучами, отраженными от соседних кристаллографических плоскостей, кратной целому числу длин волн  $\lambda$ , наблюдается дифракционный максимум. Формула Вульфа – Бреггов определяет условие максимума при дифракции на пространственной решетке:

$$2d \sin \vartheta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

откуда

$$\lambda = \frac{2d \sin \vartheta}{m}. \quad (2)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 2,8 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{3}/2}{4} = 1,21 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

**Ответ:**  $\lambda = 1,21 \cdot 10^{-10}$  м.

**2.4.** Измерение дисперсии показателя преломления кварца дало  $n_1 = 1,542288$  для  $\lambda_1 = 643,874$  нм и  $n_2 = 1,541899$  для  $\lambda_2 = 656,278$  нм. Найдите отношение групповой скорости  $u_1$  к фазовой  $v_1$  для света с длиной волны  $\lambda_1 = 643,874$  нм.

**Дано:**  $n_1 = 1,542288$ ;  $\lambda_1 = 643,874$  нм =  $643,874 \cdot 10^{-9}$  м;  $n_2 = 1,541899$ ;  $\lambda_2 = 656,278$  нм =  $656,278 \cdot 10^{-9}$  м.

**Найти:**  $u_1/v_1$ .

**Решение.** Дисперсия света – это зависимость фазовой скорости  $v$  света в среде от его частоты. Так как фазовая скорость  $v$  определяется как

$$v = \frac{c}{n}, \quad (1)$$

[ $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость распространения света в вакууме;  $n$  – показатель преломления среды], то показатель преломления  $n$  оказывается зависящим от частоты (длины волны):

$$n = f(\lambda). \quad (2)$$

Групповая скорость  $u$  [ее можно определить, как скорость движения группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет (точнее, скорость, с которой перемещается центр пакета, т. е. точка с максимальным значением  $E$ )] определяется как:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (3)$$

Из формулы (3) видно, что в зависимости от знака  $dv/d\lambda$  групповая скорость  $u$  может быть, как меньше, так и больше фазовой скорости  $v$ . В отсутствие дисперсии  $dv/d\lambda = 0$  и групповая скорость совпадает с фазовой.

Таким образом, зависимость групповой скорости  $u$  от показателя преломления  $n$  и длины волны  $\lambda$  имеет вид:

$$u = \frac{c}{n} \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right), \quad (4)$$

[учли формулу  $v = c/v$ ;  $D = dn/d\lambda$  – средняя дисперсия вещества (показывает, как быстро изменяется показатель преломления с длиной волной)]. Разделив выражение (4) на  $v$ , получим

$$\frac{u}{v} = 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}. \quad (5)$$

Для длины волны  $\lambda_1$  и средней дисперсии

$$\langle D \rangle = \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = \frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (6)$$

имеем

$$\frac{u_1}{v_1} = 1 + \frac{\lambda_1}{n_1} \cdot \frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (7)$$

Подставляя числовые значения в (7), получим:

$$\frac{u_1}{v_1} = 1 + \frac{643,874 \cdot 10^{-9}}{1,542288} \cdot \frac{1,541899 - 1,542288}{656,278 \cdot 10^{-9} - 643,874 \cdot 10^{-9}} = 0,986907477981.$$

**Ответ:** 0,987.

**2.5.** Найдите показатель преломления среды, в которой наблюдается эффект Вавилова – Черенкова, если минимальный импульс протона равен  $4,28 \cdot 10^{-19}$  кг · м/с.

**Дано:**  $p_{\min} = 4,28 \cdot 10^{-19}$  кг · м/с;  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

**Найти:**  $n$ .

**Решение.** Для возникновения эффекта Вавилова – Черенкова необходимо, чтобы скорость движения  $v$  релятивистской частицы в среде превышала фазовую скорость света в этой среде, т. е. при условии

$$v > \frac{c}{n},$$

где  $c$  – скорость распространения света в вакууме;  $n$  – абсолютный показатель преломления среды.

Релятивистский импульс протона

$$p = \frac{m_p v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1)$$

Минимальному импульсу соответствует минимальное значение скорости  $v_{\min} = c/n$ , тогда

$$p_{\min} = \frac{m_p v_{\min}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\min}^2}{c^2}}} = \frac{m_p c}{n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{m_p c}{\sqrt{n^2 - 1}}, \quad (2)$$

откуда показатель преломления среды:

$$n = \sqrt{\frac{m_p^2 c^2}{p_{\min}^2} + 1}.$$

**Ответ:**  $n = 1,54$ .

### Задачи

17. Монохроматический свет падает нормально на узкую щель. Найдите его направление на третью ( $m = 3$ ) темную дифракционную полосу, если на ширине щели укладывается 125 длин волн. Ответ:  $0,024 \text{ рад} \approx 1,38^\circ$

18. Монохроматический свет с длиной волны 770 нм падает нормально на щель шириной 0,28 мм, при этом дифракционная картина проецируется на экран, параллельной плоскости щели, с помощью линзы, расположенной вблизи щели. Найдите расстояние от экрана до линзы, если расстояние между вторыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального минимума, равно 22 мм. Ответ: 2 м

19. Найдите общее число минимумов в картине дифракции при нормальном падении монохроматического света на узкую щель, ширина которой в 4,2 раза больше длины волны падающего света. Ответ: 9

20. Найдите наибольший порядок спектра, общее число главных максимумов в дифракционной решетке и угол дифракции в спектре третьего порядка при нормальном падении монохроматического света с длиной волны 0,54 мкм. Постоянная дифракционной решетки равна 3,78 мкм. Ответ: 7; 15;  $25,38^\circ$

21. Найдите постоянную дифракционной решетки, если угловая дисперсия для длины волны 640 нм в спектре третьего порядка равна  $8,55 \cdot 10^5 \text{ рад/м}$ . Ответ: 3,9 мкм

22. На дифракционную решетку нормально падает свет, при этом на экране с помощью линзы, оптическая сила которой 1,25 дптр, наблюдается дифракционная картина. Красная линия ( $\lambda = 644 \text{ нм}$ ; «линия кадмия») в спектре первого порядка наблюдается под углом  $9,5^\circ$ . Найдите постоянную решетки и линейную дисперсию решетки. Ответ: 3,9 мкм;  $2,08 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$

23. Найдите, при какой длине волны рентгеновского излучения третий дифракционный максимум будет наблюдаться при отражении лучей под углом  $45^\circ$  к поверхности кристалла каменной соли. Расстояние между атомными плоскостями кристалла равно 0,28 нм. Ответ: 132 пм

24. Найдите линейный коэффициент поглощения света, если пластина из полупрозрачного вещества толщиной 22 мм уменьшает интенсивность света в три раза. Ответ:  $50 \text{ м}^{-1}$

25. На грань кварцевой призмы с преломляющим углом  $\vartheta = 48^\circ$  падает монохроматический луч света под углом  $45^\circ$ . Найдите угол отклонения луча призмой, если показатель преломления кварца 1,54. В Ответ:  $29,92^\circ \approx 29^\circ 55'$

26. Найдите минимальную кинетическую энергию, которой должен обладать электрон, чтобы эффект Вавилова – Черенкова наблюдался в среде с показателем преломления 1,76 ( $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$  – масса электрона;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – скорость распространения света в вакууме). Ответ: 0,11 МэВ

## Лекция 3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

### 3.1. Естественный и поляризованный свет

Свет представляет собой суммарное электромагнитное излучение множества атомов. Атомы же излучают световые волны независимо друг от друга, поэтому световая волна, излучаемая источником, характеризуется всевозможными равновероятными колебаниями вектора напряженности  $\vec{E}$  электрического поля (рис. 46, *a*; луч перпендикулярен плоскости рисунка). [В данном случае равномерное распределение вектора  $\vec{E}$  объясняется большим числом атомарных излучателей, а равенство амплитудных значений векторов  $\vec{E}$  – одинаковой (в среднем) интенсивностью излучения каждого из атомов].

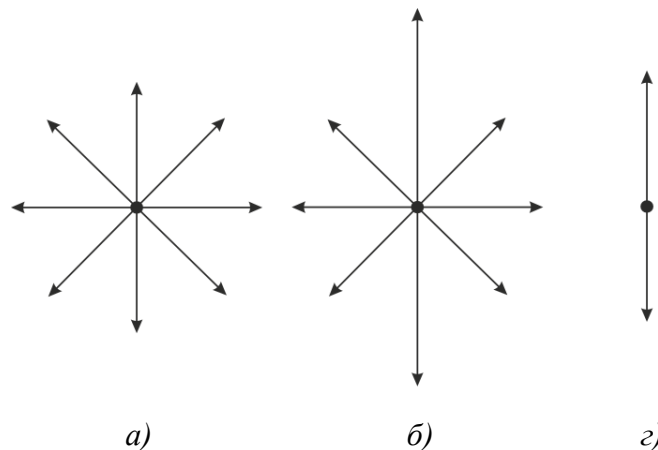


Рис. 46

Свет со всевозможными равновероятными ориентациями вектора  $\vec{E}$  (и следовательно,  $\vec{H}$ ) называется *естественным*.

Световые волны поперечны, и для них характерна *поляризация света* – совокупность явлений волновой оптики, в которых проявляется поперечная анизотропия световых волн, т. е. неэквивалентность различных направлений в плоскости, перпендикулярных световому лучу. [Поперечность световых волн заключается в том, что векторы напряженностей электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей световой волны взаимно перпендикулярны и колеблются перпендикулярно вектору скорости  $\vec{v}$  распростране-

ния волны (перпендикулярно лучу)]. Для описания поляризации света достаточно исследовать поведение вектора напряженности  $\vec{E}$  электрического поля электромагнитной волны, называемый **световым вектором**.

**Свет**, в котором направления колебаний светового вектора каким-то образом упорядочены, называется **поляризованным**. [*Естественный свет*, испущенный нагретыми телами, является неполяризованным, поскольку направление колебаний вектора  $\vec{E}$  в каждой точке быстро и хаотически меняется].

Смесь естественного и поляризованного света называется **частично поляризованным светом** (рис. 46, б).

**Свет**, в котором вектор  $\vec{E}$  (и следовательно,  $\vec{H}$ ) колеблется только в одном направлении, перпендикулярно лучу (рис. 46, в), называется **плоскополяризованным** (или **линейно поляризованным**).

Плоскость, проходящая через направление колебаний светового вектора плоскополяризованной волны и направление распространения этой волны, называется **плоскостью поляризации**.

Монохроматическая плоская волна либо линейно поляризована, либо поляризована по эллипсу или кругу. Если концы вектора  $\vec{E}$  с течением времени описывают в плоскости перпендикулярной лучу, окружность или эллипс, то свет называется **эллиптически поляризованным** – представляет собой сумму двух взаимно перпендикулярных плоских волн, между колебаниями которых имеется разность фаз. Если эллипс поляризации вырождается в прямую (при разности фаз  $\varphi$ , равной нулю или  $\pi$ ), то имеем дело с **плоскополяризованным светом**, если в окружность (при  $\varphi = \pm \pi/2$  и равенстве амплитуд складываемых волн), то это **циркулярно поляризованный** (или **поляризованный по кругу**) свет.

**Степенью поляризации** называется величина

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (3.1)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  – соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором. Для естественного света  $I_{\max} = I_{\min}$  и  $P = 0$ , для плоскополяризованного  $I_{\min} = 0$  и  $P = 1$ .

### 3.2. Получение плоскополяризованного света. Закон Малюса

**Поляризатором** ( $P$ ) называется устройство, на выходе из которого свет линейно поляризован *в плоскости пропускания поляризатора*. Причина в том, что поляризатор полностью поглощает свет, поляризованный перпендикулярно плоскости пропускания.

Для анализа поляризованного света используют те же поляризаторы, которые называются **анализаторами** ( $A$ ).

На поляризатор  $P$  (рис. 47) перпендикулярно падает естественный свет. Из поляризатора выходит плоскополяризованный свет (в этом легко убедиться, если на пути луча поставить анализатор  $A$ ). Если главная плоскость анализатора параллельна главной плоскости поляризатора, то поляризованный свет проходит через анализатор (рис. 47, *а*), если их главные плоскости перпендикулярны друг другу, то свет через анализатор не проходит (рис. 47, *б*). Если поляризатор и анализатор ориентированы произвольно, то интенсивность прошедшего через них света будет зависеть от угла  $\alpha$  (рис. 47, *в*) между главными плоскостями анализатора и поляризатора.

Разложим амплитуду  $\vec{E}_0$  светового вектора луча, прошедшего через поляризатор, на две составляющие: параллельный главной плоскости анализатора ( $\vec{E}_{\parallel}$ ) и перпендикулярный ей ( $\vec{E}_{\perp}$ ). Это соответствует разложению волны, колеблющейся в плоскости  $\vec{E}_0$ , на две волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях и колеблющиеся в одинаковой фазе. Одна из них ( $\vec{E}_{\perp}$ ) будет погашена, а вторая ( $\vec{E}_{\parallel}$ ) пройдет через анализатор:

$$E_{\parallel} = E_0 \cos \alpha. \quad (3.2)$$

Интенсивность света  $I$  пропорциональна квадрату амплитуды колебаний ( $I \sim E_0^2$ ), то из выражения (3.2) получим **закона Малюса**:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (3.3)$$

где  $I_0$  – интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор;  $I$  – интенсивность света, вышедшего из анализатора.

Интенсивность света  $I$ , прошедшего через систему, изображенную на рис. 47, изменяется от нуля (*полное гашение света*) при  $\alpha = \pi/2$  (главные плоскости  $P$  и  $A$  взаимно перпендикулярны) до  $I_0$  при  $\alpha = 0$  (главные плоскости  $P$  и  $A$  параллельны).

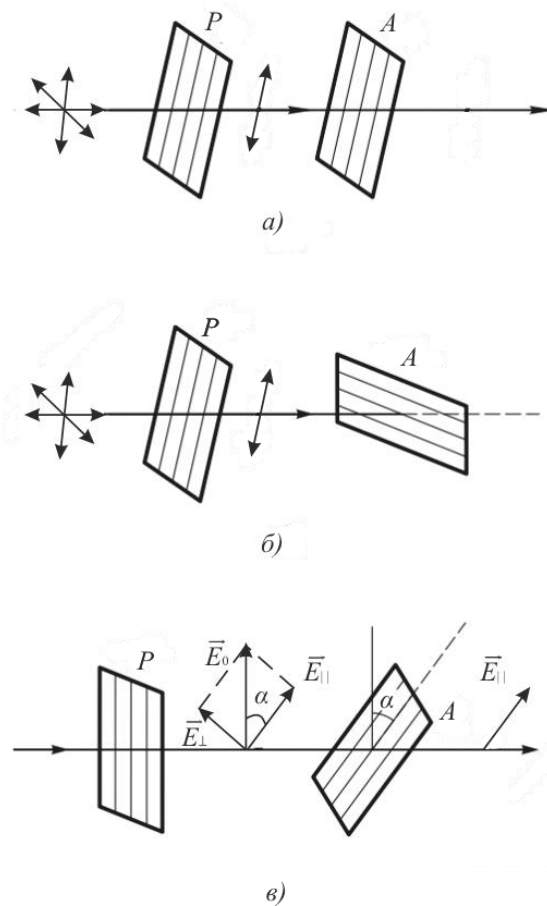


Рис. 47

Интенсивность естественного света  $I_{\text{ест}}$ , прошедшего через два поляризатора:

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 \alpha$$

[из первого поляризатора выйдет плоскополяризованный свет, интенсивность которого  $I_0 = I_{\text{ест}}/2$ , из второго, согласно закону Малюса (3.3), выйдет свет интенсивностью  $I = I_0 \cos^2 \alpha$ ], откуда

$$I_{\text{max}} = \frac{1}{2} I_{\text{ест}}$$

(главные плоскости поляризаторов параллельны) и

$$I_{\text{min}} = 0$$

(главные плоскости поляризаторов перпендикулярны).



### 3.3. Поляризация света при отражении и преломлении

Если естественный свет падает на границу раздела двух изотропных диэлектриков (например, воздуха и стекла), то отраженный и *преломленный* лучи являются *частично поляризованными*. [Э. Малюс (1810 г.) показал, что отраженный и преломленный лучи частично поляризованы: при вращении анализатора вокруг лучей интенсивность света периодически усиливается и ослабевает (полного гашения не наблюдается)].

В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения (на рис. 48 они обозначены точками), а в преломленном луче – колебания, параллельные плоскости падения (изображены стрелками). Степень поляризации  $P$  [см. (3.1)] зависит от угла падения лучей.

Если угол падения  $i$  равен *углу Брюстера*  $i_B$ , который определяется соотношением

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}, \quad (3.4)$$

то *отраженный луч является плоскопараллельным* (содержит только колебания, перпендикулярные плоскости падения) (рис. 49). *Преломленный луч при угле падения  $i_B$  поляризуется максимально, но не полностью*. Выражение (3.4) представляет собой *закон Брюстера* (1815 г.).

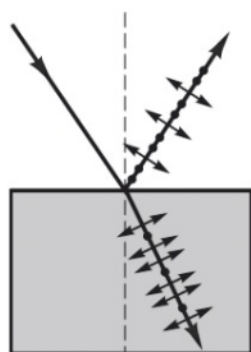


Рис. 48

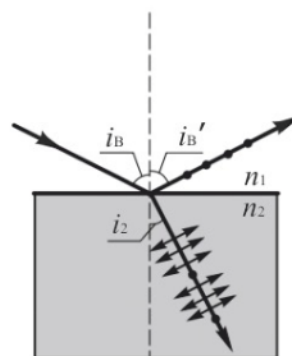


Рис. 49

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера  $i_B$ , то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны:

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = n_{21}, \quad \frac{\sin i_B}{\sin i_2} = n_{21}$$

[ $i_2$  – угол преломления], откуда  $\cos i_B = \sin i_2$ ; следовательно  $i_B + i_2 = \pi/2$ , но по закону отражения  $i'_B = i_B$ , поэтому  $i'_B + i_2 = \pi/2$ .

[Степень поляризации отраженного и преломленного света при различных углах падения можно рассчитать из уравнений Максвелла, если учесть граничные условия для электромагнитного поля на границе раздела двух изотропных диэлектриков (так называемые **формулы Френеля**)].

Отношение потока отраженной энергии к потоку энергии падающей называется **коэффициентом отражения света** ( $\rho$ ); при нормальном падении,

$$\rho = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = \left( \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2 \quad (3.5)$$

[ $\rho$  – безразмерная физическая величина;  $n_{21} = n_2/n_1$  – относительный показатель преломления второй среды относительно первой (см. формулу (1.1)].

**Коэффициент пропускания** – отношение потока излучения  $\Phi$ , прошедшего через среду, к потоку излучения  $\Phi_0$ , упавшего на ее поверхность:

$$\tau = \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (3.6)$$

[ $\tau$  – безразмерная физическая величина]. По закону сохранения энергии,

$$\tau = 1 - \rho = n_{21} \left( \frac{2}{n_{21} + 1} \right)^2 \quad (3.7)$$

Коэффициенты  $\rho$  и  $\tau$  зависят только от  $n_{21}$ . Коэффициент отражения обычно не велик; например, при  $n_{21} = 1,5$  (стекло) получим  $\rho = 0,04$ .

### 3.4. Двойное лучепреломление

**Двойное лучепреломление** – способность *анизотропных веществ* (в них физические свойства зависят от направления) расщеплять падающий световой луч на два луча, распространяющихся в разных направлениях с различной фазовой скоростью и поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях (непосредственно вытекает из уравнений Максвелла). [Это явление впервые обнаружил Э. Бартолин (1669 г.) при падении луча света на кристалл исландского шпата – разновидность углекислого кальция (*известняка*)  $\text{CaCO}_3$  – кристаллы гексагональной системы)].

Кристаллы, обладающие *двойным лучепреломлением*, подразделяются на *одноосные* и *двуосные*.

В результате двойного лучепреломления при падении узкого светового пучка на достаточно толстый анизотропный кристалл из него выходят два пространственно разделенных луча, параллельных друг другу и падающему лучу. Даже в случае, когда первичный пучок падает на кристалл нормально, преломленный пучок разделяется на два: один из них является продолжением первого, а второй отклоняется (рис. 50). Первый из этих *лучей* называется **обыкновенным** (*o*) [подчиняется *закону преломления* (см. (1.1)); в частности, *преломленный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности*], второй – **необыкновенным** (*e*) [отношение синуса угла падения и угла преломления *не остается постоянным* при изменении угла падения  $i_1$ ]. [Примерами *одноосных кристаллов* могут служить исландский шпат, кварц и турмалин. У *двуосных кристаллов* (слюда, гипс) оба луча необыкновенные – показатели преломления для них зависят от направления в кристалле].

В кристалле исландского шпата имеется единственное направление, вдоль которого двойное лучепреломление не наблюдается. Это направление называется **оптической осью кристалла**.

Плоскость, проходящая через направление луча света и оптическую ось кристалла, называется **главной плоскостью** (или **главным сечением**) кристалла. Колебания светового вектора  $\vec{E}$  в обыкновенном луче (*o*) происходят перпендикулярно главной плоскости, т. е. перпендикулярно оптической оси, в необыкновенном (*e*) – в главной плоскости, т. е. световой вектор необыкновенного луча образует с оптической осью некоторые углы (рис. 51).

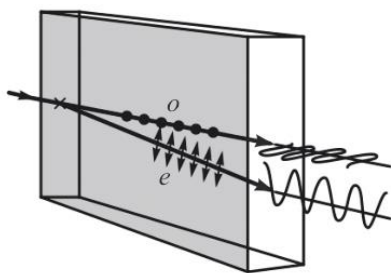


Рис. 50

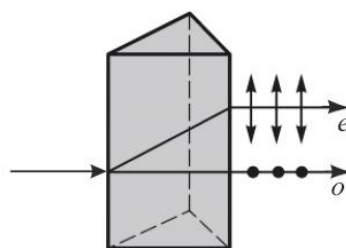


Рис. 51

[Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов. В кристаллах некубической системы диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  оказывается зависящей от направления. В одноосных кристаллах  $\varepsilon$  в направлении оптической оси и в направлениях, перпендикулярных к ней имеет различные значения  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$ . В других направлениях  $\varepsilon$  имеет промежуточные значения. Согласно (2.18)  $n = \sqrt{\varepsilon}$ ; следовательно, из анизотропии  $\varepsilon$  вытекает, что электромагнитным волнам с различными направлениями колебаний вектора  $\vec{E}$  соответствуют разные значения показателя преломления  $n$ :  $v_o = c/n_o = c/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ ;  $v_e = c/n_e = c/\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$ . Поэтому скорость световых волн зависит от направления колебаний светового вектора  $\vec{E}$ ].

### 3.5. Положительные и отрицательные кристаллы

Колебания вектора  $\vec{E}$  (на рис. 52, а направления 1, 2, 3) при любом направлении *обыкновенного луча* перпендикулярны оптической оси кристалла (ее направление задано штриховыми линиями), поэтому *o*-луч распространяется в кристалле по всем направлениям с одинаковой скоростью  $v_o = c/n_o$ . Предположим, что в точке *S* кристалла точечный источник света испускает световую волну. *Волновой поверхностью обыкновенного луча является сфера* (*o*-луч в кристалле распространяется со скоростью  $v_o = \text{const}$ ).

Для *e*-луча угол между направлением колебаний вектора  $\vec{E}$  и оптической осью отличен от прямого и зависит от направления луча, поэтому *e*-луч распространяется в кристалле по различным направлениям (рис. 52, б), с разной скоростью  $v_e = c/n_e$ . *Волновая поверхность необыкновенного луча – эллипсоид* (*e*-луч в кристалле распространяется со скоростью  $v_e \neq \text{const}$ ).

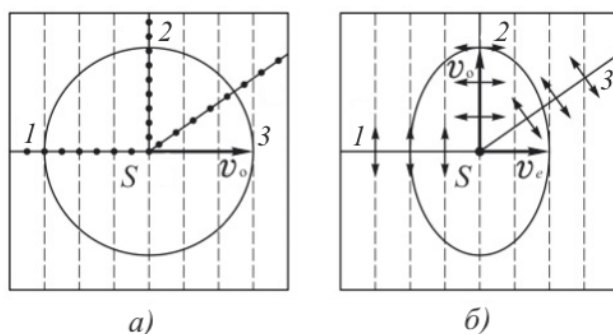


Рис. 52

Вдоль оптической оси  $v_o = v_e$ ; наибольшее расхождение в скоростях – в направлении, перпендикулярном оптической оси.

Эллипсоид и сфера касаются друг друга в точках пересечения с оптической осью  $OO'$ . Если все  $v_e$  меньше  $v_o$  ( $n_e > n_o$ ), т. е. эллипсоид необыкновенного луча вписан в сферу обыкновенного луча (эллипсоид скоростей вытянут относительно оптической оси), то **одноосный кристалл** называется **положительным** (рис. 53, а) [исландский шпат ( $\text{CaCO}_3$ ), рубин ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) и т. д.].

Если  $v_e > v_o$  ( $n_e < n_o$ ), то эллипсоид описан вокруг сферы (эллипсоид скоростей растянут в направлении, перпендикулярном оптической оси), и **одноосный кристалл** называется **отрицательным** (рис. 53, б) [кварц ( $\text{SiO}_2$ ), селлаит ( $\text{MgF}_2$ ), рутил ( $\text{TiO}_2$ ) и т. д.].

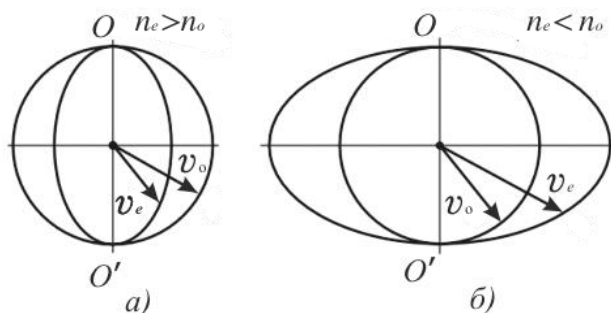


Рис. 53

### 3.6. Поляризационные призмы и поляроиды

Явление двойного лучепреломления используется при изготовлении поляризационных приспособлений: **поляризационных призм** и **поляроидов**.

Призмы делятся на два класса:

1) призмы, дающие только плоскополяризованный луч (**поляризационные призмы**);

2) призмы, дающие два поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях луча (**двойкопреломляющие призмы**).

В призме Николя (рис. 54) – двойной призме исландского шпата, склеенной вдоль  $AB$  канадским бальзамом ( $n = 1,5$ ) – обыкновенный луч ( $n_o = 1,66$ )

испытывает полное отражение [канадский бальзам для него является оптически менее плотной], а плоскополяризованный необыкновенный луч ( $n_e = 1,51$ ) выходит из призмы. Оптическая ось  $OO'$  призмы составляет с входной гранью угол  $48^\circ$ .

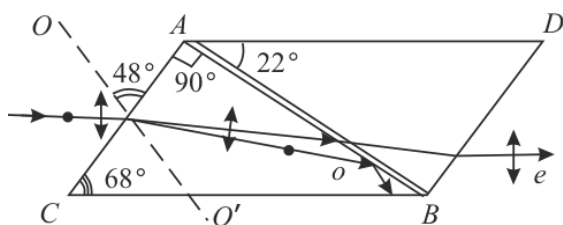


Рис. 54

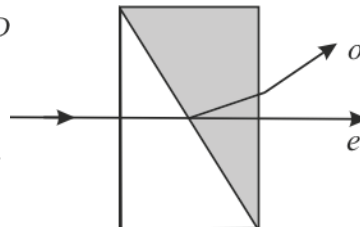


Рис. 55

*Двойкопреломляющие призмы* используют различие в показателях преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, чтобы развести их возможно дальше друг от друга. [Примером двойкопреломляющих призм могут служить призмы из исландского шпата и стекла, призмы, составленные из двух призм из исландского шпата со взаимно перпендикулярными оптическими осями. Для первых призм (рис. 55) обыкновенный луч преломляется в шпате и стекле два раза и, следовательно, сильно отклоняется, необыкновенный же луч при соответствующем подборе показателя преломления стекла  $n$  ( $n \approx n_c$ ) проходит призму почти без отклонения. Для вторых призм различие в ориентировке оптических осей влияет на угол расхождения между обыкновенным и необыкновенным лучами].

Двойкопреломляющие кристаллы обладают свойством *дихроизма* – различного поглощения света в зависимости от ориентации электрического вектора  $\vec{E}$  световой волны. *Дихроичные кристаллы* используются при производстве *поляроидов* – тонких пластиковых пленок, в которые вкраплены кристаллики веществ с сильно выраженным дихроизмом (например, герпатит) – такие пленки уже при толщине  $\sim 0,1$  мм полностью поглощают обыкновенные лучи видимой области спектра, являясь в таком тонком слое совершенным поляризатором.

[Преимущество поляроидов перед призмами – возможность изготавливать их с площадями поверхностей до нескольких квадратных метров. Однако степень поляризации в них сильнее зависит от  $\lambda$ , чем в призмах. Кроме того, их меньшая по сравнению с призмами прозрачность (приблизительно 30 %) в сочетании с небольшой термостойкостью не позволяет использовать поляроиды в мощных световых потоках. Поляроиды применяются, например, для защиты от ослепляющего действия солнечных лучей и фар встречного автотранспорта].

### 3.7. Получение поляризованного света

Для анализа характера поляризации света изучают зависимость интенсивности от ориентации николя. Если интенсивность не меняется, то свет либо естественный, либо поляризован по кругу. Толщина пластинки  $d$  подобрана так, чтобы разность хода между обыкновенным ( $o$ ) и необыкновенным лучами ( $e$ )  $\Delta = \Delta n d$  равнялась  $\lambda/4$ . Сдвиг фаз между взаимно перпендикулярными колебаниями станет равным нулю, либо  $\pi$ , и круговая поляризация превратится в линейную. [Рассмотрим пучок естественного света, прошедший сквозь поляризатор  $P$  и ставший на выходе плоскополяризованным, нормально падающий на кристаллическую пластинку толщиной  $d$ , вырезанную из одноосного отрицательного кристалла параллельно его оптической оси  $OO'$  (рис. 56). Внутри пластинки он разбивается на обыкновенный ( $o$ ) и необыкновенный ( $e$ ) лучи, которые распространяются в одном направлении (перпендикулярно оптической оси), но с разными скоростями. Колебания вектора  $\vec{E}$  в  $e$ -луче происходят вдоль оптической оси кристалла, а в  $o$ -луче – перпендикулярно оптической оси.

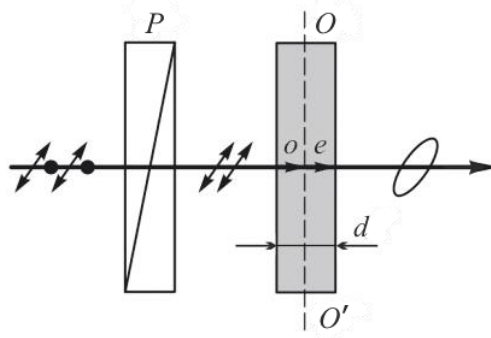


Рис. 56

Если в  $o$ - и  $e$ -лучах колебания вектора  $\vec{E}$  взаимно перпендикулярны, то на выходе из пластинки в результате сложения этих колебаний возникают световые волны, вектор  $\vec{E}$  в которых меняется со временем так, что его конец описывает эллипс (см. (6.69) кн. 2):

$$\frac{x^2}{E_o^2} - \frac{2xy}{E_o E_e} \cos \varphi + \frac{y^2}{E_e^2} = \sin^2 \varphi, \quad (3.8)$$

где  $E_o$  и  $E_e$  – соответственно составляющие напряженности электрического поля волны в  $o$ - и  $e$ -лучах;  $\varphi$  – разность фаз колебаний. Таким образом, в результате прохождения через кристаллическую пластинку *плоскополяризованный свет превращается в эллиптически поляризованный*].

Между  $o$ - и  $e$ -лучами в пластинке возникает оптическая разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)d,$$

или разность фаз

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_o - n_e)d,$$

где  $d$  – толщина пластинки;  $\lambda_0$  – длина волны света в вакууме.

Если  $\Delta = (n_o - n_e)d = \lambda_0/4$ ,  $\varphi = \pm\pi/2$ , то уравнение (3.8) примет вид

$$\frac{x^2}{E_0^2} + \frac{y^2}{E_e^2} = 1,$$

т. е. эллипс ориентирован относительно главных осей кристалла.

При  $E_o = E_e$  (если световой вектор в падающем на пластинку плоскополяризованном свете составляет угол  $\alpha = 45^\circ$  с направлением оптической оси  $OO'$  пластинки)

$$x^2 + y^2 = E_0^2,$$

т. е. на выходе из пластинки свет оказывается *циркулярно поляризованным*.

Вырезанная параллельно оптической оси пластинка, для которой оптическая разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm \left(m + \frac{1}{4}\right) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

называется **пластинкой в четверть волны** (пластинкой  $\lambda/4$ ). Знак «+» соответствует отрицательным кристаллам, знак «-» – положительным. Плоскополяризованный свет, пройдя пластинку  $\lambda/4$ , на выходе превращается в *эллиптически поляризованный* (в частном случае *циркулярно поляризованный*).

Пластинка, для которой

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

называется **пластинкой в полволны** (пластинкой  $\lambda/2$ ) и т. д.



### 3.8. Искусственная оптическая анизотропия

**Искусственная оптическая анизотропия** – явление возникновения анизотропных свойств у оптических изотропных тел под действием механических напряжений (*одностороннее сжатие или растяжение*), электрических полей (*эффект Керра*) и магнитных полей (*эффект Коттона – Мутона*).

**Анизотропия при деформации.** Мерой возникающей оптической анизотропии служит разность показателей преломления *o*- и *e*-лучей. Эта разность пропорциональна напряжению  $\sigma$  в данной точке тела [т. е. силе приходящейся на единицу площади  $\sigma = F/S$ ]:

$$n_o - n_e = k\sigma, \quad (3.9)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств вещества.

[При наблюдении прозрачного деформированного образца (например, модель какой-либо детали или конструкции пластинки) в скрещенных поляризаторе ( $P$ ) и анализаторе ( $A$ ) он оказывается окрашенным, причем окраска (цветные полосы) зависит от степени деформации. По расположению полос можно судить о распределении напряжений внутри образца].

**Эффект Керра** – оптическая анизотропия веществ под действием электрического поля (1875 г.) – объясняется различной поляризуемостью молекул жидкости по разным направлениям. Если приложить разность потенциалов  $U$  к **ячейке Керра** – кювете с исследуемой жидкостью (например, нитробензолом), которая размещена между скрещенными поляризатором ( $P$ ) и анализатором ( $A$ ), и в которую помещены пластины конденсатора – то жидкость становится двоякопреломляющей и свет проходит через анализатор (рис. 57). При отсутствии электрического поля свет через систему не проходит. При изменении  $U$  между электродами меняется степень анизотропии вещества, следовательно, и интенсивность света, прошедшего через анализатор.

Разность показателей преломления *o*- и *e*-лучей:

$$n_o - n_e = B\lambda_0 E^2 = kE^2, \quad (3.10)$$

где  $E$  – напряженность электрического поля;  $\lambda_0$  – длина волны света в вакууме;  $B = k/\lambda_0$  – **постоянная Керра** [зависит от  $T$ ,  $\lambda_0$  и природы вещества].

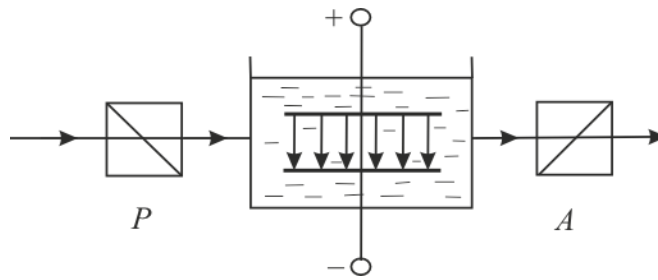


Рис. 57

**Эффект Коттона – Мутона** (1907 г.) – магнитный аналог эффекта Керра – возникновение оптической анизотропии у некоторых изотропных веществ при помещении их в сильное внешнее магнитное поле. При этом разность показателей преломления *o*- и *e*-лучей:

$$n_o - n_e = C \lambda_0 H^2 = k H^2, \quad (3.11)$$

где  $H$  – напряженность внешнего магнитного поля;  $\lambda_0$  – длина волны света в вакууме;  $C = k/\lambda_0$  – **постоянная Коттона – Мутона** [зависит от  $T$ ,  $\lambda_0$  и природы вещества].

### 3.9. Вращение плоскости поляризации

**Оптически активные вещества** – вещества, в которых при прохождении через них света происходит вращение плоскости поляризации. К числу таких веществ принадлежат кристаллические тела (например, кварц, сахар, киноварь), чистые жидкости (скипидар, никотин) и растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях (водные растворы сахара, винной кислоты др.).

Угол поворота плоскости поляризации для *оптически активных кристаллов и чистых жидкостей*

$$\varphi = \alpha l, \quad (3.12)$$

для *оптически активных растворов*

$$\varphi = [\alpha] Cl, \quad (3.13)$$

где  $l$  – расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе;  $\alpha$  – постоянная вращения;  $[\alpha]$  – удельная постоянная вращения – численно равна углу поворота плоскости поляризации света слоем оптически активного вещества

единичной толщины (единичной концентрации – для растворов);  $C$  – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе,  $\text{кг/м}^3$ .  $\alpha$  и  $[\alpha]$  зависят от природы вещества, температуры и длины волны света в вакууме (*дисперсия вращательной способности*).

В зависимости от направления вращения плоскости поляризации оптически активные вещества подразделяются на *право-* и *левоповорачивающие*. [В первом случае плоскость поляризации, если смотреть навстречу лучу, вращается вправо (по часовой стрелке), во втором – влево (против часовой стрелки). Существуют право- и левоповорачивающий кварц, право- и левоповорачивающий сахар и т. д. Согласно теории О. Френеля (1817 г.), скорость распространения света в оптически активных веществах различна для лучей, поляризованных по кругу вправо и влево. *Направление вращения (относительно луча) не зависит от направления луча*].

Явление вращения плоскости поляризации и формула (3.12) лежат в основе определения концентрации растворов оптически активных веществ, называемого *поляризацией* (или *сахариметрией*). Для этого используется установка, показанная на рис 58. [Между скрещенными поляризатором ( $P$ ) и анализатором ( $A$ ), дающими темное поле зрения, поместить оптически активное вещество (*кювету с раствором сахара*), то поле зрения  $A$  просветляется. При повороте  $A$  на некоторый угол  $\varphi$  – *угол поворота плоскости поляризации света, прошедшего через поляризатор* – можно вновь получить темное поле зрения. Так как поворотом  $A$  можно получить темное поле зрения, то свет, прошедший через оптически активное вещество, является *плоскополяризованным*].

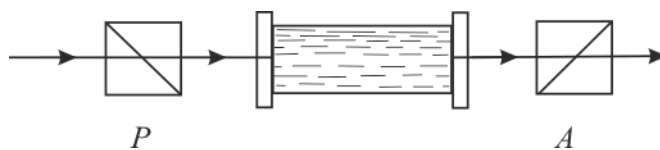


Рис. 58

По найденному углу поворота плоскости поляризации  $\varphi$  и известному значению  $[\alpha]$  из (3.12) находится концентрация растворенного вещества.

## Примеры решения задач

**3.1.** Найдите угол преломления естественного света при его падении на кристалл кварца ( $n_2 = 1,54$ ) под углом полной поляризации.

**Дано:**  $n_2 = 1,54$ ;  $n_1 = 1$ .

**Найти:**  $i_2$ .

**Решение.** При падении естественного света на поверхность диэлектрика под углом  $i_B$  (угол полной поляризации) отраженный свет от диэлектрика будет полностью поляризован. По закону Брюстера

$$tgi_B = \frac{n_2}{n_1} = n_2, \quad (1)$$

где  $n_1 = 1$  и  $n_2$  – соответственно абсолютные показатели преломления воздуха (вакуума) и кварца;  $i_B$  – угол Брюстера.

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны ( $tgi_B = \sin i_B / \cos i_B$ ;  $n_{21} = \sin i_B / \sin i_2$ , откуда  $\cos i_B = \sin i_2$ ).

Следовательно,

$$tgi_B = 1,54,$$

откуда  $i_B = \arctg 1,54 = 57^\circ$ .

Тогда, угол преломления

$$i_2 = 180^\circ - 90^\circ - i_B = 33^\circ.$$

**Ответ:**  $i_B = 33^\circ$ .

**3.2.** Найдите, во сколько раз возрастет интенсивность естественного света, прошедшего через два поляроида, если угол между плоскостями поляризации поляроидов  $69^\circ$  уменьшить в три раза.

**Дано:**  $\alpha_1 = 69^\circ$ ;  $\alpha_2 = \alpha_1/3 = 23^\circ$ .

**Найти:**  $I_2/I_1$ .

**Решение.** Интенсивность света, прошедшего через два поляроида,

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 \alpha. \quad (1)$$

Интенсивности  $I_1$  и  $I_2$ :

$$I_1 = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 \alpha_1; \quad I_2 = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 \alpha_2,$$

откуда

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1}. \quad (2)$$

Проведя вычисления, найдем:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2 23^\circ}{\cos^2 69^\circ} = \frac{(0,9205)^2}{(0,3584)^2} = 6,597.$$

**Ответ:**  $I_2/I_1 = 6,597$ .

**3.3.** Раствор сахара с концентрацией  $0,24 \text{ г/см}^3$  в трубке длиной  $22 \text{ см}$  поворачивает плоскость поляризации монохроматического света на  $28^\circ 18'$ . Другой раствор в трубке длиной  $16 \text{ см}$  поворачивает плоскость поляризации на  $18^\circ 24'$ . Найдите концентрацию сахара во втором растворе.

**Дано:**  $C_1 = 0,24 \text{ г/см}^3 = 240 \text{ кг/м}^3$ ;  $l_1 = 0,22 \text{ м}$ ;  $\varphi_1 = 28^\circ 18' = 28,3^\circ$ ;  $l_2 = 0,16 \text{ м}$ ;  $\varphi_2 = 18^\circ 24' = 18,4^\circ$ .

**Найти:**  $C_2$ .

**Решение.** Некоторые вещества (например, водный раствор сахара, скипидар, винная кислота и др.), называемые *оптически активными*, обладают способностью вращать плоскость поляризации.

Угол поворота плоскости поляризации для оптически активных растворов определяется по формуле:

$$\varphi = [\alpha]Cl, \quad (1)$$

где  $l$  – расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе (в нашем случае – «длина трубки»);  $[\alpha]$  – удельное вращение [численно равно углу поворота плоскости поляризации света слоем оптически активного вещества единичной толщины (единичной концентрации – для растворов)];  $C$  – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе,  $\text{кг/м}^3$ .

Угол поворота плоскости поляризации для раствора с концентрацией  $C_1$ :

$$\varphi_1 = [\alpha]C_1l_1, \quad (2)$$

откуда удельное вращение

$$[\alpha] = \frac{\varphi_1}{C_1l_1}. \quad (3)$$

Тогда

$$\varphi_2 = [\alpha]C_2l_2 = \frac{\varphi_1}{C_1l_1}C_2l_2, \quad (4)$$

откуда

$$C_2 = \frac{\varphi_2 C_1 l_1}{\varphi_1 l_2}. \quad (5)$$

Таким образом, искомая концентрация сахара во втором растворе:

$$C_2 = \frac{18,4^\circ \cdot 240 \cdot 0,22}{28,3^\circ \cdot 0,16} = 214,558 \approx 214,56 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

**Ответ:**  $C_2 = 214,56 \text{ кг/м}^3$ .

## Задачи

27. Найдите угол преломления естественного света при его падении на кристалл рубина ( $n = 1,76$ ) под углом полной поляризации. Ответ:  $29^{\circ}36'$

28. Найдите показатель преломления рубина, если при отражении от него света, отраженный луч полностью поляризован при угле преломления  $29^{\circ}36'$ .

Ответ: 1,76

29. На поверхность стеклянной призмы под углом  $30^{\circ}$  падает пучок естественного света. Найдите с помощью формул Френеля степень поляризации *отраженного* и *преломленного* света. Ответ: 0,4621; 0,0564

30. На поверхность пластинки из диэлектрика под углом полной поляризации падает пучок естественного света. Степень поляризации *преломленного* света составляет 0,189. Найдите коэффициент пропускания света. Ответ: 0,84

31. Найдите угол между падающим и преломленным лучами, если известно, что естественный свет падает из воздуха на прозрачное вещество с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 4$ , и при этом *отраженный* свет полностью плоско поляризован. Ответ:  $90^{\circ}$

32. Найдите, во сколько раз возрастет интенсивность естественного света, прошедшего через два поляроида, если угол между плоскостями поляризации поляроидов  $72^{\circ}$  уменьшить в четыре раза. Ответ: 9,47

33. Естественный свет падает на поляроид с коэффициентом поглощения 0,6. Найдите, во сколько раз интенсивность падающего света больше интенсивности света, прошедшего поляроид. Ответ: 5

34. Найдите, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, прошедшего через систему «поляризатор и анализатор» (два николя), плоскости поляризации которых составляют угол  $30^{\circ}$ . Каждый николю поглощает 8,5 % света, падающего на него. Ответ: 3,19

35. Пренебрегая поглощением света, найдите угол между плоскостями пропускания системы двух поляроидов, если известно, что интенсивность естественного света после прохождения этой системы ослабляется в четыре раза. Ответ:  $45^{\circ}$

36. Пренебрегая поглощением света, найдите угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор и анализатор, уменьшилась в 3,5 раза.

Ответ:  $40,89^{\circ} \approx 40^{\circ}54'$

## Лекция 4. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

**Квантовая оптика** – раздел оптики, занимающийся изучением явлений, в которых проявляются квантовые свойства света. [Зарождение квантовой теории света относится к 1900 г., когда М. Планк для объяснения спектрального распределения электромагнитной энергии, излучаемой тепловым источником, постулировал поглощение и испускание ее дискретными порциями. Идея дискретности легла в основу вывода формулы, носящей его имя, и послужила толчком для создания квантовой механики].

Колебания электрических зарядов, входящих в состав вещества, обуславливают электромагнитное излучение, которое сопровождается потерей энергии веществом. При рассеянии и отражении света формирование вторичных световых волн и продолжительность излучения веществом происходит за время, сравнимое с периодом световых колебаний.

Если излучение продолжается в течение времени, значительно превышающем период световых колебаний, то возможны *два типа излучения*:

- 1) *тепловое излучение* (см. п. 4.1);
- 2) *люминесценция* – неравновесное излучение, избыточное при данной температуре над тепловым излучением тела и имеющее длительность, большую периода световых колебаний.

### 4.1. Тепловое излучение

**Тепловое излучение** – электромагнитное излучение, возникающее за счет *внутренней энергии (энергии теплового движения атомов и молекул вещества)* излучающего тела и зависящее только от температуры и оптических свойства тела. Тепловое излучение присуще *всем телам при температуре выше 0 К*. Оно характеризуется сплошным спектром. При высоких температурах излучаются короткие (*видимые и ультрафиолетовые*) электромагнитные волны, при низких – преимущественно длинные (*инфракрасные*). *Тепловое излучение равновесно* – тело в единицу времени поглощает столько же энергии, сколько и излучает. [Если

из любого материала сделать замкнутую полость и поддерживать температуру ее стенок постоянной, то система «стенка + излучение» придет в состояние термодинамического равновесия, и в объеме полости установится равновесное тепловое излучение. Свойства равновесного излучения полностью определяются температурой стенок и не зависят от их материала. Равновесное излучение однородно и изотропно].

**Спектральная плотность энергетической светимости тела** – мощность излучения с единицы площади поверхности тела в интервале частот единичной ширины:

$$R_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}^{\text{изл}}}{d\nu}, \quad (4.1)$$

где  $dW_{\nu,\nu+d\nu}^{\text{изл}}$  – энергия электромагнитного излучения, испускаемого за единицу времени (*мощность излучения*) с единицы площади поверхности тела в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ .

Единица спектральной плотности энергетической светимости  $R_{\nu,T}$  – *джоуль на метр в квадрате* [Дж/м<sup>2</sup>].

Формулу (4.1) можно представить в виде функции длины волны:

$$dW_{\nu,\nu+d\nu}^{\text{изл}} = R_{\nu,T}d\nu = R_{\lambda,T}d\lambda. \quad (4.2)$$

Так как  $c = \lambda\nu$ , то

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c}$$

[знак «−» указывает на то, что с возрастанием одной из величин ( $\nu$  или  $\lambda$ ) другая величина убывает]. Таким образом,

$$R_{\nu,T} = R_{\lambda,T} \frac{\lambda^2}{c}. \quad (4.3)$$

**Интегральная энергетическая светимость** (*интегральная излучательность*) или *энергетическая светимость тела по  $\nu$* :

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu,T} d\nu. \quad (4.4)$$

Способность тел поглощать падающее на них излучение характеризуется **спектральной поглощательной способностью**



$$A_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,\nu+d\nu}^{\text{погл}}}{dW_{\nu,\nu+d\nu}}, \quad (4.5)$$

показывающей, какая доля энергии, приносимой за единицу времени на единицу площади поверхности тела падающими на нее электромагнитными волнами с частотами от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , поглощается телом;  $A_{\nu,T}$  – величина безразмерная. Величины  $R_{\nu,T}$  и  $A_{\nu,T}$  зависят от природы тела, его термодинамической температуры  $T$  и при этом различаются для излучений с различными частотами  $\nu$ .

**Абсолютно черное тело** – тело, способное полностью поглощать все падающее на него электромагнитное излучение во всех диапазонах и ничего не отражающее [термин был введен Г. Кирхгофом в 1862 г.]. Спектр излучения абсолютно черного тела определяется только его температурой. Спектральная поглощательная способность черного тела для всех частот и температур тождественно равна единице ( $A_{\nu,T}^{\text{ч}} \equiv 1$ ). [Абсолютно черных тел в природе нет, однако такие тела, как сажа (поглощает до 99 % падающего излучения), платиновая чернь и черный бархат в определенном интервале частот близки к ним].

Моделью черного тела может служить замкнутая полость с небольшим отверстием  $O$ , внутренняя поверхность которой зачернена (рис. 59). Луч, попавший внутрь такой полости, полностью поглощается.

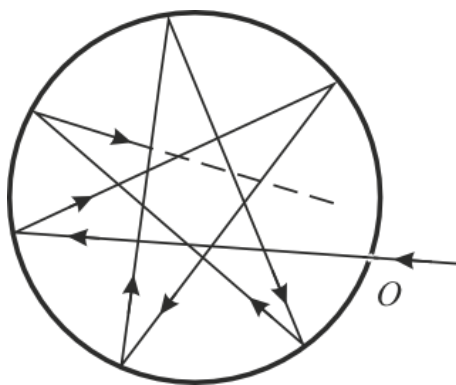


Рис. 59

**Серое тело** – тело, поглощательная способность которого меньше единицы ( $A_{\nu,T}^{\text{с}} = A_T = \text{const} < 1$ ), но одинакова для всех частот  $\nu$  и зависит только от температуры  $T$ , материала и состояния поверхности тела.

## 4.2. Законы Кирхгофа, Стефана – Больцмана и Вина

**Закон Кирхгофа** (1859 г): *отношение спектральной плотности энергетической светимости ( $R_{\nu,T}$ ) к спектральной поглощательной способности ( $A_{\nu,T}$ ) не зависит от природы тела; оно является для всех тел универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры*

$$\frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = r_{\nu,T}. \quad (4.6)$$

Для черного тела  $A_{\nu,T}^{\text{ч}} \equiv 1$ , поэтому из закона Кирхгофа (4.6) вытекает  $R_{\nu,T} = r_{\nu,T}$ . Таким образом, **универсальная функция Кирхгофа**  $r_{\nu,T}$  есть не что иное, как *спектральная плотность энергетической светимости черного тела* ( $r_{\nu,T}$ ). [Нахождение явной зависимости  $r_{\nu,T}$  от частоты и температуры является важной задачей теории теплового излучения. Из закона Кирхгофа следует, что как бы сильно не изменялись  $R_{\nu,T}$  и  $A_{\nu,T}$  при переходе от одного тела к другому их отношение для всех тел одинаково, а именно, равно спектральной плотности энергетической светимости черного тела  $r_{\nu,T}$  при той же температуре и частоте].

Используя закон Кирхгофа [см. (4.6)], выражение для энергетической светимости тела (4.4) можно записать в виде

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu,T} d\nu = \int_0^{\infty} R_{\lambda,T} d\lambda = \int_0^{\infty} A_{\nu,T} r_{\nu,T} d\nu. \quad (4.7)$$

Для серого тела

$$R_T^{\text{с}} = A_T \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = A_T R_e, \quad (4.8)$$

где

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu \quad (4.9)$$

– **энергетическая светимость черного тела** (зависит только от температуры).

Закон Кирхгофа описывает только тепловое излучение. Излучение, которое закону Кирхгофа не подчиняется, не является тепловым.

Согласно **закону Стефана – Больцмана** (1884 г.),

$$R_e = \sigma T^4 \quad (4.10)$$

– энергетическая светимость черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры.

Постоянная  $\sigma$  называется **постоянной Стефана – Больцмана**:

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$$

[ее экспериментальное значение]. Закон Стефана – Больцмана, определяя зависимость  $R_e$  от температуры  $T$ , не дает ответа относительно спектрального состава излучения черного тела.

Согласно **закону смещения Вина** (1893 г.),

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (4.11)$$

– длина волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\lambda,T}$  черного тела, обратно пропорциональна его термодинамической температуре  $T$ .

Постоянная  $b$  называется **постоянной Вина**:

$$b = 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$$

[ее экспериментальное значение].

[Из экспериментальных кривых зависимости функции  $r_{\lambda,T}$  от длины волны  $\lambda$  (согласно (4.3)  $r_{\lambda,T} = c \cdot r_{\nu,T}/\lambda^2$ ) при различных температурах (рис. 60) следует, что распределение энергии в спектре черного тела является неравномерным.

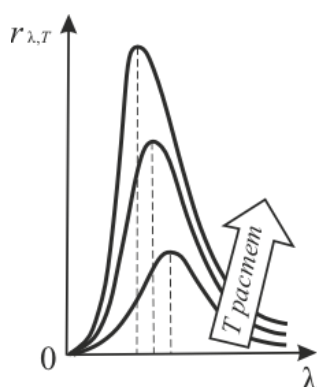


Рис. 60

Все кривые имеют явно выраженный максимум, который по мере повышения температуры смещается в сторону более коротких длин волн. Площадь, ограниченная кривой зависимости  $r_{\lambda,T}$  от  $\lambda$  и осью абсцисс, пропорциональна энергетической светимости  $R_e$  черного тела и, следовательно, по закону Стефана – Больцмана, четвертой степени температуры].

Выражение (4.11) показывает смещение положения максимума функции  $r_{\lambda,T}$  по мере возрастания температуры  $T$  в область коротких длин волн  $\lambda$ . Закон Вина объясняет, почему при понижении температуры нагретых тел в их спектре все сильнее преобладает длинноволновое излучение (например, переход белого каления в красное при остывании металла).

### 4.3. Формулы Рэлея – Джинса и Планка

Применяя к тепловому излучению *классический закон равномерного распределения энергии по степеням свободы*, Д. Рэлей и Д. Джинс (1900 г.) получили выражение для спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\nu,T}$  черного тела от частоты:

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT \quad (4.12)$$

– *формула Рэлея – Джинса*; где  $\langle \varepsilon \rangle = kT$  – средняя энергия осциллятора с собственной частотой.

Как показал опыт, формула (4.12) согласуется с экспериментальными данными только в области достаточно малых частот и больших температур. В области больших частот формула Рэлея – Джинса резко расходится с экспериментом, а также с законом смещения Вина (рис. 61).

Оказалось также, что энергетическая светимость  $R_e$  черного тела [см. (4.9)] с использованием формулы Рэлея – Джинса приводит к абсурдному результату – к «*ультрафиолетовой катастрофе*»:

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = \frac{2\pi kT}{c^2} \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty,$$

в то время как по закону Стефана – Больцмана (4.10)  $R_e \sim T^4$ .

Таким образом, в рамках классической физики не удалось объяснить законы распределения энергии в спектре черного тела.

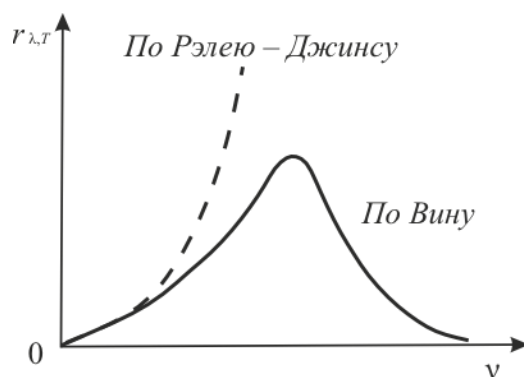


Рис. 61

В области больших частот  $\nu$  хорошее согласие с опытом дает **формула Вина (закон излучения Вина)** [1896 г.]:

$$r_{\nu, T} = C\nu^3 A e^{-\frac{A\nu}{T}}, \quad (4.13)$$

где  $r_{\nu, T}$  – спектральная плотность энергетической светимости черного тела;  $C$  и  $A$  – постоянные величины.

В современных обозначениях с использованием *постоянной Планка* ( $h$ ), **закон излучения Вина** (4.13) может быть записан в виде

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (4.14)$$

Согласующееся с опытными данными выражение для спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\nu, T}$  черного тела было выведено М. Планком (1900 г.). Планк отказался от установившегося положения классической физики, согласно которому энергия любой системы может изменяться непрерывно, т. е. принимать любые сколько угодно близкие значения.

Согласно **квантовой гипотезе Планка**, свет испускается в виде отдельных порций – квантов, причем энергия кванта

$$\varepsilon_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (4.15)$$

где  $\nu$  – частота излучения;  $\lambda$  – длина волны;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – **постоянная Планка**.

Если излучение испускается порциями  $h\nu$ , то его энергия  $\varepsilon$  может принимать лишь определенные дискретные значения, кратные целому числу элементарных порций энергии  $\varepsilon_0$ :

$$\varepsilon = n h \nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.16)$$

[Так как энергия кванта пропорциональна частоте осциллятора, то при данной температуре колебания высоких частот возбуждаются с очень малой вероятностью и их вклад в энергию излучения оказывается ничтожно малым. Это разрешает проблему «ультрафиолетовой катастрофы»]. Согласно **формуле Планка** (1900 г.), спектральная плотность энергетической светимости черного тела

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (4.17)$$

или

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}, \quad (4.18)$$

где  $\langle \varepsilon \rangle = 1/(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1) = 1/(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1)$  – средняя энергия осциллятора [учли, что  $c = \lambda\nu$  и  $r_{\lambda,T} = r_{\nu,T} \cdot c/\lambda^2$ ].

Формула Планка (4.17) очень хорошо согласуется с экспериментальными данными и полностью описывает особенности излучения черного тела во всем интервале частот и температур. Из формулы Планка могут быть выведены все рассмотренные ранее частные законы, описывающие тепловое излучение, например при  $h\nu \ll kT$  (в области малых частот)  $e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$  – формула (4.17) переходит в формулу Рэля – Джинса (4.12) и т. д. Из формулы Планка, зная универсальные постоянные  $h$ ,  $k$  и  $c$ , можно вычислить постоянные Стефана – Больцмана  $\sigma = 2\pi^5 k^4 / (15c^2 h^3)$  и Вина  $b = hc / (4,965k)$ . С другой стороны, зная экспериментальные значения  $\sigma$  и  $b$ , можно вычислить значения  $h$  и  $k$  (так было впервые найдено числовое значение  $h$ ).

Теоретический вывод формулы (4.17) М. Планк изложил 14.12.1900 г. на заседании Немецкого физического общества. Этот день стал датой рождения квантовой физики.

#### 4.4. Фотоэлектрический эффект (фотоэффект)

**Фотоэффект** – испускание электронов веществом (металлом, полупроводником, диэлектриком) под действием электромагнитного излучения (*фотонов*). [Открыт в 1887 г. Г. Герцем. Первые фундаментальные исследования фотоэффекта, выполнены А.Г. Столетовым (1888 г.) на установке, принципиальная схема которой приведена на рис. 62. Ф. Ленард (1899 г.) доказал, что при освещении металлов из них испускаются электроны. Первое теоретическое объяснение законов фотоэффекта дал А. Эйнштейн (1905 г.)].

Различают фотоэффект *внешний, внутренний и вентильный*.

**Внутренний фотоэффект** – это вызванные электромагнитным излучением переходы электронов *внутри полупроводника или диэлектрика* из связанных состояний в свободные без вылета наружу. [В результате концентрация носителей тока внутри тела увеличивается, что приводит к возникновению *фотопроводимости* (повышению проводимости полупроводника или диэлектрика при его освещении) или к возникновению ЭДС].

**Вентильный фотоэффект** (разновидность внутреннего фотоэффекта) – возникновение ЭДС (*фото-ЭДС*) при освещении контакта двух разных полупроводников или полупроводника и металла (при отсутствии внешнего электрического поля).

**Внешний фотоэффект.** Два электрода (рис. 62) – катод *K* из исследуемого металла и анод *A* – в вакуумной трубке подключены к батарее так, что с помощью потенциометра *R* можно изменять не только значение, но и знак подаваемого на них напряжения. Ток, возникающий при освещении катода монохроматическим светом (через кварцевое окошко), измеряется включенным в цепь миллиамперметром (mA).

Облучая катод светом различных длин волн, Столетов пришел к следующим *заключениям*: 1) наиболее эффективное действие оказывает ультрафиолетовое излучение; 2) сила тока, возникающего под действием света, пропорциональна его интенсивности; 3) под действием света вещество теряет только отрицательные заряды.

Дж. Томсон (1898 г.) измерил удельный заряд испускаемых под действием света частиц (по отклонению в электрическом и магнитном полях). Эти измерения показали, что под действием света вырываются электроны.

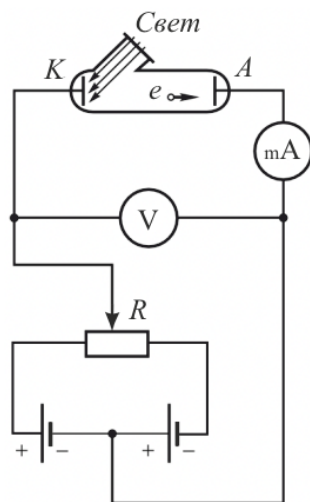


Рис. 62

Зависимость фототока  $I$ , образуемого потоком электронов, испускаемых катодом под действием света, от напряжения  $U$  между катодом и анодом называется **вольт-амперной характеристикой фотоэффекта** (рис. 63).

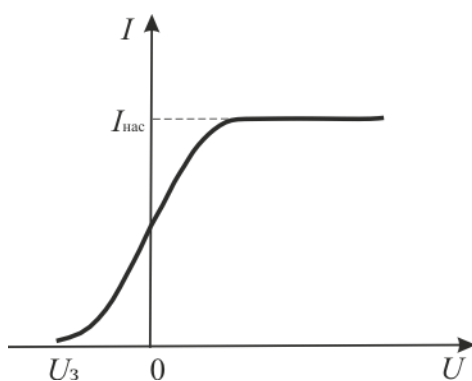


Рис. 63

По мере увеличения  $U$  фототок постепенно возрастает пока не выходит на насыщение. Максимальное значение тока  $I_{\text{нас}}$  – **фототок насыщения** – определяется таким значением  $U$ , при котором все электроны, испускаемые катодом, достигают анода:

$$I_{\text{нас}} = en, \quad (4.19)$$

где  $n$  – число электронов, испускаемых катодом в 1 с. При  $U = 0$  фототок не исчезает, поскольку фотоэлектроны при вылете из катода обладают некоторой



начальной скоростью. Для того чтобы фототок стал равным нулю, необходимо приложить *задерживающее напряжение*  $U_3$ .

При  $U = U_3$  ни один из электронов, даже обладающий при вылете максимальной скоростью  $v_{\max}$ , не может преодолеть задерживающего поля и достигнуть анода. Тогда, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_3, \quad (4.20)$$

где  $m$  – масса электрона.

По вольт-амперной характеристике узнают: *a*) число электронов  $n$ , вырываемых из катода в единицу времени ( $n = I_{\text{нас}}/e$ ); *б*) измерив задерживающее напряжение  $U_3$  – максимальные значения скорости  $v_{\max}$  (кинетической энергии) фотоэлектронов.

#### 4.4.1. Законы фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна

На основе обобщения опытных данных сформулированы следующие законы фотоэффекта.

**I. Закон Столетова:** при фиксированной частоте падающего света число фотоэлектронов, вырываемых из катода в единицу времени, пропорционально интенсивности света (сила фототока насыщения пропорциональна энергетической освещенности  $E_e$  катода).

**II.** Максимальная начальная скорость  $v_{\max}$  (максимальная начальная кинетическая энергия) фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется только его частотой  $\nu$ .

**III.** Для каждого вещества существует *красная граница фотоэффекта*, т. е. минимальная частота  $\nu_0$  света (зависящая от химической природы вещества и состояния его поверхности), ниже которой фотоэффект невозможен.

Классическая волновая теория света не смогла объяснить второй и третий законы фотоэффекта. [Вырывание электронов из металла должно происходить благодаря

их «раскачиванию» в электрическом поле световой волны. Тогда не ясно, почему максимальная начальная скорость  $v_{\max}$  (максимальная начальная кинетическая энергия) вылетающих фотоэлектронов зависит от частоты света, а не от амплитуды колебаний вектора  $\vec{E}$  световой волны и связанной с амплитудой интенсивностью волны. Наличие «красной границы» фотоэффекта также несовместимо с волновой теорией, так как свет любой частоты, но достаточно большой интенсивности должен был бы вырывать электроны из металла].

Кроме того, в рамках этой теории выглядела необъяснимой **безынерционность фотоэффекта** – полное отсутствие задержки между началом облучения ( $\nu \geq \nu_0$ ) и возникновением тока – объясняется тем, что передача энергии при столкновении фотона с электроном происходит почти мгновенно.

Объяснение законов фотоэффекта было дано А. Эйнштейном (1905 г.). Он опирался на квантовую гипотезу М. Планка (см. п. 4.3), но пошел гораздо дальше, предположив, что кванты световой энергии поглощаются целиком отдельными электронами [каждый квант поглощается только одним электроном – поэтому число вырванных с поверхности вещества фотоэлектронов должно быть пропорционально интенсивности света (I закон фотоэффекта)].

Энергия  $\varepsilon_0 = h\nu$  падающего фотона расходуется на совершение электронном **работы выхода**  $A$  из металла – *минимальная энергия, необходима для удаления электрона из вещества* – и на сообщение вылетевшему фотоэлектрону кинетической энергии  $E_k = mv_{\max}^2/2$ . По закону сохранения энергии,

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2} \quad (4.21)$$

– **уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.**

Из (4.21) следует: *а)* максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона линейно растет с увеличением частоты  $\nu$  падающего излучения и не зависит от его интенсивности (числа фотонов), так как ни  $A$ , ни  $\nu$  от интенсивности света не зависят (II закон фотоэффекта); *б)* если  $h\nu < A$  (т. е. энергия падающего фотона, меньше работы выхода электрона из металла), то внешний фотоэффект не происходит – **красная граница фотоэффекта**

$$\nu_0 = \frac{A}{h} \quad (4.22)$$

– зависит лишь от работы выхода электрона, т. е. от химической природы вещества и состояния его поверхности (III закон фотоэффекта).

Уравнение Эйнштейна (4.21) можно записать в виде

$$h\nu = h\nu_0 + eU_3 \quad (4.23)$$

или

$$eU_3 = h(\nu - \nu_0) \quad (4.24)$$

[учли (4.20) и (4.22)].

Энергию фотона  $\varepsilon_0$  и работу выхода  $A$  принято выражать во внесистемных единицах – *электронвольтах* [эВ]. 1 эВ равен энергии, приобретенной электроном при прохождении им разности потенциалов – 1 В:  $1 \text{ эВ} = 1,60022 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ . Если, например, задерживающее напряжение равно  $-3,5 \text{ В}$ , то максимальная кинетическая энергия электронов равна  $3,5 \text{ эВ}$ .

#### 4.5. Энергия и импульс фотона

Согласно гипотезе Эйнштейна (см. п. 4.4.2), свет испускается, поглощается и распространяется дискретными порциями (квантами). Это означает, что в процессе поглощения свет ведет себя как локализованная частица [ее назвали *фотоном* (Г. Льюис, 1929 г.)] с энергией

$$\varepsilon_0 = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}, \quad (4.25)$$

где  $\hbar = h/2\pi$  – постоянная Планка [ $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ ].

*Фотон* – особенная частица, не описываемая никакой классической моделью: *масса покоя фотона равна нулю, энергия покоя  $E_0$  фотона* [см. (6.29) кн. 1] *равна нулю; фотон всегда движется со скоростью  $c$ .*

Связь между энергией и импульсом *безмассовой частицы* дается теорией относительности (см. (6.28) кн. 1)

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

[Из формулы следует, что для любой частицы с массой  $m$ , отличной от нуля, при приближении скорости частицы к скорости света  $c$  энергия частицы должна возрастать до бесконечности ( $E \rightarrow \infty$ ). Поскольку для фотона (он движется со скоростью  $c$ ) энергия конечна, то это возможно тогда и только тогда, когда масса фотона равна нулю].

Как любая безмассовая частица, движущаяся со скоростью  $c$  распространения света в вакууме, *квант света – фотон* – обладает импульсом

$$p = \frac{\varepsilon_0}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (4.26)$$

[учли (6.30) кн. 1 ( $E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ ) и (4.25)].

*Квантовые свойства* света проявляются при испускании, поглощении и рассеянии света; в явлениях, связанных с распространением света, проявляются его *волновые свойства*: выражения (4.26) и (4.25) связывают *корпускулярные* характеристики фотона – импульс и энергию ( $p$  и  $E$ ) с *волновой* характеристикой света – его частотой  $\nu$ . Свет обладает *двойственной природой* (*корпускулярно-волновой дуализм*) [см. п. 4.8]. Такие же свойства проявляют все элементарные частицы.

#### 4.6. Давление света

Давление света было предсказано и теоретически вычислено Дж. Максвеллом (1873 г.) на основе электромагнитной теории света и измерено П.Н. Лебедевым (1898 г.).

*Электромагнитная теория* давала следующее объяснение световому давлению: электрическое поле  $\vec{E}$  электромагнитной волны вызывает в металле ток, на который действует сила Ампера  $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$  со стороны магнитного поля волны; эта сила направлена в сторону распространения волны и является причиной светового давления.

Объяснение давления согласно *квантовой теории*: фотоны, каждый из которых обладает импульсом (4.26), поглощаются или отражаются, передавая свой импульс веществу. При отражении фотона переданный импульс в два раза больше, чем при поглощении (см. п. 8.2 кн. 2).

Давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность,

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho), \quad (4.27)$$

где  $E_e$  – энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени;  $\rho$  – коэффициенте отражения света от поверхности тела;  $w = E_e/c$  – объемная плотность энергии излучения.

[Пусть поток монохроматического излучения частоты  $\nu$  падает перпендикулярно поверхности. Если за 1с на  $1\text{м}^2$  поверхности тела падает  $N$  фотонов, то при коэффициенте отражения  $\rho$  света от поверхности тела отразится  $\rho N$  фотонов, а поглотится  $(1 - \rho)N$  фотонов. Каждый поглощенный фотон передает поверхности импульс  $p = h\nu/c$ , а каждый отраженный фотон  $-2p = 2h\nu/c$  (при отражении импульс фотона изменяется на  $-2p$ ; действительно оказалось, что *давление света на зеркальную поверхность вдвое больше, чем на зачерненную*).

Давление света на поверхность равно импульсу, который передают поверхности в течение 1с  $N$  фотонов:

$$p = \frac{2h\nu}{c}\rho N + \frac{h\nu}{c}(1 + \rho)N = (1 + \rho)\frac{h\nu}{c}N = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho),$$

т. е.

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho)].$$

Формула (4.27), выведенная на основе квантовых представлений, совпадает с выражением, получаемым из электромагнитной (волновой) теории Максвелла (см. п. 8.2 кн. 2).

#### 4.7. Эффект Комптона

Корпускулярные свойства света отчетливо проявляются в *эффекте Комптона* – упругом рассеянии коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и  $\gamma$ -излучений) на свободных (или слабосвязанных) электронах вещества, *сопровождающееся увеличением длины волны ( $\Delta\lambda$ )*. [А. Комpton (1923 г.), изучая прохождение монохроматического рентгеновского излучения в слое вещества с легкими атомами (парафин, графит, бор), обнаружил, что в рассеянном излучении наряду с исходной длиной волны  $\lambda$  появляется более длинноволновое излучение с длиной волны  $\lambda' > \lambda$ ].

Это *увеличение длины волны ( $\Delta\lambda$ ) – комptonовский сдвиг*

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda \quad (4.28)$$

не зависит от длины волны  $\lambda$  падающего излучения и природы рассеивающего вещества, а определяется только углом рассеяния  $\vartheta$ :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad (4.29)$$

где  $\lambda'$  – длина волны рассеянного излучения;  $\lambda_C = h/(m_e c) = 2,426$  пм – **комptonовская длина волны электрона**;  $m_e$  – масса электрона. Энергия фотона с длиной волны  $\lambda_C$  равна энергии покоя электрона  $E_0 = m_e c^2$ . Максимальный эффект соответствует рассеянию фотона на угол  $\vartheta = \pi$ .

[**Эффект Комптона необъясним на основе волновых представлений**. При взаимодействии фотона со свободным электроном процесс поглощения фотона запрещен законами сохранения, но может происходить рассеяние фотона. Если первоначально электрон покоился, то в результате взаимодействия он приобретает некоторую скорость. Закон сохранения энергии требует, чтобы энергия фотона уменьшилась на величину кинетической энергии электрона, что означает, что должна уменьшиться его частота. В то же время с точки зрения волновой теории частота рассеянного света должна совпадать с частотой падающего.

**Эффект Комптона можно объяснить на основе квантовой теории**, рассмотрев столкновение фотона со свободным электроном (рис. 64).

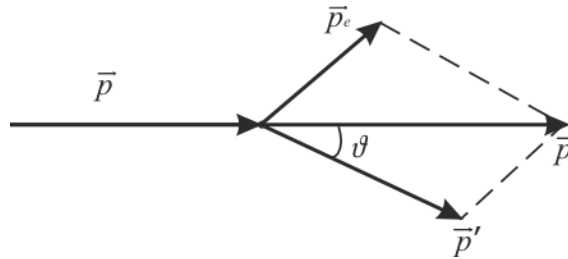


Рис. 64

Фотон (с энергией  $\varepsilon_0 = h\nu$  и импульсом  $p = \varepsilon_0/c = h\nu/c$ ), столкнувшись с электроном (энергия покоя  $E_0 = m_e c^2$ ;  $m_e$  – масса покоя электрона), передает ему часть своей энергии и импульса и изменяет направление движения (рассеивается). Рассеяние фотона на электроне можно рассматривать как *упругое столкновение двух частиц*, подчиняющееся законам сохранения энергии и импульса:

$$E_0 + \varepsilon_0 = E + \varepsilon'_0, \quad (4.30)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_e + \vec{p}', \quad (4.31)$$

где  $\vec{p}_e$  и  $E = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}$  – импульс и энергия электрона отдачи;  $\vec{p}'$  и  $\varepsilon'_0 = h\nu'$  – импульс и энергия рассеянного фотона.

Подставив в выражение (4.30) значения величин и представив (4.31) в соответствии с рис. 64, получим

$$m_e c^2 + hv = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + hv', \quad (4.32)$$

$$p_e^2 = \left(\frac{hv}{c}\right)^2 + \left(\frac{hv'}{c}\right)^2 - 2 \frac{hv}{c} \frac{hv'}{c} \cos \vartheta. \quad (4.33)$$

Решая уравнения (4.32) и (4.33) совместно, получим

$$m_e c^2 (v - v') = hvv'(1 - \cos \vartheta).$$

Поскольку  $v = c/\lambda$ ,  $v' = c/\lambda'$  и  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ , получим

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (4.34)$$

Эффект Комптона не может наблюдаться *в видимой области спектра*, поскольку энергия фотона видимого света сравнима с энергией связи электрона с атомом, при этом даже внешний электрон атома нельзя считать свободным.

#### 4.8. Корпускулярно-волновой дуализм свойств света

*Квантовые свойства* света проявляются в процессах взаимодействия света с веществом – при испускании, поглощении и рассеянии света [явления – излучение черного тела, фотоэффект, эффект Комптона – служат доказательством квантовых (корпускулярных) представлений о свете как о потоке фотонов]. В явлениях, связанных с распространением света, интерференции, дифракция и поляризация, проявляются его *волновые свойства*. Наконец, давление и преломление света объясняются как волновой, так и квантовой теориями. Выражения (4.26) и (4.25) связывают *корпускулярные* характеристики фотона – импульс и энергию ( $p$  и  $E$ ) с *волновой* характеристикой света – его частотой  $\nu$ . Свет обладает *двойственной природой (корпускулярно-волновой дуализм)*.

Чем больше длина волны, тем меньше энергия и импульс фотона и тем труднее обнаруживаются квантовые свойства света (например, существование «красной границы» фотоэффекта). Наоборот, чем меньше длина волны, тем больше энергия и импульс фотона и тем труднее обнаруживаются волновые свойства света (например, дифракция рентгеновских лучей).

## Примеры решения задач

**4.1.** Найдите, во сколько раз изменилась мощность суммарного излучения абсолютно черного тела (АЧТ), если АЧТ было нагрето от температуры  $200\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $500\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

**Дано:**  $t_1 = 200\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $T_1 = 473\text{ K}$ );  $t_2 = 500\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $T_2 = 773\text{ K}$ ).

**Найти:**  $P_2/P_1$ .

**Решение.** Мощность  $P$ , излучаемая поверхностью АЧТ,

$$P = R_e S, \quad (1)$$

где  $R_e$  – энергетическая светимость черного тела;  $S$  – площадь его поверхности.

Энергетическая светимость черного тела по закону Стефана – Больцмана

$$R_e = \sigma T^4, \quad (2)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана – Больцмана.

Из выражений (1) и (2) получаем:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\sigma T_2^4 S}{\sigma T_1^4 S} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4.$$

**Ответ:**  $P_2/P_1 = 7,13$ .

**4.2.** Во сколько раз уменьшится мощность излучения АЧТ, если максимум энергии излучения сместится от фиолетовой ( $\lambda_{\phi} = 380\text{ нм}$ ) границы видимого спектра к его красной ( $\lambda_{\kappa} = 760\text{ нм}$ ) границе?

**Дано:**  $\lambda_{\phi} = 380\text{ нм} = 3,8 \cdot 10^{-7}\text{ м}$ ;  $\lambda_{\kappa} = 760\text{ нм} = 7,6 \cdot 10^{-7}\text{ м}$ .

**Найти:**  $P_{\kappa}/P_{\phi}$ .

**Решение.** Длина волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости черного тела, согласно закону смещения Вина, обратно пропорциональна его термодинамической температуре:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (1)$$

где  $b = 2,89 \cdot 10^{-3}\text{ м} \cdot \text{К}$  – постоянная Вина.

Из (1) определяем температуру, при которой максимум энергии излучения АЧТ приходится на красную  $\lambda_{\kappa}$  и фиолетовую  $\lambda_{\phi}$  границы видимого спектра:

$$T_{\kappa} = \frac{b}{\lambda_{\kappa}}, \quad T_{\phi} = \frac{b}{\lambda_{\phi}}.$$

Мощность, излучаемая поверхностью черного тела,

$$P = R_e S, \quad (2)$$



где  $R_e$  – энергетическая светимость АЧТ,  $S$  – площадь его поверхности.

Согласно закону Стефана – Больцмана, энергетическая светимость АЧТ

$$R_e = \sigma T^4, \quad (3)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана – Больцмана.

Для температур  $T_k$  и  $T_\phi$  имеем:

$$P_k = \sigma T_k^4 S \text{ и } P_\phi = \sigma T_\phi^4 S,$$

откуда искомое отношение мощностей излучения АЧТ запишется в виде:

$$\frac{P_k}{P_\phi} = \left(\frac{T_k}{T_\phi}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_\phi}{\lambda_k}\right)^4. \quad (4)$$

**Ответ:**  $P_k/P_\phi = 1/16$ .

**4.3.** Найдите скорость, с которой должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны 0,663 пм. Масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг.

**Дано:**  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг;  $\lambda = 6,63$  пм =  $6,63 \cdot 10^{-13}$  м;  $T = \varepsilon$ .

**Найти:**  $v$ .

**Решение.** Для установления, является ли электрон классической частицей или релятивистской, следует энергию фотона сравнить с энергией покоя электрона (по условию задачи  $T = \varepsilon$ ).

Энергия покоя электрона

$$E_0 = m_e c^2, \quad (1)$$

где  $m_e$  – масса электрона;  $c$  – скорость распространения света в вакууме.

Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (2)$$

где  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка;  $\nu$  – частота света.

Поделив (2) на (3), получим

$$\frac{\varepsilon}{E_0} = \frac{h}{m_e \lambda c} = 3,66$$

[ $\varepsilon > E_0$  – электрон является релятивистской частицей].

Следовательно, кинетическая энергия электрона определяется релятивистской формулой:

$$T = E - E_0 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_e c^2 = m_e c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (3)$$

Приравняв, согласно условию задачи ( $T = \varepsilon$ ), выражения (3) и (2) для энергии электрона и фотона:

$$m_e c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = \frac{hc}{\lambda}, \quad (5)$$

найдем искомую скорость электрона

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left( \frac{hc}{m_e c \lambda} + 1 \right)^2}}. \quad (6)$$

**Ответ:**  $v = 2,93 \cdot 10^8$  м/с.

**4.4.** Медная пластинка освещается монохроматическим светом с длиной волны 220 нм. Найдите красную границу фотоэффекта ( $\lambda_k$ ) и максимальную скорость фотоэлектронов, зная, что работа выхода для меди 4,47 эВ.

**Дано:**  $\lambda = 220$  нм =  $2,2 \cdot 10^{-7}$  м;  $A_B = 4,47$  эВ =  $7,152 \cdot 10^{-19}$  Дж;  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

**Найти:**  $\lambda_k$ ;  $v_{\max}$ .

**Решение.** Работа выхода  $A_B$  электронов из металла и длина волны  $\lambda_k$  красной границы фотоэффекта связаны соотношением

$$A_B = \frac{hc}{\lambda_k}, \quad (1)$$

откуда

$$\lambda_k = \frac{hc}{A_B}. \quad (2)$$

Согласно уравнению Эйнштейна,

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = A_B + \frac{m_e v_{\max}^2}{2}, \quad (3)$$

откуда искомая максимальная скорость фотоэлектронов

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{m_e} \left( \frac{hc}{\lambda} - A_B \right)}. \quad (4)$$

**Ответ:**  $\lambda_k = 278$  нм;  $v_{\max} = 6,44 \cdot 10^5$  м/с.

**4.5.** Параллельный пучок монохроматического света длиной волны 480 нм падает нормально на плоскую зеркальную поверхность ( $\rho = 1$ ), производя давление 8 мкПа. Найдите концентрацию фотонов в световом пучке и число фотонов, падающих на поверхность площадью 25 см<sup>2</sup> за время 1 с.

**Дано:**  $\lambda = 480 \text{ нм} = 4,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ;  $\rho = 1$ ;  $p = 8 \text{ мкПа} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$ ;  $S = 25 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ ;  
 $t = 1 \text{ с}$ ;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

**Найти:**  $n$ ;  $N$ .

**Решение.** Из формулы для давления света

$$p = w(1 + \rho), \quad (1)$$

где  $w$  – объемная плотность энергии;  $\rho$  – коэффициент отражения, найдем:

$$w = \frac{p}{1 + \rho}. \quad (2)$$

Концентрация  $n$  фотонов в световом пучке численно равна отношению объемной плотности энергии  $w$  к энергии одного фотона  $\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$ :

$$n = \frac{w}{\varepsilon} = \frac{w}{h\nu} = \frac{\lambda w}{hc}. \quad (3)$$

Подставив выражение (2) в формулу (3), получим искомую концентрацию фотонов в световом пучке:

$$n = \frac{\lambda p}{(1 + \rho)hc}. \quad (4)$$

Давление света  $p$  на поверхность определяется по формуле

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho), \quad (5)$$

где  $E_e = h\nu N = hcN/\lambda$  – энергетическая освещенность поверхности (*облученность поверхности*), т. е. энергия всех фотонов, падающих на единицу площади в единицу времени.

Энергия света, падающего на поверхность площадью  $S$  за время  $t$ ,

$$W = E_e St = \frac{pcSt}{(1 + \rho)}. \quad (6)$$

С другой стороны,

$$W = \varepsilon N = \frac{hc}{\lambda} N, \quad (7)$$

где  $N$  – число фотонов.

Приравняв выражения (7) и (8) для энергии  $W$  света,

$$\frac{pcSt}{(1 + \rho)} = \frac{hc}{\lambda} N, \quad (8)$$

найдем искомое число фотонов

$$N = \frac{pSt\lambda}{h(1 + \rho)}. \quad (9)$$

**Ответ:**  $n = 9,65 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$ ;  $N = 7,24 \cdot 10^{20}$ .

**4.6.** Фотон с энергией 0,45 МэВ был рассеян на первоначально покоившемся свободном электроны в результате эффекта Комптона. Найдите кинетическую энергию электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 25 %.

**Дано:**  $\varepsilon = 0,45 \text{ МэВ} = 4,5 \cdot 10^5 \text{ эВ}$ ;  $\Delta\lambda = 0,25\lambda$ .

**Найти:**  $T$ .

**Решение.** Согласно закону сохранения энергии, кинетическая энергия  $T$  электрона отдачи равна разности между энергией падающего фотона  $\varepsilon$  и энергией  $\varepsilon'$  рассеянного фотона:

$$T = \varepsilon - \varepsilon'. \quad (1)$$

Изменение длины волны  $\Delta\lambda$  при комптон-эффекте определяется по формуле

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \vartheta), \quad (2)$$

где  $\lambda$  и  $\lambda'$  – длина волны фотона до и после рассеяния (в результате эффекта Комптона длина волны рассеянного излучения  $\lambda'$  увеличивается, поэтому согласно условию задачи:  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 0,25\lambda$ );  $\lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$  – комптоновская длина волны;  $\vartheta$  – угол рассеяния.

Энергии падающего и рассеянного фотонов соответственно равны:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{и} \quad \varepsilon' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda},$$

откуда

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Учитывая изменение длины волны  $\Delta\lambda$  при комптон-эффекте (по условию задачи  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 0,25\lambda$ , откуда  $\lambda' = 1,25\lambda$ ), получаем:

$$\varepsilon' = \frac{hc}{1,25\lambda} = \frac{hc\varepsilon}{1,25hc} = \frac{\varepsilon}{1,25}. \quad (4)$$

Подставив полученное выражение (4) в формулу (1), найдем

$$T = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1,25}. \quad (5)$$

**Ответ:**  $T = 0,09 \text{ МэВ}$ .

### Задачи

37. В модели абсолютно черного тела (АЧТ) температура стенок полости поддерживается равной 1800 К. Площадь отверстия 1,4 мм<sup>2</sup>. Найдите энергию, излучаемую через отверстие за время 1 мин. Постоянная Стефана – Больцмана  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$ . Ответ: 50 Дж

38. При условии, что Солнце излучает как АЧТ и максимум испускательной способности его приходится на длину волны 480 нм, найдите его энергетическую светимость; мощность, излучаемую его поверхностью; температуру его поверхности. Постоянная Вина  $b = 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ ; постоянная Стефана – Больцмана  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ ; средний радиус Солнца  $r = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$ .

Ответ: 73,48 МВт/м<sup>2</sup>;  $4,58 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$ ; 6020,83 К

39. Найдите поглощательную способность  $a_T$  серого тела (для серого тела поглощательная способность одинакова для всех длин волн излучаемого диапазона), имеющего температуру 1200 К, если с его поверхности площадью 120 см<sup>2</sup> за время 1 мин излучается энергия 72 кДж. Постоянная Стефана – Больцмана  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ .

Ответ: 0,85

40. Найдите количество теплоты, теряемой 100 см<sup>2</sup> поверхности расплавленного титана ( ${}_{22}^{48}\text{Ti}$ ) за время 1 мин, если поглощательная способность титана равна 0,85. Температура плавления титана 1680 °С. Постоянная Стефана – Больцмана  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ .

Ответ: 420,69 кДж

41. Найдите скорость, с которой должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона с длиной волны 380 нм. Постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ ; масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ .

Ответ: 1915,2 м/с

42. Найдите скорость, с которой должен двигаться нерелятивистский протон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны 380 нм. Масса протона  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ; скорость распространения света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

Ответ:  $2,50 \cdot 10^4 \text{ м/с}$

43. Лазер работает в импульсном режиме. Найдите, сколько фотонов содержится в каждом импульсе с энергией 2,84 мкДж. Длина волны этого излучения 700 нм. Постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ ; скорость распространения света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

Ответ:  $10^{13}$

44. Найдите мощность, расходуемую на излучение, если известно, что давление света на зеркальную поверхность (коэффициент отражения поверхности  $\rho = 1$ ), расположенную на расстоянии 2,5 м от лампочки, нормально падающим монохроматическим пучком, равно 8,5 нПа. Скорость распространения света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

Ответ: 100 Вт

45. Найдите частоту света, которым освещается некоторый металл, если фотоэлектроны полностью задерживаются разностью потенциалов 1,8 В. Работа выхода электрона для этого металла равна 2,13 эВ. Постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ ; элементарный заряд  $e = \pm 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

Ответ:  $9,48 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$

46. Найдите, работу выхода электрона и красную границу фотоэффекта, если известно, что фотон с длиной волны 150 нм вырывает с поверхности фотокатода электрон, кинетическая энергия которого 3,79 эВ.

Ответ: 4,5 эВ; 276,4 нм

47. Найдите (в эВ) работу выхода электрона для металла, если известно, что при поочередном освещении поверхности этого металла светом с длинами волн 420 нм и 630 нм, соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в 2,5 раза. Скорость распространения света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Ответ: 1,79 эВ

48. Платина освещается рентгеновскими лучами, длина волны которых 0,85 нм. Найдите скорость фотоэлектронов, если длина волны красной границы фотоэффекта для платины 235 нм. Масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Ответ:  $2,26 \cdot 10^7$  м/с

49. Красная граница фотоэффекта для натрия равна 584 нм. Найдите максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла излучением с длиной волны 284 нм. Скорость распространения света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; элементарный заряд  $e = \pm 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Ответ:  $8,89 \cdot 10^5$  м/с

50. Фотоэффект для некоторого металла прекращается, когда длина световой волны становится больше 820 нм. Найдите отношение максимальных скоростей фотоэлектронов, если на этот металл сначала воздействовать излучением с длиной волны 380 нм (фиолетовая граница видимого спектра), а потом – светом с длиной волны 760 нм (красная граница видимого спектра). Ответ: 3,83

51. Найдите энергию электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с длиной волны 0,12 нм был рассеян на угол  $90^\circ$ . Скорость распространения света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Ответ: 0,69 МэВ

52. Найдите импульс фотона, если длина волны этого фотона равна комптоновской длине волны частицы, имеющей энергию покоя 0,511 МэВ. Скорость распространения света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Ответ:  $2,73 \cdot 10^{-22}$  Н · с

53. Гамма-излучение падает на вещество. При этом длины волн излучения, рассеянных под углами  $30^\circ$  и  $60^\circ$  отличаются друг от друга в 2,5 раза. Считая, что рассеяние происходит на свободных электронах и пренебрегая их начальной кинетической энергией, найдите (в пм) длину волны падающего излучения. Ответ: 0,27 пм

54. В результате эффекта Комптона фотон рассеялся на покоившемся электроне на угол  $60^\circ$ , при этом энергия рассеянного фотона равна 0,171 МэВ. Найдите энергию фотона до рассеяния, кинетическую энергию электрона отдачи и угол, под которым движется электрон отдачи. Энергия покоя электрона 0,512 МэВ. Ответ: 0,205 МэВ; 0,034 МэВ;  $51,46^\circ$

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПО ПЕРВОЙ ЧАСТИ

1. Сформулируйте и поясните основные законы оптики (закон прямолинейного распространения света, закон независимости световых пучков, закон отражения света, закон преломления света). В чем заключается физический смысл абсолютного показателя преломления среды? Что такое относительный показатель преломления?
2. Предельный угол. При каком условии наблюдается полное отражение? Принцип работы светодиодов.
3. Зеркала. Плоское зеркало. Сферические зеркала. Фокусное расстояние, оптический центр, главная оптическая ось, фокусное расстояние выпуклого зеркала.
4. Линзы. Собирающие и рассеивающие линзы. Тонкие линзы. Фокусное расстояние, оптический центр линзы, оптическая сила линзы, фокальная плоскость линзы.
- 5\*. Выведите формулу тонкой линзы.
6. Как осуществляется построение изображения предметов в собирающих и рассеивающих линзах?
7. Основные фотометрические величины и их единицы. Чем отличаются энергетические и световые величины в фотометрии?
8. Основные положения и выводы корпускулярной и волновой теорий света. Принцип Гюйгенса. В чем заключается основная идея теории Планка? Современные представления о двойственной корпускулярно-волновой природе света.
9. Интерференция света. Когерентность световых волн. Оптическая длина пути. Оптическая разность хода. Интерференционное условие максимумов и минимумов.
10. Интерференция света. Когерентность световых волн. Методы наблюдения интерференции света: получение интерференционной картины от двух точечных когерентных источников (метод Юнга).
11. Интерференция света. Когерентность световых волн. Методы наблюдения интерференции света: зеркала Френеля.
12. Интерференция света. Когерентность световых волн. Методы наблюдения интерференции света: бипризма Френеля.
- 13\*. Интерференция света в тонких пленках с параллельными поверхностями. Выражение для оптической разности хода в этом случае.
- 14\*. Интерференция света в тонких пленках с непараллельными поверхностями (клин). Выражение для оптической разности хода в этом случае.
- 15\*. Интерференция в клине между плоскостью и сферической поверхностью (кольца Ньютона). Получите выражение для радиусов темных колец в отраженном свете.

16. Применение интерференции света.
17. Дифракция света. Качественное объяснение дифракции на основе принципа Гюйгенса – Френеля. Каковы дополнения Френеля к принципу Гюйгенса? В чем заключается принцип построения зон Френеля? Принцип действия зонных пластинок.
18. Дифракция Френеля (*дифракция в сходящихся лучах*): а) на круглом отверстии; б) дифракция на диске.
- 19\*. Дифракция Фраунгофера (*дифракция в параллельных лучах*) на одной щели. Зависимость числа зон Френеля, укладывающихся на ширине щели, от угла  $\varphi$ . Напишите формулу для определения положения минимумов в картине дифракции. Центральный дифракционный максимум. Нарисуйте примерный график для интенсивности света на экране в зависимости от расстояния от центра дифракционной картины.
- 20\*. Дифракционная решетка. Одномерная дифракционная решетка. Постоянная (период) дифракционной решетки. Примерная картина дифракции. Условия полной дифракционной картины: главных минимумов, дополнительных минимумов и главных максимумов. Сколько дополнительных минимумов и максимумов возникает при дифракции от: а) шести щелей; б) восьми щелей?
21. Дифракционная решетка как спектральный прибор. Напишите формулу для определения числа щелей, необходимого для разрешения двух длин волн. Как определить наибольший порядок спектра дифракционной решетки?
22. Дисперсия света. Дисперсия вещества. Нормальная и аномальная дисперсии. График (дисперсионная кривая) зависимости показателя преломления  $n$  для прозрачных веществ от длины волны  $\lambda$  при нормальной дисперсии [ $n(\lambda)$ ].
23. Связь дисперсии с поглощением. Поглощение (абсорбция) света. Закон Бугера (зависимость интенсивности света от толщины поглощающего слоя). Коэффициент поглощения. Линейчатый и сплошной спектры поглощения.
24. Эффект Доплера для звуковых и электромагнитных волн (основное отличие эффекта Доплера для световых волн от эффекта Доплера в акустике). Продольный эффект Доплера. Красное и фиолетовое смещения. Поперечный эффект Доплера.
25. Поляризация света. Естественный и поляризованный свет. Степень поляризации. Поляризаторы. Закон Малюса. Анализаторы.
26. Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков. Угол Брюстера.
27. Двойное лучепреломление. Одноосные и двуосные кристаллы. Главная плоскость (главное сечение) кристалла. Поляризационные призмы (*призма Николя*) и поляроиды.



28. Тепловое излучение и его характеристики. Равновесный характер теплового излучения и механизм его возникновения. Спектральная плотность энергетической светимости (излучательности) тела и ее единица. Интегральная энергетическая светимость (интегральная излучательность) (*энергетическая светимость тела*). Спектральная поглотительная способность тела. Абсолютно черное тело (АЧТ). Серое тело.
- 29\*. Закон Кирхгофа. Энергетическая светимость черного тела. Закон Стефана – Больцмана. Постоянная Стефана – Больцмана.
30. График зависимости излучательной способности АЧТ от длины волны и частоты. Закон смещения Вина. Постоянная Вина.
- 31\*. Формула Рэлея – Джинса для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела. Формула Вина (закон излучения Вина).
- 32\*. *Ультрафиолетовая катастрофа*. Квантовая гипотеза Планка. Формула Планка для теплового излучения. Постоянная Планка.
33. Виды фотоэлектрического эффекта. Внешний фотоэффект и его законы.
34. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Красная граница фотоэффекта, ее связь с работой выхода. Вольт-амперная характеристика фотоэффекта.
35. Применение фотоэффекта. Вакуумный фотоэлемент, его вольт-амперная и световая характеристики. Ток насыщения.
- 36\*. Задерживающий потенциал  $U_3$ . График зависимости  $U_3$  от частоты падающего света  $\nu$ . Определите по графику  $U_3(\nu)$  работу выхода и красную границу фотоэффекта.
- 37\*. Задерживающий потенциал  $U_3$ . График зависимости  $U_3$  от частоты падающего света  $\nu$ . Определите по графику  $U_3(\nu)$  постоянную Планка  $h$ .
38. Фотоны. Энергия и импульс фотона. Связь между энергией и импульсом фотона. Энергия и импульс фотона через длину волны  $\lambda$ , частоту  $\nu$  и циклическую частоту  $\omega$ .
39. Фотоны. Энергия и импульс фотона. Определите пределы (в эВ), в которых находится энергия фотонов видимой части спектра ( $\lambda_{\text{ф}} = 400$  нм,  $\lambda_{\text{к}} = 700$  нм,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с).
- 40\*. Давление света. Сравните формулу для давления света, выведенную на основе квантовых представлений, с выражением, получаемым из электромагнитной (волновой) теории Максвелла.
- 41\*. Давление света с точки зрения его корпускулярной природы. Формула для давления, оказываемого фотонами при нормальном падении на плоскую поверхность с коэффициентом отражения  $\rho$ .
- 42\*. Эффект Комптона. Комптоновская длина волны частицы  $\lambda_{\text{с}}$ . Качественное объяснение эффекта Комптона на основе корпускулярных свойств излучения.

43. Законы сохранения энергии и импульса в эффекте Комптона. Векторная диаграмма закона сохранения импульса.

44. Единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения. Двойственная природа электромагнитного излучения. Примеры явлений, в которых *проявляются волновые свойства света*.

45. Единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения. Двойственная природа электромагнитного излучения. Примеры явлений, в которых *проявляются корпускулярные свойства света*.

## Часть 2. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ

### Лекция 5. СТРОЕНИЕ АТОМА

#### 5.1. Модель атома Томсона. Ядерная модель атома

*Атом* (от греч. *atomos* – неделимый) – частица вещества микроскопических размеров и очень малой массы (микрочастица), наименьшая часть химического элемента, являющаяся носителем его свойств.

(Большая советская энциклопедия)

Представление об атомах как неделимых мельчайших частицах вещества возникло еще в античные времена. Однако в начале XX века отсутствовали даже ясные представления о структуре атома, т. е. о массивном ядре и электронных орбитах.

Более привлекательной казалась модель *Дж. Томсона* (1903 г.), в которой масса и положительный заряд равномерно распределены по объему атома, а электроны заключены внутри этого положительного облака – шара радиусом порядка  $10^{-10}$  м, как изюм в пудинге. Суммарный отрицательный заряд электронов равен положительному заряду шара, так что атом в целом нейтрален. Однако последующие эксперименты выявили ошибочность этой модели.

*Ядерная модель атома* была установлена в опытах Э. Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц на атомах тонкой золотой фольги ( $\sim 1$  мкм), проведенных его сотрудниками Х. Гейгером и Э. Марсденом (1909 – 1911 гг.). [Альфа-частицы представляют собой ядра гелия  ${}^4_2\text{He}$ , имеют заряд  $+2e$ , состоят из 4 нуклонов (2 протонов и 2 нейтронов); масса  $\alpha$ -частицы, примерно в 7300 раз больше массы электрона. Альфа-частицы возникают при радиоактивном распаде атомных ядер, а также в различных ядерных реакциях. Альфа-частицы, испускаемые естественно-радиоактивными элементами, имеют энергию от 4 до 11 МэВ. Пучки  $\alpha$ -частиц обладают высокой монохроматичностью (для данного превращения имеют практически одну и ту же скорость,  $\sim 10^7$  м/с)]. Было обнаружено, что часть  $\alpha$ -частиц отклоняется на большие углы и даже летит в обратном направлении

(рис. 65). Это возможно, лишь когда  $\alpha$ -частицы взаимодействуют с *положительным зарядом большой массы и очень малым объемом по сравнению с объемом атома*. Таких частиц было немного (примерно одна из 8000 частиц рассеивалась на угол больше  $90^\circ$ ), но само наличие таких частиц вступало в противоречие с моделью Томсона.

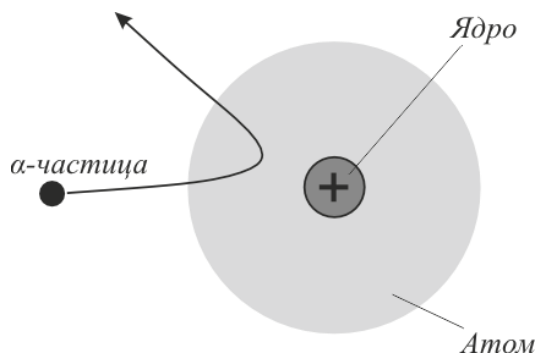


Рис. 65

**Ядерная (планетарная) модель атома Резерфорда (1911 г.).** Согласно этой модели, вокруг *положительного ядра*, имеющего заряд  $Ze$  ( $Z$  – порядковый номер элемента в Периодической системе элементов Менделеева;  $e$  – элементарный заряд), размер  $10^{-15}$ – $10^{-14}$  м и массу, практически равную массе атома, в области с линейными размерами  $\sim 10^{-10}$  м по замкнутым орбитам движется  $Z$  электронов, образуя *электронную оболочку атома*.

[Ядерная модель атома в неразрешимом противоречии с основными представлениями классической механики и электродинамики. Электроны притягиваются к ядру, они не могут покоиться, а должны двигаться вокруг ядра с ускорением. Так, скорость электрона, движущегося по круговой орбите радиусом  $r \approx 10^{-10}$  м, должна быть порядка  $v \approx 10^6$  м/с, а ускорение  $a = v^2/r \approx 10^{22}$  м/с (можно рассчитать по формуле – второй закон Ньютона для электрона, движущегося по окружности под действием кулоновской силы,

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}.$$

Но при движении с ускорением электрон непрерывно излучает электромагнитные волны и за время  $\sim 10^{-10}$  с должен излучать всю энергию и упасть на ядро].

*В рамках классической физики атом не может быть устойчивым.* Кроме того, из теории Резерфорда следует, что спектры атомов должны быть непрерывными, а на самом деле они являются линейными (см. п. 5.2).

## 5.2. Линейчатый спектр атома водорода

Экспериментальные исследования спектров излучения разреженных газов (отдельных атомов) показали, что характерный *линейчатый спектр* каждого элемента представляет собой *серии линий*, положение которых может быть описано простыми эмпирическими формулами. Самым изученным является спектр наиболее простого атома – атома водорода.

Положение линий атома водорода в *видимой области спектра* описываются **формулой И. Бальмера** (1885 г.):

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots), \quad (5.1)$$

или

$$\nu = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots), \quad (5.2)$$

где  $R' = 1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$  и  $R = R'c = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$  – постоянные Ридберга [ $\nu = c/\lambda$ ].

Из (5.1) и (5.2) вытекает, что спектральные линии, различающиеся значениями  $n$ , образуют группу или серию линий, называемую **серией Бальмера**. [С увеличением  $n$  линии серии сближаются; значение  $n = \infty$  определяет границу серии, к которой со стороны больших частот примыкает сплошной спектр].

Позднее, в *ультрафиолетовой области спектра* была обнаружена **серия Лаймана**

$$\nu = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots);$$

в *инфракрасной области спектра*:

<b>серия Пашена</b>	$\nu = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 4, 5, 6, \dots)$
<b>серия Брэкета</b>	$\nu = R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 5, 6, 7, \dots)$
<b>серия Пфунда</b>	$\nu = R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 6, 7, 8, \dots)$
<b>серия Хэмфри</b>	$\nu = R \left( \frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 7, 8, 9, \dots)$

Все приведенные серии в спектре атома водорода могут быть описаны *обобщенной формулой Бальмера*:

$$\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (5.3)$$

где  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  – определяет серию;  $n = m + 1$  – определяет отдельные линии этой серии.

[Исследование более сложных спектров – спектров паров щелочных металлов (например, Li, Na, K) – показало, что они представляются *набором неслучайно расположенных линий*. Й. Ридбергу удалось разделить их на три серии, каждая из которых располагается подобно линиям серии Бальмера].

### 5.3. Постулаты Бора

Н. Бор (1913 г.) попытался связать ядерную модель атома и закономерности линейчатых спектров с квантовой теорией излучения и поглощения света. Полуклассическая *модель Бора* описывает свойства атома водорода и водородоподобных ионов. В основе модели лежат постулаты Бора.

**Первый постулат Бора (*постулат стационарных состояний*)**: электроны могут двигаться только по определенным стационарным (не изменяющимся со временем) орбитам, в соответствии с классическими уравнениями движения, но без излучения энергии.

**Второй постулат Бора**: момент импульса может при этом принимать только дискретные значения  $L_n = n\hbar$ . Для круговых орбит *правило квантования* принимает вид

$$m_e v r_n = n\hbar, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.4)$$

где  $n$  – главное квантовое число;  $m_e$  – масса электрона;  $v$  – его скорость на  $n$ -й орбите радиусом  $r_n$ ;  $\hbar = h/(2\pi)$  – постоянная Планка (см. п. 4.5). Выражение (5.4) называется *правилом квантования орбит по Бору*.

**Третий постулат Бора (*правило частот*)**: при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается (поглощается) один фотон с энергией

$$h\nu = E_n - E_m, \quad (5.5)$$

равной разности энергий соответствующих стационарных состояний [ $E_n$  и  $E_m$  – соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения)].

При  $E_m < E_n$  происходит *излучение фотона* (переход атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией, т. е. переход электрона с более удаленной от ядра орбиты на близлежащую); при  $E_m > E_n$  – *поглощение фотона* (переход атома в состояние с большей энергией, т. е. на более удаленную от ядра орбиту).

#### ***Набор возможных дискретных частот***

$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h} \quad (5.6)$$

квантовых переходов и определяет линейчатый спектр атома.

Впоследствии опытами Д. Франка и Г. Герца (1913 г.) были экспериментально надежно подтверждены первый и второй постулаты Бора.

Теория Бора естественным образом объясняла закономерности в спектрах атомов, однако ее постулаты находились в очевидном противоречии с классической механикой и теорией электромагнитного поля.

### **5.4. Энергия атомов водорода по Бору**

Для движения электрона в атоме водорода по круговой орбите из правила квантования (5.4) [ $m_e v r_n = n\hbar$ ] и уравнения движения

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} \quad (5.7)$$

найдем *скорость электрона на  $n$ -й орбите* и выражение для *радиусов допустимых орбит*:

$$v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{n\hbar} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (5.8)$$

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (5.9)$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная.

Радиус первой орбиты электрона при  $n = 1$ , называемый *первым боровским радиусом* ( $a$ ), равен

$$r_1 = a = \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 52,8 \text{ пм} \quad (5.10)$$

и зависит лишь от фундаментальных постоянных.

Из соотношения (5.10) следует, что

$$r_n = n^2 r_1,$$

т. е. радиусы орбит для стационарных состояний квантованы и равны соответственно  $r_1, 4r_1, 9r_1, \dots$ . Каждый из этих радиусов пропорционален квадрату целого числа  $n$ , называемому *квантовым числом*.

*Полная энергия электрона в атоме водорода* складывается из его *кинетической энергии* [ $m_e v^2 / 2$ ] и *потенциальной энергии* в электростатическом поле ядра [ $-e^2 / (4\pi\varepsilon_0 r)$ ]:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

[учли (5.7)]. Учитывая (5.9), получаем важную формулу теории Бора – *формулу квантования энергии электрона в атоме водорода*

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (5.11)$$

где знак « $\leftarrow$ » означает, что электрон находится в связанном состоянии. Из (5.11) следует, что энергия электрона  $E_n$  в атоме водорода может *принимать только дискретные значения, т. е. энергия атома квантуется*.

Подставив в (5.11) фундаментальные постоянные и выразив энергию в эВ, получим, что

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (эВ)}. \quad (5.12)$$

Состояние с номером  $n = 1$  и минимальной энергией  $E_1 = -13,6$  эВ называется *основным состоянием атома*, остальные значения с  $n > 1$  соответствуют *возбужденными состояниям*. Время жизни возбужденных состояний  $\sim 10^{-8}$  с.



Придавая  $n$  целочисленные значения ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), получаем для атома водорода, согласно формуле (5.12), возможные уровни энергии стационарных состояний электрона, схематически представленные на рис. 66 в виде горизонтальных прямых. С увеличением  $n$  энергетические уровни все больше сближаются и при  $n \rightarrow \infty E \rightarrow 0$ .

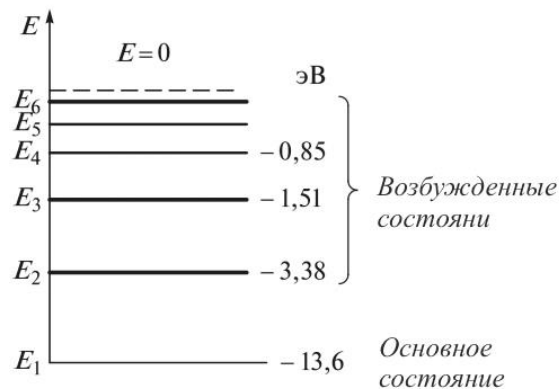


Рис. 66

Электрон в атоме водорода обладает *минимальной энергией* ( $E_1 = -13,6$  эВ) при  $n = 1$  и *максимальной* ( $E_\infty = 0$ ) при  $n = \infty$  [энергия  $E_\infty = 0$  называется *энергией ионизации атома* (при  $E = E_\infty$  происходит отрыв электрона от атома)]; выше уровня  $E = 0$  электрон может иметь любую энергию, так как в данном случае он является свободным.

### 5.5. Спектр атома водорода по Бору

Переход электрона в атоме водорода из стационарного состояния  $n$  (более удаленной орбиты) в стационарное состояние  $m$  с меньшей энергией [см. (5.5)] сопровождается испусканием кванта:

$$h\nu = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

откуда *частота излучения* при различных переходах  $n \rightarrow m$

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (5.13)$$

[формула (5.13) точно совпадает с *обобщенной формулой Бальмера* (5.3)], где

$$R = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \quad (5.14)$$

– точно соответствует по величине *постоянной Ридберга*, найденной из оптических экспериментов (см. п. 5.2).

[Переход электрона с одного уровня на другой (рис. 67), приводящий к образованию различных серий излучения атома водорода, может быть изображен соответствующей стрелкой, начало и конец которой указывают энергетические уровни, между которыми происходит переход. *Серия Лаймана* испускается в результате переходов электрона со второго, третьего и т. д. энергетических уровней ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) на основной ( $m = 1$ ). Переход электронов с возбужденных уровней ( $n = 3, 4, 5, \dots$ ) на уровень  $m = 2$  приводит к *серии Бальмера*, переход с возбужденных уровней ( $n = 4, 5, 6, \dots$ ) на уровень  $m = 3$  – к *серии Пашена* и т. д.].

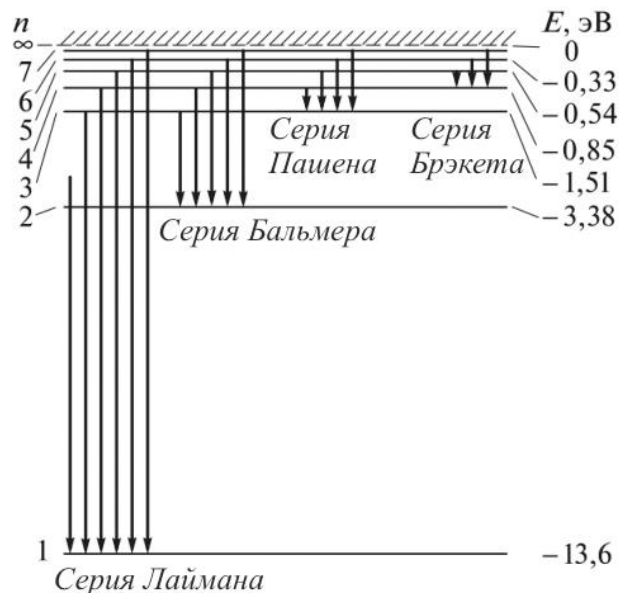


Рис. 67

## 5.6. Водородоподобные ионы

Формулы, полученные для атома водорода, легко обобщаются на случай *водородоподобного иона* – одного электрона в поле заряда ядра  $+Ze$  [это однократно ионизированный гелий  $\text{He}^+$  ( $Z = 2$ ), двукратно ионизированный литий  $\text{Li}^{++}$  ( $Z = 3$ ), трехкратно ионизированный бериллий  $\text{Be}^{+++}$  ( $Z = 4$ ) и т. д.] – заменой во всех формулах  $e^2$  на  $Ze^2$ . Постоянная Ридберга при этом умножается

на  $Z^2$ . Простой пересчет показывает, что энергетический спектр водородоподобного иона получается из (5.12) умножением на  $Z^2$ , а радиус орбит электрона оказывается в  $Z$  раз меньше, чем в атоме водорода. Например, в случае одноэлектронного иона гелия  $\text{He}^+$  энергия электрона принимает значения  $E_n = -4R/n^2$ . Видно, что энергия с номером  $2n$  совпадает с энергией электрона в атоме водорода с номером  $n$ . Это означает, что переход, например, с четвертого уровня на второй должен соответствовать такой же частоте, как переход со второго уровня атома водорода на первый. Анализ спектров показывает, что все соответствующие уровни иона гелия лежат ниже уровня атома водорода примерно на 0,04 %. Это отличие объясняется конечностью массы ядра: происходит движение как электрона, так и ядра вокруг их общего центра масс.

По этой же причине уровни энергии электронов в более тяжелых изотопах лежат ниже (*изотопический эффект*). Например, уровни дейтерия ( ${}^2_1\text{H}$ ) лежат немного ниже уровней водорода ( ${}^1_1\text{H}$ ), а уровни трития ( ${}^3_1\text{H}$ ) – немного ниже уровней дейтерия.

Н. Бор в своей теории атома водорода впервые реализовал идею квантования энергии частицы, движущейся в силовом поле. Однако, эта теория не может рассматриваться как законченная теория атомных явлений. Описывая атом законами классической физики, Бор просто «запретил» электрону, движущемуся по стационарной орбите, излучать электромагнитные волны. При этом условие квантования момента импульса  $L_n$  электрона (5.4) не имеет общего физического обоснования, и фактически, угадано для атома водорода. Попытки Бора обобщить теорию и сформулировать постулаты квантования для более сложных атомов не увенчались успехом.

С позиции современной физики, атом является физической системой, которая, заведомо, не может быть описана классической теорией, не учитывающей волновых свойств движущегося в атоме электрона.

## Примеры решения задач

**5.1.** Найдите максимальную и минимальную энергии фотона в видимой серии спектра водорода (серии Бальмера).

**Дано:**  $Z = 1$ ;  $m = 2$ .

**Найти:**  $E_{\max}$ ;  $E_{\min}$ .

**Решение.** Обобщенная формула Бальмера позволяет определять частоту волны  $\nu$  (или длину волны  $\lambda$ ) при всевозможных переходах электрона в атоме водорода:

$$\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda} = R' \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (1)$$

где  $R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ,  $R' = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$  – постоянная Ридберга;  $m$  определяет серию [по условию задачи  $m = 2$  – серия Бальмера (в серии Бальмера переход осуществляется на вторую орбиту со всех вышележащих), т. е. номер орбиты, на которую переходит электрон];  $n$  определяет отдельную линию серии, т. е. номер орбиты, с которой переходит электрон ( $n = 3, 4, 5, \dots, \infty$ ).

Для серии Бальмера

$$\nu = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (2)$$

Максимальная энергия фотона:

$$E_{\max} = h\nu_{\max} = h\nu_{\infty \rightarrow 2} = hR \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = \frac{1}{4} hR, \quad (3)$$

где  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  – постоянная Планка;  $\nu_{\infty \rightarrow 2}$  – частота, соответствующая переходу электрона на второй ( $m = 2$ ) энергетический уровень.

Минимальная энергия фотона:

$$E_{\min} = h\nu_{\min} = h\nu_{32} = hR \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} hR. \quad (4)$$

**Ответ:**  $E_{\max} = 3,41 \text{ эВ}$ ;  $E_{\min} = 1,89 \text{ эВ}$ .

**5.2.** Найдите первый боровский радиус ( $r_1$ ) орбиты в атоме водорода и скорость движения электрона по этой орбите.

**Дано:**  $Z = 1$ ;  $n = 1$ .

**Найти:**  $r_1$ ;  $v_1$ .

**Решение.** Радиус  $n$ -й стационарной орбиты в боровской модели атома водорода

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

где  $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  и  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  – постоянная Планка;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – электрическая постоянная;  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$  – масса электрона;  $e = \pm 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$  – элементарный заряд.

При  $n = 1$

$$r_1 = 1^2 \cdot \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{3,14 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2} = 53,12 \text{ пм.}$$

Для электрона, движущегося по окружности радиусом  $r_n$  под действием кулоновской силы,

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}, \quad (2)$$

где  $v_n$  – скорость электрона на  $n$ -й орбите.

Согласно первому постулату Бора (*постулат стационарных состояний*), момент импульса электрона, движущегося по  $n$ -й орбите,

$$m_e v_n r_n = n\hbar = n \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Решая уравнения (2) и (3), получим искомую скорость

$$v_n = \frac{1}{n} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar}. \quad (4)$$

Подставив в формулу (4) значение  $n = 1$  и учитывая формулу (1) для радиуса  $n$ -й стационарной орбиты ( $r_n$ ), найдем скорость движения электрона по первой боровской орбите атома водорода:

$$v_1 = \frac{h}{2\pi m_e r_1} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 3,14 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 53,12 \cdot 10^{-12}} = 2,18 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

**Ответ:**  $r_1 = 53,12$  пм;  $v_1 = 2,18$  Мм/с.

**5.3.** Найдите изменение момента импульса электрона в атоме водорода при переходе его из возбужденного состояния ( $n$ ) в основное ( $m = 1$ ) с испусканием фотона с длиной волны 97,24 нм.

**Дано:**  $Z = 1$ ;  $m = 1$ ;  $\lambda = 97,24 \text{ нм} = 97,24 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ ;  $R' = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ .

**Найти:**  $\Delta L$ .

**Решение.** Согласно первому постулату Бора (*постулат стационарных состояний*), момент импульса электрона, движущегося по  $n$ -й круговой орбите,

$$L = m_e v_n r_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

где  $m_e$  – масса электрона;  $v_n$  – скорость электрона на  $n$ -й орбите;  $r_n$  – радиус  $n$ -й стационарной орбиты электрона;  $\hbar = h/2\pi$  – постоянная Планка.

Изменение момента импульса при переходе электрона из возбужденного состояния  $n$  в основное  $m = 1$  определяется по формуле:

$$\Delta L = n\hbar - m\hbar = (n - m)\hbar. \quad (2)$$

Длина волны  $\lambda$  фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода, определяется по обобщенной формуле Бальмера [ $\lambda$  соответствует серии Лаймана (по условию задачи  $m = 1$ )]

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (3)$$

откуда

$$n = \sqrt{\frac{m^2 \lambda R'}{\lambda R' - m^2}}. \quad (4)$$

Тогда искомое изменение момента импульса электрона

$$\Delta L = (n - m)\hbar = \left( \sqrt{\frac{m^2 \lambda R'}{\lambda R' - m^2}} - m \right) \hbar. \quad (5)$$

**Ответ:**  $\Delta L = 3\hbar$ .

**5.4.** Найдите, по какой орбите в атоме водорода вращается электрон, если круговая частота его вращения равна  $64,16 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ .

**Дано:**  $Z = 1$ ;  $\omega = 64,16 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ .

**Найти:**  $n$ .

**Решение.** Круговая частота вращения электрона по  $n$ -й орбите

$$\omega = \frac{v_n}{r_n}, \quad (1)$$

где  $v_n$  – скорость электрона на  $n$ -й круговой орбите радиусом  $r_n$ .

Для электрона, движущегося по окружности радиусом  $r_n$  под действием кулоновской силы,

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}, \quad (2)$$

где  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$  – масса электрона;  $e = \pm 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$  – элементарный заряд;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – электрическая постоянная.

Согласно первому постулату Бора (*постулат стационарных состояний*), момент импульса электрона, движущегося по  $n$ -й круговой орбите,

$$m_e v_n r_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где  $\hbar = h/2\pi$  – постоянная Планка.

Решая уравнения (2) и (3), найдем формулы для радиуса и скорости электрона на  $n$ -й круговой орбите:

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \quad \text{и} \quad v_n = \frac{1}{n} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar}.$$

Подставив эти выражения в формулу (1), получим:

$$\omega = \frac{v_n}{r_n} = \frac{1}{n} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \cdot \frac{m_e e^2}{n^2 4\pi\epsilon_0 \hbar^2} = \frac{\pi m_e e^4}{2\epsilon_0^2 \hbar^3 n^3},$$

[учли, что  $\hbar = h/2\pi$ ], откуда искомое значение

$$n = \sqrt[3]{\frac{\pi m_e e^4}{2 \varepsilon_0^2 h^3 \omega}} = \frac{e}{h} \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi m_e e}{2 \varepsilon_0^2 \omega}}$$

Ответ:  $n = 4$ .

### Задачи

55. Атом водорода испустил фотон с длиной волны 300 нм. На сколько изменилась энергия ( $\Delta E$ ) электрона в атоме? Скорость распространения света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Ответ: 4,14 эВ

56. Найдите импульс фотона, излучаемого при переходе электрона в атоме водорода из третьего энергетического состояния во второе. Электрическая постоянная  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м; масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; элементарный заряд  $e = \pm 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Ответ:  $10^{-27}$  Н · с

57. При переходе электрона в атоме водорода из некоторого возбужденного состояния в основное, радиус боровской орбиты электрона уменьшился в 16 раз. Найдите (в нм) длину волны излученного при этом фотона. Постоянная Ридберга  $R' = 1,097 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup>. Ответ: 58,34 нм

58. Найдите длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода ( $Z = 1$ ) с седьмой орбиты на пятую. Постоянная Ридберга  $R' = 1,097 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup>. Ответ:  $46,53 \cdot 10^{-7}$  м

59. Электрон в атоме водорода, находившийся в четвертом энергетическом состоянии, излучил фотон с импульсом  $3,535 \cdot 10^{-28}$  Н · с. Найдите, во сколько раз при этом увеличилась абсолютная величина потенциальной энергии электрона. Скорость распространения света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; энергия ионизации атома водорода  $E_i = 13,6$  эВ. Ответ: 1,7(7)

60. Водородоподобный ион гелия ( $Z = 2$ ) перешел из четвертого энергетического состояния в третье. Найдите скорость «отдачи», которую получил ион в результате излучения фотона. Масса иона гелия  $m = 6,68 \cdot 10^{-27}$  кг; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; постоянная Ридберга  $R = 3,29 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup>.

Ответ: 0,85 м/с

## Лекция 6. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

### 6.1. Корпускулярно-волновой дуализм. Волны де Бройля

Установление корпускулярно-волнового дуализма в оптических явлениях [см. п. 4.8] имело очень большое значение для дальнейшего развития физики. Впервые была выявлена двойственная – *корпускулярно-волновая* – природа физического объекта – электромагнитного излучения.

Луи де Бройль (1924 г.) выдвинул гипотезу, согласно которой корпускулярно-волновой дуализм имеет универсальный характер. Согласно *гипотезе де Бройля*, с каждым *микрообъектом* связываются, с одной стороны, *корпускулярные характеристики* – энергия  $E$  и импульс  $p$ , а с другой – *волновые характеристики* – частота  $\nu$  и длина волны  $\lambda$ . Соотношения, связывающие корпускулярные и волновые свойства частиц, такие же, как для фотонов [см. (4.25) и (4.26)]:

$$E = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}; \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}, \quad (6.1)$$

где  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка.

По гипотезе де Бройля *любой движущейся частице*, обладающей энергией  $E$  и импульсом  $p$ , соответствует *волновой процесс*, частота которого равна

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad (6.2)$$

а длина волны

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad (6.3)$$

– называется *длиной волны де Бройля*.

В формуле (6.3)

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

для релятивистских частиц, и  $p = mv$  в нерелятивистском приближении ( $v \ll c$ ), где  $v$  – скорость частицы с массой  $m$ ;  $c$  – скорость света в вакууме.



А. Эйнштейн (1927 г.) предположил, что если гипотеза де Бройля верна, то должна наблюдаться *дифракция электронов*. [Первое экспериментальное подтверждение гипотезы де Бройля было получено американскими физиками К. Дэвиссоном и Л. Джермером (1927 г.). Они обнаружили, что при рассеянии пучка электронов на кристаллах никеля наблюдается дифракция электронов. Им удалось определить длину волны рассеянных электронов, которая совпадала с определенной по формуле де Бройля (6.3). Впоследствии было доказано, что волновые свойства присущи не только пучку электронов, но и каждому электрону в отдельности. В дальнейшем дифракцию обнаружили также для протонов, нейтронов и молекулярных пучков. Это явилось *доказательством наличия у микрочастиц волновых свойств* и позволило описывать движение микрочастиц в виде волнового процесса, характеризующегося длиной волны, которая определяется по формуле де Бройля (6.3)].

Подтвержденная экспериментально гипотеза де Бройля о корпускулярно-волновом дуализме свойств вещества коренным образом изменила представления о свойствах микрообъектов. Всем микрообъектам присущи как корпускулярные, так и волновые свойства; в то же время любую из микрочастиц нельзя считать ни частицей, ни волной в классическом понимании.

Важным аргументом в пользу волн де Бройля было то обстоятельство, что с учетом формул (6.2) и (6.3) правило квантования Бора [см. (5.4)] принимает вид условия существования замкнутой стоячей волны  $2\pi r_n = n\lambda_B$ , т. е. на длине орбиты укладывается целое число волн де Бройля.

### 6.1.1. Некоторые свойства волн де Бройля

Волны де Бройля в процессе распространения могут отражаться, преломляться, интерферировать и дифрагировать по обычным волновым законам.

**1. Фазовая скорость волн де Бройля** – скорость, с которой распространяются точки волны с постоянной фазой:

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}, \quad (6.4)$$

где  $v$  – скорость свободно движущейся частицы массой  $m$  [ $m$  – релятивистская масса];  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число.

[Так как  $v < c$ , то фазовая скорость волны де Бройля  $u_{\text{фаз}} > c$ , т. е. больше скорости света в вакууме. Это не противоречит теории относительности, которая *запрещает движение со скоростью, большей скорости света*. Ограничения, накладываемые теорией относительности, справедливы лишь для процессов, связанных с переносом массы или энергии. Фазовая скорость волны не характеризует ни один из этих процессов, поэтому на ее величину не накладывается никаких ограничений].

**2. Групповая скорость волн де Бройля** по определению,

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}.$$

Для свободной частицы  $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$ , поэтому

$$u = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}} = \frac{pc^2}{E} = \frac{mvc^2}{mc^2} = v$$

– групповая скорость волн де Бройля  $u$  равна скорости частицы  $v$ , т. е. **волны де Бройля перемещаются с частицей**;  $m_0$  – масса покоя частицы.

Для фотона фазовая и групповая скорости соответственно равны:

$$u_{\text{фаз}} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mc} = c \quad \text{и} \quad u = \frac{pc^2}{E} = \frac{mcc^2}{mc^2} = c,$$

т. е. равны скорости самого фотона.

**3. Длина волны де Бройля для нерелятивистских и релятивистских частиц.** В случае *нерелятивистской частицы*, скорость которой  $v \ll c$ , ее кинетическая энергия

$$E_{\text{к}} = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{p^2}{2m_0},$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы;  $p$  – импульс частицы.

Поэтому, согласно (6.3),

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_{\text{к}}}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 E_{\text{к}}}}. \quad (6.5)$$

**В релятивистском случае** ( $v \approx c$ ), связь между  $p$  и  $E_{\text{к}}$ ,

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_{\text{к}}(E_{\text{к}} + 2m_0 c^2)} = \sqrt{2m_0 E_{\text{к}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{E_{\text{к}}}{2m_0 c^2}}. \quad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (6.3), получаем

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k} \cdot \sqrt{1 + \frac{E_k}{2m_0 c^2}}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 E_k} \cdot \sqrt{1 + \frac{E_k}{2m_0 c^2}}}. \quad (6.7)$$

**4. Длина волны де Бройля микро- и макрообъектов.** Найдем длину волны де Бройля электрона (*микрообъект*), прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U$ . Для определенности будем считать электрон нерелятивистским. В этом случае, согласно (6.5),

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 E_k}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 eU}}. \quad (6.8)$$

Подставляя в (6.8) численные значения констант, получаем

$$\lambda_B \approx \sqrt{\frac{150,42}{U}} \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Таким образом, при значении ускоряющей разности потенциалов  $U$  в пределах от десятков вольт до нескольких кВ, дебройлевская длина волны  $\lambda_B$  электрона по порядку величины будет составлять  $10^{-10}$  м.

Длина волны де Бройля у *макроскопического объекта* [пылинка: масса  $m = 10^{-6}$  г, скорость  $v = 1$  мм/с]. Используя (6.3), получаем

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \approx 6,63 \cdot 10^{-22} \text{ м.}$$

Найденная длина волны  $\lambda_B$  значительно меньше не только размеров самой пылинки, но и наименьшего известного в физике размера – радиуса ядра, составляющего по порядку величины  $10^{-15}$  м.

[Поскольку никакого принципиального различия между микро- и макрообъектами не существует, то возникает вопрос: в каких случаях волновые свойства играют решающую роль в поведении частицы, а в каких случаях они оказываются несущественными, и их можно не учитывать? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся аналогией с оптикой. Как известно, волновая природа излучения максимальным образом проявляется в тех случаях, когда длина волны излучения  $\lambda$  сравнима с характерными размерами системы  $L$ , т. е.  $\lambda \sim L$ . Если же  $\lambda \ll L$ , то волновые свойства излучения становятся несущественными, и можно пользоваться геометрической оптикой.]

В силу аналогии, существующей между механическими и оптическими явлениями, классическая ньютоновская механика соответствует геометрической оптике, а квантовая (или волновая механика) – волновой оптике. Таким образом, волновые свойства частиц будут наиболее ярко проявляться в тех случаях, когда  $\lambda_B$  частицы сравнима с характерными размерами области движения частицы  $L$ , т. е.  $\lambda_B \sim L$ . В первом из разобранных выше примеров дебройлевская длина волны электрона  $\lambda_B$ , размеры атома и расстояние между атомами в кристалле имеют один и тот же порядок величины. Это означает, что при взаимодействии электронов с атомами, а также при их движении в твердых телах волновые свойства электронов будут проявляться максимальным образом. В тех же случаях, когда  $\lambda_B \ll L$ , как, например, для пылинки, волновые свойства частицы становятся несущественными, и для описания движения таких объектов необходимо пользоваться законами классической механики].

## 6.2. Соотношения неопределенностей Гейзенберга

Своеобразие поведения микрочастиц, обусловленное их волновыми свойствами, проявляется в ограничении применимости принципов классической физики к описанию поведения микрообъектов.

В классической физике состояние частицы в любой момент времени полностью определяется совокупностью всех координат  $(x; y; z)$  и соответствующих составляющих импульсов  $(p_x; p_y; p_z)$ .

Микрочастицы из-за наличия у них волновых свойств существенно отличаются от классических частиц. Поэтому возникает *вопрос о границах применимости к микрочастицам понятий классической механики*. [В микромире, где проявляется дуализм «волна – частица», представить движение микрочастицы по определенной траектории с определенной скоростью в каждой точке пространства невозможно, поскольку всякая волна по своей сущности является объектом протяженным. В то же время определенному значению импульса частицы соответствует, согласно выражению (6.3), вполне определенная монохроматическая волна, безграничная в пространстве и во времени. В самом деле, поскольку каждой частице соответствует волновой процесс, то неопределенность «местоположения» частицы по величине имеет порядок длины волны де Бройля  $\Delta x \approx \lambda$ , и классическое понятие траектории теряет смысл. Для макроскопических объектов длины волн де Бройля исчезающе малы, поэтому для них применимо понятие траектории движения].

В. Гейзенберг (1927 г.), учитывая волновые свойства микрочастиц и связанные с волновыми свойствами ограничения в их поведении, выдвинул идею о принципиальной невозможности измерения определенных пар (например, координаты  $x$  и компоненты импульса  $p_x$ ) связанных между собой характеристик частицы так, чтобы они одновременно имели точные значения.

Согласно *соотношениям неопределенностей Гейзенберга*, микрочастица (*микрообъект*) не может иметь одновременно точных значений координаты ( $x, y, z$ ) и компонентов импульса ( $p_x, p_y, p_z$ ), причем неопределенности этих величин удовлетворяют условию

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar, \quad (6.9)$$

где  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – интервалы координат, в которых локализована частица, описываемая волной де Бройля;  $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$  – интервалы, в которых заключены проекции импульса частицы по осям  $x, y$  и  $z$ .

Утверждение о том, что *произведение неопределенностей значений двух сопряженных переменных не может быть по порядку величины меньше постоянной Планка  $\hbar$* , называется *принципом неопределенности Гейзенберга*.

Из (6.9) следует, что описать микрочастицу с помощью физических величин, характерных для макрочастицы, можно лишь с некоторым приближением: чем меньше неопределенность одной из величин ( $x, y, z$  или  $p_x, p_y, p_z$ ), тем больше неопределенность другой. Таким образом, *для микрочастицы не существует состояний, в которых ее координаты и импульс имели бы одновременно точные значения*.

Соотношения (6.9) показывают, что с увеличением массы  $m$  частицы ограничения, вносимые в возможность применения классических понятий координаты и скорости, уменьшаются. Из-за малости  $\hbar$  неопределенности в значениях координаты и скорости, вытекающие из формулы

$$\Delta x \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m}, \quad (6.10)$$

становятся пренебрежимо малыми у тел с массой  $m$ , во много раз большей масс частиц, находящихся в атоме (электронов, протонов, нейтронов). [Например, для

пылинки массой  $10^{-13}$  кг и линейным размером  $10^{-6}$  м, координата которой определена с точностью  $1/100$  ее размеров (т. е.  $\Delta x \sim 10^{-8}$  м), неопределенность в проекции скорости составляет  $\Delta v_x \sim 10^{-13}$  м/с. Эта неопределенность практически не сказывается при всех скоростях, с которыми движется такая частица].

Для *макроскопических тел* соотношения неопределенностей не вносят ограничения в возможность применения понятий координаты и скорости. Для таких тел постоянную Планка в соотношениях (6.9) считают пренебрежимо малой ( $\hbar \rightarrow 0$ ). В этих случаях говорят о точных значениях координаты и скорости и рассматривают движение тела по траектории в соответствии с законами классической механики.

Соотношение, подобное (6.9), существует также между энергией и временем:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar, \quad (6.11)$$

где  $\Delta E$  – неопределенность в значении энергии;  $\Delta t$  – интервал времени, в течение которого микрочастица обладает энергией  $E \pm \Delta E$ . Из выражения (6.11) следует, что неопределенность в энергии становится тем больше, чем меньше время пребывания частицы в данном энергетическом состоянии.

[Электрон в атоме находится сколь угодно долго только на самом низком энергетическом уровне, поэтому энергия основного состояния определяется вполне точно. На более высоком уровне – *в возбужденном состоянии* – электрон задерживается недолго ( $\sim 10^{-8}$  с), и энергия, характеризующая это состояние, будет  $E \pm \Delta E$ . В соответствии с этим при переходе атома из возбужденного состояния в основное излучается не отдельная спектральная линия строго фиксированной частоты  $\nu$ , а некоторый спектральный участок в пределах  $\nu \pm \Delta \nu$ . Это и наблюдается на опыте – спектральные линии имеют конечную ширину, что используется на практике для оценки времени пребывания микросистемы в возбужденном состоянии].

Соотношения неопределенностей (6.9) получены при одновременном использовании классических характеристик движения частицы (координаты, импульса) и наличия у нее волновых свойств. Так как в классической механике принимается, что измерение координаты и импульса может быть произведено с любой точностью, то ***соотношения неопределенностей являются квантовым ограничением применимости классической механики к микрообъектам.***

### 6.3. Волновая функция

В квантовой механике с микрочастицей сопоставляется волновой процесс, который соответствует ее движению. Интенсивность  $I$  волн де Бройля в данной точке пространства связана с числом частиц, попавших в эту точку, о чем свидетельствуют опыты по дифракции микрочастиц. [Дифракционная картина, наблюдаемая для микрочастиц, характеризуется неодинаковым распределением потоков микрочастиц, рассеянных или отраженных по различным направлениям, – в одних направлениях наблюдается большее число частиц, чем в других. Наличие максимумов в дифракционной картине, с точки зрения волновой теории, означает, что эти направления соответствуют наибольшей интенсивности волн де Бройля (интенсивность волны пропорциональна квадрату ее амплитуды ( $I \sim |A|^2$ )). Таким образом, *интенсивность* волн де Бройля в данной точке пространства определяет *плотность вероятности попадания электронов в данную точку*].

Таким образом, дифракционная картина для микрочастиц является проявлением статистической (вероятностной) закономерности, согласно которой частицы попадают в те места, где интенсивность волн де Бройля наибольшая. Квадрат модуля амплитуды  $|A|^2$  волн де Бройля является мерой плотности вероятности обнаружения частицы в данной точке.

Для описания распределения вероятности нахождения частицы в данный момент времени в некоторой точке пространства вводится **волновая функция** (или **пси-функция**)  $\Psi(x, y, z, t)$ . Она определяется таким образом, чтобы вероятность  $dW$  того, что частица находится в элементе объема  $dV$ , была равна:

$$dW = |\Psi|^2 dV. \quad (6.12)$$

Физический смысл имеет не сама функция  $\Psi$ , а квадрат ее модуля

$$|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi,$$

которым задается интенсивность волн де Бройля;  $\Psi^*$  – функция, комплексно-сопряженная  $\Psi$ .

Величина (квадрат модуля  $\Psi$ -функции)

$$|\Psi|^2 = \frac{dW}{dV} \quad (6.13)$$

имеет смысл *плотности вероятности*, т. е. определяет вероятность нахождения частицы в окрестности точки с координатами  $x, y, z$ . Волновая функция  $\Psi$  имеет смысл *амплитуды вероятности*. Таким образом, величиной  $|\Psi|^2$  определяется *интенсивность волн де Бройля*.

*Условие нормировки вероятностей* получается из того, что вероятность существования частицы где-либо в пространстве равна единице,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dV = 1, \quad (6.14)$$

где интеграл вычисляется по всему бесконечному пространству, т. е. по координатам  $x, y, z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Волновая функция  $\Psi$ , характеризующая вероятность обнаружения действия микрочастицы в элементе объема  $dV$ , должна быть *конечной* (вероятность не может быть больше единицы), *однозначной* (вероятность не может быть неоднозначной величиной) и *непрерывной* (вероятность не может изменяться скачком); в тех местах, где микрочастица не может находиться,  $\Psi$ -функция должна обращаться в нуль. Таким образом, с помощью  $\Psi$ -функции можно лишь определять вероятность нахождения частицы в различных точках пространства.

Волновая функция позволяет вычислить *средние значения физических величин*, характеризующих данный микрообъект. Например, среднее расстояние электрона от ядра,

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r |\Psi|^2 dV.$$

Волновая функция удовлетворяет *принципу суперпозиции*: если система может находиться в различных состояниях, описываемых волновыми функциями  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$ , то она также может находиться в состоянии  $\Psi$ , описываемом линейной комбинацией этих функций:

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n,$$

где  $C_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) – произвольные комплексные числа.



## 6.4. Общее уравнение Шредингера

В квантовой механике возникает важнейшая проблема отыскания такого уравнения, которое являлось бы тем же, чем являются уравнения движения Ньютона для классической механики. [Как известно, уравнения Ньютона позволяют для макроскопических тел решать *основную задачу механики*: по заданным силам, действующим на тело (или систему тел), и начальным условиям (начальным значениям координат и скорости тела) *найти для любого момента времени координаты тела и его скорость, т. е. описать движение тела в пространстве и во времени*].

При постановке аналогичной задачи в квантовой механике нужно учесть, что для частиц микромира характерна двойственность свойств, которая ограничивает возможность применения к таким частицам классических понятий о координате и скорости (или импульсе). Вероятностное (статистическое) истолкование волн де Бройля и соотношения неопределенностей указывают, что уравнение движения в квантовой механике должно быть таким, чтобы оно позволяло объяснить наблюдаемые на опыте волновые свойства частиц.

*Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики, описывающее движение микрочастицы, было постулировано Э. Шредингером (1926 г.).*

*Общее уравнение Шредингера [или временное уравнение Шредингера]:*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x, y, z, t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (6.15)$$

где  $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$  – волновая функция, описывающая состояние частицы;  $\hbar = h/2\pi$ ;  $m$  – масса частицы;  $i$  – мнимая единица;  $U(x, y, z, t)$  – потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором частица движется;  $\Delta$  – оператор Лапласа ( $\Delta\Psi = \partial^2\Psi/\partial x^2 + \partial^2\Psi/\partial y^2 + \partial^2\Psi/\partial z^2$ ).

Уравнение (6.15) дополняется условиями, накладываемыми на волновую функцию: 1) волновая функция должна быть конечной, однозначной и непрерывной; 2) функция  $|\Psi|^2$  должна быть интегрируема [это условие в простейшем случае сводится к условию нормировки вероятностей (6.14)]; 3) производные  $\partial\Psi/\partial x, \partial\Psi/\partial y, \partial\Psi/\partial z, \partial\Psi/\partial t$  должны быть непрерывны.

## 6.5. Уравнение Шредингера для стационарных состояний

Частным случаем общего уравнения Шредингера (6.15) является *уравнение Шредингера для стационарных состояний*, т. е. состояний с определенной энергией  $E$ . Если силовое поле *стационарно*, то функция  $U$  [в (6.15)  $U = U(x, y, z, t)$  – потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором она движется] не зависит от времени [ $U = U(x, y, z)$ ] и имеет смысл потенциальной энергии. Решение уравнения (6.15) может быть представлено в виде произведения двух функций – *функции только координат* и *функции только времени*:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \quad (6.16)$$

где  $E$  – полная энергия частицы.

Подставив функцию (6.16) в (6.15) и разделив левую и правую части на произведение  $\psi(x, y, z)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ , получим

$$\frac{1}{\psi(x, y, z)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, y, z) + U(x, y, z) \psi(x, y, z) \right] = i\hbar \frac{1}{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}} \frac{d(e^{-i\frac{E}{\hbar}t})}{dt}. \quad (6.17)$$

Преобразовав (6.17), приходим к *стационарному уравнению Шредингера*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, y, z) + U(x, y, z) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z). \quad (6.18)$$

Его обычно записывают в более удобном виде:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi = E \psi, \quad (6.19)$$

или

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0. \quad (6.20)$$

В стационарном состоянии плотность вероятности

$$w = |\Psi(x, y, z, t)|^2 = |\psi(x, y, z)|^2 \quad (6.21)$$

выражается только через  $\psi(x, y, z)$  и не зависит от времени [ $\psi(x, y, z)$ ], также называется *волновой функцией*, хотя она является только координатной (амплитудной) частью волновой функции  $\Psi(x, y, z, t)$  стационарного состояния].

[В уравнение Шредингера (6.20) в качестве параметра входит полная энергия  $E$ . Физический смысл имеют только регулярные волновые функции – *конечные, однозначные и непрерывные* – вместе со своими первыми производными. Эти условия выполняются только при определенном наборе  $E$ . Эти значения *энергии* называются *собственными*. Решения, которые соответствуют собственным значениям энергии, называются *собственными функциями*. Собственные значения  $E$  могут образовывать как непрерывный, так и дискретный ряд. В первом случае говорят о *непрерывном (сплошном) спектре*, во втором – о *дискретном спектре*].

### 6.6. Движение свободной частицы

Волновая функция *свободной частицы* – частицы, движущейся в отсутствие внешних полей [ $U = 0$ ], в состоянии с определенным импульсом  $\vec{p}$  записывается так

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{r})}. \quad (6.22)$$

Для простоты ограничимся одномерным случаем [свободная частица движется вдоль оси  $x$ ,  $U(x) = 0$ ]. Согласно идее де Бройля, частице нужно сопоставить плоскую волну [*плоскую волну де Бройля*]

$$\Psi(x, t) = Ae^{-i(\omega t - kx)}. \quad (6.23)$$

Заменяя в соответствии (6.2) и (6.3),  $\omega$  и  $k = 2\pi/\lambda$  на  $E$  и  $p$ , получим

$$\Psi(x, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}. \quad (6.24)$$

Продифференцировав выражение (6.24) один раз по  $t$ , а второй раз дважды по  $x$ , получим

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}E\Psi, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 p^2\Psi,$$

отсюда

$$E = \frac{1}{\Psi} i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (6.25)$$

$$p^2 = -\frac{1}{\Psi} \hbar^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}. \quad (6.26)$$

В *нерелятивистской классической механике* энергия  $E$  и импульс  $p$  свободной частицы связаны соотношением

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (6.27)$$

Подставив в (6.27) выражения (6.25) и (6.26) и сократив затем на  $\Psi$ , получим уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

которое совпадает с уравнением (6.15), если в последнем положить  $U = 0$ .

В случае частицы, движущейся в силовом поле, характеризуемом потенциальной энергией  $U$ , энергия  $E$  и импульс  $p$  связаны соотношением

$$\frac{p^2}{2m} = E - U. \quad (6.28)$$

Подставив в (6.28) выражения (6.25) и (6.26), найдем

$$-\frac{1}{\Psi} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\Psi} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - U. \quad (*)$$

Умножив соотношение (\*) на  $\Psi$  и перенеся  $U\Psi$  влево, получим уравнение

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

совпадающее с уравнением (6.15).

Свободная частица в квантовой механике описывается плоской волной де Бройля (6.24). Этому соответствует не зависящая от времени плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства [см. (6.12) и (6.13)]

$$|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = |A|^2,$$

т. е. все положения частицы в пространстве являются равновероятными.

## 6.7. Частица в потенциальном ящике. Квантование энергии

Найдем собственные значения энергии и соответствующие им собственные функции для частицы, находящейся в *бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме – потенциальном ящике*. Предположим, что частица может двигаться только вдоль оси  $x$ , и ее движение ограничено непроницаемыми стенками:  $x = 0$  и  $x = l$ .

Потенциальная энергия  $U$  (рис. 68) равна нулю при  $0 \leq x \leq l$  и обращается в бесконечность при  $x < 0$  и  $x > l$ , где  $l$  – ширина ящика.

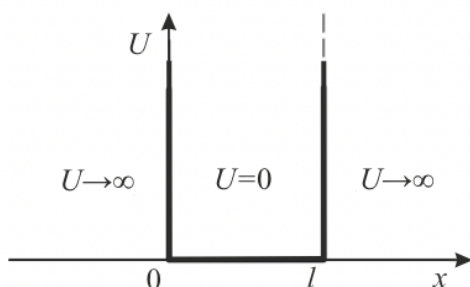


Рис. 68

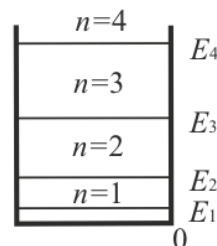


Рис. 69

Применим к этой частице стационарное уравнение Шредингера (6.20):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0 \quad (6.29)$$

[учли, что для одномерной задачи  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2$ ].

Частица за пределы ямы попасть не может, т. е. в области  $x < 0$  и  $x > l$  функция  $\psi(x) \equiv 0$ , а из условия непрерывности следует, что  $\psi$  должна быть равна нулю и на границах ямы, т. е.

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (6.30)$$

В пределах ямы ( $0 \leq x \leq l$ ) уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0, \quad (6.31)$$

где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E. \quad (6.32)$$

Общее решение дифференциального уравнения (6.31)

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

Так как по (6.30)  $\psi(0) = 0$ , то  $B = 0$ . Тогда

$$\psi(x) = A \sin kx. \quad (6.33)$$

Условие  $\psi(l) = A \sin kl = 0$  [см. (6.30)] выполняется только при  $kl = n\pi$ , где  $n$  – целые числа, т. е. необходимо, чтобы

$$kl = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.34)$$

[ $n = 0$  отпадает, так как тогда  $\psi(x) \equiv 0$  – частица нигде не находится]. На ширине ямы укладывается целое число полувольт де Бройля.

Исключив  $k$  из выражений (6.32) и (6.34), найдем собственные значения энергии частицы:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (6.35)$$

т. е. *спектр энергии частицы является дискретным (или квантованным)*. Квантованные значения  $E_n$  называются *уровнями энергии*, а число  $n$ , их определяющее, – *главным квантовым числом*. [Таким образом, микрочастица в потенциальном ящике с бесконечно высокими стенками может находиться только на определенном энергетическом уровне  $E_n$ , или – частица находится в квантовом состоянии  $n$ ]. Из (6.35) видно, что волновые функции с нечетными номерами симметричны относительно центра ямы, а с четными – антисимметричны. На рис. 69 изображена схема энергетических уровней.

Из (6.35) следует, что существует *минимальная, не равная нулю энергия*:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}, \quad (6.36)$$

соответствующая основному состоянию частицы.

[Наличие отличной от нуля минимальной энергии противоречит классической механике и не противоречит соотношениям неопределенностей: частица «зажата» в области, на границах которой  $U \rightarrow \infty$ , поэтому ее положение известно с неопределенностью  $\Delta x \approx l$ . Тогда, согласно (6.9), неопределенность импульса  $\Delta p_x \geq \hbar/l$ . Таким образом, квантово-механическое рассмотрение данной задачи приводит к выводу, что частица в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками не может иметь энергию меньше минимальной, равной  $\pi^2 \hbar^2 / 2ml^2$  (см. (6.36)).

**Пример.** Оценим расстояния между соседними уровнями для различных значений массы частицы  $m$  и ширины ямы  $l$ . Разность энергий двух соседних уровней, согласно (6.35):

$$\Delta E_n = E_{n-1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n + 1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n.$$

Если взять  $m$  порядка массы молекулы ( $\sim 10^{-23}$  г), а  $l \approx 10$  см (*молекулы газа в сосуде*), получается

$$\Delta E_n \approx \frac{(3,14)^2 \cdot (1,05)^2 \cdot 10^{-68}}{10^{-27} \cdot 10^{-2}} n \text{ Дж} \approx 10,87 \cdot 10^{-39} n \text{ Дж} \approx 6,79 \cdot 10^{-20} n \text{ эВ},$$

т. е. энергетические уровни расположены столь густо, что спектр практически можно считать непрерывным (*сплошным*).

Аналогичный результат получается, если взять  $m$  порядка массы электрона ( $\sim 10^{-27}$  г) при тех же размерах ямы (*свободные электроны в металле*):

$$\Delta E_n \approx \frac{(3,14)^2 \cdot (1,05)^2 \cdot 10^{-68}}{10^{-30} \cdot 10^{-2}} n \text{ Дж} \approx 10,87 \cdot 10^{-36} n \text{ Дж} \approx 6,79 \cdot 10^{-17} n \text{ эВ.}$$

Если же размеры ямы соизмеримы с атомными ( $l \approx 10^{-8}$  см), то для электрона

$$\Delta E_n \approx \frac{(3,14)^2 \cdot (1,05)^2 \cdot 10^{-68}}{10^{-30} \cdot 10^{-20}} n \text{ Дж} \approx 10,87 \cdot 10^{-18} n \text{ Дж} \approx 0,68 \cdot 10^2 n \text{ эВ,}$$

т. е. получаются явно дискретные значения энергии (*линейчатый спектр*).

Применение уравнения Шредингера к частице в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками приводит к *квантованным значениям энергии*, в то время как классическая механика на энергию этой частицы никаких ограничений не накладывает].

Подставив в (6.33) значение  $k$  [см. (6.34)], найдем собственные функции:

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

где постоянная интегрирования  $A = \sqrt{2/l}$  [находится из условия нормировки (6.14), которое в данном случае запишется

$$\int_0^1 \psi_n^2(x) dx = A^2 \int_0^1 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1].$$

Тогда *нормированные собственные функции* имеют вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.37)$$

Графики собственных функций (6.37), соответствующие уровням энергии (6.35) при  $n = 1, 2, 3$ , приведены на рис. 70, а. На рис. 70, б изображена плотность вероятности обнаружения частицы на различных расстояниях от стенок ямы, равная  $|\psi_n(x)|^2 = \psi_n^*(x)\psi_n(x)$  для  $n = 1, 2, 3$ .

Из рис. 70 следует, что, например, в состоянии с  $n = 2$  частица не может находиться в середине ямы, в то время как одинаково часто может пребывать в ее левой и правой частях. Такое поведение частицы указывает на то, что *представления о траекториях частицы в квантовой механике несостоятельны*.

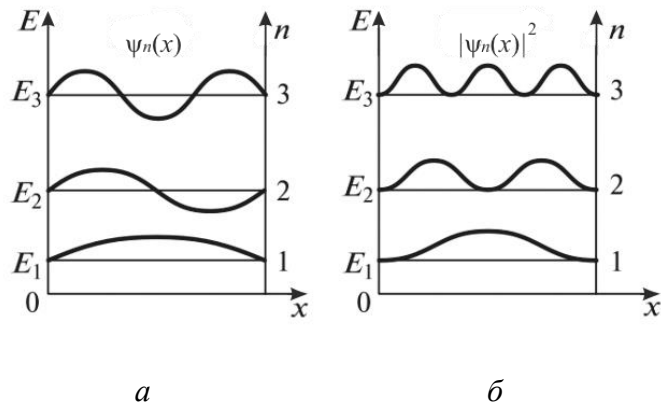


Рис. 70

### 6.8. Прохождение частиц сквозь потенциальный барьер

Частица, движущаяся слева направо, встречает на своем пути прямоугольный одномерный потенциальный барьер высотой  $U_0$  и шириной  $l$  (рис. 71, *a*).

Если энергия **классической частицы** больше высоты барьера  $E > U_0$  (см. рис. 71, *a*), то она беспрепятственно проходит над барьером (в области 2 скорость частицы меньше, поскольку здесь кинетическая энергия  $T_2 = E - U_0$ ), а в области 3 она движется с той же скоростью, что и в области 1. Если же  $E < U_0$  (рис. 71, *б*), то **классическая частица** отражается от барьера и летит в обратную сторону; сквозь барьер частица проникнуть не может [при  $E < U_0$  (*потенциальная энергия больше полной*) кинетическая энергия частицы в области 2 должна быть отрицательной, а скорость – мнимой].

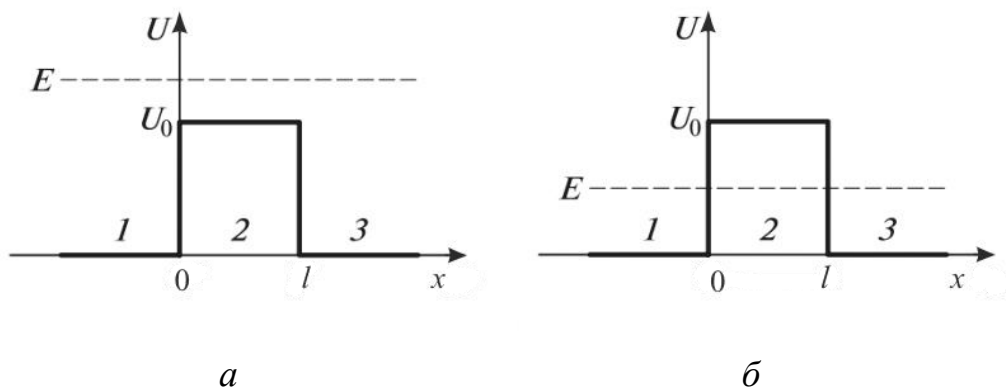


Рис. 71



Согласно *квантовой механике*: 1) даже при  $E > U_0$  имеется отличная от нуля вероятность того, что *квантовая частица* отразится от барьера и будет двигаться в обратную сторону; 2) при  $E < U_0$  имеется отличная от нуля вероятность, что частица окажется в области  $x > l$ , т. е. проникнет сквозь барьер. Такое, совершенно невозможное с классической точки зрения, поведение микрочастицы вытекает непосредственно из уравнения Шредингера.

В случае  $E < U_0$  (см. рис. 71, б) стационарные уравнения Шредингера запишутся в виде

область 1 и 3:

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,3}}{\partial x^2} + k^2 \psi_{1,3} = 0 \quad \left( k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \right); \quad (6.38)$$

область 2:

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \beta^2 \psi_2 = 0 \quad \left( \beta = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}} \right). \quad (6.39)$$

Общие решения этих дифференциальных уравнений для областей 1, 2 и 3:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}, \quad (6.40)$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x}, \quad (6.41)$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}. \quad (6.42)$$

Для области 1 *полная волновая функция* будет иметь вид:

$$\psi_1(x, t) = \psi_1(x) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} = A_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_1 x)} + B_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et + p_1 x)} \quad (6.43)$$

[первое слагаемое представляет собой плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$  (соответствует частице, движущейся в сторону барьера), а второе – волну, распространяющуюся в противоположном направлении, т. е. отраженную от барьера].

Решение (6.42) содержит также волны, распространяющиеся в обе стороны. В области 3 имеется только волна, прошедшая сквозь барьер и распространяющаяся слева направо. Поэтому коэффициент  $B_3$  в (6.42) следует принять равным нулю. Тогда

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx}. \quad (6.44)$$

В области 2 функция (6.41) уже не соответствует плоским волнам, распространяющимся в обе стороны, поскольку показатели экспонент не мнимые, а действительные. Можно показать, что для частного случая высокого и широкого барьера, когда  $\beta l \gg 1$ ,  $B_2 \approx 0$ .

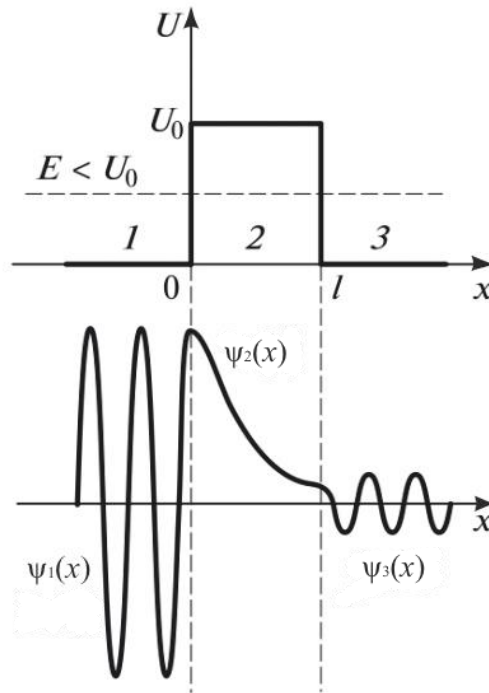


Рис. 72

На рис. 72 приведен качественный характер функций  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  и  $\psi_3(x)$ , откуда следует, что волновая функция не равна нулю и внутри барьера, а в области 3, если барьер не очень широк, будет опять иметь вид волн де Бройля с тем же импульсом, т. е. с той же частотой, но с меньшей амплитудой.

Таким образом, квантовая механика приводит к принципиально новому специфическому квантовому явлению, получившему название **туннельного эффекта**, в результате которого микробиъект может «пройти» сквозь потенциальный барьер.

Для описания туннельного эффекта используют понятие **коэффициента прозрачности** (или **коэффициента прохождения**), определяемого как отношение квадратов модулей амплитуд прошедшей и падающей волн:

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}. \quad (6.45)$$

Для случая *прямоугольного потенциального барьера*:

$$D = D_0 e^{-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}}, \quad (6.46)$$

где  $D_0$  – постоянный множитель, который можно приравнять к единице;  $U$  – высота потенциального барьера;  $E$  – энергия частицы;  $l$  – ширина барьера.

Для *потенциального барьера произвольной формы*:

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-E)} dx\right). \quad (6.47)$$

Из формул (6.46) и (6.47) следует, что коэффициент прозрачности  $D$  быстро убывает с увеличением ширины барьера, а также с ростом его высоты.

Отношение квадратов модулей амплитуд отраженной и падающей волн называется *коэффициентом отражения* потенциального барьера:

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}. \quad (6.48)$$

Коэффициенты  $R$  и  $D$  связаны соотношением  $R + D = 1$ .

С классической точки зрения туннельный эффект представляется абсурдным, так как частица, «находящаяся в туннеле», должна была бы обладать отрицательной кинетической энергией (в туннеле  $E < U$ ). Однако туннельный эффект – явление специфически квантовое, не имеющее аналога в классической физике. В квантовой механике деление полной энергии на кинетическую и потенциальную не имеет смысла, так как противоречит принципу неопределенности. [Тот факт, что частица обладает определенной кинетической энергией  $T$ , был бы равнозначен тому, что частица имеет определенный импульс  $p$ ; тот факт, что частица имеет определенную потенциальную энергию  $U$ , означал бы, что частица находится в точно заданном месте пространства. Поскольку координата и импульс частицы не могут одновременно иметь определенных значений, не могут быть одновременно точно определены  $T$  и  $U$ . Таким образом, хотя *полная энергия частицы  $E$  имеет вполне определенные значения, она не может быть представлена в виде суммы точно определенных энергий  $T$  и  $U$* ].

*Туннельный эффект – эффект специфически квантовый, обусловленный волновыми свойствами частиц и не имеющий аналога в классической физике.*

Туннельное прохождение сквозь потенциальный барьер лежит в основе многих явлений физики твердого тела (например, явления в контактном слое на границе двух полупроводников), атомной и ядерной физики (например,  $\alpha$ -распад, протекание термоядерных реакций).

## 6.9. Линейный гармонический осциллятор в квантовой механике

*Линейный гармонический осциллятор* – система (*частица*), совершающая одномерное движение под действием квазиупругой силы  $F = -kx$ , – является моделью, используемой во многих задачах классической и квантовой теории. [Пружинный, физический и математический маятники – примеры классических гармонических осцилляторов].

Потенциальная энергия гармонического осциллятора равна:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}, \quad (6.49)$$

где  $m$  – масса частицы;  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – собственная частота колебаний осциллятора;  $x$  – отклонение от положения равновесия.

Уравнение Шредингера [см. (6.20) и (6.29)] для стационарных состояний квантового осциллятора, с учетом (6.49):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0, \quad (6.50)$$

где  $E$  – полная энергия осциллятора.

Уравнение (6.50) имеет однозначные, конечные и непрерывные решения при *собственных значениях*

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.51)$$

Из (6.51) следует: *энергия квантового осциллятора может иметь лишь дискретные значения, т. е. квантуется.*

На рис. 73 дана схема энергетических уровней гармонического осциллятора [уровни энергии изображены горизонтальными прямыми, расположены на

одинаковых расстояниях друг от друга, равных  $\hbar\omega_0$ ]. Минимальное значение энергии квантового осциллятора

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega_0, \quad (6.52)$$

– называется *энергией нулевых колебаний*.

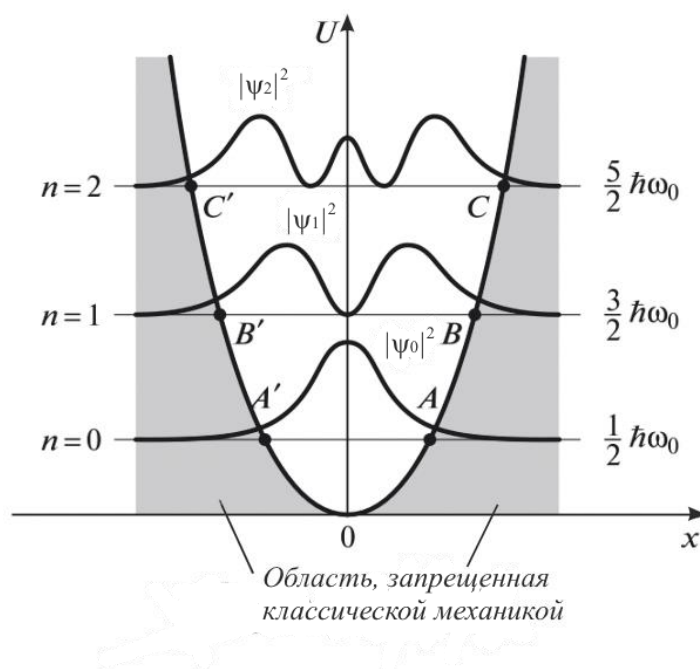


Рис. 73

Существование энергии нулевых колебаний – типично квантовый эффект – прямое следствие соотношения неопределенностей: частица в яме любой формы не может находиться на ее дне, поскольку в нуль обращается импульс частицы и его неопределенность, а неопределенность координаты становится бесконечной ( $\Delta x \rightarrow \infty$ ), что противоречит, в свою очередь, условию пребывания частицы в потенциальной яме.

[Плотность вероятности обнаружить частицу на оси  $x$  определяется квадратом модуля волновой функции  $|\psi(x)|^2$ . На рис. 73 представлены кривые распределения плотности вероятности  $|\psi_n(x)|^2$  для различных состояний квантового осциллятора (для  $n = 0, 1$  и  $2$ ). В точках  $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B'$ ,  $C$  и  $C'$  потенциальная энергия равна полной энергии ( $U_0 = E$ ), причем, как известно, классический осциллятор не может выйти за пределы этих точек.

Для квантового осциллятора  $|\psi_n(x)|^2$  и за пределами этих точек имеет конечные значения. Это означает, в свою очередь, что имеется конечная, хотя и небольшая, вероятность

обнаружить частицу за пределами «потенциальной ямы». Этот результат не противоречит выводам квантовой механики, поскольку равенство  $T = E - U$  в квантовой механике не имеет силы, так как кинетическая ( $T$ ) и потенциальная ( $U$ ) энергии не являются одновременно измеримыми величинами].

**Правилами отбора** в квантовой механике называются условия, накладываемые на изменения квантовых чисел.

Для гармонического осциллятора возможны лишь переходы между соседними подуровнями, т. е. переходы, удовлетворяющие **правилу отбора**:

$$\Delta n = \pm 1.$$

Следовательно, энергия гармонического осциллятора может изменяться только порциями  $\hbar\omega_0$ , и гармонический осциллятор испускает и поглощает энергию квантами.

Существование нулевой энергии  $E_0$  подтверждается экспериментами по изучению рассеяния света кристаллами при низких температурах. Оказывается, что интенсивность рассеянного света по мере понижения температуры стремится не к нулю, а к некоторому конечному значению, указывающему на то, что и при абсолютном нуле колебания атомов в кристаллической решетке не прекращаются.

## Примеры решения задач

**6.1.** Найдите длину волны де Бройля для протона, если кинетическая энергия протона в три раза меньше его энергии покоя.

**Дано:**  $T = E_0/3$ ;  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

**Найти:**  $\lambda_B$ .

**Решение.** Длина волны де Бройля  $\lambda_B$  частицы зависит от ее импульса  $p$ :

$$\lambda_B = \frac{h}{p}, \quad (1)$$

где  $h$  – постоянная Планка.

Зная кинетическую энергию  $T$  частицы, можно определить ее импульс:

$$p = \sqrt{2mT} \quad (\text{нерелятивистский случай, } T \ll E_0), \quad (2)$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)} \quad (\text{релятивистский случай, } T \gg E_0), \quad (3)$$

где  $c$  – скорость распространения света в вакууме;  $E_0 = mc^2$  – энергия покоя частицы;  $m$  – масса частицы.

Поскольку по условию задачи

$$T = \frac{E_0}{3},$$

кинетическая энергия  $T$  протона сравнима с его энергией покоя  $E_0$ , то импульс  $p$  протона (*релятивистский случай*) найдем по формуле (3):

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2m_p c^2)} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{E_0}{3} \left( \frac{E_0}{3} + 2E_0 \right)} = \frac{\sqrt{7}}{3c} E_0. \quad (4)$$

Тогда искомая длина волны де Бройля релятивистского протона

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{3hc}{\sqrt{7}E_0} = \frac{3hc}{\sqrt{7}m_p c^2} = \frac{3h}{\sqrt{7}m_p c}. \quad (5)$$

**Ответ:**  $\lambda_B = 150$  нм.

**6.2.** Найдите длину волны де Бройля электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 0,85 МВ.

**Дано:**  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг;  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с;  $U = 8,5 \cdot 10^5$  В;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

**Найти:**  $\lambda_B$ .

**Решение.** Длина волны де Бройля  $\lambda_B$  частицы (*электрона*) зависит от ее импульса  $p$ :

$$\lambda_B = \frac{h}{p}, \quad (1)$$

где  $h$  – постоянная Планка.

Импульс частицы выражается различным образом для нерелятивистского и релятивистского случаев:

$$p = \sqrt{2mT} \quad (\text{нерелятивистский случай, } T \ll E_0), \quad (2)$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2E_0)} \quad (\text{релятивистский случай, } T \gg E_0), \quad (3)$$

где  $T$  – кинетическая энергия частицы;  $c$  – скорость распространения света в вакууме;  $E_0 = mc^2$  – энергия покоя частицы;  $m$  – масса частицы.

Кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U$ ,

$$T = eU = 1,36 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 0,85 \text{ МэВ}$$

[в данном случае имеем дело с релятивистской частицей ( $T > E_0 = m_e c^2$ ;  $E_0 = 0,512$  МэВ)].

Тогда искомая длина волны де Бройля

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{T(T + 2E_0)}}. \quad (4)$$

**Ответ:**  $\lambda_B = 0,985$  пм.

**6.3.** Кинетическая энергия электрона в атоме водорода равна 13,6 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оцените размер области локализации электрона.

**Дано:**  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг;  $T = 13,6$  эВ =  $21,76 \cdot 10^{-19}$  Дж;  $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

**Найти:**  $d$ .

**Решение.** Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга,

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad (1)$$

где  $\Delta x$  – неопределенность координаты электрона [ $\Delta x = d$  – порядка размеров самого атома, т. е. тогда можно считать, что электрон принадлежит данному атому];  $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка;  $\Delta p_x$  – неопределенность импульса электрона.

Тогда предполагая, что  $\Delta x = d$ , получим

$$d = \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{\hbar}{\Delta p}. \quad (2)$$

Импульс  $p$  и кинетическая энергия  $T$  электрона связаны соотношением

$$p = \sqrt{2m_e T}, \quad (3)$$

где  $m_e$  – масса электрона.

Предполагая, что по порядку неопределенность импульса  $\Delta p$  и импульс электрона  $p$  равны ( $\Delta p = p$ ), оценим  $d$ :

$$d = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_e T}}. \quad (4)$$

**Ответ:**  $d = 52,96 \cdot 10^{-12}$  м  $\approx 53$  пм.

**6.4.** Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии равно 10 нс. Найдите минимальную неопределенность длины волны 0,6 мкм излучения при переходе атома в основное состояние.

**Дано:**  $\Delta t = 10$  нс =  $10^{-8}$  с;  $\lambda = 0,6$  мкм =  $6 \cdot 10^{-7}$  м.

**Найти:**  $\Delta \lambda$ .

**Решение.** Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга,

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar, \quad (1)$$

где  $\Delta E$  – неопределенность энергии данного квантового состояния;  $\Delta t$  – неопределенность времени [*среднее время жизни атома в возбужденном состоянии*].



Следовательно, ширина энергетического состояния определяется выражением

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t}. \quad (2)$$

Энергия излучаемого фотона

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad (3)$$

где  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость распространения света в вакууме.

Продифференцируем энергию  $E$  по  $\lambda$ :

$$dE = -hc \frac{d\lambda}{\lambda^2} \text{ или } \Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda. \quad (4)$$

Приравняв выражения (2) и (4) для  $\Delta E$  (знак «-» опустили), получим

$$\frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{h}{2\pi} \frac{1}{\Delta t}, \quad (5)$$

откуда найдем искомую минимальную неопределенность длины волны (*естественную ширину излучаемой спектральной линии*):

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t}. \quad (6)$$

**Ответ:**  $\Delta \lambda = 1,91 \cdot 10^{-14}$  м = 19,1 фм.

**6.5.** Электрон ( $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг) находится в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной 2 нм. Найдите (в эВ) наименьшую разность энергетических уровней электрона.

**Дано:**  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг;  $l = 4$  нм =  $4 \cdot 10^{-9}$  м;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

**Найти:**  $\Delta E_{\min}$ .

**Решение.** Энергия  $E_n$  электрона в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной  $l$ , принимает лишь определенные дискретные значения, т. е. квантуется и на  $n$ -м энергетическом уровне определяется по формуле

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e l^2} = n^2 \frac{h^2}{8m_e l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

где  $\hbar = h/2\pi$  – постоянная Планка.

Разность  $\Delta E$  энергий электрона на соседних  $n$  и  $(n + 1)$  уровнях равна

$$\Delta E = (2n + 1) \frac{h^2}{8m_e l^2}. \quad (2)$$

Разность энергий  $\Delta E$  будет минимальна при  $n = 1$ .

**Ответ:**  $\Delta E_{\min} = 0,283$  эВ.

**6.6.** Электрон в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  с бесконечно высокими стенками находится в возбужденном состоянии. Найдите вероятность нахождения электрона в интервале  $0 < x < l/4$  на третьем энергетическом уровне.

**Дано:**  $0 < x < l/4$ ;  $n = 3$ .

**Найти:**  $W$ .

**Решение.** Волновая функция  $\psi(x)$ , описывающая состояние частицы (электрона) в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками на  $n$ -м энергетическом уровне, имеет вид

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

где  $x$  – координата частицы в яме ( $0 \leq x \leq l$ );  $n$  – номер энергетического уровня;  $l$  – ширина ямы.

Вероятность нахождения частицы в заданном интервале  $0 < x < l/4$  определяется интегралом квадрата модуля волновой функции:

$$W = \int_0^{l/4} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^{l/4} \left( \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} \right)^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/4} \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (2)$$

Заменяя

$$\sin^2 \frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi n x}{l} \right),$$

[см.  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$ ],

запишем:

$$W = \frac{1}{l} \int_0^{l/4} \left( 1 - \cos \frac{2\pi n x}{l} \right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{4} = 0,213. \quad (3)$$

**Ответ:**  $W = 0,303$ .

**6.7.** Электрон в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $0,25$  нм с бесконечно высокими стенками находится в возбужденном состоянии ( $n = 2$ ). Найдите вероятность нахождения электрона в интервале  $l/3 < x < 2l/3$  потенциальной ямы и энергию ( $E_2$ ) этого электрона в возбужденном состоянии.

**Дано:**  $l = 2,5 \cdot 10^{-10}$  м;  $n = 2$ ;  $x_1 = l/3$ ;  $x_2 = 2l/3$ ;  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг.

**Найти:**  $W$ ;  $E_2$ .

**Решение.** Волновая функция  $\psi(x)$ , описывающая состояние частицы (электрона) в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками на  $n$ -м энергетическом уровне, имеет вид

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi x n}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

где  $x$  – координата частицы в яме ( $0 \leq x \leq l$ );  $n$  – номер энергетического уровня;  $l$  – ширина ямы.

Вероятность нахождения частицы в заданном интервале  $l/3 < x < 2l/3$  определяется интегралом квадрата модуля волновой функции:

$$W = \int_{l/3}^{2l/3} |\psi(x)|^2 dx = \int_{l/3}^{2l/3} \left( \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi x n}{l} \right)^2 dx = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (2)$$

Заменяя

$$\sin^2 \frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi n x}{l} \right),$$

[см.  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ ],

получим

$$W = \frac{1}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \left( 1 - \cos \frac{2\pi n x}{l} \right) dx = \frac{1}{l} \int_{l/3}^{2l/3} dx - \frac{1}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \cos \frac{2\pi n x}{l} dx = \dots = 0,195.$$

Собственное значение энергии  $E_n$  электрона, находящегося на  $n$ -м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e l^2} = n^2 \frac{h^2}{8m_e l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где  $\hbar = h/2\pi$  – постоянная Планка;  $m_e$  – масса электрона.

При  $n = 2$ :

$$E_2 = 2^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e l^2} = 0,38518 \cdot 10^{-17} \text{ Дж} = 24,07 \text{ эВ}.$$

**Ответ:**  $W = 0,195$ ;  $E_n = 24,07$  эВ.

### Задачи

61. Найдите длину волны де Бройля для электрона, считая, что его скорость равна среднеквадратичной скорости электрона при температуре  $0^\circ\text{C}$ . Постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг. Ответ: 6,53 нм

62. Найдите (в пм) длину волны де Бройля для протона, ускоренного разностью потенциалов 4 кВ. Постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; масса протона  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг; заряд протона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Ответ: 0,453 пм

63. Найдите длину волны де Бройля для протона, если кинетическая энергия протона равна его энергии покоя. Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; масса протона  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг.

Ответ: 0,764 фм

64. Какой кинетической энергией должен обладать релятивистский протон, чтобы дебройлевская длина волны  $\lambda_B$  протона равнялась его комптоновской длине волны  $\lambda_C$ ? Масса протона  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг; скорость распространения света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Ответ: 389 МэВ

65. Используя соотношение неопределенностей  $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ , оцените минимально возможную кинетическую энергию электрона в атоме водорода, локализованного в области размером 55,31 пм. Постоянная Планка и масса электрона соответственно равны  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$  Дж · с и  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг.

Ответ: 12,6 эВ

66. Оцените относительную неопределенность импульса  $\Delta p_x / p$  протона, полагая, что неопределенность координаты  $\Delta x$  движущегося протона равна длине его дебройлевской длины волны  $\lambda_B$ .

Ответ: 0,159

67. Используя соотношение неопределенностей, оцените среднее время жизни нестабильной частицы, если неопределенность ее энергии составляет  $\Delta E = 1,2$  МэВ. Постоянная Планка  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

Ответ:  $5,52 \cdot 10^{-22}$  с

68. Вычислите естественную ширину спектральной линии, соответствующую переходу между возбужденными уровнями атома, если известно, что среднее время жизни возбужденных состояний атома равно 8 нс. Длина волны излучаемого фотона 0,38 мкм; скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Ответ: 9,58 фм

69. Протон находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме. Найдите отношение энергий пятого ( $E_5$ ) и второго ( $E_2$ ) возбужденных состояний.

Ответ: 6,25

70. Электрон находится в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме. Ширина ямы 0,4 нм, энергия электрона  $E_n = 116,38$  эВ. Найдите номер  $n$  энергетического состояния электрона. Постоянная Планка  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг.

Ответ: 7

71. Найдите, при какой ширине  $l$  одномерной потенциальной ямы дискретность энергии электрона становится сравнимой с энергией теплового движения при температуре 800 К. Масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

Ответ: 3,31 нм

72. Частица находится в одномерном бесконечно глубоком потенциальном ящике. Найдите (*в процентах*) вероятность  $W$  того, что частица, находящаяся в третьем ( $n = 3$ ) энергетическом состоянии, будет обнаружена в крайней четверти ящика.

Ответ: 30,3 %

## Лекция 7. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

### 7.1. Атом водорода в квантовой механике

Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром в атоме водорода

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (7.1)$$

где  $r$  – расстояние электрона от ядра. Следовательно, уравнение Шредингера [см. (6.20)], с учетом (7.1), имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0, \quad (7.2)$$

где  $m$  – масса электрона;  $E$  – полная энергия электрона в атоме.

Кулоновское поле ядра, в котором движется электрон, является центрально-симметричным, поэтому уравнение (7.2) целесообразно решать в сферических координатах  $r, \vartheta, \varphi$ , считая, что  $\psi = \psi(r, \vartheta, \varphi)$ . В координатах  $r, \vartheta, \varphi$  уравнение (7.2) запишется в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0. \quad (7.3)$$

Можно показать, что уравнение (7.3) имеет требуемые (т. е. однозначные, конечные и непрерывные) решения в следующих случаях: 1) при любых положительных непрерывных значениях энергии  $E$  (соответствует *свободному электрону*); 2) при дискретных отрицательных значениях энергии (получаемым из уравнения Шредингера *собственными значениями энергии*), равных

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8h^4\epsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (7.4)$$

в точности совпадающими [см. (5.11)] с уровнями энергии в модели атома Бора. [Однако если Бору пришлось вводить дополнительные постулаты, то в квантовой механике

дискретные значения энергии, являясь следствием самой теории, вытекают непосредственно из решения уравнения Шредингера].

Возможные значения  $E_1, E_2, E_3, \dots$  показаны на рис. 74 в виде горизонтальных прямых.

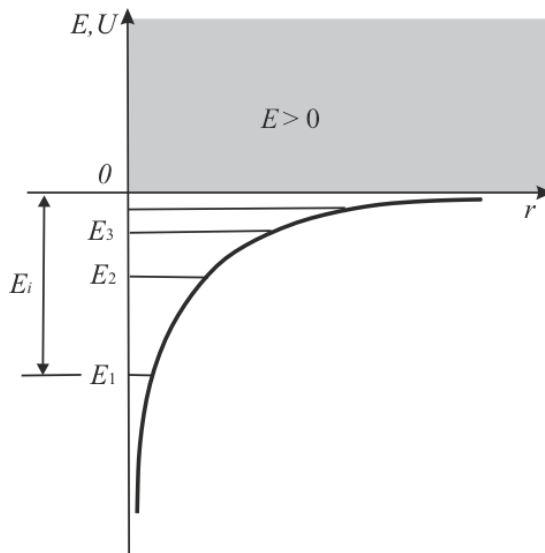


Рис. 74

Самый нижний уровень  $E_1$  – *основной*, все остальные ( $E_n > E_1, n = 2, 3, \dots$ ) – *возбужденные*. При  $E < 0$  движение электрона – *связанное* (он находится внутри гиперболической потенциальной ямы; при  $E > 0$  – *свободное* (атом ионизируется). Энергия  $E_n = E_\infty = 0$  достигается при  $n = \infty$ . Энергия ионизации атома водорода равна

$$E_i = -E_1 = \frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} = 13,55 \text{ эВ.}$$

## 7.2. Квантовые числа

Собственные функции уравнения (7.3) содержат три целочисленных параметра  $n, l$  и  $m_l$ :

$$\psi = \psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi).$$

*Главное квантовое число  $n$* , совпадает с номером уровня энергии [см. (7.4)], определяет энергетические уровни электрона в атоме и может принимать только целые положительные значения:

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.5)$$

**Орбитальное** (или **азимутальное**) **квантовое число**  $l$  при заданном  $n$  принимает дискретные значения

$$l = 0, 1, \dots, (n - 1), \quad (7.6)$$

т. е. всего  $n$  значений, и определяет модуль **орбитального момента импульса** (**механический орбитальный момент**) **электрона** в атоме

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l + 1)} \quad (7.7)$$

[вытекает из решения уравнения Шредингера (7.3); момент импульса  $L_l$  электрона *квантуется*, т. е. не может быть произвольным, а принимает дискретные значения, определяемые по формуле (7.7)].

Условие (7.7) определяет форму электронного облака в атоме при разных значениях  $l$  и является **правилом квантования момента импульса**. Совокупность электронов с одинаковым значением  $l$  называется **электронной оболочкой**.

**Магнитное квантовое число**  $m_l$  при данном  $l$  принимает значения

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad (7.8)$$

и определяет величину момента импульса электрона в заданном направлении. Так вектор  $\vec{L}_l$  орбитального момента импульса электрона может иметь лишь такие ориентации в пространстве, при которых его проекции  $L_{lz}$  на направление  $z$  внешнего магнитного поля принимает квантованные значения, кратные  $\hbar$ :

$$L_{lz} = \hbar m_l. \quad (7.9)$$

Таким образом, каждому значению орбитального квантового числа  $l$  соответствует  $2l + 1$  значений магнитного квантового числа  $m_l$ , т. е. определенной величине модуля вектора  $\vec{L}_l$  соответствует  $2l + 1$  ориентаций орбиталей в пространстве. На рис. 75 приведены возможные ориентации векторов  $\vec{L}_l$  для электронов с  $l = 1$  и  $l = 2$ .

В магнитном поле уровень с главным квантовым числом  $n$  расщепляется на  $2l + 1$  подуровней – **эффект Зеемана** (1896 г.). Расщепление уровней энергии во внешнем электрическом поле называется **эффектом Штарка** (1913 г.).

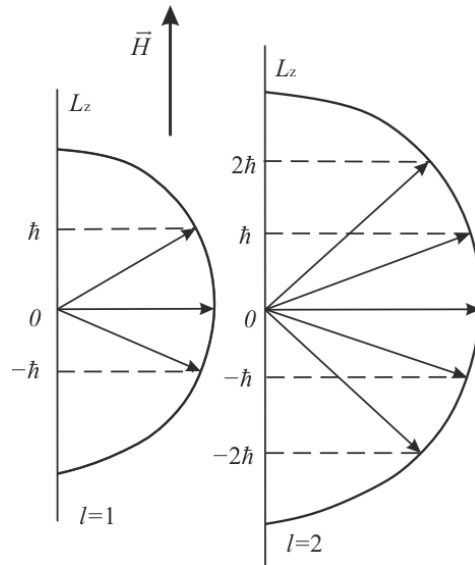


Рис. 75

Число различных состояний, соответствующих данному  $n$ , равно

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2 \quad (7.10)$$

[при данном  $n$  орбитальное квантовое число  $l$  может изменяться от 0 до  $n - 1$ ; каждому значению  $l$  соответствует  $2l + 1$  различных значений  $m_l$ ].

[В квантовой механике *квадрат модуля волновой функции* определяет *вероятность* обнаружения электрона в единице объема. Вероятность обнаружения электрона в разных частях атома различна. Электрон при своем движении как бы «размазан» по всему объему, образуя *электронное облако*, плотность (густота) которого характеризует вероятность нахождения электрона в различных точках объема атома].

Квантовые числа  $n$  и  $l$  характеризуют *размер* и *форму* электронного облака, а магнитное квантовое число  $m_l$  характеризует *ориентацию электронного облака в пространстве*. В атомной физике, по аналогии со спектроскопией, состояние электрона, характеризующееся квантовым числом  $l = 0$ , называется *s*-состоянием (электрон в этом состоянии называется *s*-электроном),  $l = 1$  – *p*-состоянием,  $l = 2$  – *d*-состоянием,  $l = 3$  – *f*-состоянием и т. д. Значение главного квантового числа  $n$  указывается перед условным обозначением орбитального квантового числа  $l$ . Например, электроны в состояниях с  $n = 2$  и  $l = 0$  и 1 обозначаются соответственно символами  $2s$  и  $2p$ .



### 7.3. Правило отбора. Энергетический спектр атома водорода

Квантовые числа  $n$ ,  $l$  и  $m_l$  позволяют более детально описать спектр испускания (поглощения) атома водорода, полученный в теории Бора (см. рис. 67).

Излучение происходит в результате перехода электрона из одного состояния в другое. Возможными являются лишь переходы, разрешенные **правилами отбора**. Для электрона, движущегося в центрально-симметричном поле ядра, могут осуществляться только такие переходы, для которых:

- 1) изменение орбитального квантового числа  $\Delta l$  удовлетворяет условию

$$\Delta l = \pm 1, \quad (7.11)$$

- 2) изменение магнитного квантового числа  $\Delta m_l$  удовлетворяет условию

$$\Delta m_l = 0, \pm 1. \quad (7.12)$$

Спектральные линии атома водорода, с учетом возможных состояний, соответствующих данному  $n$ , и формуле (7.11), показаны на рис. 76. Серии Лаймана соответствуют переходы  $np \rightarrow 1s$  ( $n = 2, 3, \dots$ ); серии Бальмера –  $np \rightarrow 2s$ ,  $ns \rightarrow 2p$ ,  $nd \rightarrow 2p$  ( $n = 3, 4, \dots$ ); и т. д.

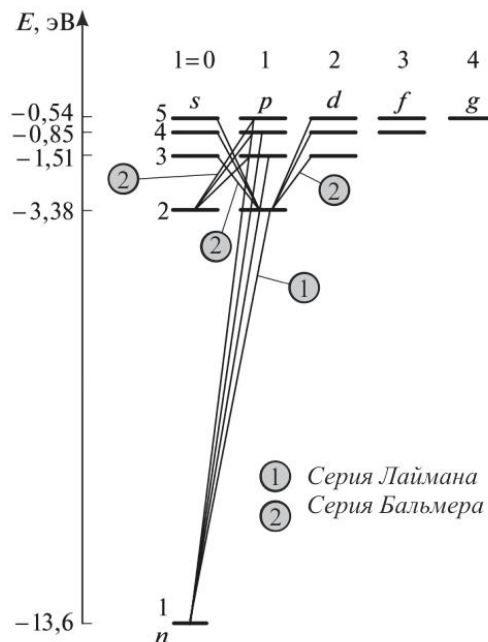


Рис. 76

Правила отбора не накладывают ограничений на главное квантовое число  $n$ : оно может изменяться на любое значение.

## 7.4. Спин электрона

Электрон обладает *собственным неуничтожимым механическим моментом импульса*, не связанным с движением электрона в пространстве, – *спином*. [Спин был обнаружен в экспериментах Штерна и Герлаха (1922 г.) при прохождении узкого пучка атомов водорода (пропускался вдоль оси  $y$ ; вдоль оси  $z$  происходило расщепление пучка), находящихся в  $s$ -состоянии через сильное неоднородное магнитное поле (рис. 77).

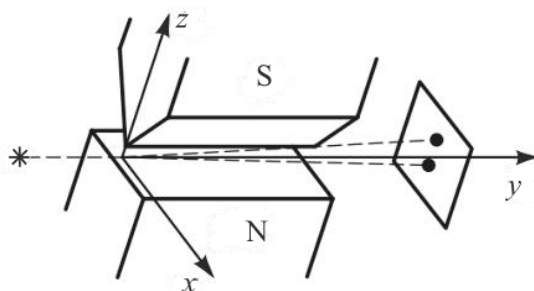


Рис. 77

В этом состоянии  $l = 0$ , момент импульса [ $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)} = 0$ ] и магнитное поле не должно было влиять на движение атомов. Однако пучок атомов расщеплялся на два пучка, следовательно, было обнаружено пространственное квантование механического момента, не связанного с орбитальным движением электрона].

Первоначально предполагалось, что спин является следствием вращения электрона вокруг своей оси. [Часто спин электрона наглядно представляют, как момент импульса, связанный с вращением электрона – твердого шарика – вокруг своей оси, но такая модель приводит к абсурдному результату – линейная скорость на поверхности электрона в 200 раз превышает скорость света]. На самом деле спин оказался врожденным свойством электрона – *спин электрона* (и всех других микрочастиц) – *квантовая величина*, у нее нет классического аналога; это внутреннее неотъемлемое свойство электрона, подобное его заряду и массе.

Спин  $\vec{L}_s$ , как механический момент  $\vec{L}_l$ , квантуется

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad (7.13)$$

где  $s$  – *спиновое квантовое число*.

Проекция  $L_{sz}$  спина квантуется так, что вектор  $\vec{L}_s$  может принимать  $2s + 1$  ориентаций. Так как в опытах Штерна и Герлаха наблюдались только две ориентации, то  $2s + 1 = 2$ , откуда  $s = 1/2$ .

Проекция  $L_{sz}$  спина на направление внешнего магнитного поля определяется выражением, аналогичным (7.9):

$$L_{sz} = \hbar m_s, \quad (7.14)$$

где  $m_s$  – *магнитное спиновое квантовое число*; оно может иметь только два значения:  $m_s = \pm 1/2$ .

Таким образом, состояние электрона в атоме определяется набором *четырех квантовых чисел*:

- *главным*  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ );
- *орбитальным*  $l$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ );
- *магнитным*  $m_l$  ( $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ );
- *магнитным спиновым*  $m_s$  ( $m_s = \pm 1/2$ ).

## 7.5. Принцип Паули.

### Распределение электронов по энергетическим уровням атома

Согласно квантовой механике, периодичность физических и химических свойств элементов является следствием периодичности заполнения электронных слоев в атомах [*электронный слой* – совокупность электронов в атоме, обладающих одинаковым значением  $n$ ]. Порядок заполнения слоев электронами и возможное количество электронов в каждом слое определяются *условием минимума энергии* и *принципом Паули* (1925 г.).

*Условие минимума энергии* – заполнение электронами слоев в атомах происходит в порядке заполнения состояний, отвечающих минимуму энергии.

*Принцип Паули* – в одном и том же атоме не может быть более одного электрона с одинаковым набором четырех квантовых чисел  $n, l, m_l$  и  $m_s$ , т. е.

$$Z(n, l, m_l, m_s) = 0 \text{ или } 1,$$

где  $Z(n, l, m_l, m_s)$  – число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел:  $n, l, m_l, m_s$ .

Совокупность электронов в многоэлектронном атоме, имеющих одно и то же главное квантовое число  $n$ , называется **электронной оболочкой**.

**Максимальное число электронов**, находящихся в состояниях, определяемых данным главным квантовым числом  $n$ , равно

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2$$

[согласно (7.10), данному  $n$  соответствует  $n^2$  различных состояний, отличающихся значениями  $l$  и  $m_l$ ;  $m_s$  может принимать лишь два значения ( $\pm 1/2$ )].

В каждой из оболочек электроны распределяются по **подоболочкам**, соответствующим данному  $l$ .

Поскольку орбитальное квантовое число  $l$  принимает значения от 0 до  $n - 1$ , число подоболочек равно порядковому номеру  $n$  оболочки.

Количество электронов в подоболочке определяется квантовыми числами  $m_l$  и  $m_s$ . **Максимальное число электронов в подоболочке с данным  $l$**  равно

$$2(2l + 1).$$

Обозначения оболочек, а также распределение электронов по оболочкам и подоболочкам представлены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Главное квантовое число $n$	1		2			3			4				5				
Символ оболочки	$K$		$L$			$M$			$N$				$O$				
Максимальное число электронов в оболочке	2		8			18			32				50				
Орбитальное квантовое число $l$	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4		
Символ подоболочки	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$	$5s$	$5p$	$5d$	$5f$	$5g$		
Максимальное число электронов в подоболочке	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	18		

## 7.6. Периодическая система элементов Менделеева

Рассмотрим связь между электронным строением атомов (см. п. 7.5) и положением элементов в **Периодической системе элементов Д.И. Менделеева** (1869 г.) – *фундаментальный закон природы*, являющийся основой современной химии, атомной и ядерной физики.

[Д.И. Менделеев ввел понятие порядкового номера  $Z$  химического элемента, равного числу протонов в ядре и соответственно равного общему числу электронов в электронной оболочке атома. Расположив химические элементы по мере возрастания порядковых номеров, он получил периодичность в изменении химических свойств элементов. Для известных в то время 64 химических элементов некоторые клетки таблицы оказались незаполненными, так как соответствующие им элементы (например, Ga, Se, Ge) тогда еще не были известны.

Д.И. Менделеев не только правильно расположил известные элементы, но и *предсказал существование новых*, еще не открытых элементов и их основные свойства. Кроме того, ему удалось уточнить атомные веса некоторых элементов. Например, атомные веса Be и U, вычисленные на основе таблицы Менделеева, оказались правильными, а полученные ранее экспериментально – ошибочными].

В атоме водорода ( $Z = 1$ ) имеется в основном состоянии один  $1s$ -электрон [характеризуется квантовыми числами  $n = 1$ ,  $l = 0$ ,  $m_l = 0$  и  $m_s = \pm 1/2$  (ориентация его спина произвольна)]. У гелия ( $Z = 2$ )  $K$ -слой ( $n = 1$ ) целиком заполнен двумя электронами, отличающимися спинами, что соответствует электронной конфигурации  $1s^2$  (два  $1s$ -электрона). На атоме He заканчивается заполнение  $K$ -оболочки, что соответствует завершению I периода Периодической системы (табл. 7.2).

Третий электрон атома лития ( $Z = 3$ ) [атомом Li начинается II период Периодической системы], согласно принципу Паули, вынужден расположиться в  $L$ -слое ( $n = 2$ ), так как именно этому состоянию соответствует наименьшее значение полной энергии атома, а электронная конфигурация атома Li  $1s^2 2s$ . У четвертого элемента, бериллия ( $Z = 4$ ), заполняется полностью подоболочка  $2s$ , т. е. электронная конфигурация атома Be  $1s^2 2s^2$ . У последующих шести элемен-

тов – от бора ( $Z = 5$ ) до неона ( $Z = 10$ ) – идет заполнение электронами подоболочки  $2p$  (табл. 7.2). II период Периодической системы завершается Ne – инертным газом, для которого подоболочка  $2p$  целиком заполнена; электронная конфигурация атома Ne  $1s^2 2s^2 2p^6$ .

Таблица 7.2

Период	$Z$	Элемент	$K$			$L$			$M$			$N$		
			$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$		
I	1	H	1											
	2	He	2											
II	3	Li	2	1										
	4	Be	2	2										
	5	B	2	2	1									
	6	C	2	2	2									
	7	N	2	2	3									
	8	O	2	2	4									
	9	F	2	2	5									
	10	Ne	2	2	6									
III	11	Na	2	2	6	1								
	12	Mg	2	2	6	2								
	13	Al	2	2	6	2	1							
	14	Si	2	2	6	2	2							
	15	P	2	2	6	2	3							
	16	S	2	2	6	2	4							
	17	Cl	2	2	6	2	5							
	18	Ar	2	2	6	2	6							
IV	19	K	2	2	6	2	6	–	1					
	20	Ca	2	2	6	2	6	–	2					
	21	Sc	2	2	6	2	6	1	2					
	22	Ti	2	2	6	2	6	2	2					
	23	V	2	2	6	2	6	3	2					
	24	Cr	2	2	6	2	6	4	1					
	25	Mn	2	2	6	2	6	5	2					
	26	Fe	2	2	6	2	6	6	2					
	27	Co	2	2	6	2	6	7	2					
	28	Ni	2	2	6	2	6	8	2					
	29	Cu	2	2	6	2	6	10	1					
	30	Zn	2	2	6	2	6	10	2					
	31	Ga	2	2	6	2	6	10	2	1				
	32	Ge	2	2	6	2	6	10	2	2				
	33	As	2	2	6	2	6	10	2	3				
	34	Se	2	2	6	2	6	10	2	4				
	35	Br	2	2	6	2	6	10	2	5				
	36	Kr	2	2	6	2	6	10	2	6				

От натрия ( $Z = 11$ ) [атомом Na начинается III период Периодической системы] до аргона ( $Z = 18$ ) комплектуется  $M$ -слой. Электронная конфигурация атома Na  $1s^2 2s^2 2p^6 3s$ ;  $3s$ -электрон (как и  $2s$ -электрон Li) является валентным электроном, поэтому оптические свойства Na подобны свойствам Li. Электронная конфигурация атома Ar в основном состоянии имеет вид  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$  [Ar оказывается подобным He и Ne: в его наружной оболочке все  $s$ - и  $p$ -состояния заполнены]. Ar является химически инертным и завершает III период Периодической системы.

Хотя после этого в  $M$ -слое остается свободной вся  $d$ -подоболочка, у следующих за Ar калия ( $Z = 19$ ) и кальция ( $Z = 20$ ) начинает заполняться  $N$ -слой [это означает, например, для K, – в результате взаимодействия электронов состояние  $n = 4, l = 0$  имеет меньшую энергию, чем состояние  $n = 3, l = 2$ ] и лишь со скандия ( $Z = 21$ ) возобновляется достройка  $M$ -слоя (формирование  $d$ -подоболочки), которая заканчивается у меди с  $Z = 29$ . Электронная конфигурация атома Cu  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s$ . Далее  $N$ -оболочка заполняется до криптона ( $Z = 36$ ), у которого, как и в случае Ne и Ar,  $s$ - и  $p$ -состояния наружной оболочки заполнены целиком. Kr заканчивается IV период Периодической системы. Подобные рассуждения применимы и к остальным элементам таблицы Менделеева [в настоящее время открыто 118 элементов, причем независимое подтверждение нашли 114 из них, а в природе встречаются только 92 элемента], однако эти данные можно найти в справочниках.

Нарушение последовательности застройки электронных слоев различных элементов объясняет квантовая механика.

[До сих пор предполагалось, что энергия электрона в атоме зависит преимущественно от главного квантового числа  $n$  и заряда  $Z$ , а ее значение можно определить по формуле (5.11)

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{m_e Z^2 e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(см. п. 5.4). Эта формула справедлива только в элементарной боровской теории для водородоподобных ионов [см. п. 5.6], у которых потенциальная энергия обусловлена взаимодействием единственного электрона с ядром. В многоэлектронных атомах электроны движутся не только в поле ядра, но и в поле других электронов, что приводит к зависимости энергии

электронов от двух квантовых чисел –  $n$  и  $l$ . Квантовая механика учитывает эту зависимость двумя взаимосвязанными факторами: экранированием заряда ядра и проникновением электронов к ядру. *Эффект экранирования* состоит в уменьшении воздействия на рассматриваемый электрон положительного заряда ядра другими электронами. Например, электрон в  $L$ -слое ( $n = 2$ ) будет ощущать кулоновское поле ядра ослабленным электронами внутреннего  $K$ -слоя ( $n = 1$ ). Согласно квантовой механике электрон можно обнаружить в любой точке атома. С этим обстоятельством связан *эффект проникновения электронов к ядру*, когда даже внешние электроны, проникая через внутренние электронные слои, могут некоторое время находиться вблизи ядра, где экранирующее действие других электронов мало. При одинаковом значении  $n$  в области ядра сконцентрирована тем большая часть электронного облака, чем меньше  $l$ . Поэтому  $s$ -электроны являются более проникающими, чем  $p$ -электроны, а  $d$ -электроны гораздо реже можно обнаружить вблизи ядра, чем  $p$ -электроны. Этим и объясняется уже известная последовательность энергетических уровней электронов в оболочках: при одинаковых  $n$  и  $Z$  минимальную энергию имеет  $s$ -состояние, более высокая энергия – у  $p$ -состояния и т. д.].

Квантовая механика не только дает подробное объяснение строения элементов Периодической системы, но и во многих случаях предсказывает свойства неизученных элементов.

## 7.7. Рентгеновское излучение. Закон Мозли

*Рентгеновское излучение* – электромагнитные волны, энергия фотонов которых лежит на энергетической шкале между ультрафиолетовым излучением и гамма-излучением.

Самым распространенным источником рентгеновского излучения является *рентгеновская трубка* (рис. 78), в которой вылетающие с катода  $K$  электроны бомбардируют анод  $A$  (антикатод), изготовленный из тяжелых металлов ( $W$ ,  $Cu$ ,  $Pt$  и т. д.). При бомбардировке анода  $A$  электронной трубкой энергичными электронами (с энергией  $\sim 10^2 \div 10^4$  эВ) *наблюдается рентгеновское излучение двух видов. Тормозное рентгеновское излучение* связано с излучением рентгеновских квантов непосредственно электронами. Характерными особенностями этого излучения являются *коротковолновая граница спектра* и плавное распределение интенсивности излучения по спектру.



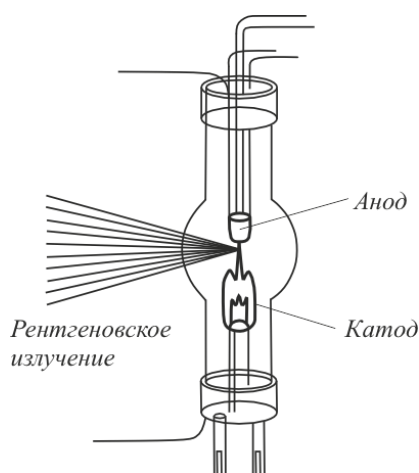


Рис. 78

[Тормозное излучение имеет коротковолновую границу  $\lambda_{\min}$ , называемую *границей сплошного спектра*, которая соответствует ситуации, при которой вся энергия электрона переходит в энергию рентгеновского кванта

$$E_{\max} = h\nu_{\max} = eU,$$

где  $U$  – разность потенциалов между анодом и катодом. Граничная длина волны

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{ch}{eU} = \frac{ch}{E_{\max}}$$

не зависит от материала анода, а определяется только напряжением на трубке].

На этом фоне выделяется ряд интенсивных узких линий *характеристического излучения*. Такое излучение возникает *при выбывании электрона, принадлежащего одному из внутренних электронных слоев*, после чего на освободившееся место переходит электрон с более высокого слоя, и излучается рентгеновский квант. На фоне сплошного спектра появляются отдельные резкие линии (рис. 79) – *линейчатый спектр*, определяемый материалом анода и называемый *характеристическим рентгеновским спектром*.

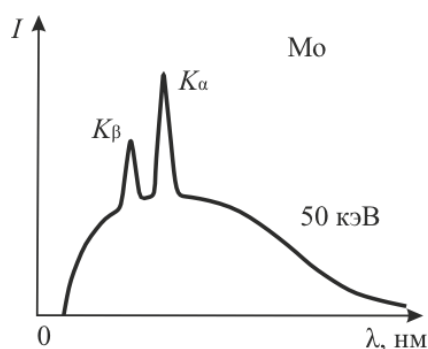


Рис. 79

Характеристические рентгеновские спектры излучения разных элементов имеют сходный характер, они состоят из нескольких серий, обозначаемых  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  и  $O$ ; каждая серия содержит небольшой набор отдельных линий, обозначаемых в порядке убывания длины волны индексами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... ( $K_\alpha$ ,  $K_\beta$ ,  $K_\gamma$ , ...  $L_\alpha$ ,  $L_\beta$ ,  $L_\gamma$ , ...); при переходе от легких элементов к тяжелым весь спектр, без изменения его структуры, монотонно смещается в сторону коротких длин волн; атомы каждого химического элемента обладают определенным, присущим только данному элементу, характеристическим спектром; если анод состоит из нескольких элементов, то и характеристическое рентгеновское излучение представляет собой наложение спектров этих элементов. При увеличении атомного номера  $Z$  весь рентгеновский спектр смещается в коротковолновую часть, не меняя своей структуры (рис. 80).

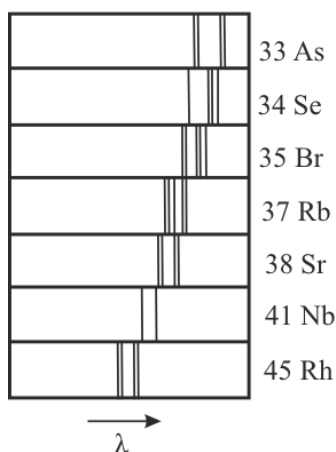


Рис. 80

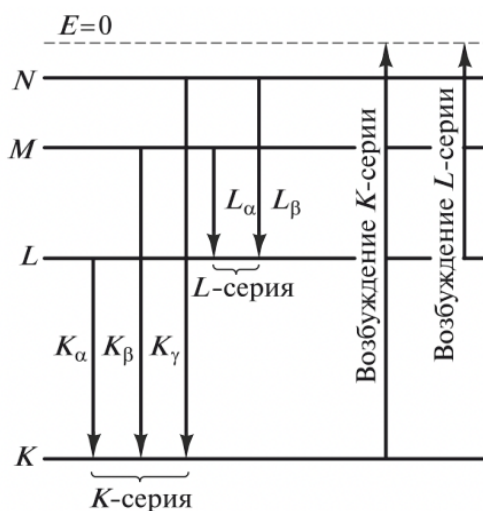


Рис. 81

Схема возникновения рентгеновских спектров дана на рис. 81. Если вырывается один из двух электронов  $K$ -оболочки атома, то освободившееся место может быть занято электроном с более удаленных от ядра оболочек  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , ... . При этом возникает  $K$ -серия:  $K_\alpha$  ( $L \rightarrow K$ ),  $K_\beta$  ( $M \rightarrow K$ ),  $K_\gamma$  ( $N \rightarrow K$ ) и т. д. Аналогично возникают и другие серии. [Самой длинноволновой линией  $K$ -серии является линия  $K_\alpha$ . Частоты линий возрастают в ряду  $K_\alpha \rightarrow K_\beta \rightarrow K_\gamma$ , поскольку энергия, высвобождаемая при переходе электрона на  $K$ -оболочку с более удаленных оболочек, увеличивается. Наоборот, интенсивности линий в ряду  $K_\alpha \rightarrow K_\beta \rightarrow K_\gamma$  убывают, так как вероятность переходов электронов

с *L*-оболочки на *K*-оболочку больше, чем с более удаленных оболочек *M* и *N*. *K*-серия обязательно сопровождается другими сериями, так как при испускании ее линий появляются вакансии в оболочках *L*, *M*, *N*, ... , которые будут заполняться электронами, находящимися на более высоких уровнях].

Частоты  $\nu$  линий *характеристического рентгеновского излучения* подчиняются **закону Мозли** (1913 г.):

$$\nu = R(Z - \sigma)^2 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (7.15)$$

где  $R$  – постоянная Ридберга [см. (5.2)];  $Z$  – порядковый номер в Периодической системе элементов;  $\sigma$  — **постоянная экранирования**, в пределах каждой серии одинаковая для всех элементов (например, для *K*-серии  $\sigma = 1$ , *L*-серии  $\sigma = 7,5$  и т. д.);  $m = 1, 2, 3, \dots$  (*определяет рентгеновскую серию*);  $n = m + 1, m + 2, \dots$  (*определяет линию соответствующей серии*).

Смысл постоянной экранирования  $\sigma$  заключается в том, что на электрон, совершающий переход, действует не весь заряд ядра  $Ze$ , а заряд  $(Z - \sigma)e$ , ослабленный экранирующим действием других электронов.

Закон Мозли обычно выражают формулой

$$\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma) \quad (7.16)$$

[*корень квадратный из частоты* ( $\omega$ ) *является линейной функцией атомного номера*  $Z$ ;  $C$  и  $\sigma$  – константы].

## 7.8. Молекулярные спектры

**Молекулой** называется связанное состояние электронейтральной системы, состоящей из ядер нескольких одинаковых или различных атомов и окружающих их электронов. Молекулы из двух атомов называются **двухатомными**, из трех и более атомов – **многоатомными**. Молекулу с недостаточным или избыточным числом электронов называют **молекулярным ионом**.

Химические связи обусловлены взаимодействием *внешних* (*валентных*) электронов атомов. Наиболее часто в молекулах встречаются *два типа связи*:

1) **ионная связь** (например, в молекулах NaCl, KBr) осуществляется кулоновским притяжением атомов при переходе электрона от одного атома к другому, т. е. при образовании положительного ( $\text{Na}^+$ ) и отрицательного ( $\text{Cl}^-$ ) ионов;

2) **ковалентная связь** (например, в молекулах  $\text{H}_2$ ,  $\text{C}_2$ , CO) осуществляется при обобществлении валентных электронов двумя соседними атомами (вследствие неразличимости тождественных частиц, например, электронов в молекуле  $\text{H}_2$ ). Наглядно можно представить себе, что электрон каждого атома молекулы проводит некоторое время у ядра другого атома (обмен электронами). Такое специфически квантовое взаимодействие называется **обменным взаимодействием**.

Молекула является квантовой системой, – она описывается уравнением Шредингера, учитывающим *движение электронов* в молекуле, *колебания атомов* в молекуле, *вращение молекулы*. Решение этого уравнения – очень сложная задача, которая обычно разбивается на две: для *электронов* и *ядер*.

Энергия изолированной молекулы (отсчитанная от основного состояния)

$$E \approx E_{\text{эл}} + E_{\text{кол}} + E_{\text{вращ}}, \quad (7.17)$$

где  $E_{\text{эл}}$  – энергия движения электронов относительно ядер;  $E_{\text{кол}}$  – энергия колебаний ядер (*в результате которых периодически изменяется относительное положение ядер*);  $E_{\text{вращ}}$  – энергия вращения ядер (*в результате которых периодически изменяется ориентация молекулы в пространстве*). Соотношение между ними:

$$E_{\text{эл}} : E_{\text{кол}} : E_{\text{вращ}} = 1 : \sqrt{\frac{m_e}{M}} : \frac{m_e}{M},$$

где  $m_e$  – масса электрона;  $M$  – величина, имеющая порядок массы ядер атомов в молекуле [ $m_e/M \approx 10^{-5} \div 10^{-3}$ , поэтому  $E_{\text{эл}} \gg E_{\text{кол}} \gg E_{\text{вращ}}$ ]. Масштаб энергий:  $E_{\text{эл}} \approx 1 \div 10$  эВ;  $E_{\text{кол}} \approx 10^{-2} \div 10^{-1}$  эВ;  $E_{\text{вращ}} \approx 10^{-5} \div 10^{-3}$  эВ.

[Каждая из входящих в (7.17) энергий квантуется (ей соответствует набор дискретных уровней энергии) и определяется квантовыми числами. При переходе из одного энергетического состояния в другое поглощается или испускается энергия  $\Delta E = h\nu$ . При таких переходах одновременно изменяются энергия движения электронов, энергии колебаний и вращения ядер].

**Колебательная энергия**, при небольших значениях *колебательного квантового числа*  $\nu$ , определяется формулой для энергии гармонического осциллятора [см. (6.51)]:

$$E_{\text{кол}} = \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \quad (7.18)$$

где  $\omega_{\nu}$  – классическая частота осциллятора. При этом *правило отбора* для колебательного квантового числа:  $\Delta \nu = \pm 1$ .

**Вращательная энергия** молекулы, имеющей момент инерции  $I$  относительно оси, проходящей через центр ее инерции и вращающейся с угловой скоростью  $\omega_r$ , равна

$$E_r = \frac{I \omega_r^2}{2} = \frac{(I \omega_r)^2}{2I} = \frac{L_j^2}{2I}, \quad (7.19)$$

где  $L_j = I \omega_r$  – момент импульса молекулы.

Согласно (7.7) момент импульса может принимать лишь дискретные значения:

$$L_j = \hbar \sqrt{j(j+1)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (7.20)$$

где  $j$  – квантовое число момента импульса. Следовательно, *вращательная энергия* молекулы может иметь только квантованные значения:

$$E_r = \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2I}. \quad (7.21)$$

Правило отбора для вращательного квантового числа:  $\Delta j = \pm 1$ .

Итак, в соответствии с (7.18) и (7.21) полная энергия молекулы равна

$$E \approx E_{\text{эл}} + \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\nu} + \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2I}. \quad (7.22)$$

При переходе из одного энергетического состояния в другое, с учетом правил отбора, поглощается или испускается фотон с энергией  $\Delta E = h\nu$ . На рис. 82 представлена схема уровней энергии двухатомной молекулы (для примера представлены только два электронных уровня: *основное* электронное состояние и *первое возбужденное* электронное состояние).

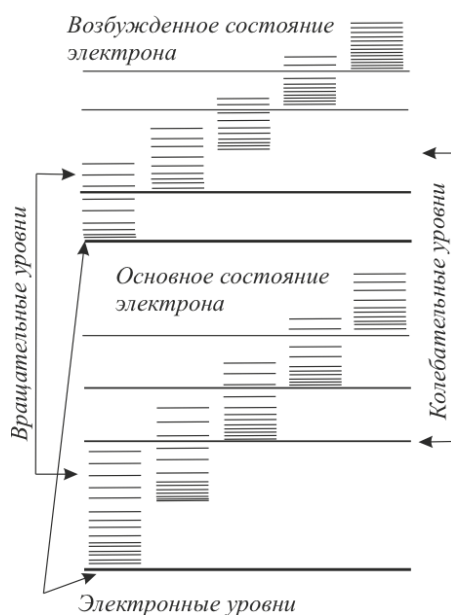


Рис. 82

Типичные молекулярные спектры представляют собой *совокупность полос (полосатые спектры)*, которые, в свою очередь, состоят из огромного числа настолько тесно расположенных линий – переходов между энергетическими уровнями, что их можно разделить, только используя спектральные приборы высокой разрешающей силы.

## 7.9. Поглощение. Спонтанное и вынужденное излучения

Рассмотрим два квантовых состояния с энергиями  $E_1$  и  $E_2$ .

**1. Поглощение.** Если атом находится в основном состоянии 1, то под действием внешнего излучения может осуществиться вынужденный переход в возбужденное состояние 2 (рис. 83, а), приводящий к поглощению излучения. Вероятность подобных переходов пропорциональна плотности излучения, вызывающего эти переходы.

**2. Спонтанное излучение.** Атом, находясь в возбужденном состоянии 2, может через некоторый промежуток времени *спонтанно*, без каких-либо внешних воздействий, перейти в основное состояние, испуская при этом фотон с энергией  $h\nu = E_2 - E_1$ . Процесс испускания фотона возбужденным атомом (возбужденной микросистемой) без внешних воздействий называется *спонтанным* (или

*самопроизвольным*) излучением (рис. 83, б). Чем больше вероятность спонтанных переходов, тем меньше среднее время жизни атома в возбужденном состоянии. Так как спонтанные переходы взаимно не связаны, то спонтанное излучение некогерентно.

**3. Вынужденное излучение.** Эйнштейн (1916 г.) для объяснения, наблюдавшегося на опыте термодинамического равновесия между веществом и испускаемым и поглощаемым им излучением постулировал, что, помимо поглощения и спонтанного излучения, должен существовать третий, качественно иной тип взаимодействия. Если на атом, находящийся в возбужденном состоянии 2, действует внешнее излучение с частотой, удовлетворяющей условию  $h\nu = E_2 - E_1$ , то возникает **вынужденный (индуцированный) переход** в основное состояние 1 с излучением фотона той же энергии  $h\nu = E_2 - E_1$  дополнительно к тому фотону, под действием которого произошел переход (рис. 83, в). Возникающее в результате таких переходов излучение называется **вынужденным (индуцированным) излучением**. Таким образом, в процесс вынужденного излучения вовлечены два фотона: *первичный фотон*, вызывающий испускание излучения возбужденным атомом, и *вторичный фотон*, испущенный атомом. Существенно, что вторичные фотоны *неотличимы* от первичных, являясь *точной их копией*.

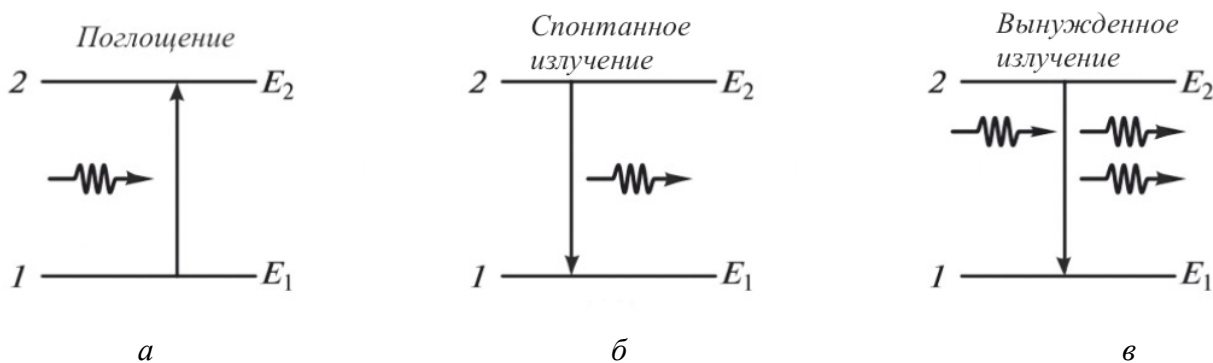


Рис. 83

Вынужденное излучение обладает весьма важными свойствами. Эйнштейн и П. Дирак показали, что направление его распространения в точности совпадает с направлением распространения **вынуждающего излучения**, т. е. внешнего излучения, вызывающего переход; вынужденное излучение (*вторичные фотоны*)

*тождественно* вынуждающему излучению (*первичным фотонам*): оно имеет такие же частоту, фазу и поляризацию, как и вынуждающее излучение. Следовательно, *вынужденное излучение строго когерентно с вынуждающим излучением* (т. е. испущенный фотон неотличим от фотона, падающего на атом). Эта особенность вынужденного излучения лежит в основе действия усилителей и генераторов света, называемых *лазерами* [см. п. 7.10].

Испущенные фотоны, двигаясь в одном направлении и встречая другие возбужденные атомы, стимулируют вынужденные переходы – происходит размножение фотонов. Однако, наряду с вынужденным излучением, возможен и конкурирующий процесс – *поглощение*. Для того чтобы происходило усиление излучения, необходимо, чтобы интенсивность вынужденного излучения превышала интенсивность поглощения фотонов. А для этого необходимо, чтобы заселенность возбужденного состояния (число атомов в возбужденном состоянии) была больше, чем заселенность основного состояния (число атомов в основном состоянии). Такое термодинамически неравновесное состояние называется *состоянием с инверсией населенностей*. Процесс перевода системы в состояние с инверсией населенностей называется *накачкой* (осуществляется оптическими, электрическими и другими способами). Инверсная среда [вынужденное излучение может превысить поглощение], в которой происходит усиление падающего на нее пучка света, называется *активной*. Закон Бугера  $I = I_0 e^{-\alpha x}$  [см. (2.37)] для таких сред имеет отрицательный коэффициент поглощения.

## 7.10. Лазеры

*Лазер* – источник когерентного электромагнитного излучения высокой направленности, способный осуществлять предельно возможную концентрацию энергии излучения в пространстве, времени и спектральном диапазоне, основанный на вынужденном излучении атомов и молекул. [Слово «*лазер*» составлено из начальных букв слов английской фразы «Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation», что означает «усиление света в результате вынужденного излучения».



Первоначально термин «лазер» применялся только к оптическому излучению (свету), ныне генерация лазерного излучения получена в диапазоне длин волн от микроволнового до мягкого рентгеновского. Лазерное излучение возникает как результат преобразования различных видов энергии (световой, электрической, химической и др.). Начало новому научному направлению – *квантовой электронике*, в т. ч. *лазерной физике*, – было положено работами А.М. Прохорова, Н.Г. Басова в СССР и Ч. Таунса в США, которые в 1964 г. были удостоены Нобелевской премии].

Для получения *когерентного излучения* в результате вынужденного излучения необходимо:

1) наличие инверсии заселенностей (число атомов в более высоком состоянии должно превышать число атомов в более низком состоянии), в результате чего излучение фотонов будет преобладать над поглощением [см. п. 7.9];

2) наличие *метастабильного состояния* – возбужденного энергетического состояния атомной системы, в котором она может существовать длительное время, в результате чего переход в более низкое состояние происходит благодаря вынужденному, а не спонтанному излучению.

Признаки классификации лазеров представлены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Тип активной среды	Методы накачки	Режим генерации
Твердотельные	Оптические	Непрерывный
Газовые	Тепловые	Импульсный
Полупроводниковые	Химические	
Жидкостные	Электроионизационные и др.	

Лазер обязательно имеет *три основных компонента*:

– *активную среду*, приведенную в неравновесное состояние внешним источником энергии (создаются состояния с инверсией заселенностей);

– *систему накачки* (устройство для создания инверсии в активной среде);

– *оптический резонатор* (устройство, выделяющее в пространстве избирательное направление пучка фотонов и формирующее выходящий световой пучок).

В качестве активной среды, в зависимости от диапазона излучаемого света, могут использоваться твердые тела (например, кристаллы рубина, сапфира, неодимовое стекло), люминесцирующие жидкости (например, органические красители), либо газы (например, смесь аргон – неон, гелий – неон, смесь диоксида углерода ( $\text{CO}_2$ ) с инертными газами и т. п.). [Состав активного вещества определяет диапазон излучаемого света. Так, рубиновый и гелий-неоновый лазеры излучают красный свет, лазер на  $\text{CO}_2$  – инфракрасное излучение, органические красители в растворах излучают в широком диапазоне видимого света].

Оптическая среда с помощью системы накачки (например, с помощью мощной импульсной лампы или газового разряда) переводится в состояние инверсной населенности уровней, после чего происходят вынужденные переходы атомов на основной энергетический уровень, т. е. зарождается лазерная генерация (рис. 84, а). [Способы накачки могут быть самыми разными: внешнее электромагнитное излучение, инжекция носителей заряда, химические реакции, электрический разряд, быстрое охлаждение и др.].

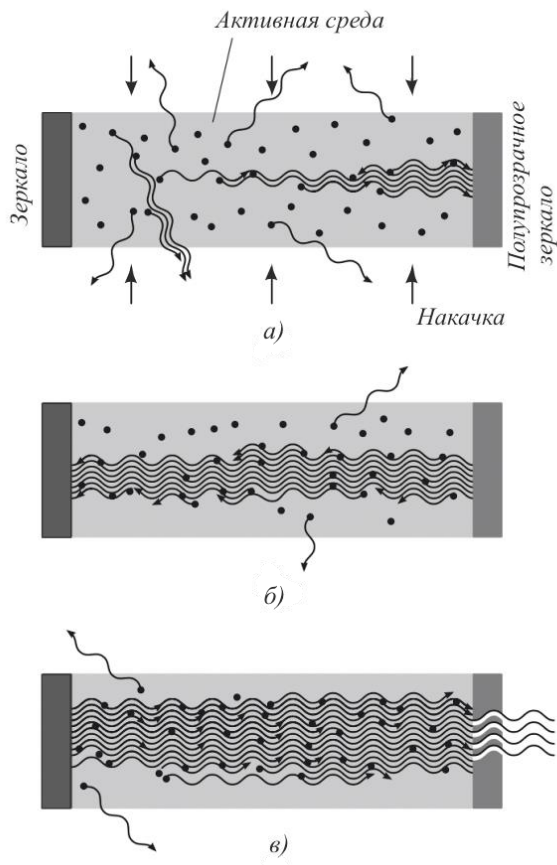


Рис. 84

Оптическим резонатором на рис. 84 служит пара обращенных друг к другу плоских зеркал на общей оптической оси [между которыми помещается активная среда (кристалл или кювета с газом)], причем одно из зеркал полупрозрачное, что обеспечивает выход лазерного луча из системы. Фотоны, движущиеся под углами к оси, выходят из активной среды через ее боковую поверхность. Фотоны, движущиеся вдоль оси, многократно отразятся от противоположных торцов зеркал, каждый раз вызывая вынужденные испускания вторичных фотонов, которые, в свою очередь, вызовут вынужденное излучение и т. д. Так как фотоны, возникшие при вынужденном излучении, движутся в том же направлении, что и первичные, то поток фотонов, параллельных оси, будет лавинообразно нарастать (рис. 84, б). Многократно усиленный поток фотонов выходит через полупрозрачное зеркало, создавая строго направленный пучок огромной яркости (рис. 84, в).

В коротковолновом радиодиапазоне обычно применяются резонаторы, размеры которых сравнимы или меньше длины возбуждаемых в них волн. Достаточно долго считали, что для оптического диапазона, где длина волны порядка 1 мкм, такой резонатор изготовить невозможно, и при существовавшем уровне технологии это соответствовало действительности. Ныне уровень технологии позволяет это сделать.

С развитием нанотехнологий в конце 1980-х гг. стало возможным изготовление эффективных микрорезонаторов с размерами порядка оптической длины волны. Лазеры с такими резонаторами (*микролазеры*) обладают существенными достоинствами: малыми потерями, высокой квантовой эффективностью излучения и очень низкими порогами генерации.

*Особенности лазерного излучения:* высокая монохроматичность (практически одна-единственная длина волны); малая расходимость (при диаметре лазерного пучка 1 см с длиной волны  $5 \cdot 10^{-5}$  см, угол расходимости порядка  $0,003^\circ$ ); с помощью линз и зеркал лазерное излучение можно сфокусировать в точку размером 500 нм (для видимого света); огромная мощность излучения.

Коэффициент полезного действия лазеров колеблется в широких пределах – от 0,01 % (для гелий-неонового лазера) до 75 % (для лазеров на стекле с неодимом), хотя у большинства лазеров КПД составляет 0,1–1 %.

Создание лазеров привело к появлению и развитию новых научных направлений в физике, биологии и медицине, новых технологий и др.

### Примеры решения задач

**7.1.** Электрон в возбужденном атоме водорода находится в  $3g$ -состоянии. Найдите изменение орбитального магнитного момента электрона при его переходе в основное орбитальное состояние. Магнетон Бора  $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$  Дж/Тл.

**Дано:**  $l_1 = 4$ ;  $l_2 = 0$ ;  $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$  Дж/Тл.

**Найти:**  $\Delta\mu_l$ .

**Решение.**  $3g$ -состояние характеризуется орбитальным квантовым числом  $l = 4$ , а модуль магнитного момента, обусловленного орбитальным движением электрона,

$$\mu_l = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (1)$$

где  $\mu_B = e\hbar/2m_e$  – магнетон Бора;  $l$  – орбитальное квантовое число, принимающее при заданном  $n$  следующие значения:  $l = 0, 1, \dots, n - 1$  (всего  $n$  значений). Как следует из условия задачи,  $l_1 = 4$  в возбужденном состоянии (электрон в атоме находится в  $3g$ -состоянии) и  $l_2 = 0$  в основном.

Изменение орбитального момента электрона

$$\Delta\mu_l = \mu_{l_1} - \mu_{l_2},$$

где  $\mu_{l_1}$  и  $\mu_{l_2}$  – орбитальные магнитные моменты электрона в конечном (*основном*) и в начальном (*возбужденном*) состояниях соответственно.

Учитывая значения  $l$ , получаем

$$\Delta\mu_l = \mu_B \left( 0 - \sqrt{4(4+1)} \right) = -\mu_B \sqrt{20} \quad (2)$$

[знак « $\leftarrow$ » показывает, что орбитальный магнитный момент электрона уменьшается].

**Ответ:**  $\Delta\mu_l = -4,15 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл.

**7.2.** Электрон в атоме находится в  $g$ -состоянии. Найдите момент импульса  $L_l$  электрона и максимальное значение проекции момента импульса  $L_{(l_z)_{\max}}$  на направление внешнего магнитного поля.

**Дано:**  $g$ -состояние;  $l = 4$ ;  $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

**Найти:**  $L_l$ ;  $L_{(lz)_{\max}}$ .

**Решение.** Момент импульса (*механический орбитальный момент*) электрона

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad (1)$$

где  $l$  – орбитальное квантовое число, принимающее при заданном  $n$  следующие значения:  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  (всего  $n$  значений);  $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка.

Проекция момента импульса на направление  $z$  внешнего магнитного поля

$$L_{lz} = \hbar m_l, \quad (2)$$

где  $m_l$  – магнитное квантовое число, принимающее при заданном  $l$  следующие значения:  $m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$  (всего  $2l + 1$  значений).

Проекция  $L_{lz}$  максимальна при  $m_l = (m_l)_{\max}$  [по условию задачи,  $(m_l)_{\max} = 4$ ]:

$$L_{(lz)_{\max}} = \hbar(m_l)_{\max} = 4\hbar.$$

**Ответ:**  $L_l = \hbar\sqrt{20} = 4,72 \cdot 10^{-34}$  Дж · с;  $L_{(lz)_{\max}} = 4\hbar = 4,22 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

**7.3.** Атом водорода, находившийся первоначально в основном состоянии, поглотил фотон с энергией 12,75 эВ. В возбужденном атоме электрон находится в состоянии с максимально возможным орбитальным магнитным моментом импульса. Найдите момент импульса и изменение орбитального магнитного момента импульса электрона при этом переходе.

**Дано:**  $\varepsilon = 12,75$  эВ =  $20,4 \cdot 10^{-19}$  Дж;  $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$  Дж/Тл;  $m = n_1 = 1$ ;  $l_1 = 0$ .

**Найти:**  $L_l$ ;  $\Delta\mu_l$ .

**Решение.** Энергия фотона, испускаемого (*поглощаемого*) атомом при переходе из одного состояния в другое (в нашем случае – поглощение фотона)

$$\varepsilon = E_i Z^2 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (1)$$

где  $Z = 1$ ;  $E_i = 13,6$  эВ =  $21,76 \cdot 10^{-19}$  Дж – энергия ионизации атома водорода (*энергия, необходимая для отрыва электрона, находящегося в основном состоянии, от атома*),

откуда

$$n = \sqrt{\frac{E_i}{\frac{E_i}{m^2} - \varepsilon}} = \sqrt{\frac{13,6 \text{ эВ}}{13,6 \text{ эВ} - 12,75 \text{ эВ}}} = \sqrt{\frac{13,6}{0,85}} = \sqrt{16} = 4$$

[атом водорода переходит в  $n = n_2 = 4$  возбужденное состояние].

Орбитальное квантовое число  $l$  в возбужденном атоме

$$l_2 = n_2 - 1 = 3.$$

Момент импульса (*механический орбитальный момент*) электрона

$$L_{l=3} = \hbar\sqrt{l(l+1)} = \hbar\sqrt{12}, \quad (2)$$

где  $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка.

Модуль магнитного момента, обусловленного орбитальным движением электрона,

$$\mu_l = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (3)$$

где  $\mu_B$  – магнетон Бора.

Изменение орбитального магнитного момента электрона

$$\Delta\mu_l = \mu_{l_1} - \mu_{l_2} = 0 - \mu_B \sqrt{3(3+1)} = -\mu_B \sqrt{12}$$

[знак « $\leftarrow$ » показывает, что орбитальный магнитный момент электрона уменьшается].

**Ответ:**  $L_l = \hbar\sqrt{12} = 3,65 \cdot 10^{-34}$  Дж · с;  $\Delta\mu_l = -\mu_B \sqrt{12} = -3,21 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл.

**7.4.** Пользуясь периодической системой элементов Д.И. Менделеева, запишите электронную конфигурацию (*распределение электронов по состояниям*) атома кальция ( ${}_{20}^{40}\text{Ca}$ ), находящегося в основном состоянии.

**Дано:**  ${}_{20}^{40}\text{Ca}$

**Найти:** электронную конфигурацию.

**Решение.** Электронная конфигурация для атома  ${}_{20}^{40}\text{Ca}$  имеет вид:

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2.$$

В данном распределении электронов по состояниям цифры 1, 2, 3, 4 – главные квантовые числа ( $n$ ), определяющие символ оболочки (соответственно  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ). Максимально возможное число электронов в  $K$ -оболочке 2, в  $L$  – 8, в  $M$  – 18, в  $N$  – 32.

Обозначения  $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s$  определяют символ подоболочки [в  $s$ -состоянии может находиться 2 электрона; в  $p$ -состоянии – 6 электронов; в  $d$ -состоянии – 10 электронов].

$K$ -оболочка ( $n = 1, l = 0, m_l = 0$  и  $m_s = \pm 1/2$ ) заполнена полностью и записывается как  $1s^2$  (два  $1s$ -электрона); также полностью заполнена  $L$ -оболочка ( $2s^2 2p^6$  – два  $2s$ -электрона и шесть  $2p$ -электронов). Оставшиеся 10 электронов [общее число электронов для атома кальция 20 ( $Z = 20$ )] образуют незаполненную оболочку  $M$  – ( $3s^2 3p^6$  – два  $3s$ -электрона, шесть  $3p$ -электронов) и  $N$ -оболочку ( $4s^2$  – два  $4s$ -электрона).

## Задачи

73. Найдите, во сколько раз отличается орбитальный момент импульса  $L_l$  электронов в  $p$ - и  $g$ -состояниях. Ответ: 3,16

74. Электрон в атоме водорода находится в  $3d$ -состоянии. Найдите изменение орбитального магнитного момента электрона при его переходе в основное орбитальное состояние. Магнетон Бора  $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$  Дж/Тл.

Ответ:  $2,27 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл

75. Найдите (в величинах  $\hbar$ ) возможные значения орбитального момента импульса  $L_l$  электрона в возбужденном атоме водорода ( $Z = 1$ ), если энергия возбуждения 11,9 эВ. Ответ: 0;  $\hbar\sqrt{2}$ ;  $\hbar\sqrt{6}$ ;  $\hbar\sqrt{12}$ ;  $\hbar\sqrt{20}$

76. Найдите (в величинах  $\hbar$ ) возможные значения проекций на направление внешнего магнитного поля орбитального момента импульса  $L_{l_z}$  атомного электрона, находящегося в состоянии  $3d$ . Ответ: 0;  $\pm\hbar$ ;  $\pm 2\hbar$

77. Найдите (в величинах магнетона Бора) возможные значения проекций на направление внешнего магнитного поля орбитального магнитного момента атомного электрона, находящегося в состоянии  $4f$ . Ответ: 0;  $\pm\mu_B$ ;  $\pm 2\mu_B$ ;  $\pm 2\mu_B$

78. Определите, какое максимальное число электронов в атоме могут иметь следующие одинаковые квантовые числа: а)  $n, l, m_l$ ; б)  $n, l$ ? Ответ: 2;  $2(2l + 1)$

79. Используя принцип Паули, найдите, сколько различных состояний могут иметь электроны с значением главного квантового числа  $n = 4$ . Ответ: 32

80. Пользуясь Периодической системой элементов Д.И. Менделеева, запишите электронную конфигурацию (*распределение электронов по состояниям*) атома калия К ( $Z = 19$ ), находящегося в основном состоянии.

Ответ:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$

81. Найдите порядковый номер элемента в Периодической системе элементов Д.И. Менделеева, если в атоме полностью заполнены первые три электронные оболочки, в четвертой оболочке заполнены  $4s$ -,  $4p$ - и  $4d$ -подоболочки, а в пятой оболочке заполнены  $5s$ - и  $5p$ -подоболочки. Укажите число электронов в каждой оболочке и подоболочке.

Ответ: 54 [ $^{131,29}_{54}\text{Xe}$  – ксенон]

82. Электрон в возбужденном атоме водорода находится в  $4d$ -состоянии. Найдите максимально возможный квант энергии ( $\Delta E$ ) при самопроизвольном переходе электрона в основное состояние. Масса и заряд электрона соответственно равны  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг и  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл; электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м; постоянная Планка  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Ответ: 11,96 эВ

83. Атом водорода, находившийся в основном состоянии, поглотил фотон с энергией 12,75 эВ. В возбужденном атоме электрон находится в состоянии

с максимально возможным орбитальным магнитным моментом. Найдите изменение орбитального момента импульса электрона при этом переходе. Постоянная Планка  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Ответ:  $3,67 \cdot 10^{-34}$  Дж · с

84. Электрон в атоме водорода находится в четвертом ( $n = 4$ ) возбужденном состоянии, имея максимально возможное значение орбитального магнитного момента. Испуская фотон с длиной волны 486,17 нм, он переходит в другое энергетическое состояние. Найдите величину изменения орбитального момента импульса электрона при этом переходе. Постоянная Планка  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; постоянная Ридберга  $R' = 1,097 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup>.

Ответ:  $2,17 \cdot 10^{-34}$  Дж · с

85. Найдите минимальную длину волны тормозного рентгеновского излучения, если к рентгеновской трубке приложены напряжения 38,5 кВ и 56,2 кВ. Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; заряд электрона  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Ответ: 32,29 пм; 22,12 пм

86. При каком наименьшем напряжении на рентгеновской трубке с платиновым антикатодом появляются линии  $k$ -серии? Скорость распространения света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; заряд электрона  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; постоянная Ридберга  $R' = 1,097 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup>.

Ответ: 60641 В



## Лекции 8. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ

### 8.1. Статистическое распределение. Фазовое пространство

Несмотря на то, что законы квантовой механики действуют в атомных масштабах, они оказывают влияние и на макроскопические свойства газов, жидкостей и твердых тел. Квантовая механика и квантовая статистика – статистика тождественных частиц – позволили правильно и непротиворечиво описать тепловые, магнитные и многие другие свойства больших ансамблей частиц.

**Квантовая статистика** – раздел статистической физики, в котором изучаются свойства систем, состоящих из огромного числа тождественных частиц – *фермионов* и *бозонов*, подчиняющихся законам квантовой механики.

Статистика *фермионов*, т. е. тождественных частиц, которые не могут занимать одинаковые состояния, называется *статистикой Ферми – Дирака*.

Статистика *бозонов*, т. е. тождественных частиц, число которых в любом состоянии не ограничено, называется *статистикой Бозе – Эйнштейна*.

Статистика *классических частиц*, т. е. частиц, отличимых друг от друга, называется *статистикой Максвелла – Больцмана*.

Статистика каждого типа описывается своим *статистическим распределением частиц по состояниям*. Статистическое распределение показывает, какое среднее число частиц  $\langle N \rangle$  находится в данном состоянии при условии, что система пребывает в состоянии теплового равновесия. Важнейшее свойство всех распределений состоит в том, что они представляют собой *функцию одного параметра – энергии частицы*:  $\langle N \rangle = f(\varepsilon)$  [далее энергия одной частицы будет обозначаться  $\varepsilon$ , а энергия системы  $E$ ].

В квантовой механике понятие состояния отдельной частицы (при некоторых условиях) можно считать вполне определенным. Чтобы уровни энергии были дискретными, система должна быть локализована в конечной области пространства. Обычно считают, что система заперта в ящике достаточно большого объема  $V$ , и предполагается отсутствие межчастичного взаимодействия.

Для ансамбля классических частиц вводят понятие *элементарной ячейки фазового пространства*. **Фазовое пространство** – это пространство трех координат  $(x; y; z)$  и трех соответствующих проекций импульса  $(p_x; p_y; p_z)$ . В классической физике каждому состоянию соответствует одна точка фазового пространства. В этом случае элементарную ячейку, соответствующую одному состоянию, вводят для удобства статистического описания, и она может иметь произвольный (достаточно маленький) объем.

В квантовой механике состояние частицы нельзя изображать точкой в фазовом пространстве, так как имеются неопределенности в ее положении и импульсе, связанные между собой соотношениями Гейзенберга [см. п. 6.2]  $\Delta x \Delta p_x \sim \hbar$  и т. д. Видно, что отдельному состоянию должен соответствовать объем  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \sim \hbar^3$ ; более детальный анализ показывает, что *объем элементарной ячейки* (он называется **фазовым объемом**) равен  $(2\pi\hbar)^3$ .

Вероятность  $dW$  данного состояния системы можно представить с помощью функции распределения  $f(q, p)$ :

$$dW = f(q, p) dq dp, \quad (8.1)$$

где  $q$  – совокупность координат всех частиц;  $p$  – совокупность проекций их импульсов;  $dW$  – вероятность того, что точка фазового пространства попадет в элемент фазового объема  $dq dp$ , расположенного вблизи данной точки  $q, p$ . [Иными словами,  $dW$  представляет собой вероятность того, что система находится в состоянии, в котором ее координаты и импульсы заключены в интервале  $q, q + dq$  и  $p, p + dp$ ].

Согласно (8.1),  $f(q, p)$  есть не что иное, как *плотность вероятности определенного состояния системы*, поэтому она должна быть нормирована на единицу:

$$\int f(q, p) dq dp = 1,$$

где интегрирование производится по всему фазовому пространству.

Зная функцию распределения  $f(q, p)$ , можно решить **основную задачу квантовой статистики** – определить средние значения величин, характеризующих рассматриваемую систему. Среднее значение любой функции

$$\langle L(q, p) \rangle = \int L(q, p) f(q, p) dq dp. \quad (8.2)$$

В квантовой статистике *каноническое распределение Гиббса* – явное выражение функции распределения в самом общем виде, – имеет вид

$$f(E_n) = A e^{-\frac{E_n}{kT}}, \quad (8.3)$$

где  $A$  – постоянная, определяемая из условия нормировки к единице;  $n$  – совокупность всех квантовых чисел, характеризующих данное состояние.

## 8.2. Распределения Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака

Одним из основных задач статистической физики является нахождение распределения частиц по разным квантовым состояниям. *Основной постулат статистической физики* для системы с фиксированной энергией гласит, что все доступные ей микросостояния (т. е. имеющие данное значение полной энергии) реализуются с одинаковой вероятностью. Число микросостояний, соответствующее данному микросостоянию, называется его *статистическим весом* ( $\Omega$ ). Макросостояние с максимальным  $\Omega$  называется *равновесным*. Отклонения от равновесного состояния называются *флуктуациями*.

Состояние системы невзаимодействующих частиц задается с помощью *чисел заполнения*  $N_i$  – чисел, указывающих степень заполнения квантового состояния (характеризуется данным набором  $i$  квантовых чисел) частицами системы, состоящей из многих тождественных частиц. Квантовая статистика позволяет подсчитать среднее число частиц в данном квантовом состоянии, т. е. определить *средние числа заполнения*  $\langle N_i \rangle$ .

Частицы подразделяются на два класса: *бозоны* (т. е. частицы с целым или нулевым спином) и *фермионы* (т. е. частицы с полуцелым спином). Для систем частиц, образованных *бозонами*, числа заполнения  $N_i$  могут принимать любые целые значения: 0, 1, 2, ... . Для систем частиц, образованных *фермионами*, числа заполнения  $N_i$  могут принимать лишь два значения: 0 – для свободных состояний и 1 – для занятых.

Идеальный газ из бозонов – *бозе-газ* – описывается *квантовой статистикой Бозе – Эйнштейна*. Распределение бозонов по энергиям вытекает из *большого канонического распределения Гиббса* (с переменным числом частиц) при условии, что число тождественных бозонов в данном квантовом состоянии может быть любым (см. п. 7.5):

$$\langle N_i \rangle = f_B(E_i) = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} - 1}, \quad (8.4)$$

где  $\langle N_i \rangle$  – среднее число бозонов в квантовом состоянии с энергией  $E_i$ ;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – термодинамическая температура;  $\mu \leq 0$  – химический потенциал [не зависит от энергии, а определяется только температурой и плотностью числа частиц]. Распределение (8.4) называется *распределением Бозе – Эйнштейна*.

Идеальный газ из фермионов – *ферми-газ* – описывается *квантовой статистикой Ферми – Дирака*. Распределение фермионов по энергиям:

$$\langle N_i \rangle = f_F(E_i) = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} + 1}, \quad (8.5)$$

где  $\langle N_i \rangle$  – среднее число фермионов в квантовом состоянии с энергией  $E_i$ ;  $\mu$  – химический потенциал [в отличие от (8.4)  $\mu$  может иметь положительное значение (это не приводит к отрицательным значениям чисел  $\langle N_i \rangle$ )]. Распределение (8.5) называется *распределением Ферми – Дирака*.

Химический потенциал  $\mu$  для системы с фиксированным числом частиц  $N$  вычисляется из уравнения

$$N = \sum_i g_i f(E_i), \quad (8.6)$$

где  $g_i$  – число ячеек в  $i$ -м ящике;  $f(E_i)$  – соответствующее распределение (Бозе – Эйнштейна или Ферми – Дирака). Если же число частиц в системе не фиксировано, то химический потенциал надо положить равным нулю ( $\mu = 0$ ).

Если  $E_i - \mu \gg kT$ , то распределения (8.4) и (8.5) переходят в классическое *распределение Максвелла – Больцмана*:

$$\langle N_i \rangle = A e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad (8.7)$$

где

$$A = e^{\frac{\mu}{kT}}. \quad (8.8)$$

Таким образом, при высоких температурах оба «квантовых» газа ведут себя подобно классическому газу. [Это связано с тем, что среднее число частиц в ячейке мало, и правила запрета и тождественность частиц становятся несущественными. Обычно наименьшее возможное значение энергии (*энергия низшего уровня*) принимается равным нулю].

### **1. Свойства распределения Бозе – Эйнштейна.**

1. Химический потенциал бозонов не может быть положительным:  $\mu \leq 0$ .

2. При  $T \rightarrow 0$  химический потенциал стремится к нулю, и при  $T = 0$  К равен нулю.

3. При  $T = 0$  К все частицы находятся в низшем энергетическом состоянии при  $E_i = 0$ . При температурах конечных, но достаточно маленьких в низшем энергетическом состоянии находится конечная доля частиц. Это явление называется *бозе – эйнштейновской конденсацией*, а ансамбль макроскопического числа частиц в низшем состоянии – *бозе – эйнштейновским конденсатом*. Конденсация бозонов начинается при некоторой критической температуре (*температуре конденсации*). Это явление играет важную роль при объяснении таких явлений как сверхтекучесть и сверхпроводимость.

4. Примером распределения Бозе – Эйнштейна является формула Планка для распределения фотонов по энергиям (см. п. 4.3).

### **2. Свойства распределения Ферми – Дирака.**

1. Химический потенциал  $\mu$  ферми-газа может быть как положительным, так и отрицательным. При низких температурах  $\mu > 0$ . Химический потенциал газа фермионов при  $T = 0$  К называется *энергией Ферми* ( $E_F$ ).

2. При  $T = 0$  К зависимость среднего числа частиц в ячейке  $\langle N_i \rangle$  от энергии имеет вид резкой ступеньки: для  $E_i < E_F$  ячейки заполнены частицами ( $\langle N_i \rangle = f_F(E_i) = 1$ ), а для  $E_i > E_F$  ячейки свободны ( $\langle N_i \rangle = f_F(E_i) = 0$ ).

3. При низких температурах ( $kT \ll E_F$ ) зависимость  $f_F(E_i)$  имеет вид сглаженной ступеньки (рис. 85). Ширина размытия по порядку величины равна  $kT$ . При  $E_i = \mu$  среднее число частиц равно  $1/2$ . Распределение частиц по энергиям при  $kT \ll E_F$  радикально отличается от классического, в этом случае газ называется *вырожденным*;  $T_0$  – *температура вырождения* – температура, ниже которой отчетливо проявляются квантовые свойства идеального газа, обусловленные тождественностью частиц. При  $kT \gg E_F$  газ фермионов почти не отличается от классического.

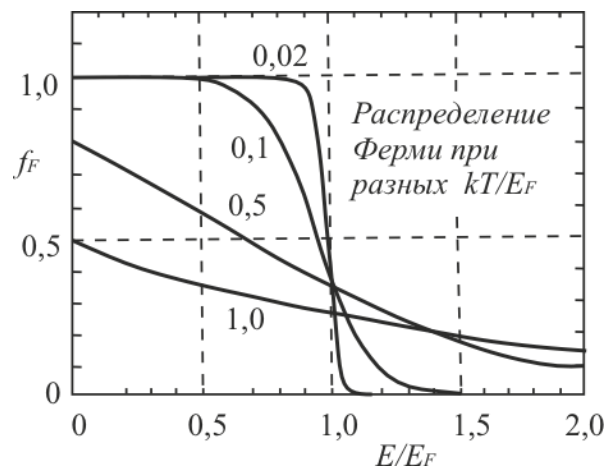


Рис. 85

### 8.3. Вырожденный электронный газ в металлах

Классическая электронная теория проводимости металлов исходила из представления, что электроны в металле можно рассматривать как классический идеальный электронный газ. Рассматривая электроны как квантовые частицы, – квантовый газ фермионов (*электроны являются фермионами*) будем называть ферми-газом. Для свободных электронов металл является своеобразной потенциальной ямой. На каждом энергетическом уровне, в соответствии с принципом Паули (см. п. 7.5), могут находиться лишь два электрона, различающиеся направлением спина. [Следовательно, по квантовой теории электроны в металле не могут располагаться на самом низшем энергетическом уровне даже при 0 К. Согласно принципу Паули, электроны вынуждены взбираться вверх «по энергетической лестнице»].

Электроны проводимости в металле можно рассматривать как идеальный газ, подчиняющийся распределению Ферми – Дирака (8.5), согласно которому, среднее число  $\langle N(E) \rangle$  электронов в квантовом состоянии с энергией  $E$  равно

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu_0}{kT}} + 1}, \quad (8.9)$$

где  $\mu_0$  – химический потенциал электронного газа при  $T = 0$  К.

Для фермионов среднее число частиц в квантовом состоянии и вероятность заселенности квантового состояния совпадают, т. е.  $\langle N(E) \rangle = f(E)$ , где  $f(E)$  – функция распределения электронов по состояниям.

Из (8.9) следует, что при  $T = 0$  К функция распределения  $\langle N(E) \rangle = 1$ , если  $E < \mu_0$ , и  $\langle N(E) \rangle = 0$ , если  $E > \mu_0$ .

График этой функции приведен на рис. 86, а. В области энергий от 0 до  $\mu_0$  функция  $\langle N(E) \rangle$  равна единице. При  $E = \mu_0$  она скачкообразно изменяется до нуля. Это означает, что при  $T = 0$  К все нижние квантовые состояния, вплоть до состояния с энергией  $E = \mu_0$ , заполнены электронами, а все состояния с энергией, большей  $\mu_0$ , свободны. Следовательно,  $\mu_0$  есть не что иное, как *максимальная кинетическая энергия – энергия Ферми*  $E_F$  ( $E_F = \mu_0$ ), которую могут иметь электроны проводимости в металле при 0 К.

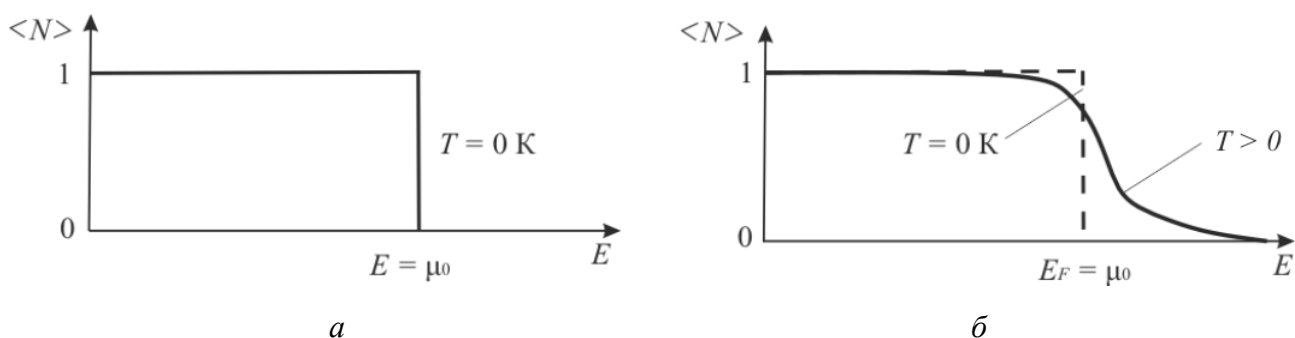


Рис. 86

Ферми-газ *при температуре, равной абсолютному нулю* ( $T = 0$  К), является *полностью вырожденным*. Температура  $T_0$  вырождения (см. п. 8.1.2) находится из условия  $kT_0 = E_F$ . [Температура  $T_0$  определяет границу, выше которой квантовые эффекты перестают быть существенными. Соответствующие расчеты показывают, что

для электронов в металле  $T_0 \approx 10^4$  К, т. е. для всех температур, при которых металл может существовать в твердом состоянии, электронный газ в металле вырожден].

Распределение Ферми – Дирака обычно записывается в виде

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}. \quad (8.10)$$

Наивысший энергетический уровень, занятый электронами, называется **уровнем Ферми**. Уровню Ферми соответствует энергия Ферми  $E_F$ , которую имеют электроны на этом уровне. [Уровень Ферми будет тем выше, чем больше плотность электронного газа. Работу выхода электрона из металла нужно отсчитывать не от дна «потенциальной ямы», как это делалось в классической теории, а от уровня Ферми, то есть от верхнего из занятых электронами энергетических уровней].

При температурах, отличных от 0 К, график функции (8.10) имеет вид, показанный на рис. 86, б. Отличие от графика, изображенного на рис. 86, а, наблюдается лишь в узкой области (порядка  $kT$ ) в окрестности  $E_F = \mu_0$ . Чем выше температура, тем более полого идет ниспадающий участок кривой. [Это объясняется тем, что при  $T > 0$  небольшое число электронов с энергией, близкой к  $E_F$ , возбуждается вследствие теплового движения, и их энергия становится больше  $E_F$ . Вблизи границы Ферми при  $E < E_F$  заполнение электронами меньше единицы, а при  $E > E_F$  – больше нуля. В тепловом движении участвует лишь небольшое число электронов, например при комнатной температуре  $T \approx 300$  К и температуре вырождения  $T_0 = 3 \cdot 10^4$  К, – это  $10^{-5}$  от общего числа электронов].

Если  $(E - E_F) \gg kT$ , то единицей в знаменателе (8.10) можно пренебречь по сравнению с экспонентой, и тогда распределение Ферми – Дирака переходит в распределение Максвелла – Больцмана.

#### 8.4. Электронная теплоемкость металлов.

##### Теплоемкость кристаллической решетки. Фононы

В случае сильно вырожденного газа в тепловом движении участвуют только электроны, энергия которых отличается от энергии Ферми ( $E_F$ ) на величину порядка  $kT$ . Только такие электроны могут перейти в свободное состояние



с энергией, большей  $E_F$ . Доля таких электронов  $\sim kT/E_F = T/T_0$ , изменение их энергии  $\sim kT$ . Следовательно, при повышении температуры от нуля до  $T$  энергия вырожденного газа возрастает на  $\sim kNT^2/T_0$ , а вклад электронов в теплоемкость  $C_e \sim kN(T/T_0)$  изменяется пропорционально температуре. Точный расчет дает выражение

$$C_e = \frac{\pi^2 kNT}{2T_0}. \quad (8.11)$$

Число электронов  $N$ , приходящихся на один моль металла, зависит от валентности; например, в случае одновалентного металла  $N \sim N_A$ .

*Классическая статистическая физика* предсказывает, что вклад колебаний кристаллической решетки в молярную теплоемкость должен быть равен  $3R$ . [Действительно, каждый атом решетки может совершать три независимых колебания около положения равновесия, а каждой колебательной степени свободы соответствует средняя энергия  $kT$ . Энергия колебаний всех атомов равна  $3NkT = 3\nu RT$  (внутренняя энергия 1 моля твердого тела  $U_m = 3N_A kT = 3RT$ ), и молярная теплоемкость решетки должна не зависеть от температуры и равняться  $3R$ . Действительно, молярная теплоемкость многих диэлектриков при комнатной температуре оказывается близкой к  $3R$  (**закон Дюлонга и Пти**: молярная (атомная) теплоемкость химически простых тел в кристаллическом состоянии одинакова (равна  $3R$ ) и не зависит от температуры)]. Однако при уменьшении температуры во всех случаях наблюдается уменьшение теплоемкости, и при низких температурах она стремится к нулю как  $T^3$ . Объяснению такому поведению решеточной теплоемкости дает квантовая статистика.

**1. Теория Эйнштейна.** А. Эйнштейн (1907 г.) рассматривал колебания атомов в узлах кристаллической решетки как  $3N$  независимых друг от друга одинаковых квантовых осцилляторов. Средняя энергия такого гармонического осциллятора равна (см. п. 4.3 и 6.9)

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (8.12)$$

При  $kT \gg \hbar\omega$  молярная теплоемкость системы квантовых осцилляторов равна  $3R$ , а при  $T \rightarrow 0$  экспоненциально стремится к нулю. Теория Эйнштейна

объяснила уменьшение теплоемкости при понижении температуры, но не по закону  $T^3$ . [Существование нулевой энергии колебаний было установлено значительно позже, лишь после создания квантовой механики. Поэтому Эйнштейн исходил из *планковского значения энергии гармонического осциллятора* (см. п.4.3)  $\varepsilon_n = nh\nu = n\hbar\omega$ . Соответственно, в использованном Эйнштейном выражении для  $\langle \varepsilon \rangle$  слагаемое  $\hbar\omega/2$  отсутствовало].

Умножив второе слагаемое выражения (8.12) на  $3N$ , Эйнштейн получил для внутренней энергии кристалла формулу

$$U = \frac{3N\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (8.13)$$

Продифференцировав (8.13) по температуре, Эйнштейн нашел *теплоемкость кристалла*:

$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{3N\hbar\omega}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1\right)^2} \cdot e^{\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\frac{\hbar\omega}{kT^2}}. \quad (8.14)$$

1. *Высокие температуры* ( $kT \gg \hbar\omega$ ). В этом случае можно положить  $e^{\hbar\omega/kT} \approx 1 + \hbar\omega/kT$  в знаменателе и  $e^{\hbar\omega/kT} \approx 1 -$  в числителе формулы (8.14).

В результате для теплоемкости получается значение

$$C = 3Nk$$

[т. е. пришли к закону Дюлонга и Пти].

2. *Низкие температуры* ( $kT \ll \hbar\omega$ ). При этом условии единицей в знаменателе выражения (8.14) можно пренебречь. Тогда формула (8.14) принимает вид

$$C = \frac{3N(\hbar\omega)^2}{kT^2} \cdot e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}. \quad (8.15)$$

Экспоненциальный множитель изменяется значительно быстрее, чем  $T^2$ . Поэтому при приближении к  $T = 0$  К выражение (8.15) будет стремиться к нулю практически по экспоненциальному закону.

Опыт показывает, что теплоемкость кристаллов изменяется вблизи абсолютного нуля ( $T = 0$  К) не экспоненциально, а по закону  $T^3$ . Следовательно, *теория Эйнштейна дает лишь качественно правильный ход теплоемкости при низких температурах*.

**2. Теория Дебая.** Теория теплоемкости кристаллической решетки впоследствии была развита П. Дебаем (1912 г.), который учел, что колебания атомов в кристаллической решетке не являются независимыми (рассмотрел непрерывный спектр частот гармонических осцилляторов). [Смещение одного из атомов из положения равновесия влечет за собой смещение соседних с ним атомов. Таким образом, кристалл представляет собой систему  $N$  упруго связанных между собой атомов, обладающих  $3N$  степенями свободы. Каждая степень свободы (нормальное колебание) может быть представлена как гармонический осциллятор, средняя энергия которого  $\langle \varepsilon \rangle$  определяется по формуле (8.12). Из-за связи между атомами частоты нормальных колебаний уже не совпадают между собой. Взаимодействие атомов приводит к тому, что колебание, возникшее в каком-то месте кристалла, передается от одного атома к другому, в результате чего возникает упругая волна. Эта волна, дойдя до границы кристалла, отражается. При наложении прямой и отраженной волн образуется стоячая волна, которой соответствует некоторое нормальное колебание кристаллической решетки]. Число  $dN$  нормальных колебаний, приходящихся на единицу объема кристалла, т. е. стоячих волн, в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , определяется

$$dN = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3}, \quad (8.16)$$

где  $v$  – фазовая скорость волны в кристалле.

С учетом возможных видов поляризации волны, (8.16) запишется

$$dN = \frac{3\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3}. \quad (8.17)$$

Максимальную частоту  $\omega_m$  нормальных колебаний решетки [для единицы объема] найдем, приравняв полное число колебаний числу степеней свободы  $3n$  ( $n$  – число атомов в единице объема кристалла) решетки

$$3n = \int dN = \int_0^{\omega_m} \frac{3\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3} = \frac{\omega_m^3}{2\pi^2 v^3}.$$

Отсюда

$$\omega_m = v \sqrt[3]{6\pi^2 n}. \quad (8.18)$$

В соответствии с (8.18) наименьшая длина волны, возбуждаемая в кристалле,

$$\lambda_{\min} = \frac{2v}{\omega_m} \approx \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \approx 2d, \quad (8.19)$$

где  $d$  – расстояние между соседними атомами. Результат (8.19) согласуется с тем, что волны, длина которых меньше удвоенного межатомного расстояния, не имеют физического смысла.

Исключив из (8.17) и (8.18) скорость  $v$ , получим

$$dN = 9n \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_m^3}. \quad (8.20)$$

Внутренняя энергия единицы объема кристалла определяется интегралом:

$$U = \int \langle \varepsilon(\omega) \rangle dN, \quad (8.21)$$

где  $\langle \varepsilon(\omega) \rangle$  – среднее значение энергии нормального колебания частоты  $\omega$ . Подставив выражения (8.12) и (8.20) в (8.21), получим

$$U = \frac{9n}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \left( \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \right) \omega^2 d\omega = U_0 + \frac{9n\hbar}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (8.22)$$

где  $U_0 = 3n \cdot (3/8)\hbar\omega_m$  – энергия нулевых колебаний кристалла.

Теплоемкость единицы объема кристалла есть производная от  $U$  по  $T$

$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{9n\hbar}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \frac{e^{\hbar\omega/kT} \cdot \hbar\omega^4 d\omega}{\left( e^{\hbar\omega/kT} - 1 \right)^2 kT^2}.$$

Чтобы разделить области высоких и низких температур, удобно ввести **характеристическую температуру Дебая**  $T_D$  с помощью выражения  $\hbar\omega_m = kT_D$ ,

$$T_D = \frac{\hbar\omega_m}{k}. \quad (8.23)$$

Вводя безразмерную переменную  $x = \hbar\omega/kT$ , получим

$$C = 9nk \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{x_m} x_m \frac{e^x \cdot x^4 dx}{(e^x - 1)^2}, \quad (8.24)$$

где  $x_m = \hbar\omega_m/kT = T_D/T$ ;  $\omega_m = \omega_D$  – предельная частота упругих колебаний кристаллической решетки.

При  $T \gg T_D$  [классическая область], т. е.  $\hbar\omega_m/kT \ll 1$ , формулу (8.22) можно упростить, положив  $\exp(\hbar\omega/kT) \approx 1 + \hbar\omega/kT$ . Тогда *внутренняя энергия единицы объема кристалла*

$$U = U_0 + \frac{9n\hbar}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \frac{kT}{\hbar\omega} \omega^3 d\omega = U_0 + 3nkT,$$

а для *теплоемкости* [см. (8.24)] – значение  $C_V = 3nk$  [см. закон Дюлонга и Пти].

При  $T \ll T_D$  [квантовая область] верхний предел интеграла будет очень большим, так что его можно приближенно положить равным бесконечности ( $x_m \approx \infty$ ), – интеграл будет представлять собой некоторое число, и молярная теплоемкость  $C_V$  окажется пропорциональной кубу температуры:  $C_V \sim T^3$  – **закон  $T^3$  Дебая**:

$$C_V = \frac{12}{5} \pi^4 kn \left( \frac{T}{T_D} \right)^3. \quad (8.25)$$

При достаточно низких температурах этот закон выполняется во многих случаях очень хорошо. Таким образом, *теория Дебая объяснила расхождение опытных и теоретических* (вычисленных на основе классической теории) *значений теплоемкости твердых тел* (см. рис. 87).

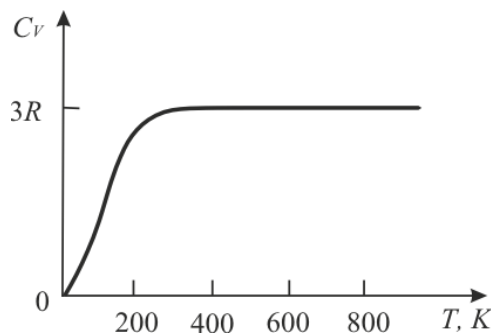


Рис. 87

Согласно корпускулярно-волновому дуализму свойств вещества, упругим волнам в кристалле сопоставляют **фононы**, обладающие энергией

$$E = \hbar\omega. \quad (8.26)$$

**Фонон** – есть квант энергии звуковой волны (так как упругие волны – волны звуковые). Многие процессы в кристалле (например, рассеяние рентгеновских лучей или нейтронов) протекают так, как если бы фонон обладал импульсом

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (8.27)$$

где  $\vec{k}$  – волновой вектор соответствующего нормального колебания.

Модуль импульса фонона равен

$$p = \hbar k = \frac{\hbar \omega}{v}, \quad (8.28)$$

где  $k$  – волновое число, соответствующее колебанию частоты  $\omega$ ;  $v$  – скорость упругих волн в кристалле.

Фонон во многих отношениях ведет себя так, как если бы он был частицей с энергией (8.26) и импульсом (8.28). Однако, в отличие от обычных частиц (электронов, протонов, фотонов и т. п.) *фононы не могут возникнуть в вакууме* – они возникают и существуют только в некоторой среде. Подобного рода частицы называются *квазичастицами*. *Фононы являются квазичастицами* – элементарными возбуждениями, ведущими себя подобно микрочастицам.

Импульс фонона обладает своеобразным свойством: при столкновении фононов в кристалле их импульс может дискретными порциями передаваться кристаллической решетке – он при этом не сохраняется. Поэтому *в случае фононов* говорят о *квазиимпульсе*.

Энергия кристаллической решетки рассматривается как энергия фононного газа, подчиняющегося статистике Бозе – Эйнштейна (см. п. 8.2), так как фононы являются бозонами (их спин равен нулю). Фононы могут испускаться и поглощаться, но их число не сохраняется постоянным; поэтому в формуле (8.4) для фононов необходимо  $\mu$  положить равным нулю, т. е.

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_i}{kT}} - 1}. \quad (8.29)$$

## 8.5. Электрическая проводимость металлов. Сверхпроводимость

*Квантовая теория электропроводности металлов* – теория электропроводности, основывающаяся на квантовой механике и квантовой статистике Ферми – Дирака, – пересмотрела вопрос об электропроводности металлов, рас-

смотренный в классической физике. Расчет электропроводности металлов, выполненный на основе этой теории, приводит к выражению для *удельной электрической проводимости металла*

$$\sigma = \frac{ne^2\langle l_F \rangle}{m_e\langle u_F \rangle}, \quad (8.30)$$

где  $n$  – концентрация электронов проводимости в металле;  $e$  и  $m_e$  – соответственно заряд и масса электрона;  $\langle l_F \rangle$  – средняя длина свободного пробега электрона, имеющего энергию Ферми ( $E_F$ );  $\langle u_F \rangle$  – средняя скорость теплового движения, имеющего энергию Ферми ( $E_F$ ). [Выводы, получаемые на основе формулы (8.30), полностью соответствуют опытным данным. Квантовая теория электропроводности металлов, в частности, объясняет зависимость удельной проводимости от температуры:  $\sigma \sim 1/T$  (классическая теория дает, что  $\sigma \sim 1/\sqrt{T}$ ), а также аномально большие величины (порядка сотен периодов решетки) средней длины свободного пробега электронов в металле.

*Квантовая теория* рассматривает движение электронов с учетом их взаимодействия с кристаллической решеткой. Согласно корпускулярно-волновому дуализму, движению электрона сопоставляют волновой процесс. Идеальная кристаллическая решетка (в ее узлах находятся *неподвижные* частицы, и в ней отсутствуют нарушения периодичности) ведет себя подобно оптически однородной среде – она «электронные волны» не рассеивает. Это соответствует тому, что металл не оказывает электрическому току – упорядоченному движению электронов – никакого сопротивления. «Электронные волны», распространяясь в идеальной кристаллической решетке, как бы огибают узлы решетки и проходят значительные расстояния.

В реальной кристаллической решетке всегда имеются неоднородности, которыми могут быть, например, примеси, вакансии; неоднородности обуславливаются также тепловыми колебаниями. В реальной кристаллической решетке происходит рассеяние «электронных волн» на неоднородностях, что и является причиной электрического сопротивления металлов. Рассеяние «электронных волн» на неоднородностях, связанных с тепловыми колебаниями, можно рассматривать как столкновения электронов с фононами.

Согласно *классической теории*,  $\langle u \rangle \sim \sqrt{T}$ , поэтому она не смогла объяснить истинную зависимость  $\sigma$  от температуры  $T$ . В квантовой теории средняя скорость  $\langle u_F \rangle$  от  $T$  практически не зависит, так как доказывается, что с изменением температуры уровень Ферми остается практически неизменным. Однако с повышением температуры рассеяние «электронных волн» на тепловых колебаниях решетки (на фононах) возрастает, что соответствует уменьшению средней длины свободного пробега электронов. В области комнатных температур  $\langle l_F \rangle \sim T^{-1}$ ,

поэтому, учитывая независимость  $\langle u \rangle$  от температуры, получим, что сопротивление металлов ( $R \sim 1/\sigma$ ) в соответствии с данными опытов растёт пропорционально  $T$ . Таким образом, квантовая теория электропроводности металлов устранила и эту трудность классической теории].

**Сверхтекучесть** – состояние квантовой жидкости (*жидкого гелия*), при котором она без трения проникает через узкие щели и капилляры. Гелий является единственным веществом, которое остается жидким вплоть до абсолютного нуля температуры (твердая фаза может быть получена под давлением 25 атм и выше). Жидкий  ${}^4\text{He}$  становится сверхтекучим при  $T = 2,17$  К. Жидкая фаза, существовавшая выше 2,17 К, называется гелием I рода (He I); фазу, существующую ниже 2,17 К, называют гелием II (П.Л. Капица, 1938 г.). Теория сверхтекучести He II была создана Л.Д. Ландау в 1941 г. Эта теория, получившая название *двухжидкостной гидродинамики*, основана на представлении о том, что при низких температурах свойства He II, как слабовозбужденной квантовой системы, обусловлены наличием в нем элементарных возбуждений (квазичастиц). Так как  ${}^4\text{He}$  – бозон (атомы гелия имеют спин, равный нулю), следовательно, не подчиняется принципу Паули, то при низких температурах большинство атомов переходит в *основное состояние* (наинизшее возможное энергетическое состояние) с нулевым импульсом (*бозе конденсация*). [Если все атомы имеют одну и ту же энергию, то они имеют и одну волновую функцию. Таким образом, атомы He II действуют согласованно, как единое целое. Например, когда мы прикладываем тепло в одной точке жидкого гелия, мы передаем ее сразу всему образцу. Между атомами невозможен обмен энергией, так как у всех она одна и та же – наинизшая. Энтропия сверхтекучего гелия равна нулю]. Для конденсата длина волны де-Бройля  $\lambda_B = h/p \rightarrow \infty$ . Это значит, что за счет дифракции бозоны могут огибать любые препятствия. Явление сверхтекучести примечательно тем, что в нем проявляется квантование в макроскопических масштабах.

**Сверхпроводимость** – свойство многих проводников, состоящее в том, что их электрическое сопротивление скачком падает до нуля при охлаждении ниже определенной критической температуры  $T_K$ , характерной для данного материала. Материалы, обладающие сверхпроводимостью, называются *сверхпроводниками*. Сверхпроводимость обнаружена у более чем 25 металлических элементов,



у большого числа сплавов и интерметаллических соединений, а также у некоторых полупроводников и полимеров. Рекордно высоким значением  $T_K \approx 23,2$  К обладает соединение  $Nb_3Ge$  (ниобий-германий); для оксида  $HgBa_2Ca_2Cu_3O_3$  (ртутная керамика) –  $T_K \approx 135$  К (получена в 1993 г.).

Скачкообразное исчезновение сопротивления ртути при понижении температуры ( $T = 4,15$  К) впервые наблюдал Х. Камерлинг-Оннес (1911 г.). Несколько позднее он обнаружил, что электрическое сопротивление ртути восстанавливается при  $T < T_K$  в достаточно сильном магнитном поле. Падение сопротивления до нуля происходит на протяжении очень узкого интервала температур, ширина которого для чистых образцов составляет  $10^{-3}$ – $10^{-4}$  К и возрастает при наличии примесей и других дефектов структуры. Экспериментально установлено, что удельное сопротивление  $\rho$  металла в сверхпроводящем состоянии меньше, чем  $10^{-20}$  Ом · см ( $\rho$  сравнительно чистых Cu или Ag составляет  $10^{-10}$ – $10^{-9}$  Ом · см при  $T = 4,2$  К). Однако сверхпроводник не является идеальным проводником. В 1933 г. было установлено, что слабое магнитное поле не проникает вглубь сверхпроводника, хотя идеальный проводник должен захватывать пронизывающий его магнитный поток, если поле приложено при температуре выше  $T_K$ . Выталкивание магнитного поля из сверхпроводника (*эффект Мейснера*) означает, что во внешнем магнитном поле такой образец ведет себя как идеальный диамагнетик.

В основе сверхпроводимости лежит квантовомеханическое явление, связанное с образованием пар электронов [*куперовских пар* – связанное состояние двух взаимодействующих через фонон электронов; обладает нулевым спином и зарядом, равным удвоенному заряду электрона (впервые подобное состояние было описано Л. Купером в 1956 г.)] за счет их притяжения посредством колебаний кристаллической решетки (электрон-фононного взаимодействия) или, возможно, и других электрических и магнитных колебаний в материале. Первой успешно подтвержденной микроскопической моделью сверхпроводимости является *модель Бардина – Купера – Шриффера* [ее называют кратко теорией БКШ (1957 г.)], которая объясняет возникновение единого (когерентного) волнового

поведения электронов в сверхпроводнике. Независимо от них Н.Н. Боголюбов (1958 г.) разработал более совершенный вариант теории сверхпроводимости. Теория сверхпроводимости очень сложна.

Модель БКШ вводит понятие основного состояния сверхпроводника, отделенного энергетической щелью от обычных (некогерентных) одноэлектронных состояний. Существование энергетической щели определяет возможность движения когерентных электронов (*электронного конденсата*) без сопротивления. Теория БКШ и ее дальнейшее развитие – основа для объяснения ряда явлений, экспериментально наблюдаемых в сверхпроводниках: вытеснение магнитного поля из объема сверхпроводника, квантование магнитного потока в сверхпроводящих кольцах, туннелирование куперовских пар через диэлектрические барьеры между двумя сверхпроводниками – *эффект Джозефсона* (1963 г.) – протекание сверхпроводящего тока сквозь тонкий слой диэлектрика (пленка оксида металла толщиной  $\approx 1$  нм), разделяющий два сверхпроводника, так называемый *контакт Джозефсона*. В эффекте Джозефсона непосредственно проявляется важнейшее свойство сверхпроводника – согласованное поведение его электронов. Эффект Джозефсона используется для точного измерения малых токов (до  $10^{-10}$  А), напряжений (до  $10^{-15}$  В), магнитных полей (до  $10^{-18}$  Тл) и др.

### Примеры решения задач

**8.1.** Найдите теплоемкость электронов проводимости для 1 кг калия (К) при температуре 290 К, полагая, что на каждый атом приходится один свободный электрон. Энергия Ферми для электронов в металле (калий) равна 2,125 эВ. Молярная масса калия  $M = 39 \cdot 10^{-3}$  кг/моль; универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль  $\cdot$  К); постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

**Дано:** К;  $m = 1$  кг;  $T = 290$  К;  $E_F = 2,125$  эВ =  $3,4 \cdot 10^{-19}$  Дж;  $M = 39 \cdot 10^{-3}$  кг/моль;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К;  $R = 8,31$  Дж/(моль  $\cdot$  К).

**Найти:**  $C_m$ .

**Решение.** Теплоемкость электронного газа, содержащегося в  $1 \text{ м}^3$  металла,

$$C_V = \frac{\pi^2 k^2 n T}{2 E_F}, \quad (1)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $n$  – концентрация электронов.

Теплоемкость электронного газа для 1 кг металла

$$C_m = \frac{C_V}{\rho} = \frac{\pi^2 k^2 n T}{2 \rho E_F}, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность металла.

Концентрация свободных электронов (по условию задачи – на каждый атом приходится один свободный электрон) по определению:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\nu N_A}{V} = \frac{m N_A}{M V} = \rho \frac{N_A}{M}, \quad (3)$$

где  $N$  – число свободных электронов;  $V$  – объем металла;  $\nu = m/M$  – количество вещества;  $N_A$  – постоянная Авогадро;  $M$  – молярная масса металла.

Подставив полученное выражение (3) в формулу (2), найдем:

$$C_m = \frac{\pi^2 k^2 T}{2 \rho E_F} \frac{\rho N_A}{M} = \frac{\pi^2 k^2 T N_A}{2 M E_F} = \frac{\pi^2 k R T}{2 M E_F} \quad (4)$$

[учли  $R = k N_A$ ].

Подставляя числовые значения, получим искомую теплоемкость электронов проводимости

$$C_m = \frac{(3,14)^2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 8,31 \cdot 290}{2 \cdot 39 \cdot 10^{-3} \cdot 3,4 \cdot 10^{-19}} = 12,36 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

**Ответ:**  $C_m = 12,36 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ .

**8.2.** Найдите численное значение уровня Ферми калия (К) при  $T = 0 \text{ К}$ , полагая, что на каждый атом калия в кристалле приходится один свободный электрон (электрон проводимости) и эффективная масса электронов  $m_{\text{эф}}$  приблизительно равна массе  $m_e$  свободных электронов. Плотность и молярная масса калия соответственно равны  $860 \text{ кг}/\text{м}^3$  и  $39 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$ .

**Дано:**  $T = 0 \text{ К}$ ;  $\rho = 860 \text{ кг}/\text{м}^3$ ;  $M = 39 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$ ;  $m_{\text{эф}} = m_e$ ;  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ ;  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ ;  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

**Найти:**  $E_F$ .

**Решение.** Распределение Ферми – Дирака (среднее число электронов в квантовом состоянии с энергией  $E$ ) по энергиям для свободных электронов в металле:

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}, \quad (1)$$

где  $E_F$  – энергия Ферми [максимальная кинетическая энергия, которую могут иметь электроны проводимости в металле при температуре  $T = 0 \text{ К}$ ].

При  $T = 0 \text{ К}$

$$\langle N(E) \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } E < E_F, \\ 0, & \text{если } E > E_F. \end{cases}$$

Энергия Ферми в металле при  $T = 0 \text{ К}$ ,

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e\pi^2} \cdot (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}, \quad (2)$$

где  $\hbar = h/2\pi$  – постоянная Планка;  $m_e$  – масса электрона;  $n$  – концентрация электронов.

По условию задачи, концентрация  $n$  свободных электронов в металле равна концентрации атомов,

$$n = \frac{N_A}{V_m} = \rho \frac{N_A}{M}, \quad (3)$$

где  $V_m$  – молярный объем;  $N_A$  – число Авогадро;  $\rho$  – плотность калия.

Подставляя в формулу (3) для  $n$  числовые значения  $\rho$ ,  $N_A$  и  $M$ , найдем концентрацию электронов проводимости

$$n = \frac{860 \cdot 6,022 \cdot 10^{23}}{39 \cdot 10^{-3}} = 132,7928 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3} \approx 1,33 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$$

и искомую энергию Ферми

$$E_F = \frac{(1,06 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} \cdot (3 \cdot (3,14)^2 \cdot 1,33 \cdot 10^{28})^{\frac{2}{3}} = 3,31 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,07 \text{ эВ}.$$

**Ответ:**  $E_F = 2,07$  эВ.

**8.3.** Найдите вероятность  $f(E)$  того, что электрон в металле займет энергетическое состояние на 0,045 эВ выше уровня Ферми при температуре 350 К. Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

**Дано:**  $\Delta E = 0,045$  эВ =  $7,2 \cdot 10^{-21}$  Дж;  $T = 350$  К;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

**Найти:**  $f(E)$ .

**Решение.** Распределение Ферми – Дирака (*среднее число электронов в квантовом состоянии с энергией  $E$* ) по энергиям для свободных электронов в металле:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{\Delta E}{kT}} + 1} \quad (1)$$

[распределение Ферми – Дирака и будет вероятностью заполнения электронами определенного энергетического уровня].

Подставляя числовые значения, найдем искомую вероятность

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{7,2 \cdot 10^{-21}}{1,38 \cdot 10^{-23}} + 1}} = 0,184.$$

**Ответ:**  $f(E) = 0,184$ .

**8.4.** Найдите (в эВ) максимальную энергию фонона, который может возбуждаться в кристалле вольфрама (W), если характеристическая температура Де-

бая для него  $T_D = 310$  К. Какова была бы длина волны фотона, обладающего такой энергией? Считать  $T \ll T_D$ . Постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

**Дано:**  $W$ ;  $T_D = 310$  К;  $T \ll T_D$ ;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

**Найти:**  $E_{\max}$ ;  $\lambda$ .

**Решение.** Энергия фонона

$$E = \hbar\omega, \quad (1)$$

где  $\hbar = h/2\pi$  – постоянная Планка;  $\omega$  – круговая частота колебаний.

В области температур  $T \ll T_D$  максимальная энергия фонона

$$E_{\max} = \hbar\omega_D = kT_D, \quad (2)$$

где  $\omega_D$  – предельная частота упругих колебаний кристаллической решетки;  $k$  – постоянная Больцмана.

По условию задачи энергия фотона равна максимальной энергии фонона, т. е.

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{\max} = kT_D, \quad (3)$$

откуда искомая длина волны фотона

$$\lambda = \frac{hc}{E_{\max}} = \frac{hc}{kT_D}. \quad (4)$$

**Ответ:**  $E_{\max} = 4,278 \cdot 10^{-21}$  Дж = 26,74 мэВ;  $\lambda = 46,49$  мкм.

**8.5.** Характеристическая температура Дебая для хрома (Cr) равна 610 К. Найдите максимальную частоту колебаний кристаллической решетки хрома. Сколько фононов такой частоты возбуждается в среднем в кристалле хрома при температуре 1220 К? Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

**Дано:**  $T_D = 610$  К;  $T = 1220$  К;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

**Найти:**  $\nu_{\max}$ ;  $\langle N_i \rangle$ .

**Решение.** Характеристическая температура Дебая [при  $T \ll T_D$  (квантовая область)]

$$T_D = \frac{\hbar}{k} \omega_D = \frac{h\nu_{\max}}{k}, \quad (1)$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка;  $k$  – постоянная Больцмана;  $\omega_D$  – предельная частота упругих колебаний кристаллической решетки;  $\nu_{\max}$  – предельная (максимальная) частота колебаний кристаллической решетки.

Откуда

$$\nu_{\max} = \frac{kT_D}{h} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 610}{6,63 \cdot 10^{-34}} = 126,968 \cdot 10^{11} \approx 1,27 \cdot 10^{13} \text{ Гц.}$$

Среднее число фононов с энергией  $E_i$  в ячейке фазового пространства

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_i}{kT}} - 1}, \quad (2)$$

где  $T$  – температура кристалла (хрома).

Энергия фонона, соответствующая максимальной частоте колебаний  $\nu_{\max}$ ,

$$E_i = h\nu_{\max} = kT_D, \quad (3)$$

откуда искомого среднее число фононов с энергией  $E_i$ :

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_i}{kT}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{kT_D}{kT}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{T_D}{T}} - 1}, \quad (4)$$

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{610}{1220}} - 1} = \frac{1}{e^{0,5} - 1} = \frac{1}{1,6487213 - 1} = 1,542.$$

**Ответ:**  $\nu_{\max} = 1,27 \cdot 10^{13}$  Гц;  $\langle N_i \rangle = 1,542$ .

### Задачи

87. Найдите вероятность  $f(E)$  того, что электрон в металле имеет энергию  $E = E_F + kT$ , где  $E_F$  – энергия Ферми. **Ответ:** 0,269

88. Найдите концентрацию  $n$  свободных электронов в металле при абсолютном нуле. Энергию Ферми принять равной 1,2 эВ. Постоянная Планка  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг. **Ответ:**  $5,87 \cdot 10^{27}$  м<sup>-3</sup>

89. Найдите температуру вырождения для лития (Li), если принять, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. Молярная масса лития  $M = 6,941 \cdot 10^{-3}$  кг/моль; плотность лития  $\rho = 0,534$  г/см<sup>3</sup>; постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с; масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг. **Ответ:**  $7,184 \cdot 10^4$  К

90. Отношение энергий Ферми ( $E_F$ ) для двух металлов при температуре, близкой к абсолютному нулю, равно 4. Найдите соответствующее отношение максимальных скоростей движения электронов в этих металлах. **Ответ:** 2

91. Найдите теплоемкость электронов проводимости для 1 м<sup>3</sup> цинка (Zn) при температурах 5 К и 100 К. Концентрация свободных электронов равна  $6,67 \cdot 10^{28}$  м<sup>-3</sup>. Энергия Ферми для электронов в цинке 9,47 эВ; постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. **Ответ:** 206,64 Дж/(К · м<sup>3</sup>); 4132,79 Дж/(К · м<sup>3</sup>)

92. Найдите теплоемкость электронов проводимости для массы 1 кг хрома (Cr) при температуре 350 К, полагая, что на каждый атом приходится один свободный электрон. Энергия Ферми для электронов в хrome 6,92 эВ; молярная масса хрома  $M = 52 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. **Ответ:** 3,44 Дж/(К · м<sup>3</sup>)

93. Характеристическая температура Дебая для титана (Ti) равна 410 К. Найдите длину волны фононов, соответствующих частоте  $0,15\nu_{\max}$ . Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Ответ: 234,36 мкм

94. Найдите энергию фонона, соответствующего граничной частоте Дебая  $\nu_{\max}$ , если характеристическая температура Дебая для золота (Au) равна 170 К. Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Ответ:  $2,35 \cdot 10^{-21}$  Дж

95. Найдите максимальную частоту колебаний  $\nu_{\max}$  кристаллической решетки и температуру кристалла калия (K), если известно, что среднее число фононов максимальной частоты, возбуждаемое в ячейке фазового пространства кристалла, равно 2,078. Характеристическая температура Дебая для кристалла калия  $T_D = 110$  К. Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Ответ:  $2,29 \cdot 10^{12}$  Гц; 280 К

96. Найдите скорость звука в кристалле, если известно, что характеристическая температура Дебая  $T_D = 300$  К и межатомное расстояние в кристалле составляет  $a = 250$  пм. Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Ответ:  $3,13 \cdot 10^3$  м/с

97. Найдите частоту колебаний атомов меди (Cu) по теории Эйнштейна, если характеристическая температура Эйнштейна для меди равна  $\theta_E = 254$  К. Постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Ответ:  $5,29 \cdot 10^{12}$  Гц

98. Найдите энергию и теплоемкость системы, состоящей из  $2,7 \cdot 10^{22}$  квантовых трехмерных независимых осцилляторов при температуре  $T = \theta_E = 230$  К, где  $\theta_E$  – характеристическая температура Эйнштейна. Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Ответ: 257,09 Дж; 1,12 Дж/К

99. Найдите по теории Дебая нулевую энергию одного киломоля кристалла натрия (Na), для которого характеристическая температура Дебая 190 К. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К). Ответ: 1,78 МДж

100. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, найдите изменение молярной внутренней энергии  $\Delta U$  кристалла при нагревании его на 2 К от температуры  $T_1 = \theta_E/2$ , где  $\theta_E$  – характеристическая температура Эйнштейна. Ответ: 36 кДж/моль

## Лекции 9. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 9.1. Энергетические зоны в кристаллах

**Зонная теория** – квантовая теория, описывающая энергетический спектр электронов в периодическом потенциальном поле кристалла. Основы зонной теории были заложены Ф. Блохом (1928 г.) и Л. Бриллюэном (1930 г.).

[Согласно *классической физике*, при движении электрона (как и любой другой частицы) в периодическом потенциальном поле возможны две качественно различные ситуации: 1) если энергия электрона превышает максимальное значение потенциала поля, то электрон движется, периодически ускоряясь и замедляясь, с некоторой постоянной средней скоростью; 2) если же энергия электрона достаточно мала, то он оказывается «запертым» в одном из минимумов потенциала и совершает в нем периодическое движение].

В основе зонной теории лежит так называемое *adiaбатическое приближение*. Квантово-механическая система разделяется на тяжелые и легкие частицы – ядра и электроны. Поскольку массы и скорости этих частиц значительно различаются, можно считать, что движение электронов происходит в поле неподвижных ядер, а медленно движущиеся ядра находятся в усредненном поле всех электронов. Принимая, что ядра в узлах кристаллической решетки неподвижны, движение электрона рассматривается в *постоянном периодическом поле ядер*.

Далее используется приближение *самосогласованного поля*. Взаимодействие данного электрона со всеми другими электронами заменяется действием на него стационарного электрического поля, обладающего периодичностью кристаллической решетки. Это поле создается усредненным в пространстве зарядом всех других электронов и всех ядер. Таким образом, в рамках зонной теории *многочастичниковая задача сводится к задаче о движении одного электрона во внешнем периодическом поле – усредненном и согласованном поле всех ядер и электронов*.

При учете квантовых эффектов электрон приобретает возможность туннелировать из одного минимума в другой: электрон может распространяться по



всему кристаллу с постоянной в среднем скоростью, не испытывая никакого систематического ускорения или замедления. Распространение электрона по кристаллу оказывается возможным не при всех энергиях, а только в *разрешенных зонах*; последние отделены друг от друга *запрещенными зонами*, в которых движение электронов невозможно [весь интервал энергий разбивается на совокупность чередующихся разрешенных и запрещенных зон (рис. 88)]. Характерная ширина энергетических зон составляет несколько эВ, что соответствует 104 К.

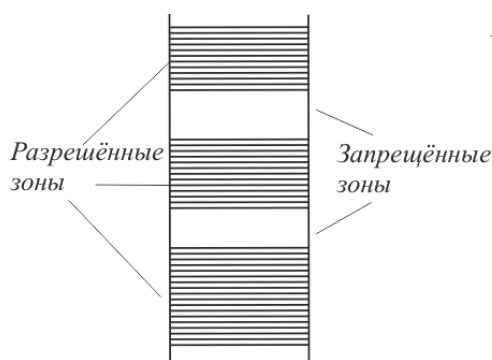


Рис. 88

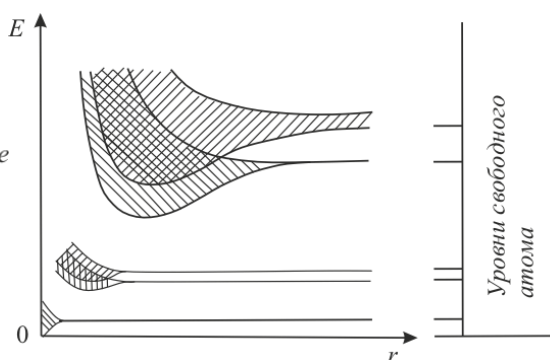


Рис. 89

Пока атомы находятся на значительных расстояниях  $r$  друг от друга, они имеют тождественные схемы энергетических уровней. По мере сближения атомов между ними возникают все усиливающееся взаимодействие, которое приводит к изменению положения уровней – волновые функции внешних электронов атомов начинают перекрываться и, вследствие принципа Паули, каждый из уровней расщепляется на  $N$  густо расположенных подуровней (расстояние между подуровнями  $\Delta E \sim 10^{-22}$  эВ), образующих *полосу* или *разрешенную энергетическую зону* (заштрихованы на рис. 89). Волновые функции внутренних электронов либо совсем не перекрываются, либо перекрываются слабо, поэтому уровни внутренних электронов либо совсем не расщепляются, либо расщепляются слабо. Разрешенные энергетические зоны разделены зонами запрещенных значений энергии – *запрещенные энергетические зоны*. В них электроны находиться не могут. Ширина зон (разрешенных и запрещенных) не зависит от размера кристалла. Разрешенные зоны тем шире, чем слабее связь валентных электронов с ядрами. Существование кристаллов различного типа соответствует различному характеру заполнения энергетических уровней.

## 9.2. Классификация кристаллов по зонной теории

Представление об энергетических зонах позволяет объяснить с единой точки зрения существование металлов, полупроводников и диэлектриков. **Валентная зона** – разрешенная зона, возникшая из того уровня, на котором находятся валентные электроны изолированного кристаллообразующего атома.

Определяющую роль для типа проводимости кристалла имеет характер заполнения электронами (при  $T = 0$  К) верхней разрешенной зоны (выше которой все разрешенные зоны пустые). Электроны в этих зонах при  $T = 0$  К не могут принимать участия в проводимости, поскольку отсутствуют свободные состояния, куда они могли бы перемещаться при включении внешнего поля. Верхняя зона, происходящая из внешней атомной оболочки, может быть заполнена электронами либо частично, либо полностью. Если эта зона *заполнена частично*, то кристалл является **металлом** (или **полуметаллом**). Эту зону называют **зоной проводимости**. На рис. 90, *а* самая верхняя зона, содержащая электроны, заполнена лишь частично, т. е. в ней имеются вакантные уровни. [В данном случае электрон, получив совсем небольшую энергию ( $10^{-23} - 10^{-22}$  эВ), например, за счет электрического поля, сможет перейти на более высокий энергетический уровень той же зоны, т. е. стать свободным и участвовать в проводимости. Таким образом, если в твердом теле имеется зона, лишь частично заполненная электронами, то это тело всегда будет проводником электрического тока].

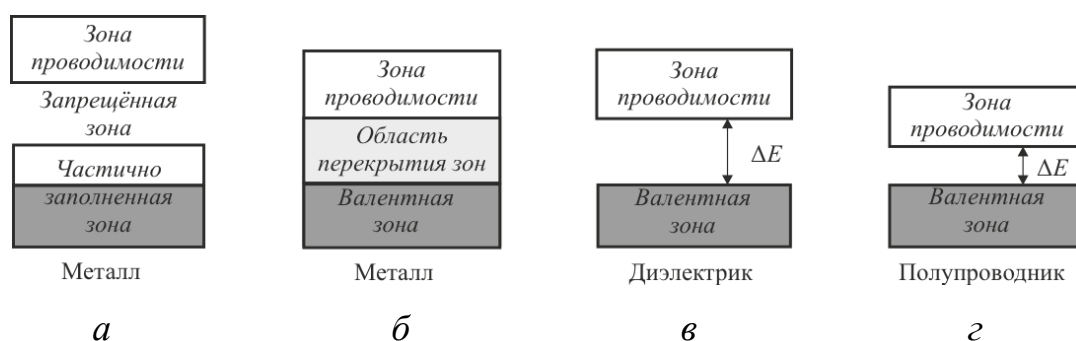


Рис. 90

Твердое тело является проводником электрического тока и в том случае, когда валентная зона перекрывается свободной зоной, что в конечном счете приводит к не полностью заполненной зоне (рис. 90, б).

Это имеет место для щелочно-земельных элементов, образующих II группу таблицы Менделеева (Be, Mg, Ca, Zn, Sr, Ba, ...). В данном случае образуется так называемая «гибридная» зона, которая заполняется валентными электронами лишь частично. Следовательно, в данном случае металлические свойства *щелочно-земельных элементов* обусловлены перекрытием валентной и свободной зон. [Атомы *щелочных металлов* (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr) содержат во внешней *s*-оболочке два электронных состояния (соответствующих разным проекциям спина), только одно из которых занято электроном. Поэтому зона проводимости содержит  $2N$  свободных мест, только половина из которых заполнена.

У редкоземельных металлов оба *s*-состояния внешней оболочки заняты электронами, но проявляется другой механизм образования незаполненной зоны: полоса энергий, происходящая из *s*-оболочки и содержащая  $2N$  мест, перекрывается с полосой, происходящей из *p*-оболочки, которая содержит  $6N$  мест. Образованная таким образом разрешенная зона содержит  $8N$  мест, из которых только  $2N$  заполнены электронами].

Твердые тела, у которых энергетический спектр электронных состояний состоит только из валентной зоны и зоны проводимости, являются *диэлектриками* или *полупроводниками* в зависимости от ширины запрещенной зоны  $\Delta E$ .

Если ширина запрещенной зоны кристалла порядка нескольких электрон-вольт (эВ), то тепловое движение не может перебросить электроны из валентной зоны в зону проводимости [энергия теплового движения ( $kT$ ) составляет при 1 К величину порядка  $10^{-4}$  эВ], и кристалл является диэлектриком, оставаясь им при всех реальных температурах (рис. 90, в). Если запрещенная зона достаточно узка ( $\Delta E$  порядка 1 эВ), то переброс электронов из валентной зоны в зону проводимости может быть осуществлен сравнительно легко либо путем теплового возбуждения, либо за счет внешнего источника, способного передать электронам энергию  $\Delta E$ , и кристалл является полупроводником (рис. 90, г).

[Различие между *металлами* и *диэлектриками*, с точки зрения зонной теории, состоит в том, что при 0 К в зоне проводимости металлов имеются электроны, а в зоне проводимости диэлектриков они отсутствуют. Различие же между *диэлектриками* и *полупроводниками* определяется шириной запрещенных зон: для диэлектриков она довольно широка (например, для NaCl  $\Delta E = 6$  эВ), для полупроводников – достаточно узка (например, для кремния (Si)

$\Delta E = 1,21$  эВ). При температурах, близких к 0 К, полупроводники ведут себя как диэлектрики, так как переброса электронов в зону проводимости не происходит. С повышением температуры у полупроводников растет число электронов, которые вследствие теплового возбуждения переходят в зону проводимости, то есть электрическая проводимость проводников в этом случае увеличивается].

### 9.3. Электропроводность полупроводников

#### 9.3.1. Собственная проводимость полупроводников

Полупроводниками являются кристаллические вещества, у которых при  $T = 0$  К валентная зона полностью заполнена электронами (рис. 90,  $\varepsilon$ ), ширина запрещенной зоны невелика ( $\Delta E$  порядка 1 эВ), – по величине электропроводности  $\sigma$  они занимают промежуточное положение между металлами и диэлектриками. Встречающиеся в природе твердые вещества имеют широкий диапазон значений электропроводности от  $6 \cdot 10^5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$  (металлы) до  $10^{-22} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$  (диэлектрики). Такое большое различие в электропроводности веществ связано главным образом с различием значений концентраций свободных носителей заряда  $n$ , которая для металлов и диэлектриков отличается более чем в  $10^{20}$  раз. Удельная электрическая проводимость полупроводников охватывает, как принято считать, диапазон от  $10^3 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$  до  $10^{-10} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ .

Различают *собственные* и *примесные полупроводники*. **Собственными полупроводниками** являются химически чистые полупроводники, а их проводимость называется **собственной проводимостью**. Примером собственных полупроводников могут служить химически чистые кремний (Si), германий (Ge), селен (Se), теллур (Te), а также многие химические соединения: арсенид галлия (GaAs), антимонид индия (InSb), арсенид индия (InAs), сульфид кадмия (CdS), карбид кремния (SiC) и др.

При  $T = 0$  К и отсутствии других внешних факторов собственные полупроводники ведут себя как диэлектрики. При повышении же температуры электроны с верхних уровней валентной зоны I могут быть переброшены на нижние

уровни зоны проводимости II (рис. 91). При наложении на кристалл электрического поля они перемещаются против поля и создают электрический ток.

Проводимость собственных полупроводников, обусловленная электронами, называется *электронной проводимостью*, или *проводимостью n-типа* (от лат. *negative* – отрицательный).

В результате тепловых забросов электронов из зоны I в зону II в валентной зоне возникают вакантные состояния, получившие название *дырок*. Во внешнем электрическом поле на освободившееся от электрона место – дырку – может переместиться электрон с соседнего уровня, а дырка появится в том месте, откуда ушел электрон, и т. д. В результате дырка, так же, как и перешедший в зону проводимости электрон, будет двигаться по кристаллу, но в направлении, противоположном движению электрона. Формально это выглядит так, как если бы по кристаллу двигалась частица с положительным зарядом, равным по величине заряду электрона.

Проводимость собственных полупроводников, обусловленная квазичастицами – дырками, называется *дырочной проводимостью*, или *p-проводимостью* (от лат. *positive* – положительный).

Таким образом, в собственных полупроводниках наблюдаются *два механизма проводимости: электронный и дырочный*.

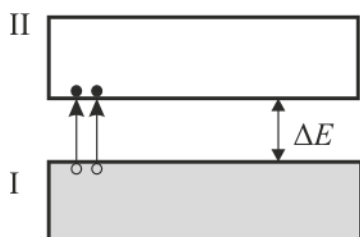


Рис. 91

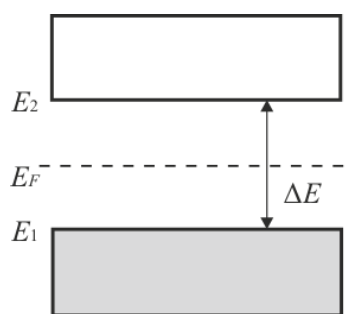


Рис. 92

Для каждого полупроводника существует определенная температура, при которой наступает заметная проводимость. Она тем выше, чем больше ширина запрещенной зоны  $\Delta E$  полупроводника. В создании электрического тока участвуют как электроны, так и дырки [число электронов в зоне проводимости (II)

равно числу дырок в валентной зоне (I), следовательно,  $n_e = n_p$  ( $n_e$  и  $n_p$  – соответственно концентрация электронов проводимости и дырок)], поэтому *полную электропроводность полупроводника  $\sigma$*  можно представить в виде их суммы:

$$\sigma = en_e u_n + ep_p u_p, \quad (9.1)$$

где  $u_n$  и  $u_p$  – соответственно подвижности электронов и дырок.

Проводимость полупроводников всегда является *возбужденной*, т. е. появляется только под действием внешних факторов (температуры, облучения, сильных электрических полей и т. д.).

В собственном полупроводнике уровень Ферми находится в середине запрещенной зоны (рис. 92). *Энергия активации* – энергия, которую необходимо затратить, чтобы перевести электрон из валентной зоны в зону проводимости. [При появлении электрона в зоне проводимости в валентной зоне обязательно возникает дырка. Следовательно, энергия, затраченная на образование пары носителей тока (электрон-дырка), должна делиться на две равные части. Так как энергия, соответствующая половине ширины запрещенной зоны, идет на переброс электрона, и такая же энергия затрачивается на образование дырки, то *начало отсчета* для каждого из этих процессов должно находиться в *середине запрещенной зоны*].

*Энергия Ферми ( $E_F$ ) в собственном полупроводнике* представляет собой энергию, от которой происходит возбуждение электронов и дырок.

*Концентрация электронов в зоне проводимости*

$$n_e = C_1 e^{-\frac{E_2 - E_F}{kT}}, \quad (9.2)$$

где  $C_1$  – постоянная, зависящая от температуры и эффективной массы электрона проводимости;  $E_2$  – энергия, соответствующая дну зоны проводимости (рис. 92).

*Эффективная масса* – величина, имеющая размерность массы и характеризующая динамические свойства квазичастиц – электронов проводимости и дырок. [Эффективная масса  $m_e^*$  электрона проводимости позволяет учитывать действие на электроны проводимости внешнего поля и внутреннего периодического поля кристалла, а также рассматривать движение электронов во внешнем поле как движение свободных частиц].

*Концентрация дырок в валентной зоне*

$$n_p = C_2 e^{-\frac{E_1 - E_F}{kT}}, \quad (9.3)$$

где  $C_2$  – постоянная, зависящая от температуры и эффективной массы дырки;  $E_2$  – энергия, соответствующая верхней границе валентной зоны [энергия возбуждения отсчитывается вниз от уровня Ферми  $E_F$  (рис. 92), поэтому величины в экспоненциальном множителе (9.3) имеют знак, обратный знаку экспоненциального множителя в (9.3)].

Так как для собственного полупроводника  $n_e = n_p$ , то

$$C_1 e^{-\frac{E_2 - E_F}{kT}} = C_2 e^{\frac{E_1 - E_F}{kT}}.$$

Если эффективные массы электронов и дырок равны ( $m_e^* = m_p^*$ ), то  $C_1 = C_2$  и, следовательно,  $-(E_2 - E_F) = E_1 - E_F$ , откуда

$$E_F = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{\Delta E}{2}, \quad (9.4)$$

т. е. уровень Ферми  $E_F$  в собственном полупроводнике действительно расположен в середине запрещенной зоны  $\Delta E$ .

Так как для собственных полупроводников  $\Delta E \gg kT$ , то распределение Ферми – Дирака (8.5) переходит в распределение Максвелла – Больцмана. Положив в (8.10)  $E - E_F \approx \Delta E/2$ , получим

$$\langle N(E) \rangle \approx e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}. \quad (9.5)$$

Количество электронов, перешедших в зону проводимости, и количество образовавшихся дырок пропорциональны  $\langle N(E) \rangle$ . Следовательно, *удельная проводимость собственных полупроводников*

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}, \quad (9.6)$$

где  $\sigma_0$  – постоянная, характерная для данного полупроводника.

Графически зависимость  $\sigma$  от  $T$  удобно строить в полулогарифмических координатах. Логарифмируя (9.6), получаем выражение

$$\ln \sigma = \ln \sigma_0 - \frac{\Delta E}{2k} \frac{1}{T}, \quad (9.7)$$

представляющее собой уравнение прямой (рис. 93, а). Из графика зависимости  $\ln \sigma(1/T)$  можно определить ширину запрещенной зоны  $\Delta E$  и постоянную  $\sigma_0$ .

Типичными полупроводниками являются элементы IV группы Периодической системы Менделеева – германий (Ge) и кремний (Si). Они образуют решетку

типа алмаза, в которой каждый атом связан ковалентными (парно-электронными) связями с четырьмя ближайшими соседями. Упрощенная плоская схема расположения атомов в кристалле Ge представлена на рис. 93, б, где каждая черточка обозначает связь, осуществляемую одним электроном. В идеальном кристалле при  $T = 0$  К такая структура представляет собой диэлектрик, так как все валентные электроны участвуют в образовании связей и, следовательно, не участвуют в проводимости.

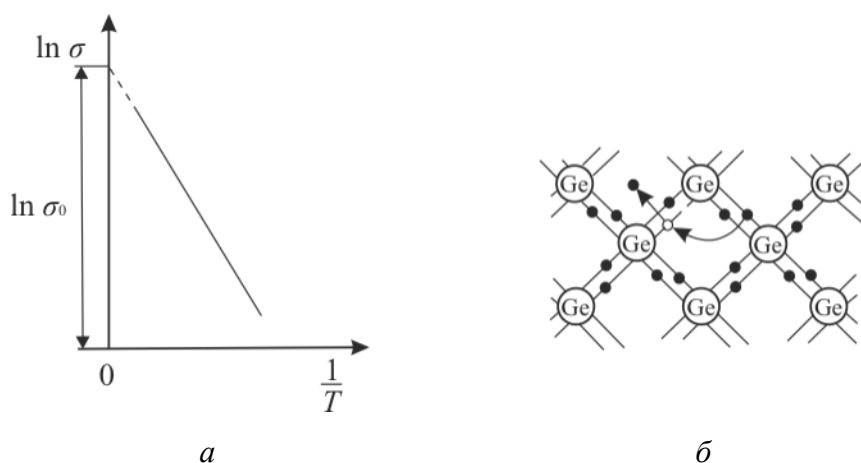


Рис. 93

При достаточно высокой температуре тепловое движение может разорвать определенные пары, освободив один электрон. В покинутом электроном месте возникает дырка (она изображена белым кружком), заполнить которую могут электроны из соседней пары. В результате дырка начинает также странствовать по кристаллу, как и освободившийся электрон. Когда внешнее электрическое поле отсутствует, электроны проводимости и дырки движутся хаотически. При включении поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение – электронов против поля и дырок в направлении поля. Следовательно, собственная электропроводность обуславливается как бы носителями заряда двух знаков – отрицательными и положительными дырками.

Образование собственных электронов и дырок в соответствующих зонах называется *генерацией пар зарядов*; одновременно с этим процессом протекает процесс возвращения электронов из зоны проводимости в валентную зону – *рекомбинация носителей заряда*.

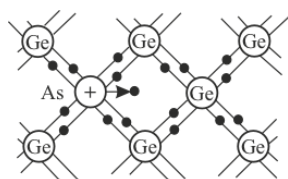


### 9.3.2. Примесная проводимость полупроводников

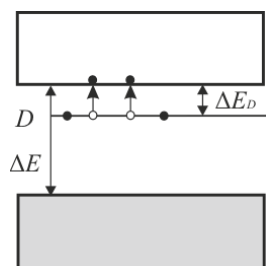
Реальные кристаллы всегда содержат чужеродные атомы и имеют несовершенство кристаллической решетки, которые действуют как примеси, поэтому на практике более важной является *примесная проводимость полупроводника*. Наличие в полупроводнике примеси существенно изменяет его проводимость. Например, при введении в кремний (Si) примерно 0,001 ат. % бора (B) его проводимость увеличивается примерно в  $10^6$  раз.

Для получения примесной проводимости в предварительно очищенный от случайных примесей полупроводник вводят специальные примеси, обеспечивающие преимущественную концентрацию либо свободных электронов, либо дырок. С этой целью в качестве примесей используют вещества с валентностью, *большой* или *меньшей валентности* основного полупроводника.

На рис. 94 условно изображена решетка германия (Ge) с примесью пятивалентных атомов мышьяка (As). Для образования ковалентных связей с соседями атому As достаточно четырех электронов (рис. 94, а). Пятый валентный электрон оказывается лишним и легко отщепляется от атома As за счет теплового движения, образуя странствующий электрон. [Образование свободного электрона не сопровождается нарушением ковалентной связи; следовательно, в отличие от случая, рассмотренного в п. 8.4.1, дырка не возникает].

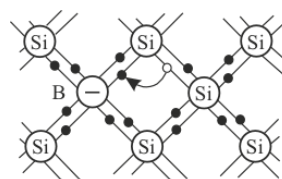


а

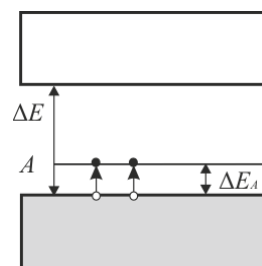


б

Рис. 94



а



б

Рис. 95

В полупроводнике с примесью, валентность которой на единицу больше валентности основных атомов, имеется только один вид носителей тока – электроны; такой полупроводник обладает *электронной примесной проводимостью* [*проводимость n-типа*] или является *полупроводником n-типа* (*negative – отрицательный*). Атомы примеси, поставляющие электроны проводимости, называются *донорами*, а энергетические уровни этих примесей – *донорными уровнями*. Электроны в полупроводнике n-типа называются *основными носителями заряда*, а дырки – *неосновными*.

[С точки зрения *зонной теории* рассмотренный процесс можно представить следующим образом (рис. 94, б). Введение примеси искажает поле решетки, что приводит к возникновению в запрещенной зоне энергетического уровня  $D$  валентных электронов As, называемого *примесным уровнем*. В случае Ge с примесью As этот уровень располагается от дна зоны проводимости (т. е. в верхней половине запрещенной зоны) на расстоянии  $\Delta E_D = 0,013$  эВ. Так как  $\Delta E_D < kT$ , то уже при обычных температурах энергия теплового движения достаточна для того, чтобы перебросить электроны примесного уровня в зону проводимости; образующиеся при этом положительные заряды локализуются на неподвижных атомах мышьяка и в проводимости не участвуют].

На рис. 95, б условно изображена решетка кремния (Si) с примесью трехвалентных атомов бора (B). Для образования связей с четырьмя ближайшими соседями у атома B не хватает одного электрона, одна из связей остается неуплотненной, и четвертый электрон может быть захвачен от соседнего атома Si, где, соответственно, образуется дырка, которая будет кочевать по кристаллу. Вблизи атома примеси возникает избыточный отрицательный заряд.

В полупроводнике с примесью, валентность которой на единицу меньше валентности основных атомов, возникают носители тока только одного вида – дырки; *проводимость* в этом случае называется *дырочной* [*проводимость p-типа*], а полупроводник принадлежит к *p-типу* (*positive – положительный*). Примеси, вызывающие возникновение дырок, называются *акцепторными*, а энергетические уровни этих примесей – *акцепторными уровнями*. В полупроводнике p-типа *основными носителями заряда* являются дырки, *неосновными* – электроны.

[По *зонной теории*, введение трехвалентной примеси в решетку Si приводит к возникновению в запрещенной зоне примесного энергетического уровня  $A$ , не занятого электронами (рис. 95, б). В случае Si с примесью В этот уровень располагается выше верхнего края валентной зоны (т. е. в нижней половине запрещенной зоны) на расстоянии  $\Delta E_A = 0,08$  эВ. Близость этих уровней к валентной зоне приводит к тому, что уже при сравнительно низких температурах электроны из валентной зоны переходят на примесные уровни и, связываясь с атомами В, теряют способность перемещаться по решетке Si, т. е. в проводимости не участвуют. Носителями тока являются лишь дырки, возникающие в валентной зоне].

В отличие от *собственной проводимости*, осуществляющейся одновременно электронами и дырками, *примесная проводимость полупроводников* обусловлена в основном носителями одного знака: электронами – в случае донорной примеси, дырками – в случае акцепторной. Эти **носители тока** называются **основными**. Кроме основных носителей в полупроводнике имеются и **неосновные носители**: в полупроводниках  $n$ -типа – дырки, в полупроводниках  $p$ -типа – электроны.

Общий ход температурной зависимости электропроводности примесного полупроводника, как и собственного, определяется концентрацией и подвижностью носителей зарядов, значения которых зависят от температуры. Удельная электрическая проводимость *примесного полупроводника* (например, *электронного*), может быть выражена зависимостью:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} + \sigma_D e^{-\frac{\Delta E_D}{2kT}}, \quad (9.8)$$

где  $\sigma_0$  и  $\sigma_D$  – постоянные, зависящие от природы полупроводника;  $\Delta E$  – ширина запрещенной зоны полупроводника;  $\Delta E_D$  – энергия активации примеси – энергия, необходимая для создания примесного носителя заряда (в нашем случае – электрона в зоне проводимости (см. рис. 94, б)]. Первый член формулы (9.8) определяет собственную проводимость полупроводника, второй – примесную.

При повышении температуры уровень Ферми  $E_F$  в полупроводниках обоих типов смещается к середине запрещенной зоны – концентрация примесных носителей тока быстро достигает насыщения. Это означает, что практически освобождаются все донорные или заполняются электронами все акцепторные

уровни. Вместе с тем, по мере роста температуры все в большей степени начинает сказываться собственная проводимость полупроводника, обусловленная переходом электронов непосредственно из валентной зоны в зону проводимости. Таким образом, при высоких температурах проводимость полупроводника будет складываться из примесной и собственной проводимостей. При низких температурах преобладает примесная, а при высоких – собственная проводимость.

[Наличие примесных уровней в полупроводниках существенно изменяет положение уровня Ферми  $E_F$ . В случае полупроводников  $n$ -типа уровень Ферми  $E_{F_0}$  при  $T = 0$  К расположен посередине между дном зоны проводимости и донорным уровнем (рис. 96).

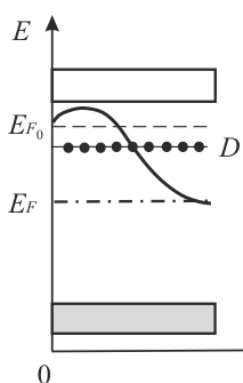


Рис. 96

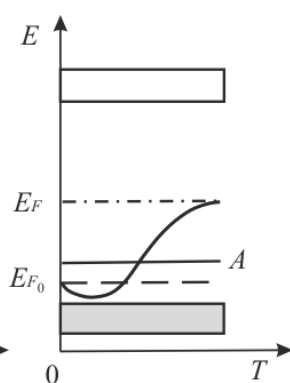


Рис. 97

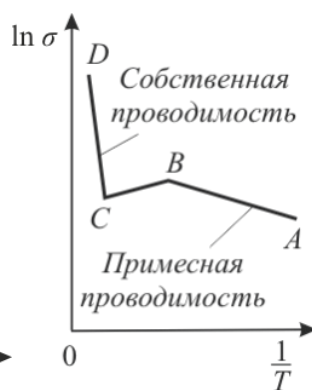


Рис. 98

С повышением температуры все большее число электронов переходит из донорных состояний в зону проводимости, помимо этого, возрастает и число тепловых флуктуаций, способных возбуждать электроны из валентной зоны и перебрасывать их через запрещенную зону энергии. Поэтому при высоких температурах уровень Ферми имеет тенденцию смещаться вниз (сплошная кривая) к своему предельному положению в центре запрещенной зоны, характерному для собственного полупроводника.

Уровень Ферми в полупроводниках  $p$ -типа при  $T = 0$  К  $E_{F_0}$  располагается посередине между потолком валентной зоны и акцепторным уровнем (рис. 97). При температурах, при которых примесные атомы оказываются полностью истощенными и увеличение концентрации носителей происходит за счет возбуждения собственных носителей, уровень Ферми располагается посередине запрещенной зоны, как в собственном полупроводнике.

На рис 98 дан примерный график зависимости  $\ln \sigma$  от  $1/T$  для примесных полупроводников. Участок  $AB$  описывает примесную проводимость полупроводника (рост примесной проводимости полупроводника с увеличением температуры обусловлен в основном повышением концентрации примесных носителей);  $BC$  – соответствует области истощения примесей;  $CD$  – описывает собственную проводимость полупроводника].

### 9.3.3. Фотопроводимость полупроводников

**Фотопроводимость полупроводников** – увеличение электропроводности полупроводников под действием электромагнитного излучения. В полупроводнике поглощение света может быть обусловлено различными процессами, приводящими к изменению энергетического состояния свободных или связанных электронов, а также к изменению колебательной энергии атомов решетки.

Если энергия поглощаемого кванта  $h\nu$  равна или больше ширины запрещенной зоны полупроводника ( $h\nu \geq \Delta E$ ), т. е. достаточна для переброса электронов из валентной зоны в зону проводимости (рис. 99, а), то такое поглощение называется **собственным**, – приводит к появлению добавочных (неравновесных) электронов (в зоне проводимости) и дырок (в валентной зоне). В результате возникает **собственная фотопроводимость**, обусловленная как электронами, так и дырками.

Если полупроводник содержит примеси, то фотопроводимость может возникать и при  $h\nu < \Delta E$ : при донорной примеси фотон должен обладать энергией  $h\nu \geq \Delta E_D$ , при акцепторной примеси – энергией  $h\nu \geq \Delta E_A$ . При поглощении света примесными центрами происходит переход электронов с донорных уровней в зону проводимости в случае полупроводника *n*-типа (рис. 99, б); из валентной зоны на акцепторные уровни в случае полупроводника *p*-типа (рис. 99, в). **Примесная фотопроводимость** для полупроводников *n*-типа – *чисто электронная*, для полупроводников *p*-типа – *чисто дырочная*.

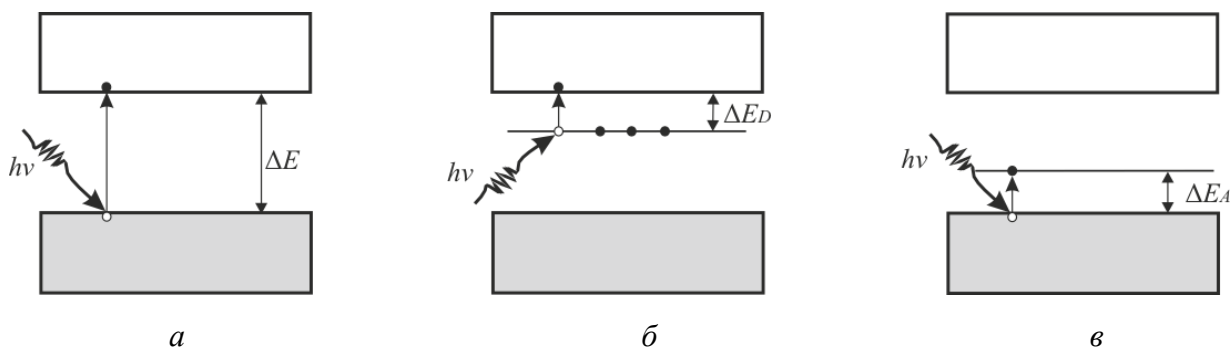


Рис. 99

**Красная граница фотопроводимости** – максимальная длина волны, при которой фотопроводимость еще возбуждается:

а) для *собственных полупроводников* приходится на видимую область спектра

$$\lambda_0 = \frac{h\nu}{\Delta E}; \quad (9.9)$$

б) для *примесных полупроводников* – на инфракрасную область спектра

$$\lambda_0 = \frac{h\nu}{\Delta E_{\text{п}}}, \quad (9.10)$$

где  $\Delta E_{\text{п}}$  – энергия активации примесных атомов.

[Наряду с поглощением, приводящим к появлению фотопроводимости, может иметь место поглощение света с образованием *экситонов* (понятие экситон было предложено Я.И. Френкелем в 1931 г.), которое не приводит к фотопроводимости. *Экситон* – это квазичастица, представляющая собой связанную пару электрон и дырка, которая может свободно перемещаться в кристалле. Экситоны возбуждаются фотонами с энергиями, меньшими энергии запрещенной зоны, и могут быть наглядно представлены в виде модели спаренных электрона и дырки, движущихся вокруг общего центра масс, которым не хватило энергии, чтобы оторваться друг от друга (так называемый *экситон Ванье – Мотта*). В целом экситон электрически нейтрален, поэтому экситонное поглощение света не приводит к увеличению фотопроводимости].

#### 9.4. Люминесценция твердых тел

**Люминесценция** – неравновесное излучение, избыточное при данной температуре над тепловым излучением тела и имеющее длительность, большую периода световых колебаний. Вещества, способные под действием различного рода возбуждений светиться, называются *люминофорами*.

В зависимости от способов возбуждения различают:

1) **фотолюминесценцию** – свечение вещества при его возбуждении видимым и ультрафиолетовым излучением;

2) **рентгенолюминесценцию** – возбуждение свечения рентгеновскими лучами;

3) **катодолюминесценцию** – возбуждение свечения при бомбардировке вещества электронами;

4) **радиолюминесценцию** – свечение веществ при возбуждении ядерным излучением, например,  $\gamma$ -излучением, нейтронами, протонами;

5) **хемилюминесценцию** – свечение вещества за счет энергии химических реакций;

6) **триболюминесценцию** – свечение вещества при растирании или раскалывании некоторых кристаллов;

7) **электролюминесценцию** – свечение вещества, возбуждаемого электрическим полем и др.

Во всех случаях поглощенная люминесцирующим веществом энергия частично превращается в теплоту, а оставшая часть через некоторое время испускается в виде света. По длительности свечения условно различают: **флуоресценцию** ( $t \leq 10^{-8}$  с) и **фосфоресценцию** – свечение, продолжающееся заметный промежуток времени после прекращения возбуждения.

**Правило Стокса:** *длина волны люминесцентного излучения всегда больше длины волны света, возбудившего его* (Дж. Стокс, 1852 г.). Согласно квантовой теории, правило Стокса означает, что энергия  $h\nu$  падающего фотона частично расходуется на какие-то неоптические процессы, т. е.

$$h\nu = h\nu_{\text{люм}} + \Delta E, \quad (9.11)$$

откуда  $\nu_{\text{люм}} < \nu$  или  $\lambda_{\text{люм}} > \lambda$ , что и следует из сформулированного правила (см. рис. 100).

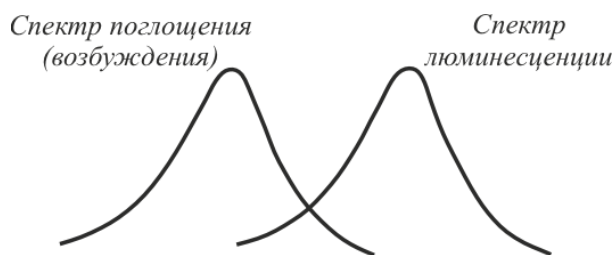


Рис. 100

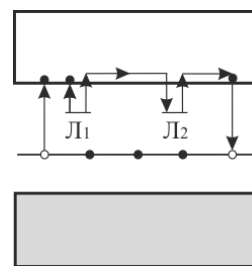


Рис. 101

Твердые тела, представляющие собой эффективно люминесцирующие искусственно приготовленные кристаллы с чужеродными примесями, получили название **кристаллофосфоров**. На примере кристаллофосфоров рассмотрим механизмы возникновения фосфоресценции с точки зрения зонной теории твердых

тел. Между валентной зоной и зоной проводимости кристаллофосфора располагаются примесные уровни активатора (рис. 101). Для возникновения длительного свечения кристаллофосфор должен содержать центры захвата, или ловушки для электронов ( $L_1, L_2$ ). Длительность процесса миграции электрона до момента рекомбинации его с ионом активатора определяется временем пребывания электронов в ловушках.

### 9.5. Контакт электронного и дырочного полупроводников (*p-n*-переход)

Граница соприкосновения двух полупроводников, один из которых имеет электронную, а другой – дырочную проводимость, называется *электронно-дырочным переходом* (или *p-n-переходом*). Эти переходы имеют большое практическое значение, являясь основой работы многих полупроводниковых приборов. Электронно-дырочный переход обычно создается при специальной обработке кристаллов, например, при выдержке плотно прижатых кристаллов германия (Ge) *n*-типа и индия (In) при 500 °С в вакууме или в атмосфере инертного газа (рис. 102, *а*). Атомы In диффундируют на некоторую глубину в германий, образуя промежуточный слой германия, обогащенного индием, проводимость которого *p*-типа. Затем расплав медленно охлаждают. На границе закристаллизовавшегося расплава и германия *n*-типа образуется *p-n*-переход (рис. 102, *б*).

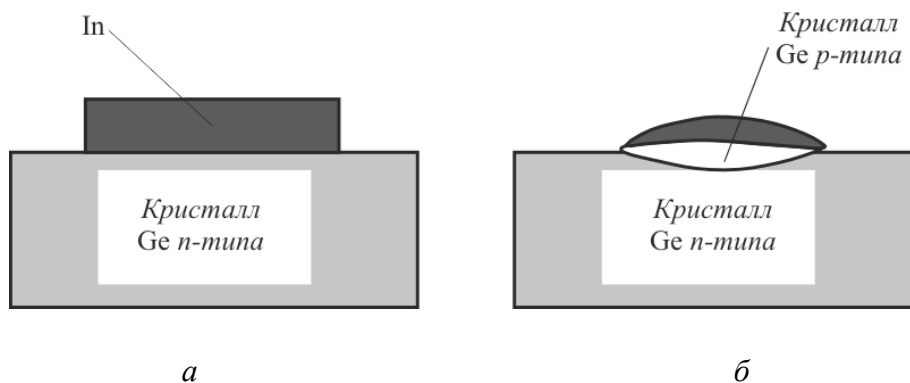


Рис. 102

Электроны из *n*-полупроводника, где их концентрация выше, будут диффундировать в *p*-полупроводник (рис. 103, *а, б*). Диффузия дырок происходит в обратном направлении – в направлении  $p \rightarrow n$ .



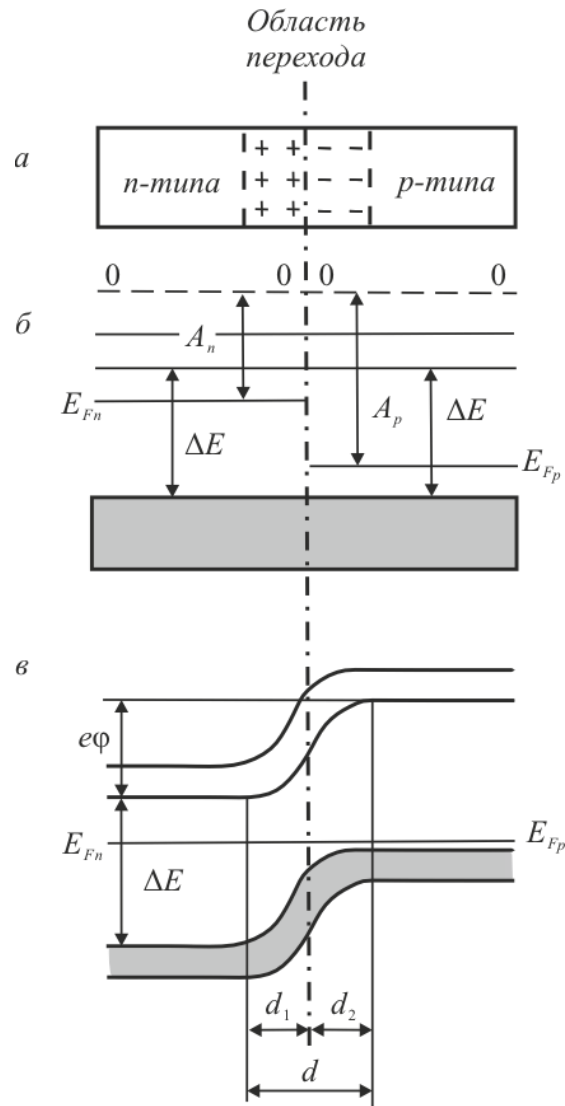


Рис. 103

В *n*-полупроводнике из-за ухода электронов вблизи границы остается нескомпенсированный *положительный объемный заряд* неподвижных ионизованных донорных атомов. В *p*-полупроводнике из-за ухода дырок вблизи границы образуется *отрицательный объемный заряд* неподвижных ионизованных акцепторов. Эти объемные заряды создают *запирающий равновесный контактный слой*, препятствующий дальнейшему переходу электронов и дырок.

Если концентрация доноров и акцепторов в полупроводниках *n*- и *p*-типа одинаковы, то толщины слоев  $d_1$  и  $d_2$  (рис. 103, в), в которых локализуются неподвижные заряды, равны ( $d_1 = d_2$ ). Толщина  $d$  слоя *p-n*-перехода в полупроводниках составляет примерно  $10^{-6} - 10^{-7}$  м, а контактная разность потенциалов – десятые доли вольт.

Если направление внешнего поля  $\vec{E}$  противоположно полю  $\vec{E}_k$  контактного слоя (рис. 104, б), то перемещение электронов и дырок приведет к сужению контактного слоя и его сопротивление уменьшится – такое направление называется **пропускным (прямым)**.

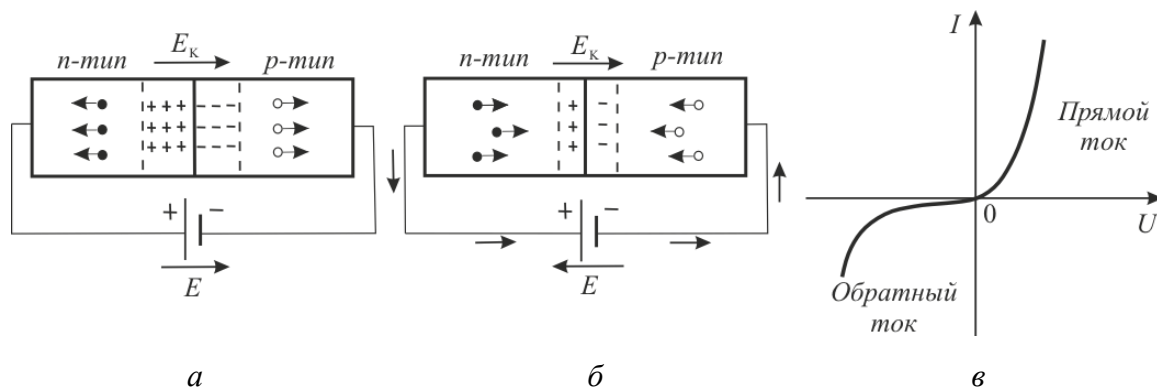


Рис. 104

Таким образом, *p-n*-переход обладает **односторонней (вентильной) проводимостью**. При включении в цепь переменного тока *p-n*-переходы действуют как выпрямители. На рис. 104, в представлена вольт-амперная характеристика *p-n*-перехода. [При пропускном (прямом) напряжении  $U$  внешнее электрическое поле способствует движению основных носителей тока к границе *p-n*-перехода (см. рис. 104, б). В результате толщина контактного слоя уменьшается; уменьшается и сопротивление перехода, а сила тока  $I$  становится большой – **прямое направление тока** (правая ветвь на рис. 104, в). При запирающем (обратном) напряжении  $(-U)$  внешнее электрическое поле препятствует движению основных носителей тока к границе *p-n*-перехода (см. рис. 104, а) и способствует движению неосновных носителей тока. Это приводит к увеличению толщины контактного слоя (увеличивается и сопротивление перехода). Поэтому в данном случае через *p-n*-переход протекает только небольшой ток – **обратный ток**, – полностью обусловленный неосновными носителями тока (левая ветвь на рис. 104, в). Быстрое возрастание обратного тока означает пробой контактного слоя и его разрушение].

Уравнение вольт-амперной характеристики имеет вид

$$I = I_0 \left( e^{\frac{eU}{kT}} - 1 \right), \quad (9.12)$$

где  $U$  – внешнее напряжение, приложенное к *p-n*-переходу;  $e$  – (в показателе степени) заряд электрона;  $I_0$  – ток насыщения. При включении в цепь переменного тока *p-n*-переходы действуют как выпрямители.

## 9.6. Полупроводниковые диоды и триоды (транзисторы)

Выпрямление и преобразование переменных токов (усиление напряжений и мощностей) можно осуществить с помощью полупроводниковых устройств, называемых *полупроводниковыми диодами* и *триодами (транзисторами)*. Основным элементом полупроводниковых приборов является *p-n-переход*.

Полупроводниковое устройство, содержащее один *p-n-переход*, называется *полупроводниковым (кристаллическим) диодом*. По конструкции они делятся на *точечные* и *плоскостные*.

В *точечном германиевом диоде* (рис. 105) тонкая вольфрамовая (W) проволока 1 прижимается к *n-германию* 2 острием, покрытым алюминием (Al). Если через диод в прямом направлении пропустить кратковременный импульс тока, то при этом резко повышается диффузия Al в Ge и образуется слой германия, обогащенный Al и обладающий *p-проводимостью*. На границе этого слоя образуется *p-n-переход*, обладающий высоким коэффициентом выпрямления.

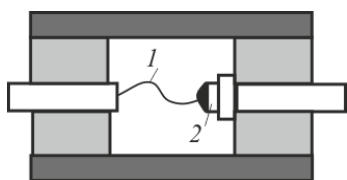


Рис. 105

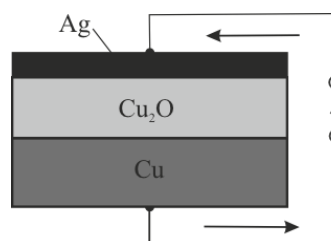


Рис. 106

Принципиальная схема *плоскостного меднозакисного (купоросного) выпрямителя* дана на рис. 106. На медную (Cu) пластину с помощью химической обработки наращивается слой закиси меди  $\text{Cu}_2\text{O}$ , который покрывается слоем серебра (Ag). Часть слоя  $\text{Cu}_2\text{O}$ , прилегающая к Cu и обогащенная ею, обладает электронной проводимостью, а часть слоя  $\text{Cu}_2\text{O}$ , прилегающая к Ag и обогащенная кислородом, – дырочной проводимостью. Таким образом, в толще  $\text{Cu}_2\text{O}$  образуется запирающий слой с пропускным направлением тока от  $\text{Cu}_2\text{O}$  к Cu ( $p \rightarrow n$ ).

[Полупроводниковые диоды имеют ряд преимуществ по сравнению с электронными лампами: небольшие габариты, малую массу, высокий КПД, отсутствие накаливаемого источника электронов, большой срок службы, высокую надежность; существенным недостатком является зависимость их параметров от температуры (от  $-70$  до  $+120$  °C)].

Инжекция носителей заряда – процесс введения в полупроводник неравновесных носителей заряда – лежит в основе работы *полупроводниковых триодов (транзисторов)*, изобретенных Дж. Бардиным, У. Браттейном и У. Шокли (1948–1949 гг.). Транзисторы могут быть типа *n-p-n* и типа *p-n-p*, в зависимости от чередования областей с различной проводимостью.

Рассмотрим принцип работы плоскостного триода типа *p-n-p* (рис. 107). Рабочие «электроды» триода, которыми являются *база* (средняя часть транзистора), *эмиттер* и *коллектор* (прилегающие к базе с обеих сторон области с иным типом проводимости), включаются в схему с помощью невыпрямляющих контактов – металлических проводников. Между эмиттером и базой прикладывается постоянное смещающее напряжение в прямом направлении, а между базой и коллектором – постоянное смещающее напряжение в обратном направлении. Усиливаемое переменное напряжение подается на входное сопротивление  $R_{вх}$ , а усиленное – снимается с выходного сопротивления  $R_{вых}$ .

[Протекание тока в цепи эмиттера обусловлено в основном движением дырок (они являются основными носителями тока) и сопровождается их *инжекцией* в область базы. Проникшие в базу дырки диффундируют по направлению к коллектору, причем при небольшой толщине базы значительная часть инжектированных дырок достигает коллектора. Здесь дырки захватываются полем, действующим внутри перехода (притягиваются к отрицательно заряженному коллектору), вследствие чего изменяется ток коллектора. Следовательно, всякое изменение тока в цепи эмиттера вызывает изменение тока в цепи коллектора].

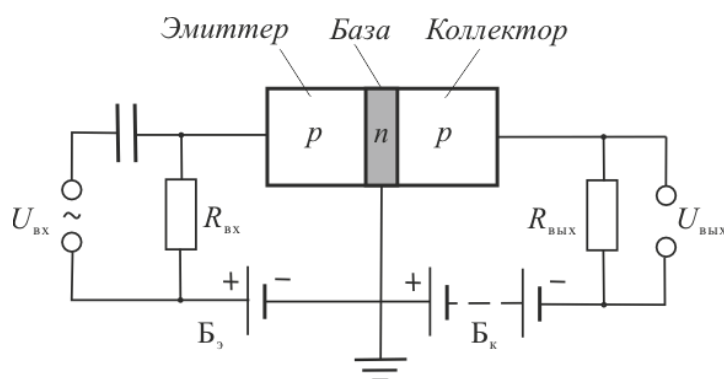


Рис. 107

Прикладывая между эмиттером и базой переменное напряжение, получим в цепи коллектора переменный ток, а на выходном сопротивлении – переменное

напряжение. Величина усиления зависит от свойств  $p$ - $n$ -переходов, нагрузочных сопротивлений и напряжения батареи  $B_k$ . Обычно  $R_{\text{вых}} \gg R_{\text{вх}}$ , поэтому  $U_{\text{вых}} \gg U_{\text{вх}}$  (усиление может достигать 10 000). Так как мощность переменного тока, выделяемая в  $R_{\text{вых}}$ , может быть больше, чем расходуемая в цепи эмиттера, то транзистор дает и *усиление мощности*.

Другая схема включения транзистора, так называемая *схема с общим эмиттером*, позволяет получать усиление по току.

По сравнению с электронными лампами, транзисторы более экономичны, надежны и имеют небольшие габаритные размеры. Транзисторы совершили революцию в области электронных средств связи и обеспечили создание быстродействующих ЭВМ с большим объемом памяти.

### Примеры решения задач

**9.1.** Хром имеет объемно центрированную кубическую (ОЦК) кристаллическую решетку. Постоянная решетки  $a = 2,885 \text{ \AA}$ . Найдите плотность хрома. Молярная масса хрома  $M = 52 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

**Дано:**  ${}^{51,996}_{24}\text{Cr}$ ;  $a = 2,885 \text{ \AA} = 2,885 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ ;  $M = 52 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

**Найти:**  $\rho$ .

**Решение.** Хром имеет объемно центрированную кубическую кристаллическую решетку. Приведем некоторые характеристики ОЦК кристаллических решеток:

- объем элементарной ячейки:  $a^3$ ;
- число атомов на одну ячейку: 2;
- расстояние между ближайшими соседними атомами:  $a\sqrt{3}/2$ .

Плотность хрома

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0 N}{V} = m_0 n, \quad (1)$$

где  $m$  и  $V$  – соответственно масса и объем хрома;  $n$  – концентрация атомов хрома.

Для ОЦК кристаллической решетки концентрация атомов определяется,

$$n = \frac{1}{a^3} \cdot 2, \quad (2)$$

где  $a$  – постоянная решетки (*период решетки кристалла*) [учли, что число атомов на одну ячейку равно 2].

Масса атома хрома

$$m_0 = \frac{M}{N_A}, \quad (3)$$

где  $M$  – молярная масса хрома;  $N_A$  – постоянная Авогадро.

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), найдем искомую плотность хрома

$$\rho = \frac{2M}{a^3 N_A}. \quad (4)$$

**Ответ:**  $\rho = 7192 \text{ кг/м}^3$ .

**9.2.** Найдите (в эВ) минимальную энергию  $\Delta E$  образования пары электрон – дырка в чистом беспримесном полупроводнике, электропроводность которого возрастает в 4,45 раза при увеличении температуры от 300 К до 450 К. Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ .

**Дано:**  $\eta = 4,45$ ;  $T_1 = 300 \text{ К}$ ;  $T_2 = 450 \text{ К}$ .

**Найти:**  $\Delta E$ .

**Решение.** Удельная электрическая проводимость собственных полупроводников:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}, \quad (1)$$

где  $\sigma_0$  – постоянная, характерная для данного полупроводника;  $\Delta E$  – минимальная энергия образования пары электрон – дырка в чистом беспримесном полупроводнике.

По условию задачи,

$$\eta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT_2}}}{\sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT_1}}} = e^{-\left(\frac{\Delta E}{2kT_2} + \frac{\Delta E}{2kT_1}\right)} = e^{\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}, \quad (2)$$

или

$$\ln \eta = \frac{\Delta E}{2k} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}, \quad (3)$$

откуда искомая минимальная энергия образования пары электрон – дырка

$$\Delta E = \frac{2kT_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \eta. \quad (4)$$

$$\Delta E = \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 450}{450 - 300} \ln 4,45 = 0,232 \text{ эВ}.$$

**Ответ:**  $\Delta E = 0,232 \text{ эВ}$ .

## Задачи

101. Найдите энергию активации  $\Delta E$  проводимости собственного полупроводника, если красная граница внутреннего фотоэффекта равна 1036 нм. Постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с. Ответ: 1,2 эВ

102. Найдите, во сколько раз изменится удельная электрическая проводимость кремниевого (Si) образца, при его нагревании от температуры 15 °С до 20 °С. Ширина запрещенной зоны равна  $\Delta E = 1,12$  эВ. Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Ответ: 1,46

103. Ширина запрещенной зоны в кремнии (Si) равна 1,12 эВ. На образец действует излучение с длиной волны 1,02 мкм. Как будет вести себя электрическая проводимость и почему? Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с. Ответ: увеличится, т. к.  $\lambda < \lambda_0$

104. Принимая, что кремниевый (Si) полупроводник обладает только дырочной проводимостью, найдите подвижность дырок  $b_p$  и их концентрацию  $n$ , если постоянная Холла  $R_H = 4,48 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/К и удельная электрическая проводимость кремния с примесями равна 254 См/м. Ответ: 0,966 м<sup>2</sup>/(В  $\cdot$  с);  $1,64 \cdot 10^{21}$  м<sup>-3</sup>

105. Найдите частоту красной границы собственной фотопроводимости для кремния (Si), у которого ширина запрещенной зоны при температуре 300 К равна 1,105 эВ. Постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с. Ответ:  $2,67 \cdot 10^{14}$  Гц

106. Найдите ширину запрещенной зоны  $\Delta E$  полупроводника, из которого изготовлен термистор, если его сопротивление уменьшается в 250 раз при увеличении температуры от -20 °С до 120 °С. Ответ: 0,67 эВ

## Лекции 10. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

### 10.1. Элементы физики атомного ядра

#### 10.1.1. Состав и характеристики атомного ядра

Из опытов по рассеянию  $\alpha$ -частиц Э. Резерфорд сделал вывод, что атом представляет собой положительно заряженное ядро, окруженное электронами. В ядре, размеры которого порядка  $10^{-15}$  м, сосредоточена практически вся масса ( $\sim 99,97\%$ ) атома. Ядро простейшего атома – атома водорода – состоит из одной элементарной частицы – *протона*. Ядра всех остальных атомов состоят из двух видов частиц – *протонов* и *нейтронов*. Протонно-нейтронная модель ядра была предложена в 1932 г. советским физиком Д.Д. Иваненко, а впоследствии развита немецким физиком В. Гейзенбергом.

В ядерной физике принято выражать массу частицы в энергетических единицах массы, используя для этого соотношение  $E_0 = mc^2$ , которое выражает эквивалентность массы и энергии. Энергию при этом выражают в электронвольтах (эВ). Атомная единица энергии

$$1 \text{ а. е. э.} = 1 \text{ а. е. м.} \cdot c^2 = 931,5061 \text{ МэВ.} \quad (10.1)$$

Мегаэлектронвольт (МэВ) и гигаэлектронвольт (ГэВ) – характерные значения энергии в ядерной физике

$$1 \text{ ГэВ} = 10^3 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ кэВ} = 10^9 \text{ эВ.} \quad (10.2)$$

**Протон** ( $p$ ) имеет положительный заряд  $+e$  и массу

$$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 938,2796 \text{ МэВ} = 1836,15m_e, \quad (10.3)$$

где  $m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 0,511 \text{ МэВ}$  – масса электрона.

Протон имеет спин  $s = 1/2$  и собственный магнитный момент

$$\mu_p = +2,793\mu_{\text{я}}, \quad (10.4)$$

где  $\mu_{\text{я}}$  – **ядерный магнетон** (единица магнитного момента), определяется

$$\mu_{\text{я}} = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,0508 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл.} \quad (10.5)$$



Из сравнения с магнетоном Бора ( $\mu_B$ ) вытекает, что  $\mu_\alpha$  в 1836,15 раза меньше  $\mu_B$ , т. е.

$$\frac{\mu_B}{\mu_\alpha} = \frac{e\hbar}{2m_e} : \frac{e\hbar}{2m_p} = 1836,15. \quad (10.6)$$

**Нейтрон** ( $n$ ) был открыт в 1932 г. английским физиком Дж. Чедвиком, – электрически нейтральная частица с массой, немного большей массы протона:

$$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 939,5731 \text{ МэВ} = 1838,68m_e. \quad (10.7)$$

Разность масс нейтрона и протона составляет  $m_n - m_p \approx 1,29 \text{ МэВ} \approx 2,53 m_e$ .

Нейтрон имеет спин  $s = 1/2$  и собственный магнитный момент

$$\mu_n = -1,91\mu_\alpha \quad (10.8)$$

[знак «-» указывает на то, что направления собственных механического и магнитного моментов противоположны]. Отношение экспериментальных значений  $\mu_p$  и  $\mu_n$  с большой степенью точности равно  $-3/2$ .

В свободном состоянии нейтрон нестабилен – за время, равное в среднем 15,5 мин он превращается в протон с испусканием электрона и антинейтрино  $\bar{\nu}$ :



[масса антинейтрино пренебрежимо мала по сравнению с массами  $m_e$ ,  $m_p$  и  $m_n$ ].

Протоны и нейтроны называются **нуклонами** (от лат. *nucleus* – ядро). Состав ядра задается двумя целыми числами: **зарядовым числом**  $Z$ , равным числу протонов в ядре, и **массовым числом**  $A$ , равным полному числу нуклонов в ядре. Число нейтронов в ядре равно  $N = A - Z$ . Зарядовое число  $Z$  определяет **заряд ядра**, который равен  $+Ze$ . Число  $Z$  определяет порядковый номер химического элемента в Периодической системе элементов Д.И. Менделеева; число  $Z$  также называют **атомным номером ядра**.

Для обозначения ядер применяется символ

$${}_Z^AX,$$

где  $X$  – символ химического элемента, атому которого принадлежит данное ядро, например  ${}_2^4\text{He}$ ,  ${}_{92}^{238}\text{U}$ .

Конкретные атомы с числом нуклонов в ядре  $A$  и числом протонов  $Z$ , вместе с *электронной оболочкой*, содержащей  $Z$  электронов, называют **нуклидами**.

Ядра с одинаковым  $Z$ , но разными  $A$  называются **изотопами**. Например, изотопы урана  ${}^{235}_{92}\text{U}$  и  ${}^{238}_{92}\text{U}$  имеют соответственно 143 и 146 нейтронов. Большинство химических элементов имеет по несколько стабильных изотопов, например, у кислорода имеется три стабильных изотопа:  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{17}_8\text{O}$ ,  ${}^{18}_8\text{O}$ ; у олова (Sn) – десять и т. д. Водород имеет три изотопа:  ${}^1_1\text{H}$  – обычный водород (**протий**),  ${}^2_1\text{H}$  – тяжелый водород (**дейтерий**)  ${}^3_1\text{H}$  – **третий**. Протий и дейтерий стабильны, тритий радиоактивен. Ядра дейтерия и трития, соответственно, называются **дейтроном** ( $d$ ) и **трионом** ( $t$ ). Атомы различных изотопов обладают, как правило, одинаковыми физическими и химическими свойствами, так как на структуру электронной оболочки атома ядро влияет только своим электрическим зарядом.

Ядра с одинаковыми  $A$ , но разными  $Z$  называют **изобарами** (например,  ${}^3_1\text{H}$  и  ${}^3_2\text{He}$ ,  ${}^{40}_{18}\text{Ar}$  и  ${}^{40}_{18}\text{Ca}$ ,  ${}^{210}_{81}\text{Tl}$ ,  ${}^{210}_{82}\text{Pb}$  и  ${}^{210}_{83}\text{Bi}$ ), ядра с одинаковым числом  $N$  нейтронов – **изотонами** (например,  ${}^{13}_6\text{C}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$ ). Кроме того, существуют радиоактивные ядра с одинаковыми  $Z$  и  $A$ , различающиеся **периодом полураспада** – временем, в течение которого из любого количества ядер распадается их половина. Такие ядра называются **изомерами** (например, у одного из изомеров иридия  ${}^{192}_{77}\text{Ir}$  период полураспада равен 1,45 мин, у другого – 5 лет; для изомеров брома  ${}^{80}_{35}\text{Br}$ , соответственно 18 мин и 4,4 ч).

Нуклоны в ядре плотно упакованы. В предположении о сферической форме ядер получена зависимость между радиусом  $R$  ядра и числом нуклонов в ядре:

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad (10.10)$$

где  $R_0 = (1,2 \div 1,5) \cdot 10^{-15} \text{ м} = (1,2 \div 1,5) \text{ фм}$ .

Следовательно, объем ядра пропорционален числу нуклонов в ядре, а *средняя плотность числа нуклонов в ядре* (их число в единице объема) для всех мнуклонных ядер практически одинакова:  $\rho \approx 10^{17} \text{ кг/м}^3$ . Соотношение (10.10) справедливо для всех ядер, за исключением легких ( $A < 10$ ). Поскольку масса

ядра, определяемая величиной  $A$ , пропорциональна его объему, а объем пропорционален  $R^3$ , из (10.10) следует, что все ядра, независимо от их размера имеют примерно одинаковую плотность  $\rho$ ; 1 см<sup>3</sup> плотно упакованного ядерного вещества весил бы  $120 \div 240$  млн т.

### 10.1.2. Энергия связи ядра и ядерные силы. Ядерные модели

Измеренные с достаточной точностью массы ядер оказались меньше, чем суммы масс составляющих их нуклонов. Проявляющаяся здесь *неаддитивность массы* является прямым следствием формулы Эйнштейна ( $E_0 = mc^2$ ) для связи массы и энергии покоя. Между нуклонами действуют силы притяжения, удерживающие их в ядре несмотря на сильное (на столь малом расстоянии) кулоновское отталкивание, и для *разделения ядра на нуклоны необходимо совершить положительную работу*. Величину этой работы называют *энергией связи ядра*:

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2 = [Zm_p + Nm_n - m_{\text{я}}]c^2, \quad (10.11)$$

где  $m_{\text{я}}$  – масса ядра.

В энергетических единицах (эВ) формула (10.11) принимает вид:

$$E_{\text{св}} = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}} = Zm_p + Nm_n - m_{\text{я}} \quad (10.12)$$

[см. (10.1) – (10.3) и (10.7); 1 кг =  $5,61 \cdot 10^{29}$  МэВ, 1 МэВ =  $1,78 \cdot 10^{-30}$  кг].

В таблицах обычно приводятся не массы  $m_{\text{я}}$  ядер, а массы  $m_{\text{а}}$  атомов, поэтому формулу (10.11) удобно переписать в следующем виде:

$$E_{\text{св}} = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_{\text{а}}]c^2 = [Zm_{\text{H}} + Nm_n - m_{\text{а}}]c^2, \quad (10.13)$$

или в эВ

$$E_{\text{св}} = Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_{\text{а}} = Zm_{\text{H}} + Nm_n - m_{\text{а}}, \quad (10.14)$$

где  $m_{\text{H}}$  – масса атома водорода. [Так как  $m_{\text{H}}$  больше  $m_{\text{а}}$  на величину  $m_e$ , то первый член в квадратных скобках включает в себя массу  $Z$  электронов. Но так как масса атома  $m_{\text{а}}$  отличается от массы ядра  $m_{\text{я}}$  как раз на массу  $Z$  электронов, то вычисления по формулам (10.11) – (10.14) приводят к одинаковым результатам].

Величина

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} = Zm_p + Nm_n - m_{\text{я}} \quad (10.15)$$

называется *дефектом массы ядра*.

*Удельная энергия связи* – энергия связи, приходящая на один нуклон:

$$\delta E_{\text{св}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}, \quad (10.16)$$

где  $A$  – массовое число (число нуклонов в ядре). Удельная энергия связи  $\delta E_{\text{св}}$  характеризует устойчивость (прочность) атомных ядер: чем больше  $\delta E_{\text{св}}$ , тем устойчивее ядро.

Экспериментальная зависимость  $\delta E_{\text{св}}(A)$  элемента показана на рис 108. Из этой зависимости видно, что для легких (за исключением самых легких) и тяжелых ядер удельная энергия связи составляет  $\sim 7 - 7,6$  МэВ (для  ${}^{238}_{92}\text{U}$   $\delta E_{\text{св}} \approx 7,6$  МэВ), тогда как для средних ядер  $\delta E_{\text{св}} \approx 8,5$  МэВ. Максимум  $\delta E_{\text{св}}$  приходится на железо ( $A = 56$ ) и составляет примерно 8,7 МэВ.

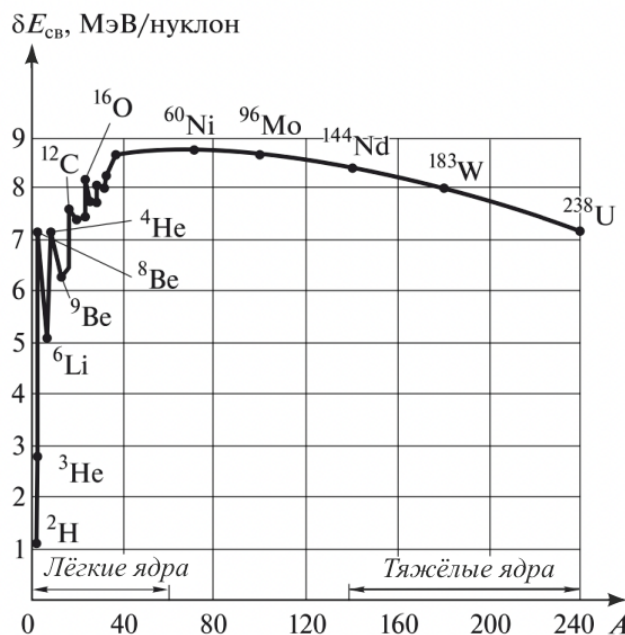


Рис 108

Уменьшение удельной энергии связи при переходе к более тяжелым элементам объясняется тем, что с возрастанием числа протонов в ядре увеличивается и энергия их кулоновского отталкивания: связь между нуклонами становится менее сильной, в результате чего ядра – менее прочными. Благодаря воз-

растанию  $\delta E_{\text{св}}$  при малых  $A$  оказывается энергетически выгодным слияние легких ядер, а благодаря убыванию  $\delta E_{\text{св}}$  при больших  $A$  энергетически выгодным оказывается деление тяжелых ядер.

Энергию, выделяющуюся при делении тяжелых ядер, называют **атомной**, а при слиянии легких ядер – **термоядерной**. Термоядерная энергия в расчете на один нуклон в несколько раз превышает атомную.

1. Уменьшение  $\delta E_{\text{св}}$  при *малых*  $A$  объясняется возрастанием поверхностных эффектов, которые зависят от относительной доли поверхностных частиц.

2. Уменьшение  $\delta E_{\text{св}}$  при *больших*  $A$  объясняется возрастанием относительного вклада кулоновской энергии.

Между нуклонами в ядре действуют **ядерные силы притяжения**, которые в сотни раз превышают электромагнитные силы отталкивания между протонами. Именно эти силы обеспечивают устойчивость ядер. Ядерные силы относятся к классу так называемых **сильных взаимодействий**.

1. Ядерные силы являются **короткодействующими** с радиусом действия  $r_0 \sim (2,0 \div 2,5)$  фм. При удалении нуклонов на расстояние, превышающее радиус действия, ядерное взаимодействие быстро исчезает. При сближении нуклонов на расстояние, в несколько раз меньшее радиуса действия, притяжение сменяется сильным отталкиванием.

2. Ядерным силам **свойственно насыщение**, т. е. каждый нуклон взаимодействует только несколькими ближайшими соседями. [Энергия связи  $E_{\text{св}}$  ядра растет пропорционально числу нуклонов, а средняя плотность ядра остается постоянной. Если бы ядерные силы были дальнодействующими (как, например, кулоновская сила), то каждый нуклон взаимодействовал бы со всеми остальными, и  $E_{\text{св}}$  росла бы быстрее. Например, электрическая энергия шара с зарядом  $Ze$  и радиусом  $R$  пропорциональна  $Z^2/R$ ].

3. Ядерные силы обладают свойством **зарядовой независимости**: они не зависят от того, какие нуклоны вступают во взаимодействие ( $p - p$ ,  $p - n$  или  $n - n$ ). Ядерные силы имеют **неэлектростатическую природу**.

4. Ядерные силы **не являются центральными**. Нецентральность ядерных сил вытекает из того факта, что они зависят от ориентации спинов нуклонов.

5. Ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов взаимодействующих нуклонов. Например, протон и нейтрон образуют дейтрон (ядро изотопа  ${}^2_1\text{H}$ ) только при условии параллельной ориентации их спинов.

Современная физика рассматривает любое фундаментальное взаимодействие как результат обмена частицами – носителями взаимодействия. Ядерное взаимодействие между нуклонами осуществляется за счет обмена  $\pi$ -мезонами (пионами) – частицами со спином, равным нулю и массой  $m_\pi$ , примерно в 200 раз большей, чем у электрона [см. п. 10.2].

Вокруг одиночного нуклона непрерывно рождаются и умирают так называемые виртуальные пионы. Их называют виртуальными, потому что они существуют столь короткое время, что благодаря соотношению неопределенностей время-энергия ( $\Delta t \cdot \Delta E \sim \hbar$ ) возможно изменение энергии системы на величину  $\sim m_\pi c^2$ . Для виртуальных частиц не выполняется обычное соотношение между энергией и импульсом – они обладают различными (и различно направленными) импульсами со средним значением  $m_\pi c$  и за время жизни пролетают в среднем расстояние  $c\Delta t \sim \hbar/m_\pi c$ , равное комптоновской длине  $\pi$ -мезона. Как показал Х. Юкава (1935 г.), после усреднения по импульсам виртуальных импульсов возникает притяжение с потенциальной энергией, описываемой **формулой Юкавы**

$$U(r) = \frac{Ae^{-\frac{r}{r_0}}}{r}, \quad (10.17)$$

где  $r_0 = \hbar/m_\pi c$ . [В то время  $\pi$ -мезоны еще не были открыты, и Юкава предсказал их существование и оценил их массу по радиусу ядерного взаимодействия ( $\pi$ -мезоны были открыты в космических лучах только в 1947 г.).]

Было установлено, что существуют три типа мезонов:  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  и  $\pi^0$ . Заряженные  $\pi^+$  и  $\pi^-$ -мезоны (их массы примерно в 270 раз больше массы электрона), непрерывно излучаясь и поглощаясь, обуславливают взаимодействие между протонами и нейтронами, а взаимодействие одинаковых нуклонов осуществляют нейтральные  $\pi^0$ -мезоны. Установлено, что на создание  $\pi^0$ -мезона необходимо затратить энергию  $\Delta E$ , равную примерно 135 МэВ. Поэтому время, в течение которого может существовать такой виртуальный мезон, равно

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{m_{\pi}c^2} \approx 10^{-23} \text{ с.}$$

За это время существования в ядре мезон, если он будет двигаться со скоростью, сопоставимой со скоростью света, пройдет расстояние

$$c\Delta t \approx \frac{\hbar}{m_{\pi}c} \approx 10^{-15} \text{ м,}$$

т. е. расстояние, соответствующее радиусу действия ядерных сил. Если на этом расстоянии мезону встретится нуклон, то он может этим нуклоном поглотиться. В противном случае мезон за время  $\Delta t$  должен поглотиться тем же нуклоном, которым он был испущен. *Мезонная теория ядерных сил* не совсем завершена, особенно в количественном отношении, тем не менее основные ее идеи успешно используются для объяснения многих ядерных процессов.

Таким образом, *основой ядерных сил является сильное взаимодействие нуклонов*. По современным представлениям, протон и нейтрон состоят из *кварков* и *глюонов* (глюоны – переносчики сильного взаимодействия между кварками, которые являются элементарными составляющими мезонов). Теория ядерных сил на основе кварковых представлений (*квантовая хромодинамика*) находится в стадии становления и пока не завершена.

**Ядерные модели.** К настоящему моменту не создано универсальной модели ядер, которая позволила бы в рамках единого теоретического подхода рассчитывать различные ядерные характеристики. Каждая модель наиболее успешно объясняет отдельные свойства ядер, а другие свойства либо вообще не объясняет, либо делает это слишком сложно и неубедительно.

**1. Капельная (гидродинамическая) модель** (Н. Бор, 1936 г.) рассматривает ядро как заряженную каплю ядерной жидкости, обладающую поверхностным натяжением. Эта модель описывает основные черты зависимости энергии связи  $E_{\text{св}}$  от  $A$  и  $Z$ , поверхностные колебания ядер, особенности деления тяжелых ядер. [Существенное отличие ядра от капли жидкости заключается в том, что модель трактует ядро как каплю электрически заряженной несжимаемой жидкости (с плотностью, равной ядерной), подчиняющуюся законам квантовой механики. Благодаря большой плотности нуклонов в ядре и чрезвычайно сильному взаимодействию между ними столкновения очень часты, и поэтому

независимое движение отдельных нуклонов невозможно. Как в капле обыкновенной жидкости, поверхность в ядре может колебаться. Если амплитуда колебаний будет самопроизвольно нарастать, капля развалится, т. е. произойдет деление ядра. Эта модель не объяснила повышенную устойчивость ядер, содержащих магические числа протонов и нейтронов].

**2. Модель ядерного ферми-газа** позволяет объяснить эффект симметрии (примерное равенство  $Z$  и  $N$  в легких ядрах) и отклонение от него в тяжелых ядрах, а также вычислить глубину эффективной потенциальной ямы. [Как протоны, так и нейтроны рассматриваются в этой модели как две подсистемы тождественных фермионов, свободно движущихся в потенциальной яме. На каждом уровне могут находиться две тождественных частицы с разными спинами. Чем больше нуклонов данного вида находится в ядре, тем больше их энергия ферми. Если энергии ферми нейтронов и протонов заметно отличаются друг от друга, то будет происходить превращение одного нуклона в другой с понижением общей энергии (либо  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ , либо  $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ ). Следовательно, в стабильном ядре энергии ферми должны быть примерно равны друг другу].

Эта модель так же, как модель жидкой капли, не описывает существование особо устойчивых магических ядер. Для их описания служит оболочечная модель ядра.

**3. Оболочечная модель ядра** (М. Гепперт-Маер, Х. Йенсен, 1950 г.) предполагает распределение нуклонов в ядре по дискретным энергетическим уровням (оболочкам), заполняемым нуклонами согласно принципу Паули, и связывает устойчивость ядер с заполнением этих уровней. Считается, что ядра с полностью заполненными оболочками являются наиболее устойчивыми – **магические ядра**, – число протонов  $Z$  или нейтронов  $N$  равно одному из магических чисел: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Ядра, у которых магическими являются и число протонов  $Z$ , и число нейтронов  $N$ , называются **дважды магическими**. Дважды магических ядер известно всего пять:  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ .

Оболочечная модель ядра позволила объяснить спины и магнитные моменты ядер, различную устойчивость атомных ядер, а также периодичность изменений их свойств. Эта модель особенно хорошо применима для описания легких и средних ядер, а также для ядер, находящихся в основном (невозбужденном) состоянии.



### 10.1.3. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада

**Радиоактивностью** называется самопроизвольное (спонтанное) превращение одних атомных ядер в другие, сопровождаемое испусканием элементарных частиц. Изначальное радиоактивное ядро (нуклид) называется **материнским**, а образовавшиеся ядра – **дочерними**. [Радиоактивность была открыта в 1896 г. французским физиком Анри Беккерелем при изучении люминесценции солей урана. Оказалось, что урановые соли без внешнего воздействия (самопроизвольно) испускали излучение неизвестной природы, которое засвечивало изолированные от света фотопластинки, ионизовало воздух, проникало сквозь тонкие металлические пластинки, вызывало люминесценцию ряда веществ. Таким же свойством обладали и вещества, содержащие полоний  $^{210}_{84}\text{Po}$  и радий  $^{226}_{88}\text{Ra}$ ].

Различают **естественную радиоактивность** (наблюдается у неустойчивых изотопов, существующих в природе) и **искусственную радиоактивность** (характерна для изотопов, полученных посредством ядерных реакций).

Основные типы радиоактивного излучения: 1)  $\alpha$ -излучение; 2)  $\beta$ -излучение; 3)  $\gamma$ -излучение ядер.

1.  **$\alpha$ -Излучение** представляет собой поток ядер гелия; заряд  $\alpha$ -частицы равен  $+2e$ , а масса совпадает с массой ядра изотопа гелия  $^4_2\text{He}$ . **Свойства  $\alpha$ -излучения:** 1) отклоняется электрическими и магнитными полями; 2) обладает высокой ионизирующей способностью; 3) имеет малую проникающую способность (поглощается слоем алюминия толщиной около 0,05 мм).

2.  **$\beta$ -Излучение** представляет собой поток быстрых электронов (это вытекает из определения их удельного заряда). **Свойства  $\beta$ -излучения:** 1) отклоняется электрическим и магнитным полями; 2) обладает ионизирующей способностью значительно меньшей (примерно на два порядка), а проникающей способностью гораздо большей (поглощается слоем алюминия толщиной около 2 мм), чем  $\alpha$ -частицы.

3.  **$\gamma$ -Излучение** представляет собой жесткое коротковолновое электромагнитное излучение. **Свойства  $\gamma$ -излучения:** 1) не отклоняется электрическим

и магнитным полями; 2) обладает относительно слабой ионизирующей способностью; 3) имеет большую проникающую способность (например, проходит через слой свинца толщиной 5 см); 4) обнаруживает дифракцию при прохождении через кристаллы; 5) представляет собой коротковолновое электромагнитное излучение ( $\lambda < 10^{-10}$  м) с ярко выраженными корпускулярными свойствами.

**Закон радиоактивного распада.** Поскольку акт радиоактивного распада является случайным, то можно считать, что число ядер  $dN$ , распавшихся в среднем за интервал времени от  $t$  до  $t + dt$ , пропорционально промежутку времени  $dt$  и числу  $N$  ядер, не распавшихся к моменту времени  $t$ :

$$dN = -\lambda N dt, \quad (10.17)$$

где  $\lambda$  – характерная для данного радиоактивного вещества константа, называемая **постоянной радиоактивного распада**; знак « $\rightarrow$ » означает убыль общего числа радиоактивных ядер за время  $dt$ .

Равенство (10.17) можно записать в виде

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt. \quad (10.18)$$

Проинтегрировав выражение (10.18), учитывая, что  $\lambda$  не зависит от времени, получаем

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt, \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t,$$

откуда, потенцируя, найдем

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (10.19)$$

где  $N_0$  – начальное число нераспавшихся ядер (в произвольно выбранный начальный момент времени  $t = 0$ );  $N$  – число нераспавшихся ядер в момент времени  $t$ .

Формула (10.19) выражает **закон радиоактивного распада**: *число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненте* рис. 109.

Число ядер, распавшихся за время  $t$ :

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}). \quad (10.20)$$

Число ядер, распадающихся в единицу времени, называется **активностью радиоактивного образца**:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (10.21)$$

где  $A_0$  – начальная активность образца. Активность в расчете на единицу массы называется **удельной активностью** ( $\delta A$ ).

Единица активности  $A$  в СИ – *беккерель* [Бк]; 1 Бк – активность нуклида, при которой за 1 с происходит один акт распада. Применяется также внесистемная единица – *кюри* [Ки]; 1 Ки =  $3,7 \cdot 10^{10}$  Бк.

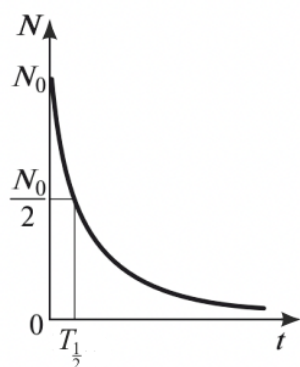


Рис. 109

**Период полураспада**  $T_{1/2}$  – время, за которое распадается половина исходного числа радиоактивных ядер ( $N = N_0/2$ ). Из (10.19) находим

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}, \text{ или } \ln\left(\frac{N_0}{2}\right) = -\lambda T_{1/2} \ln N_0,$$

откуда

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (10.22)$$

Период полураспада для известных в настоящее время радиоактивных ядер находится в пределах от  $3 \cdot 10^{-7}$  с до  $5 \cdot 10^{15}$  лет (см. табл. 11 в приложении).

Величина, обратная постоянной радиоактивного распада  $\lambda$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = 1,44 T_{1/2}, \quad (10.23)$$

называется **средней продолжительностью жизни радиоактивного ядра**. За время  $\tau = 1/\lambda$  первоначальное число радиоактивных ядер уменьшается в  $e$  раз. Значения  $\lambda$  и  $\tau$  не зависят от внешних условий.

#### 10.1.4. Правила смещения. Альфа ( $\alpha$ )- и бета ( $\beta$ )-распады

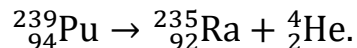
При  $\alpha$ - и  $\beta$ -распадах имеют место **правила смещения**, позволяющие установить, какое ядро возникает в результате распада данного материнского ядра. Правила смещения являются следствием двух **законов**, выполняющихся при радиоактивных распадах, – **сохранения зарядовых чисел** и **сохранения массовых чисел**: *сумма зарядовых чисел (массовых чисел) возникающих ядер и частиц равна зарядовому числу (массовому числу) исходного ядра.*

**Альфа ( $\alpha$ )-распад.** Альфа-лучи представляют собой поток ядер гелия  ${}^4_2\text{He}$  (свойства  $\alpha$ -частиц описаны в п. 10.1.3). Правило смещения для  $\alpha$ -распада:



где  ${}^A_Z\text{X}$  – материнское ядро; Y – символ дочернего ядра. Альфа-распад обычно сопровождается испусканием дочерним ядром  $\gamma$ -лучей; наблюдается только у тяжелых ядер (в основном  $Z > 82$ ,  $A > 200$ ) и небольшой группы ядер редкоземельных элементов.

Из (10.24) видно, что атомный номер дочернего вещества на две единицы, а массовое число на четыре единицы меньше, чем у исходного вещества. Примером может служить распад изотопа плутония:



Скорости вылетающих при распаде  $\alpha$ -частиц очень велики и колеблются для разных ядер в пределах от  $1,4 \cdot 10^7$  до  $2 \cdot 10^7$  м/с, что соответствует энергиям от 4 до 8,8 МэВ. В большинстве случаев радиоактивное вещество испускает несколько групп  $\alpha$ -частиц с мало отличающимися значениями энергии. Это связано с тем, что некоторая часть дочерних ядер при  $\alpha$ -распаде оказывается в возбужденных состояниях.

**Бета ( $\beta$ )-распад.** Бета ( $\beta$ )-распадами называются такие самопроизвольные превращения атомных ядер, в которых протон переходит в нейтрон (или наоборот), и участвуют электроны (или позитроны) и нейтрино (или антинейтрино).

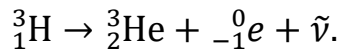
Правила смещения для  $\beta$ -распада.

1. *Электронный  $\beta^-$ -распад:*



где  ${}^0_{-1}e$  – символическое обозначение электрона;  $\tilde{\nu}$  – антинейтрино.

Из (10.25) видно, что дочернее ядро имеет атомный номер, на единицу больший, чем у материнского ядра, массовые числа обоих ядер одинаковы; наряду с электроном испускается также антинейтрино  $\tilde{\nu}$ . Примером может служить распад трития:

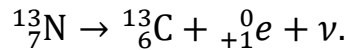


2. *Позитронный  $\beta^+$ -распад:*



где  ${}^0_{+1}e$  – символическое обозначение позитрона;  $\nu$  – нейтрино.

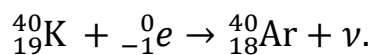
Из (10.26) видно, что атомный номер дочернего ядра на единицу меньше, чем материнского, массовые числа обоих ядер одинаковы; наряду с позитроном испускается также нейтрино  $\nu$ . Возможно также возникновение  $\gamma$ -лучей. Примером может служить распад искусственного радиоактивного изотопа азота:



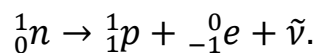
3. *Электронный захват (K-захват):*



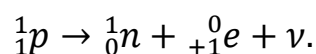
При электронном захвате ядро поглощает электрон из атомной оболочки, причем обычно из K-оболочки [поэтому этот процесс часто называют K-захватом (но наблюдается и L-захват)], в результате чего один из протонов превращается в нейтрон, испуская при этом нейтрино. Электронный захват сопровождается характеристическим рентгеновским излучением. Примером может служить превращение калия  ${}^{40}_{19}\text{K}$  в аргон  ${}^{40}_{18}\text{Ar}$ :



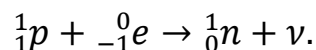
Распад (10.25) типичен для ядер, в которых имеется избыточное число нейтронов ( ${}^1_0n$ ), когда один из них превращается в протон ( ${}^1_1p$ ) по схеме



Распад (10.26) характерен для ядер, содержащих избыточное число протонов, когда превращение одного из протонов в нейтрон происходит по схеме



У ядер с избыточным числом протонов может наблюдаться  $K$ -захват, если энергии ядра недостаточно для излучения позитрона ( ${}^0_{+1}e$ ), а превращение протона в нейтрон происходит по схеме



**Формула Вейцеккера** (10.27) позволяет найти параметры ( $Z$ ,  $A$ ) ядер, наиболее устойчивых к  $\beta$ -распадам. Поскольку в этих распадах массовое число  $A$  не меняется, надо сравнить массы (энергия связи) всех изобар.

[Возникающие в результате радиоактивного распада ядра могут быть, в свою очередь, радиоактивными. Это приводит к возникновению **цепочки**, или **ряда радиоактивных превращений**, заканчивающихся стабильным элементом. Совокупность элементов, образующих такую цепочку, называется **радиоактивным семейством**.

Естественно радиоактивные ядра образуют *три радиоактивных семейства*, называемых **семейством урана** ( ${}^{238}_{92}\text{U}$ ), **семейством тория** ( ${}^{232}_{90}\text{Th}$ ) и **семейством актиния** ( ${}^{235}_{89}\text{Ac}$ ), которые после цепочки  $\alpha$ - и  $\beta$ -распадов заканчиваются на стабильных изотопах свинца  ${}^{206}_{82}\text{Pb}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  и  ${}^{207}_{82}\text{Pb}$  (имеющих особую устойчивость ядер, содержащих магическое число протонов – 82); **семейство нептуния** начинается от трансуранового элемента  ${}^{237}_{93}\text{Np}$ , полученного *искусственным путем*, и заканчивается на висмуте  ${}^{209}_{83}\text{Bi}$ ].

Опытное подтверждение существования нейтрино (1956 г.) было сопряжено с большими трудностями, обусловленными отсутствием у нейтрино электрического заряда и массы, а также малой ионизирующей способностью (один акт ионизации в воздухе на пути 500 км) и огромной проникающей способностью (пробег нейтрино с энергией 1 МэВ в свинце составляет примерно  $10^{18}$  м!).

### 10.1.5. Гамма ( $\gamma$ )-излучение

Переход возбужденного ядра в основное состояние или в состояние с меньшей энергией приводит к излучению кванта энергии ( $\gamma$ -квантов). Этот процесс происходит без изменения  $A$  и  $Z$ , поэтому его не рассматривают как самостоятельный вид радиоактивности.  $\gamma$ -Излучение во многом напоминает испускание фотонов атомами, и, поскольку уровни энергии ядра, как и энергетические

уровни атомов, дискретны, спектр  $\gamma$ -излучения линейчатый. [После испускания одного или нескольких фотонов ядро оказывается в основном состоянии. Поскольку значения энергии ядра дискретны, то *спектр  $\gamma$ -излучения также дискретен*. Возбужденные ядра образуются в  $\beta$ -распадах, если распад в основное состояние оказывается запрещенным. Например,  $\beta^-$ -распад  ${}_{11}^{24}\text{Na}$  имеющего спин  $I = 4$ , происходит не в основное состояние  ${}_{12}^{24}\text{Mg}$ , спин которого  $I = 0$ , и не на первый возбужденный уровень ( $I = 2$ ), а на второй уровень с  $I = 4$ , после чего ядро последовательно испускает два  $\gamma$ -кванта с энергиями 2,7 МэВ и 1,4 МэВ и оказывается в основном состоянии].

Свободный нуклон не может испускать  $\gamma$ -квант, поскольку это противоречило бы законам сохранения энергии и импульса. Однако внутри ядра импульс перераспределяется между всеми нуклонами, и излучение становится возможным. Следовательно, *в отличие от  $\beta$ -распада излучение  $\gamma$ -квантов является не внутринуклонным, а внутриядерным процессом*.  $\gamma$ -Излучение испускается дочерним (а не материнским) ядром. Дочернее ядро в момент своего образования, оказываясь возбужденным, за время примерно  $10^{-13} - 10^{-14}$  с, значительно меньшее времени жизни возбужденного атома (примерно  $10^{-8}$  с), переходит в основное состояние с испусканием  $\gamma$ -излучения, согласно следующей схеме:



где «\*» указывает, что ядро является возбужденным.

Если энергия начального и конечного состояний ядра равны  $E_1$  и  $E_2$ , то энергия  $\gamma$ -кванта будет определяться разностью энергий:  $h\nu = E_1 - E_2$ . Энергия  $\gamma$ -квантов лежит в пределах от десятков кэВ до нескольких МэВ, из чего следует, что  $\gamma$ -лучи являются электромагнитным излучением с очень короткой длиной волны –  $\lambda \leq 2 \cdot 10^{-10}$  м.  $\gamma$ -Излучение не отклоняется электрическими и магнитными полями, обладает относительно слабой ионизирующей и очень большой проникающей способностями; при прохождении через кристаллы обнаруживает дифракцию.  $\gamma$ -Кванты, обладая нулевой массой покоя, не могут замедляться в среде, поэтому при прохождении  $\gamma$ -излучения сквозь вещество они либо поглощаются, либо рассеиваются им.  $\gamma$ -Кванты не несут электрический заряд и не испытывают влияния кулоновских сил.

### 10.1.7. Ядерные реакции

**Ядерной реакцией** называется процесс сильного взаимодействия атомного ядра с элементарной частицей или с другим ядром, приводящий к преобразованию ядра (или ядер). Взаимодействие регистрирующих частиц возникает при сближении их до расстояний порядка  $10^{-15}$  м благодаря действию ядерных сил.

Ядерную реакцию *схематически* можно записать в виде



где  ${}^A_ZX$  и  ${}^{A'}_{Z'}Y$  – исходное и конечное ядра;  $a$  и  $b$  – соответственно бомбардирующая (*налетающая*) и испускаемая (*вылетающая*) в ядерной реакции частицы.

Часто используют символическую запись:



Если  $b = a$  (и  $X = Y$ ), то такой процесс называется **рассеянием**, если конечное ядро  $Y$  оказывается при этом в таком же состоянии (основном), как и начальное  $X$ , то **рассеяние** называется **упругим**. Если испущенная частица не тождественна с захваченной ( $b \neq a$ ), то имеем дело с ядерной реакцией в прямом смысле слова. В качестве легких частиц  $a$  и  $b$  могут фигурировать нейтрон ( $n$ ), протон ( $p$ ), дейтрон ( $d$ ),  $\alpha$ -частица ( $\alpha$ ) и фотон ( $\gamma$ ).

В любой ядерной реакции выполняются законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда, а также закон сохранения числа нуклонов, что эквивалентно сохранению массового числа  $A$ .

В отличие от радиоактивного распада, который протекает всегда с выделением энергии, ядерные реакции могут быть как **экзотермическими** (с выделением энергии), так и **эндотермическими** (с поглощением энергии). [При *экзотермической реакции* выделяется кинетическая энергия за счет уменьшения энергии покоя сталкивающихся частиц. Такая реакция может идти при любой кинетической энергии налетающей частицы, достаточной для преодоления потенциального барьера. *Эндотермическая реакция* идет с уменьшением кинетической энергии столкновения и возможна лишь при больших энергиях бомбардирующих частиц, превышающих некоторое пороговое значение, определяемая выражением



$$K_{\min} = |Q| \frac{m_{\text{я}} + m_{\text{а}}}{m_{\text{А}}}, \quad (10.31)$$

где  $Q$  – энергия ядерной реакции;  $m_{\text{я}}$  – масса неподвижного ядра;  $m_{\text{а}}$  – масса налетающей на ядро частицы].

Важной характеристикой ядерных реакций является *эффективное сечение реакции*  $\sigma$ , определяющее вероятность протекания ядерной реакции. Если на мишень падает  $N$  частиц, из которых  $dN$  частиц вызывают ядерную реакцию в слое мишени толщиной  $dx$ , то при концентрации  $n$  ядер мишени *вероятность ядерной реакции*  $w$  для данной мишени определится величиной

$$w = \frac{dN}{N} = \sigma n dx, \quad (10.32)$$

называемой *выходом ядерной реакции*.

В случае тонкой мишени отношение выхода ядерной реакции к одному ядру единицы площади мишени определяет *эффективное сечение*

$$\sigma = \frac{w}{n dx} = \frac{dN}{n N dx}. \quad (10.33)$$

Таким образом, эффективное сечение  $\sigma$  характеризует вероятность ядерной реакции одной частицы с одним ядром, а выход  $w$  реакции определяет долю частиц, вступивших в реакцию при прохождении частиц через реальную мишень, в которой осуществляется реакция. С каждым видом взаимодействия частицы с ядром связывают свое эффективное сечение: *эффективное сечение рассеяния* определяет процессы рассеяния, *эффективное сечение поглощения* – процессы поглощения.

Единица эффективного сечения  $\sigma$  в СИ – *барн* [барн]; 1 барн =  $10^{-28}$  м<sup>2</sup>.

**Ядерные реакции классифицируются:**

*а) по роду участвующих в реакциях частиц:* 1) реакции под действием нейтронов; 2) реакции под действием заряженных частиц (например, протонов,  $\alpha$ -частиц).

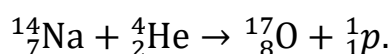
*б) по энергии вызывающих реакции частиц:* 1) реакции при малых энергиях (порядка нескольких эВ), происходящие в основном с участием нейтронов; 2) реакции при средних энергиях (несколько МэВ), происходящие с участием

$\gamma$ -квантов и заряженных частиц; 3) реакции при высоких энергиях (сотни и тысячи МэВ), приводящие к рождению отсутствующих в свободном состоянии элементарных частиц и имеющие большое значение для их излучения.

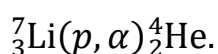
*в) по роду участвующих в реакциях ядер:* 1) реакции на легких ядрах ( $A < 50$ ); 2) реакции на средних ядрах ( $50 < A < 150$ ); 3) реакции на тяжелых ядрах ( $A > 150$ ).

*г) по характеру происходящих ядерных превращений:* 1) реакции с испусканием нейтронов; 2) реакции захвата (в этих реакциях составное ядро не испускает никаких частиц, а переходит в основное состояние, излучая один или несколько  $\gamma$ -квантов).

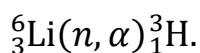
Первая ядерная реакция в лабораторных условиях осуществлена Э. Резерфордом (1919 г.) при бомбардировке ядер азота  $\alpha$ -частицами, испускаемыми радиоактивным источником:



Резерфорд воспользовался для расщепления атомного ядра *природными снарядами* –  $\alpha$ -частицами. Первая ядерная реакция, вызванная *искусственно ускоренными частицами*, была осуществлена Дж. Кокрофтом и Э. Уолтоном в 1932 г. С помощью умножителя напряжения они ускоряли *протоны* ( ${}^1_1p$ ) до энергии примерно 0,8 МэВ и наблюдали реакцию

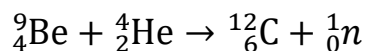


Наибольшее значение имеют реакции, вызываемые *нейтронами* ( ${}^1_0n$ ). В отличие от заряженных частиц ( $p$ ,  $d$ ,  $\alpha$ ), нейтроны не испытывают кулоновского отталкивания, вследствие чего они могут проникать в ядра, обладая весьма малой энергией. Эффективные сечения реакций обычно возрастают при уменьшении энергии нейтронов [чем меньше скорость нейтрона, тем больше время, которое он проводит в сфере действия ядерных сил, пролетая вблизи ядра, и, следовательно, тем больше вероятность его захвата]. Бомбардируя  ${}^6_3\text{Li}$  нейтронами, получают очень важный для ядерных реакций изотоп водорода – тритий ( ${}^3_1\text{H}$ )



### 10.1.8. Реакция деления тяжелых ядер

Практическое значение имеет реакция, с помощью которой Дж. Чедвик в 1932 г. открыл нейтрон:



[впервые эта реакция была осуществлена немецкими физиками В. Боте и Г. Беккером (1930 г.), при бомбардировке бериллия  $\alpha$ -частицами полония].

Это наиболее распространенный способ получения нейтронов, с помощью которых осуществляется большое число всевозможных ядерных реакций [например,  ${}^7_3\text{Li}(\alpha, n){}^{10}_5\text{B}$ ,  ${}^{11}_5\text{B}(\alpha, n){}^{14}_7\text{N}$ , – для нейтронов практически не существует потенциального барьера ядра]. В 40-х годах XX в. было обнаружено и доказано [О. Ган, Ф. Штрассман, О. Фриш, Л. Мейтнер (1938 г.) и др.], что при облучении урана нейтронами образуются элементы из середины Периодической системы – лантан и барий. Этот результат и положил начало изучению реакций совершенно нового типа – **реакций деления ядер**. [Дальнейшие исследования показали, что в большинстве случаев ядро урана делится несимметрично: чаще всего одна группа осколков деления имеет массовые числа, близкие к 95, а другая – близкие 140].

На рис. 110 приведена кривая относительного выхода продуктов деления по массам (масштаб по оси ординат – логарифмический). Кривая показывает, что относительное число актов деления, в результате которых образуются два одинаковых ядра, не превышает 0,01 %, а максимальный выход, равный ~ 6 %, соответствует массовым числам 95 и 140. Осколки с  $A > 162$  и  $A < 72$  практически не образуются.

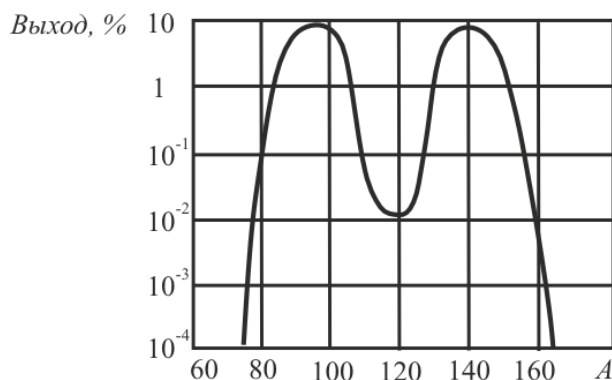
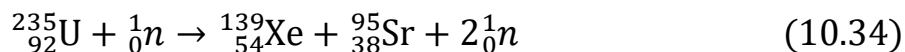
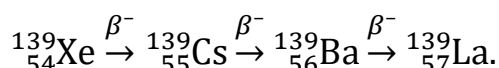


Рис. 110

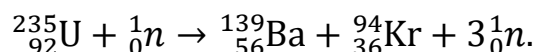
**Реакция деления тяжелых ядер** – деление тяжелых ядер под действием нейтронов (впоследствии оказалось и других частиц) на несколько более легкие ядра, чаще всего на два ядра, близких по массе, с высвобождением двух или трех нейтронов (*нейтронов деления*) и выделением большого количества энергии. Например, при делении ядра урана  $^{235}_{92}\text{U}$ :



осколок деления  $^{139}_{54}\text{Xe}$  в результате трех актов  $\beta^-$ -распада превращается в стабильный изотоп лантана  $^{139}_{57}\text{La}$ :



Осколки деления могут быть разнообразными, поэтому реакция (10.34) не единственная, приводящая к делению  $^{235}_{92}\text{U}$ . Возможна, например, реакция

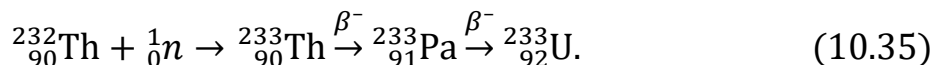


В тяжелых ядрах число нейтронов значительно больше числа протонов ( $N/Z \approx 1,6$ ), а для ядер средней части Периодической системы  $N/Z \approx 1$ , поэтому образовавшиеся осколки деления перегружены нейтронами, в результате чего и испускается несколько нейтронов деления.

Деление тяжелого ядра на *два осколка* сопровождается выделением энергии порядка 1 МэВ на каждый нуклон. Это следует из того, что удельная энергия связи  $\delta E_{\text{св}}$  для ядер средней массы составляет примерно 8,7 МэВ, в то время как для тяжелых ядер она равна 7,6 МэВ (см. рис. 108). Например, при делении ядра урана  $^{238}_{92}\text{U}$ , содержащего 238 нуклонов, выделяется энергия порядка 200 МэВ.

Вероятность деления ядер определяется энергией нейтронов. Кроме урана, при облучении нейтронами делятся торий ( $^{232}_{90}\text{Th}$ ) и протактиний ( $^{231}_{91}\text{Pa}$ ), а также трансурановый элемент плутоний ( $^{239}_{94}\text{Pu}$ ). Нейтроны сверхвысоких энергий (порядка нескольких сотен МэВ) вызывают деление и более легких ядер. Ядра  $^{235}_{92}\text{U}$  и  $^{239}_{94}\text{Pu}$  делятся нейтронами любых энергий, но особенно хорошо медленными нейтронами. **Тепловыми нейтронами** – нейтронами, находящимися в тепловом равновесии с атомами вещества (их энергия  $\sim 0,025$  эВ), – делятся также  $^{233}_{92}\text{U}$  и  $^{230}_{90}\text{Th}$ , но эти изотопы в природе не встречаются, они получают искусственным

путем. Например, изотоп  $^{233}_{92}\text{U}$  получается в результате радиационного захвата [реакции  $(n, \gamma)$ ] нейтронов ядром  $^{232}_{90}\text{Th}$ :



Уран-233  $\alpha$ -радиоактивен ( $T_{1/2} = 162000$  лет).

### 10.1.9. Цепная ядерная реакция

Испускание при делении ядер  $^{235}_{92}\text{U}$ ,  $^{239}_{94}\text{Pu}$  и  $^{233}_{92}\text{U}$  нескольких нейтронов делает возможным осуществление *цепной реакции деления* – ядерной реакции, в которой частицы, вызывающие реакцию, образуются как продукты этой реакции.

Возможность осуществления *самоподдерживающейся реакции* (цепной реакции) возникает вследствие того, что при делении ядра *одним нейтроном* осколки деления испускают *два-три нейтрона*, которые могут, в свою очередь, вызвать деление других ядер. Проблема состоит в том, что некоторые из образовавшихся нейтронов выбывают из цепной реакции – либо поглощаются, не вызывая деления, либо уходят через систему через ее границу.

Условием возникновения цепной реакции является наличие *размножающихся нейтронов*. Цепная реакция деления характеризуется *коэффициентом размножения*  $k$  – отношением числа нейтронов в данном поколении ( $N_{i+1}$ ) к их числу в предыдущем поколении ( $N_i$ ):

$$k = \frac{N_{i+1}}{N_i}.$$

*Необходимым условием* для развития цепной реакции деления является *требование*  $k \geq 1$ .

При  $k > 1$  идет *развивающаяся реакция*, число делений непрерывно растет, и реакция может стать взрывной. При  $k = 1$  протекает *самоподдерживающаяся реакция*, при которой число нейтронов с течением времени не изменяется. При  $k < 1$  идет *затухающая реакция*.

Коэффициент размножения  $k$  зависит от природы делящегося вещества, а для данного изотопа – от его количества, а также размеров и формы **активной зоны** (пространство, где происходит цепная реакция). Минимальные размеры активной зоны, при которых возможно осуществление цепной реакции, называют **критическими размерами**. С увеличением размеров системы доля нейтронов, уходящих через ее границу, стремится к нулю. Потому, если в бесконечной ядерной среде  $k_{\infty} > 1$ , то для конечной системы определенной формы условие  $k > 1$  будет выполняться, если масса этой системы будет превышать некоторую **критическую массу**. Минимальную массу делящегося вещества, находящегося в системе критических размеров, необходимую для осуществления цепной реакции, называют **критической массой**. [Критическую массу можно уменьшить, если окружить активную область оболочкой, отражающей нейтроны. Например, для  $^{235}_{92}\text{U}$  критическая масса 47 кг (шар диаметром 17 см), но если прослоить  $^{235}_{92}\text{U}$  полиэтиленовыми пленками и окружить оболочкой из бериллия, то критическая масса снизится до 250 г (шар диаметром 3 см)].

В настоящее время в ядерной энергетике используются два изотопа, способных делиться под действием тепловых нейтронов, –  $^{235}_{92}\text{U}$  и  $^{239}_{94}\text{Pu}$ . Только первый из этих изотопов встречается в природе – в естественном уране, который состоит из  $^{235}_{92}\text{U}$  и  $^{238}_{92}\text{U}$ , причем основная масса (99,276 %) приходится на  $^{238}_{92}\text{U}$ . Хотя  $^{238}_{92}\text{U}$  может делиться нейтронами, но вероятность этого мала (а для нейтронов с энергией меньше 1,6 МэВ равна нулю), а остальные нейтроны поглощаются  $^{238}_{92}\text{U}$  без деления  $\gamma$ -квантов [**радиационный захват** ( $n, \gamma$ )]. В то же время вероятность деления ядер  $^{235}_{92}\text{U}$  (а также  $^{233}_{92}\text{U}$  и  $^{239}_{94}\text{Pu}$ ) достаточно велика – 85-90 %, причем они могут делиться как быстрыми, так и медленными (в том числе и тепловыми) нейтронами.

**Ценные реакции** подразделяют на **управляемые** и **неуправляемые**. Управляемые цепные реакции реализуются в **ядерных реакторах** – устройствах, в которых осуществляются и поддерживаются управляемые цепные реакции деления. Процесс сильного обогащения урана (т. е. заметного увеличения содержания  $^{235}_{92}\text{U}$ ) является дорогостоящим и используется для создания зарядов **атом-**

**ных бомб** (где экономический фактор не является существенным) и производства горючего для **бридеров** – реакторов на быстрых нейтронах. Взрыв атомной бомбы является неуправляемой реакцией. [Чтобы атомная бомба при хранении не взорвалась, в ней  $^{233}_{92}\text{U}$  (или  $^{239}_{94}\text{Pu}$ ) делят на две удаленные друг от друга части с массами, ниже критических. Затем с помощью обычного взрыва эти массы сближаются, общая масса делящегося вещества становится больше критической, и возникает взрывная цепная реакция, сопровождающаяся мгновенным выделением огромного количества энергии и большими разрушениями].

Первая управляемая цепная реакция деления осуществлена в Чикагском университете Э. Ферми (1942 г.). В 1954 г. под руководством И.В. Курчатова была введена в строй первая в мире промышленная атомная электростанция мощностью 5 МВт, а в 1959 г. был построен первый атомный ледокол.

#### 10.1.10. Реакции синтеза атомных ядер

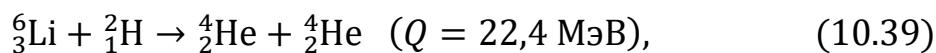
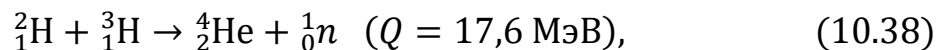
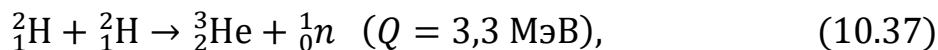
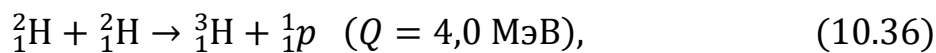
В области легких ядер удельная энергия связи  $\delta E_{\text{св}}$  с ростом  $A$  увеличивается (см. рис. 108). Это значит, что реакции слияния двух легких ядер с образованием более тяжелого ядра должны идти с выделением энергии. Поскольку рост  $\delta E_{\text{св}}(A)$  при малых  $A$  круче [при переходе от ядер тяжелого водорода (дейтерия  $^2_1\text{H}$  и трития  $^3_1\text{H}$ ) к литию  $^6_3\text{Li}$  и особенно к гелию  $^4_2\text{He}$ ], чем спад при больших  $A$ , в *реакциях синтеза* может выделяться гораздо больше энергии  $Q$  (в расчете на один нуклон), чем в *реакциях деления*.

**Реакции синтеза атомных ядер** – реакции слияния легких ядер в более тяжелые, происходящие при сверхвысоких температурах и сопровождающиеся выделением огромной энергии.

[Слияние ядер возможно лишь тогда, когда взаимодействующие частицы, преодолев кулоновское отталкивание, сближаются до расстояний, на которых начинают действовать ядерные силы. Для слияния даже самых легких ядер, какими являются изотопы водорода  $^2_1\text{H}$  и  $^3_1\text{H}$ , против сил отталкивания необходимо затратить энергию  $\sim 0,72$  МэВ, т. е. каждая из частиц должна иметь кинетическую энергию  $\sim 0,36$  МэВ. Такую энергию сближающиеся ядра достигают при температуре  $T \sim 2 \cdot 10^9$  К. На практике синтез ядер протекает при значительно

меньших температурах ( $\sim 10^7$  К), поскольку всегда имеется небольшая часть ядер с энергиями выше средней. Существенную роль при синтезе ядер играет туннельный эффект].

Примеры реакции синтеза ядер:

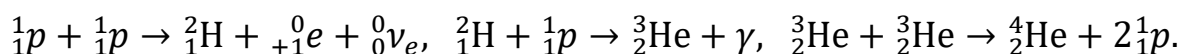


где  $Q$  – энергосодержание.

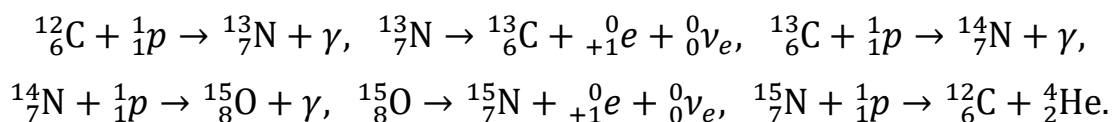
При делении ядра  ${}^{238}_{92}\text{U}$  выделяется энергия  $\sim 200$  МэВ, что составляет на один нуклон  $\sim 0,84$  МэВ, то в реакции (10.38) эта величина равна  $17,6 \text{ МэВ} / 5 \approx \approx 3,5$  МэВ. Дейтерий и тритий образуют заряд *водородной* (или *термоядерной*) *бомбы*. Первый взрыв водородной бомбы был осуществлен в СССР в 1953 г.

Реакции синтеза легких атомных ядер в более тяжелые, происходящие при сверхвысоких температурах ( $\approx 10^7$  К и выше), называют *термоядерными реакциями*. Термоядерные реакции являются, по-видимому, одним из источников энергии Солнца и звезд, которые излучают энергию за счет превращения ядер водорода в гелий. Предположительно термоядерные реакции на Солнце могут протекать в форме одного из двух термоядерных циклов:

1) *протон-протонный* (или *водородный*) *цикл* ( $T \sim 10^7$  К):



2) *углеродно-азотный* (или *углеродный*) *цикл* ( $T \sim 2 \cdot 10^9$  К):



В результате этого цикла четыре протона превращаются в ядро гелия, и выделяется энергия, равная 26,7 МэВ. Ядра же углерода, число которых остается неизменным, участвуют в реакции в роли катализатора. [Для Солнца оба цикла играют одинаково важную роль, в менее ярких звездах преобладает водородный, в более ярких – углеродный. В звездах-гигантах важную роль играют другие *циклы* (*гелиевый* и *неоновый*).

В *водородной бомбе* термоядерная реакция носит *неконтролируемый характер* (запалом в такой бомбе служит обычная атомная бомба, при взрыве которой возникает температура



порядка  $10^7$  К). Для осуществления *управляемых термоядерных реакций* необходимо создать и поддерживать в некотором объеме температуру порядка  $10^8$  К. При столь высокой температуре вещество представляет собой полностью изолированную плазму. Главная техническая трудность состоит именно в удержании плазмы. Наиболее перспективный способ – помещение плазмы в магнитное поле определенной конфигурации (магнитную ловушку). В установках *токамак* плазму пытаются удерживать магнитным полем, которое создается током протекающим через саму плазму (этот же ток сначала участвует в разогреве плазмы). Удержанию плазмы в течение достаточно долгого времени препятствуют различного вида неустойчивости, которые возникают и быстро развиваются в горячей плазме, находящейся в магнитном поле].

Если бы человечество научилось управлять термоядерными реакциями, оно получило бы в свое распоряжение практически неисчерпаемые источники энергии.

## 10.2. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

### 10.2.1. Фундаментальные взаимодействия

Превращениями и распадами элементарных частиц управляют три фундаментальных взаимодействия – *сильное, электромагнитное и слабое (гравитационное взаимодействие в этих процессах несущественно)*. Чем слабее взаимодействие, тем медленнее протекают определяемые им процессы. Интенсивность взаимодействия принято характеризовать *безразмерной константой взаимодействия*, определяющей вероятность процессов, обусловленных данным видом взаимодействия.

**1. Сильное (или ядерное) взаимодействие** имеет радиус действия  $10^{-15}$  м, характерное время определяемых им процессов  $10^{-23}$  с. Константа сильного взаимодействия имеет величину порядка 1. Сильное взаимодействие скрепляет нуклоны в атомные ядра; свойственно только частицам, называемым *адронами* [*hadros* (греч.) – сильный, массивный, крупный], к которым относятся, в частности, протон и нейтрон. [Сильное взаимодействие выступает исключительно в качестве *сил*

*притяжения*. Частицей-переносчиком сильного взаимодействия является *глюон* – электрически нейтральная частица с нулевой массой и спином, равным 1 (в единицах  $\hbar$ ). Эти частицы заперты внутри адронов и в свободном состоянии не существуют].

**2. Электромагнитное взаимодействие** – далекодействующее [радиус действия неограничен ( $r = \infty$ )], характерное время определяемых им процессов не менее  $10^{-20}$  с, связано с существованием электрических и магнитных полей, оно возникает между *заряженными частицами*. Константа взаимодействия равна  $1/137 \approx 10^{-2}$ . Электромагнитное взаимодействие, как и гравитационное, проявляется в микро-, макро- и мегамире, т. е. на любых расстояниях. [Частицей-переносчиком электромагнитного взаимодействия является *фотон* – квант электромагнитного поля с нулевой массой и распространяющийся в вакууме со скоростью света. Спин фотона равен 1 (в единицах  $\hbar$ )].

**3. Слабое взаимодействие** имеет радиус действия  $10^{-18}$  м, характерное время определяемых им процессов (в которых обычно участвуют нейтрино) не менее  $10^{-10}$  с; присуще всем частицам, кроме фотонов (наиболее известное его проявление –  $\beta$ -превращения атомных ядер; оно же обуславливает нестабильность многих элементарных частиц, например, нейтрона). Константа взаимодействия равна по порядку величины  $10^{-14}$ . Слабое взаимодействие – самое универсальное из трех, оно присутствует всегда, но является определяющим только при отсутствии других взаимодействий. [Частицами-переносчиками слабого взаимодействия являются *промежуточные векторные бозоны* (векторными называются частицы со спином, равным 1) –  $W^+$ ,  $W^-$ , а также электронейтральный бозон  $Z^0$  (обнаружены в 1982 г.)].

**4. Гравитационное взаимодействие** – далекодействующее [радиус действия неограничен ( $r = \infty$ )]. Константа взаимодействия имеет значение порядка величины  $10^{-39}$ . Гравитационное взаимодействие универсальное и самое слабое из всех взаимодействий природы, в котором участвуют все тела и все элементарные частицы. Однако в процессах микромира данный вид взаимодействия ощутимой роли не играет. [Частицей-переносчиком гравитационного взаимодействия считается *гравитон* – квант гравитационного поля с нулевой массой и нулевым электрическим зарядом, а также спином, равным 2 (в единицах  $\hbar$ )].

В 1970-е годы была создана общая теория электромагнитного и слабого взаимодействия – *теория электрослабого взаимодействия*. Она рассматривает два типа фундаментальных взаимодействий как проявление единого, более глубокого. Так, на расстояниях более  $10^{-19}$  м преобладают электромагнитные взаимодействия, на меньших расстояниях в одинаковой мере важны и электромагнитные и слабые взаимодействия.

В табл. 10.1 приведены основные сведения (по порядку величин) по фундаментальным взаимодействиям.

Таблица 10.1

№ п/п	Тип взаимодействия	Радиус действия, м	Время жизни, с	Константа взаимодействия
1.	Сильное	$10^{-15}$	$10^{-23}$	1
2.	Электромагнитное	$\infty$	$10^{-20}$	$10^{-2}$
3.	Слабое	$10^{-18}$	$10^{-10}$	$10^{-14}$
4.	Гравитационное	$\infty$	–	$10^{-39}$

### 10.2.2. Элементарные частицы и античастицы

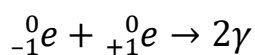
*Элементарными частицами* называют большую группу мельчайших частиц материи, которые не являются атомами или атомными ядрами (за исключением протона – ядра атома водорода) и которые с точки зрения современной физики являются бесструктурными образованиями и различаются между собой массой, средним временем жизни, электрическим зарядом, магнитным моментом, спином и некоторыми особыми свойствами, определяющими квантовую специфику их поведения. *Характерным свойством* всех элементарных частиц является их способность к взаимным превращениям (рождению и уничтожению) при взаимодействии с другими частицами.

У каждой элементарной частицы есть *античастица*, обозначается она тем же символом, но с добавлением тильды «~» над ним. Существование античастицы электрона – *позитрона* – было предсказано П. Дираком (1928 г.), а впоследствии обнаружено К. Андерсоном (1932 г.). В 1955 г. был обнаружен *антипротон*, а в 1956 г. – *антинейтрон* – античастицы протона и нейтрона.

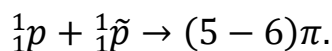
**Аннигиляция** – физический процесс, при котором частица и соответствующая ей античастица превращаются в фотоны или другие частицы – кванты физических полей другой природы.

Согласно **принципу зарядового сопряжения**, для каждой элементарной частицы должна существовать античастица. [Эксперименты показывают, что за немногим исключением, каждая частица действительно имеет античастицу. В настоящее время известных элементарных частиц (вместе с античастицами) насчитывается порядка 450, большинство из них являются нестабильными (исключение – фотон, электрон, протон и нейтрон)].

Из общих положений квантовой теории следует, что *частицы* и *античастицы* должны иметь одинаковые массы, одинаковые времена жизни в вакууме, одинаковые спины. Остальные характеристики, в том числе электрический заряд и магнитный момент, у частицы и античастицы равны по модулю, но противоположны по знаку. Отличительной особенностью частицы и античастицы является их способность **аннигилировать** при встрече с превращением в другие частицы или иные формы материи. В этом случае выделяется энергия, эквивалентная энергии покоя взаимодействующей пары частиц, которая переходит в энергию покоя и кинетическую энергию новых частиц или энергию  $\gamma$ -квантов. Например, при столкновении электрона  ${}_{-1}^0e$  и позитрона  ${}_{+1}^0e$  они исчезают, превращаясь в фотоны:



[рассмотренная реакция – пример взаимосвязи различных форм материи: в этих процессах материя в форме вещества превращается в материю в форме электромагнитного поля, и наоборот]; при столкновении протона  ${}_{1}^1p$  и антипротона  ${}_{1}^1\tilde{p}$  образуется 5 – 6  $\pi$ -мезонов:



Для рождения пары частиц необходимо затратить энергию, эквивалентную или больше той, которая определяется их массами покоя. В 1933 г. Ирен и Фредерик Жолио-Кюри в камере Вильсона впервые наблюдали *процесс, обратный аннигиляции*, – образования электрон-позитронных пар, рожденных  $\gamma$ -квантами большой энергии (большей или равной  $2m_e c^2$ ) от радиоактивного источника:

$$\gamma \rightarrow {}_{-1}^0e + {}_{+1}^0e.$$

Как при аннигиляции, так и здесь при рождении пар выполняются законы сохранения электрического заряда, энергии, импульса и момента импульса (спина).

Если энергия  $\gamma$ -кванта очень велика, он может породить не только электрон-позитронную пару, но и любую другую пару, например, протон – антипротон. Возможна также аннигиляция пары частица – античастица не только в  $\gamma$ -кванты, но и в массивные частицы, как, например, при аннигиляции нуклона с антинуклоном, когда возникают несколько адронов.

В соответствии с четырьмя фундаментальными взаимодействиями элементарные частицы делятся на **четыре класса**:

- а) *адроны* – участвующие во всех четырех типах взаимодействий;
- б) *лептоны* – не участвующие только в сильном взаимодействии;
- в) *фотон* – не участвующий в сильном и слабом взаимодействиях;
- г) *гравитон* – участвующий только в гравитационном взаимодействии.

Рассмотрим характеристики и основные свойства элементарных частиц, входящих в различные классы взаимодействий.

**1. Семейство адронов** является наиболее многочисленным и включает порядка 450 частиц (вместе с античастицами). [До открытия  $\tau$ -лептона (1975 г.) считалось, что адроны являются самыми крупными и тяжелыми из всех известных микрочастиц]. К адронам относятся *протон, нейтрон, пионы, каоны, гипероны* и их античастицы (табл. 10.2). Для выделения адронов как группы элементарных частиц вводится квантовое число – **барионный заряд  $B$** . Адроны подразделяют на два больших подкласса: **мезоны** – подгруппа адронов с  $B = 0$  (их спин равен нулю) и **барионы** – подгруппа адронов с  $B = 1$  (их спин равен  $\hbar/2$ ). Для всех барионов  $B = 1$ , для антибарионов –  $B = -1$ , для всех остальных частиц, не являющихся барионами,  $B = 0$ .

**Гиперонами** именуют большую группу элементарных частиц, массы которых значительно превосходят массу нуклона. Они нестабильны и распадаются

на более легкие частицы – нуклоны, пионы и каоны. Все барионы, за исключением протона, нестабильны и путем последовательных распадов превращаются в протоны и другие частицы. Нейтрон, будучи нестабильным в свободном состоянии, в связанном состоянии внутри атомных ядер является стабильным.

Таблица 10.2

Группы частиц	Название частицы	Символ		Заряд [e]	Масса [ $m_e$ ]	Спин [ $\hbar$ ]	Лептонный заряд [L]	Барионный заряд [B]	
		частицы	античастицы						
Адроны	Мезоны	Пи-мезоны		$\pi^0$	0	264,1	0	0	
		$\pi^+$	$\pi^-$	1	273,1	0	0	0	
		Ка-мезоны		$K^0$	$\bar{K}^0$	0	974,0	0	0
		$K^+$	$K^-$	1	966,2	0	0	0	
		Эта-мезон		$\eta^0$	0	1074	0	0	0
	Барионы	Нуклоны							
		Протон	$p$	$\bar{p}$	1	1836,2	1/2	0	+1
		Нейтрон	$n$	$\bar{n}$	0	1838,7	1/2	–	+1
		Гипероны							
		лямбда	$\Lambda^0$	$\bar{\Lambda}^0$	0	2183	1/2	0	+1
		сигма	$\Sigma^0$	$\bar{\Sigma}^0$	0	2334	1/2	0	+1
			$\Sigma^+$	$\bar{\Sigma}^+$	1	2328	1/2	0	+1
			$\Sigma^-$	$\bar{\Sigma}^-$	1	2343	1/2	0	+1
		кси	$\Xi^0$	$\bar{\Xi}^0$	0	2573	1/2	0	+1
$\Xi^-$			$\bar{\Xi}^-$	1	2586	1/2	0	+1	
омега	$\Omega^-$	$\bar{\Omega}^-$	1	3273	3/2	0	+1		

**Мезоны** – нестабильные частицы с нулевым спином, их барионный заряд равен нулю ( $B = 0$ ), равен нулю и их лептонный заряд, поэтому при взаимодействиях элементарных частиц мезоны могут возникать и исчезать в любых количествах, но при этом должны соблюдаться законы сохранения энергии, импульса, спина и электрического заряда. Их масса больше массы электрона, но меньше массы протона. Существуют три группы мезонов: **пионы** ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ), **каоны** ( $K^+$ ,  $K^0$ ,  $K^-$ ) и **этон** ( $\eta$ -мезон). Мезоны сильно взаимодействуют друг с другом и с барионами.

Предполагается, что все известные адроны состоят из более мелких образований (из особых бесструктурных элементов) – **кварков** (их размеры  $<10^{-18}$  м),

которым приписывают дробные квантовые числа. Всего существует шесть разновидностей (или *ароматов*) кварков:  $u$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $b$  и  $t$  (от англ. слов *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom*, *top*). Массы кварков равны  $m_u \approx 5$  МэВ,  $m_d \approx 7$  МэВ,  $m_s \approx 150$  МэВ,  $m_c \approx 1,3$  ГэВ,  $m_b \approx 4,3$  ГэВ,  $m_t \approx 175$  ГэВ. Самое необычное свойство кварков – они имеют дробные электрические заряды. Кварки  $u$ ,  $c$ , и  $t$  называют *верхними*, их заряд равен  $+2/3$ , кварки  $d$ ,  $s$  и  $b$  называют *нижними*, их заряд равен  $-1/3$  (в единицах элементарного заряда).

Считается, что потенциальная энергия взаимодействия кварков в элементарных частицах в тысячи раз превосходит энергию связи нуклонов в ядре и является отрицательной величиной, переносчик взаимодействия между кварками – *глюон* – электрически нейтральная безмассовая частица.

**2. Лептоны** – относительно легкие частицы с полуцелым спином ( $\hbar/2$ ), слабо взаимодействующие друг с другом и со всеми другими частицами (являются фермионами). В семейство лептонов входят *нейтрино*, *электрон*, *позитрон* и *мюоны* (нестабильные заряженные элементарные частицы массой, в 206,8 раза превышающей массу электрона, и временем жизни  $2,2 \cdot 10^{-6}$  с). Элементарные частицы и их свойства приведены в табл. 10.3.

Таблица 10.3

№ п/п	Название частицы	Символ	Электрический заряд [ $e$ ]	Масса [ $m_e$ ]	Спин [ $\hbar$ ]	Время жизни [с]
1.	Электрон	$e^-$	1	1	1/2	Стабилен
2.	Электронное нейтрино	$\nu_e$	0	0?	1/2	Стабильно
3.	Мюон	$\mu^-$	1	206,8	1/2	$2,2 \cdot 10^{-6}$
4.	Мюонное нейтрино	$\nu_\mu$	0	0?	1/2	Стабильно
6.	Тау-лептон	$\tau^-$	1	3487	1/2	$3,5 \cdot 10^{-13}$
7.	Таонное нейтрино	$\nu_\tau$	0	0?	1/2	Стабильно

Согласно табл. 10.3, лептонов всего шесть. Каждому из трех заряженных лептонов (они участвуют в электромагнитном и слабом взаимодействиях) соответствует нейтральная частица – *нейтрино* ( $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ ), участвующая только в слабом взаимодействии.

Таким образом, имеется три семейства лептонов: электронный ( $e^-$ ,  $\nu_e$ ), мюонный ( $\mu^-$ ,  $\nu_\mu$ ) и таонный ( $\tau^-$ ,  $\nu_\tau$ ) дуплеты. Каждому из них соответствует *дуплет антилептонов*: ( $e^+$ ,  $\tilde{\nu}_e$ ), ( $\mu^+$ ,  $\tilde{\nu}_\mu$ ), ( $\tau^+$ ,  $\tilde{\nu}_\tau$ ), где  $\tilde{\nu}_e$ ,  $\tilde{\nu}_\mu$ ,  $\tilde{\nu}_\tau$  – соответственно *электронное, мюонное и таонное антинейтрино*. Лептонам приписывают *лептонный заряд*  $L$ . Для лептонов  $L = 1$ , для антилептонов  $L = -1$ , для частиц, не являющихся лептонами,  $L = 0$ . Различают электронный лептонный заряд  $L_e$  (электрон, электронное нейтрино), мюонный лептонный заряд  $L_\mu$  (мюоны, мюонное нейтрино), таонный лептонный заряд  $L_\tau$  (таон, таонное нейтрино).

**Закон сохранения лептонного заряда:** *при всех процессах взаимопревращаемости элементарных частиц лептонный заряд сохраняется.*

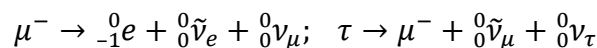
Лептонный заряд не связан ни с какими полями, а просто является средством учета количества лептонов при взаимопревращении элементарных частиц. Например, для реакции



выполняется закон сохранения лептонного заряда ( $0 = 0 + 1 - 1$ ).

[Следствием закона сохранения лептонного заряда является то, что в реакции (10.40) вылетает антинейтрино, а при распаде  ${}^1_1p \rightarrow {}^1_0n + {}_{+1}^0e + {}^0_0\nu_e$  – нейтрино. Так как у электрона и нейтрино  $L = +1$ , а у позитрона и антинейтрино  $L = -1$ , то закон сохранения лептонного заряда выполняется лишь при условии, что  ${}^0_0\tilde{\nu}_e$  возникает вместе с электроном, а  ${}^0_0\nu_e$  – с позитроном.

Для реакции распада мюона и  $\tau$ -лептона



также выполняется закон сохранения лептонного заряда:

$$(1 = 1 - 1 + 1); (1 = 1 - 1 + 1)].$$

В табл. 10.4 приведены лептонные заряды для частиц семейства лептонов.

Таблица 10.4

№ п/п	Семейство лептонов	Частица	Лептонный заряд		
			$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$
1.	Электронный дуплет	$e^-$	+1	0	0
		$\nu_e$	+1	0	0
2.	Мюонный дуплет	$\mu^-$	0	+1	0
		$\nu_\mu$	0	+1	0
3.	Таонный дуплет	$\tau^-$	0	0	+1
		$\nu_\tau$	0	0	+1



Семейство лептонов в настоящее время считают истинно *элементарными (фундаментальными) частицами*, поскольку современные эксперименты, включая столкновения в ускорителях частиц с огромнейшими энергиями, свидетельствуют о неделимости лептонов.

**3. Фотоны,  $\gamma$**  (кванты электромагнитного поля). Участвуют в электромагнитных взаимодействиях, но не обладают сильным и слабым взаимодействиями. Фотон не имеет массы покоя, существует только в движении. Фотон может испускаться и поглощаться только заряженными частицами, при этом ни заряд, ни цвет, ни аромат частицы не меняются.

**4. Гравитационное взаимодействие**, самое слабое из всех фундаментальных, в современной теории элементарных частиц не участвует, поскольку его интенсивность  $10^{38}$  раз меньше интенсивности сильного взаимодействия.

Шесть лептонов и шесть кварков образуют класс *фундаментальных фермионов*, из которых «сделаны» все остальные элементарные частицы. Особую роль играют фундаментальные фермионы «первого поколения»  $u, d, \nu_e, e^-$ , из которых составлены нуклоны и атомы и которые определяют ход почти всех наблюдаемых в природе процессов. Фундаментальные фермионы второго ( $c, s, \nu_\mu, \mu^-$ ) и третьего ( $t, b, \nu_\tau, \tau^-$ ) поколений получают искусственно в мощных ускорителях. Однако только изучение всей совокупности фундаментальных частиц дает возможность понять устройство и эволюцию нашего мира.

## Примеры решения задач

**10.1.** Вычислите дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра алюминия  ${}_{13}^{27}\text{Al}$ . Масса нейтрального атома алюминия 26,98135 а. е. м.

**Дано:**  $m_{{}_{13}^{27}\text{Al}} = 26,98135$  а. е. м.;  $m_{{}_1^1\text{H}} = 1,00783$  а. е. м.;  $m_n = 1,00867$  а. е. м.;

**Найти:**  $\Delta m$ ;  $E_{\text{св}}$ ;  $\delta E_{\text{св}}$ .

**Решение.** Дефект массы  $\Delta m$  ядра определяется по формуле

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} = [Zm_{{}_1^1\text{H}} + (A - Z)m_n] - m, \quad (1)$$

где  $m_p, m_n, m_{\text{я}}$  – соответственно массы протона, нейтрона и ядра;  $Z$  – зарядовое число;  $A$  – массовое число;  $m_{{}_1^1\text{H}} = m_p + m_e$  – масса атома водорода ( ${}^1_1\text{H}$ );  $m$  – масса атома (масса атома алюминия  ${}_{13}^{27}\text{Al}$ ).

Подставляя в формулу (1) числовые значения, получим:

$$\Delta m = [13 \cdot 1,00783 + (27 - 13)1,00867] - 26,98135 = 0,24234 \text{ а. е. м.}$$

Энергия связи ядра  $E_{\text{св}}$  определяется по формуле

$$E_{\text{св}} = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m]c^2 = \Delta mc^2. \quad (2)$$

Тогда

$$E_{\text{св}} = 0,24234 \cdot 1,660539 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 226,36 \text{ МэВ}$$

[учли, что  $1 \text{ МэВ} \approx 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$  и  $1 \text{ а. е. м.} \approx 1,660539 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – скорость света в вакууме].

Удельная энергия связи

$$\delta E_{\text{св}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}. \quad (3)$$

$$\delta E_{\text{св}} = \frac{226,36 \text{ МэВ}}{27} = 8,3837 \text{ МэВ.}$$

**Ответ:**  $\Delta m = 0,24234 \text{ а. е. м.}$ ;  $E_{\text{св}} = 226,36 \text{ МэВ}$ ;  $\delta E_{\text{св}} = 8,38 \text{ МэВ}$ .

**10.2.** Ядро, состоящее из 90 протонов 142 нейтронов, выбросило  $\alpha$ -частицу. Какое ядро образовалось при этом виде распада? Найдите дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи образовавшегося ядра.

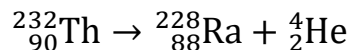
**Дано:**  $Z = 90$ ;  $N = 142$ ;  $A = 232$ ;  $m_{\text{H}} = 1,00783 \text{ а. е. м.}$ ;  $m_n = 1,00867 \text{ а. е. м.}$

**Найти:**  $Y$ ;  $\Delta m$ ;  $E_{\text{св}}$ ;  $\delta E_{\text{св}}$ .

**Решение.** Правило смещения для  $\alpha$ -распада



откуда [по условию задачи  $Z = 90$  – химический элемент торий (Th)]



[образовалось ядро радия  ${}^{228}_{88} \text{Ra}$ ; табличное значение массы атома радия равно  $m_{{}^{228}_{88} \text{Ra}} = 228,031073 \text{ а. е. м.}$ ].

Дефект массы ядра

$$\Delta m = Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_{{}^{228}_{88} \text{Ra}}. \quad (2)$$

$$\Delta m = 88 \cdot 1,00783 + 140 \cdot 1,00867 - 228,031073 = 1,871767 \text{ а. е. м.}$$

[ $\Delta m = 1,871767 \cdot 1,660539 \cdot 10^{-27} \text{ (кг)} = 3,10814210241 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ].

Энергия связи ядра радия

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2. \quad (3)$$

$$E_{\text{св}} = 3,108 \dots \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 27,97329 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 1748,33 \text{ МэВ.}$$

Удельная энергия связи

$$\delta E_{\text{св}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}. \quad (4)$$

$$\delta E_{\text{св}} = \frac{1748,33 \text{ МэВ}}{228} = 7,668114 \dots (\text{МэВ}) \approx 7,67 \text{ МэВ}.$$

**Ответ:**  ${}^{228}_{88}\text{Ra}$ ;  $E_{\text{св}} = 1748,33 \text{ МэВ}$ ;  $\delta E_{\text{св}} = 7,67 \text{ МэВ}$ .

**10.3.** Период полураспада изотопа радия  ${}^{228}_{88}\text{Ra}$  равен 5,752 года. Найдите постоянную радиоактивного распада и среднее время жизни радиоактивного ядра этого изотопа.

**Дано:**  ${}^{228}_{88}\text{Ra}$ ;  $T_{1/2} = 5,752$  года.

**Найти:**  $\lambda$ ;  $\tau$ .

**Решение.** Связь между периодом полураспада  $T_{1/2}$  и постоянной радиоактивного распада  $\lambda$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad (1)$$

откуда

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{0,693}{5,752} = 0,1204798 \approx 0,12 \text{ год}^{-1}.$$

Связь между средним временем жизни  $\tau$  радиоактивного ядра и постоянной  $\lambda$  радиоактивного распада

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (3)$$

$$\tau = \frac{1}{0,12} = 8,3(3) \text{ года}.$$

**Ответ:**  $\lambda = 0,12 \text{ год}^{-1}$ ;  $\tau = 8,3(3) \text{ года}$ .

**10.4.** Период полураспада атомов изотопа висмута  ${}^{210}_{83}\text{Bi}$  равен  $T_{1/2} = 5$  суток. Найдите, какая доля первоначального количества ядер этого изотопа распадется через 4 суток.

**Дано:**  $T_{1/2} = 5$  сут;  $t = 4$  сут.

**Найти:**  $(N_0 - N)/N_0$ .

**Решение.** Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}, \quad (1)$$

где  $N$  – число нераспавшихся ядер к моменту времени  $t$ ;  $N_0$  – начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени  $t = 0$ );  $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$  – постоянная радиоактивного распада.

Число ядер, распавшихся за время  $t$ ,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}) = N_0 \left( 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \right). \quad (2)$$

Доля, распавшихся ядер за время  $t$ ,

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}. \quad (3)$$

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\frac{0,693 \cdot 4}{5}} = 1 - e^{-0,5544} = 1 - 0,57442 = 0,42558$$

или 42,56 % первоначального числа ядер распадется через 4 суток.

**Ответ:**  $(N_0 - N)/N_0 = 42,56 \%$ .

**10.5.** Вычислите энергию ядерной реакции  ${}^{40}_{20}\text{Ca}(n, p){}^{40}_{19}\text{K}$ , если энергия связи ядра  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  равна 342,06 МэВ, а ядра  ${}^{40}_{19}\text{K}$  – 341,52 МэВ.

**Дано:**  ${}^{40}_{20}\text{Ca}(n, p){}^{40}_{19}\text{K}$ ;  $E_{\text{св}}{}^{40}_{20}\text{Ca} = 342,06$  МэВ;  $E_{\text{св}}{}^{40}_{19}\text{K} = 341,52$  МэВ.

**Найти:**  $Q$ .

**Решение.** Запись реакции в развернутом виде:



Энергия ядерной реакции

$$Q = [(m_{{}^{40}_{20}\text{Ca}} + m_n) - (m_{{}^{40}_{19}\text{K}} + m_p)]c^2, \quad (2)$$

где  $m_{{}^{40}_{20}\text{Ca}}$  и  $m_{{}^{40}_{19}\text{K}}$  – массы ядер кальция и калия;  $m_n$  и  $m_p$  – соответственно массы нейтрона и протона.

Согласно формуле для энергии связи ядра атома

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m]c^2 \quad (3)$$

[ $m$  – масса атома;  $Z$  – зарядовое число;  $A$  – массовое число], для масс ядер кальция  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  и калия  ${}^{40}_{19}\text{K}$  получим:

$$m_{{}^{40}_{20}\text{Ca}} = 20m_p + 20m_n - \frac{E_{\text{св}}{}^{40}_{20}\text{Ca}}{c^2}, \quad (4)$$

$$m_{{}^{40}_{19}\text{K}} = 19m_p + 21m_n - \frac{E_{\text{св}}{}^{40}_{19}\text{K}}{c^2}. \quad (5)$$

После подстановки выражений (4) и (5) в формулу (2), найдем:

$$Q = -E_{\text{св}}{}^{40}_{20}\text{Ca} + E_{\text{св}}{}^{40}_{19}\text{K} = -0,54 \text{ МэВ}.$$

**Ответ:**  $Q = -0,54$  МэВ. Энергетический эффект отрицателен; реакция эндотермическая.

## Задачи

107. Найдите, какую часть массы нейтрального атома алюминия  ${}_{13}^{27}\text{Al}$  ( $m_{\text{Al}} = 4,48046 \cdot 10^{-26}$  кг) составляет масса его электронной оболочки. Масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг. Ответ:  $2,643 \cdot 10^{-4}$

108. Найдите энергию связи, приходящуюся на один нуклон ( $\delta E_{\text{св}}$ ) в ядре атома кислорода  ${}_{8}^{16}\text{O}$ . Масса нейтрона  $m_n = 1,008665$  а. е. м.; масса атома кислорода  $m_{{}_{8}^{16}\text{O}} = 15,9994$  а. е. м.; масса атома водорода  $m_{{}_{1}^1\text{H}} = 1,00783$  а. е. м.

Ответ: 7,718 МэВ

109. Найдите, во сколько раз радиус ядра урана  ${}_{92}^{238}\text{U}$  больше радиуса ядра лития  ${}_{3}^6\text{Li}$ . Ответ: 3,41

110. Найдите дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи (энергия связи, отнесенная к одному нуклону) для ядра магния  ${}_{12}^{24}\text{Mg}$ . Масса нейтрона  $m_n = 1,008665$  а. е. м.; масса атома  $m_{{}_{12}^{24}\text{Mg}} = 23,98504$  а. е. м.; масса атома водорода  $m_{{}_{1}^1\text{H}} = 1,00783$  а. е. м.

Ответ: 0,21296 а. е. м.; 196,875 МэВ; 8,203 МэВ

111. Найдите, во сколько раз магнетона Бора  $\mu_B$  больше ядерного магнетона  $\mu_{\text{я}}$ . Масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг; масса протона  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг.

Ответ: 1833,15

112. В цепочке радиоактивных превращений ядра изотопа урана  ${}_{92}^{235}\text{U}$  произошло четыре  $\alpha$ -распада и три  $\beta^-$ -распада. Найдите отношение числа нейтронов к числу протонов в ядре изотопа, образовавшемся в результате этих превращений ядра урана.

Ответ: 1,517

113. Найдите время, за которое распадается  $3/5$  начального количества ядер изотопа радона  ${}_{86}^{222}\text{Rn}$ , если его период полураспада равен 3,82 сут.

Ответ: 5,05 сут

114. Активность некоторого радиоактивного изотопа уменьшается в 1,5 раза за 80,73 сут. Найдите (в сутках), его период полураспада.

Ответ: 138 сут [полоний]

115. Начальная активность 1 мг радиоактивного изотопа кобальта  ${}_{27}^{60}\text{Co}$  равна  $4,19 \cdot 10^{10}$  Бк. Найдите период полураспада этого изотопа. Молярная масса изотопа  ${}_{27}^{60}\text{Co}$   $M = 60 \cdot 10^{-3}$  кг/моль; постоянная Авогадро  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$ .

Ответ:  $1,66 \cdot 10^8$  с  $\approx 5,27$  года

116. Найдите удельную (массовую) активность ядер радиоактивного изотопа висмута  ${}_{83}^{210}\text{Bi}$ , если известно, что период полураспада этого изотопа равен 5 сут. Постоянная Авогадро  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$ ; молярная масса изотопа висмута  $M = 210 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Ответ:  $4,60 \cdot 10^{18}$  Бк/кг

117. Назовите вид радиоактивного превращения, при котором изотоп железа  ${}^{57}_{26}\text{Fe}$  превращается в изотоп марганца  ${}^{57}_{26}\text{Mn}$  (с испусканием нейтрино). Напишите уравнение этого превращения. Ответ:  $K$ -захват

118. В кровь человека ввели небольшое количество раствора, содержащего изотоп  ${}^{24}_{11}\text{Na}$  с активностью  $2 \cdot 10^3$  Бк. Активность крови объемом  $1 \text{ см}^3$ , взятой через 5 ч, оказалась равной 0,276 Бк. Период полураспада этого изотопа 15 ч. Найдите по этим данным объем крови человека (в литрах). Ответ: 5,95 л

119. Пользуясь Периодической системой химических элементов Д.И. Менделеева и правилами смещения Ф. Содди, найдите, какой изотоп образуется из изотопа урана  ${}^{238}_{92}\text{U}$  в результате четырех  $\alpha$ -распадов и трех  $\beta$ -распадов. Представьте общую схему распада. Ответ: образуется изотоп франция  ${}^{222}_{87}\text{Fr}$

120. Для разделения ядра кислорода  ${}^{16}_8\text{O}$  на  $\alpha$ -частицу и ядро углерода  ${}^{12}_6\text{C}$  необходимо затратить энергию 7,24 МэВ. Найдите удельную энергию связи ядра углерода  ${}^{12}_6\text{C}$ , если известно, что энергии связи на один нуклон в ядрах  ${}^{16}_8\text{O}$  и  ${}^4_2\text{He}$  равны соответственно 7,98 и 7,07 МэВ. Ответ: 7,68 МэВ/нуклон

121. Найдите энергию ядерной реакции  ${}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{p}$ . Массы атомов  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^7_3\text{Li}$  и водорода соответственно равны 4,00260 а. е. м., 7,01601 а. е. м., 1,00783 а. е. м. Ответ:  $-17,35$  МэВ (энергия поглощается)

122. Найдите энергию термоядерной ядерной реакции  ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$ . Массы атомов  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^2_1\text{H}$  и  ${}^3_1\text{H}$  соответственно равны 4,00260 а. е. м., 2,0141018 а. е. м., 3,0160493 а. е. м. Масса нейтрона  $m_{{}^1_0\text{n}} = 1,00867$  а. е. м. Ответ: 17,63 МэВ

123. Найдите зарядовое число  $Z$  и массовое число  $A$  частицы, обозначенной буквой  $x$ , в символической записи ядерной реакции:

1)  ${}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + x$ ; 2)  ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + x$ ; 3)  ${}^6_3\text{Li} + x \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^4_2\text{He}$ .

Ответ: 1)  $Z = 1; A = 1: {}^1_1\text{p}$  (протон); 2)  $Z = 0; A = 1: {}^1_0\text{n}$  (нейтрон);  
3)  $Z = 0; A = 1: {}^1_0\text{n}$  (нейтрон).

124. Найдите зарядовое число  $Z$  и массовое число  $A$  частицы, обозначенной буквой  $x$ , в символической записи ядерной реакции:

1)  ${}^3_2\text{He} + x \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{p}$ ; 2)  ${}^7_3\text{Li} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{10}_5\text{B} + x$ ; 3)  ${}^2_1\text{H} + {}^7_3\text{Li} \rightarrow {}^8_4\text{Be} + x$ .

Ответ: 1)  $Z = 0; A = 1: {}^1_0\text{n}$  (нейтрон); 2)  $Z = 0; A = 1: {}^1_0\text{n}$  (нейтрон);  
3)  $Z = 0; A = 1: {}^1_0\text{n}$  (нейтрон).

125. Найдите зарядовое число  $Z$  и массовое число  $A$  частицы, обозначенной буквой  $x$ , в символической записи ядерной реакции:

1)  ${}^{14}_7\text{N} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{14}_6\text{C} + x$ ; 2)  ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + x$ ; 3)  ${}^{27}_{13}\text{Al} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{30}_{14}\text{Si} + x$ .

Ответ: 1)  $Z = 1; A = 1: {}^1_1\text{p}$  (протон); 2)  $Z = 1; A = 1: {}^1_1\text{p}$  (протон);  
3)  $Z = 1; A = 1: {}^1_1\text{p}$  (протон).

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПО ВТОРОЙ ЧАСТИ

1. Представление об атомах как неделимых мельчайших частицах вещества (атомистическая теория). Модель атома Томсона. Опыты Резерфорда. Ядерная (планетарная) модель атома и причины невозможности ее реализации в классической физике.
- 2\*. Линейчатый спектр атома водорода. Закономерности спектра атома водорода. Спектральные серии Бальмера, Лаймана, Пашена, Брэкета, Пфунда, Хэмфри. Постоянная Ридберга. Обобщенная формула Бальмера.
- 3\*. Постулаты Бора. Спектр атома водорода и *водородоподобных систем* по Бору. Получите выражение *для радиусов стационарных орбит электрона* в атоме водорода на основе теории Бора. Первый боровский радиус.
- 4\*. Постулаты Бора. Получите выражение *для скоростей электрона на стационарных орбитах* в атоме водорода на основе теории Бора.
- 5\*. Постулаты Бора. Получите выражение *для угловой скорости электрона* в атоме водорода на основе теории Бора.
- 6\*. Постулаты Бора. Получите выражение для периода обращения электрона в атоме водорода на основе теории Бора.
- 7\*. Постулаты Бора. Получите выражение *для полной энергии электрона* в атоме водорода на основе теории Бора.
- 8\*. Постулаты Бора. Получите выражения *для кинетической и потенциальной энергий электрона* в атоме водорода на основе теории Бора.
- 9\*. Энергия связи электрона в атоме водорода и ее значение (в эВ). Энергия ионизации. Первый потенциал возбуждения.
10. Энергия связи электрона в атоме и ее значение (в эВ) для водородоподобного иона. Энергия ионизации. Первый потенциал возбуждения.
11. Корпускулярно-волновой дуализм. Гипотеза и формула де Бройля. Опыты, подтверждающие гипотезу де Бройля. Фазовая и групповая скорости волн де Бройля. Дисперсия волны де Бройля.
12. Постулаты Бора. Покажите, что электрон в атоме водорода может двигаться только по тем стационарным орбитам, на которых укладывается целое число длин волн де Бройля.
13. Дифракция электронов на узкой щели.
14. Соотношения неопределенностей Гейзенберга для координат и импульса. Невозможность описания поведения частиц с помощью классического понятия траектория. Невозможность одновременно с любой точностью измерить координату и импульс микрообъекта. Дифракция электронов на узкой щели.
- 15\*. Соотношение неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени. Естественная ширина спектральной линии изучаемого атома.

- 16\*. Используя соотношения неопределенностей для координат и импульса, оцените минимальную энергию частицы массы  $m$ , находящейся в бесконечной прямоугольной потенциальной яме ширины  $l$ .
- 17\*. Используя соотношения неопределенностей для координат и импульса, оцените минимальную энергию  $E_0$  одномерного гармонического осциллятора, имеющего массу  $m$  и собственную частоту  $\omega$ .
- 18\*. Оцените с помощью соотношения неопределенностей минимальную энергию электрона в атоме водорода.
19. Вероятностный подход к описанию микрочастиц – важнейшая отличительная особенность квантовой теории. Волновая или  $\psi$ -функция частицы и ее статистический (вероятностный) характер. Волновая функция как основной носитель информации о корпускулярных и волновых свойствах микрочастиц. Свойства волновой функции (плотности вероятности, условие нормировки вероятностей, принцип суперпозиции). Смысл условия нормировки волновой функции.
20. Общее уравнение Шредингера. Уравнение Шредингера для стационарных состояний и его решения для частицы массы  $m$  в одномерной потенциальной яме ширины  $l$  с бесконечно высокими стенками. Значения энергии частицы.
21. Принцип причинности в квантовой механике. Движение свободной частицы.
- 22\*. Напишите уравнение Шредингера для стационарных состояний и его решение для частицы массы  $m$  в одномерной потенциальной яме ширины  $l$  с бесконечно высокими стенками. Покажите, что в стационарных состояниях на ширине ямы укладывается целое число длин волн де Бройля частицы.
23. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер. Туннельный эффект в квантовой механике. Коэффициент прозрачности. Примеры физических явлений, в которых он реализуется.
- 24\*. Линейный гармонический осциллятор. Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора в квантовой механике. Значения энергии осциллятора. Энергия нулевых колебаний. В чем отличие квантово-механического и классического описания гармонического осциллятора?
- 25\*. Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром, обладающим зарядом  $Ze$ . Напишите уравнение Шредингера, учитывающее значение потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром, обладающим зарядом  $Ze$ , и его решение для электрона в атоме водорода в основном состоянии.
- 26\*. Уравнение Шредингера, учитывающее значение потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром, обладающим зарядом  $Ze$ , и его решение для электрона в атоме водорода в основном состоянии. Энергия ионизации атома водорода. Главное квантовое число. Орбитальное и магнитное квантовые числа. Радиальная плотность вероятности  $\rho$ . Нарисуйте график  $\rho(r)$  для  $n = 1$ .



- 27\*. Представление волновой функции, являющейся решением уравнения Шредингера для электрона в атоме водорода, в виде произведения радиальной и угловой частей. Квантование момента импульса. Орбитальное и магнитное квантовые числа.
28. Механический и магнитный моменты орбитального движения электрона в атоме и их проекции на направление внешнего поля. Магнетон Бора  $\mu_B$ . Гиромагнитное отношение для орбитального движения электрона.
- 29\*. Опыты Штерна и Герлаха. Спин электрона. Собственный магнитный момент  $\vec{p}_{ms}$  электрона. Спиновое квантовое число  $s$ . Магнитное спиновое квантовое число  $m_s$ . Проекция спина на направление внешнего магнитного поля  $L_{sz}$ .
- 30\*. Спин и собственный магнитный момент электрона и их проекции на направление внешнего поля. Квантовые числа  $n, l, m_l, m_s$  и их связь с физическими характеристиками состояния электрона.
- 31\*. Квантовые числа  $n, l, m_l, m_s$ . Максимальное число электронов, находящихся в состояниях, определяемых главным квантовым числом  $n$ .
- 32\*. Принцип Паули [ $Z(n, l, m_l, m_s) = 0$  или  $1$ ]. Последовательность заполнения электронами энергетических оболочек атомов. Нарушения этой последовательности.
- 33\*. Принцип Паули. Формула электронной конфигурации атомов. Максимальное число электронов в оболочках  $K, L, M, N$ . Периодическая система элементов Д.И. Менделеева.
34. Молекулы. Ионная и ковалентная типы химических связей. Понятие об энергетических уровнях.
35. Квантовая статистика. Фазовое пространство. Каноническое распределение Гиббса в квантовой статистике.
- 36\*. Квантовая статистика Бозе – Эйнштейна («бозе-газ»; распределение бозонов по энергиям). Квантовая статистика Ферми – Дирака («ферми-газ»; распределение фермионов по энергиям). Параметр и температура вырождения.
- 37\*. Вырожденный электронный газ в металлах. Распределение Ферми – Дирака. Графики функции распределения при  $T = 0$  К и  $T \neq 0$  К. Энергия Ферми и энергетический уровень Ферми. Температура вырождения.
- 38\*. Распределение Ферми – Дирака и модель свободных электронов в металлах. Вид функции распределения и ее график при  $T = 0$  К и  $T \neq 0$  К. Энергия Ферми и энергетический уровень Ферми.
39. Распределение Ферми – Дирака и модель свободных электронов в металлах. Найдите вероятность нахождения на уровне Ферми одного электрона.
- 40\*. Теплоемкость электронного газа в металлах. Фононы. Применение статистики Бозе – Эйнштейна к фононному газу. Температура Дебая ( $T_D$ ).

41\*. Используя распределение Ферми – Дирака по энергиям для концентрации свободных электронов в металле, при температуре близкой к абсолютному нулю

$$dn(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE \quad (E < E_F), \text{ найдите их среднюю энергию.}$$

42\*. Низкотемпературная сверхпроводимость и механизм ее возникновения. Куперовские пары. Высокотемпературная сверхпроводимость.

43\*. Понятие о зонной теории твердых тел. Образование энергетических зон в кристаллах. Разрешенные и запрещенные зоны. Металлы, диэлектрики и полупроводники по зонной теории.

44\*. Собственные полупроводники и их проводимость (*электронная проводимость* или проводимость *n*-типа; *дырочная проводимость* или проводимость *p*-типа). Нарисуйте схему энергетических зон. Энергия активации. Уровень Ферми в собственном полупроводнике. График зависимости удельной проводимости собственных полупроводников ( $\ln\sigma$ ) от температуры ( $1/T$ ).

45. Полупроводники с *акцепторной примесью* и их проводимость. Нарисуйте схемы энергетических зон и расположение примесных уровней. Положение уровня Ферми при  $T = 0$  К.

46. Полупроводники с *донорной примесью* и их проводимость. Нарисуйте схемы энергетических зон и расположение примесных уровней. Положение уровня Ферми при  $T = 0$  К.

47. Зависимость проводимости  $\sigma$  собственных полупроводников от температуры. Графики  $\sigma = \sigma(T)$  и  $\ln\sigma = f(1/T)$ . Определение по графику ширины запрещенной зоны.

48. Зависимость проводимости  $\sigma$  примесных полупроводников от температуры. Графики  $\sigma = \sigma(T)$  и  $\ln\sigma = f(1/T)$ . Качественное объяснение различных участков на графике.

49. Фотопроводимость полупроводников. Собственная и примесная фотопроводимости. Красная граница фотопроводимости.

50\*. Контакт двух полупроводников с различным типом проводимости, *p-n*-переход и его вольтамперная характеристика. Полупроводниковые приборы (диоды и триоды).

51\*. Изменение высоты потенциального барьера *p-n*-перехода при подаче прямого и обратного напряжения.

52. Зависимость удельного сопротивления металлов  $\rho$  от температуры. График зависимости  $\rho(T)$  и ее объяснение в квантовой физике.

53\*. Контакт двух металлов по зонной теории. Экспериментальные законы Вольта.

54. Внешняя и внутренняя контактная разности потенциалов. Явление Зеебека. Явление Пельтье. Явление Томсона.

55. Размер, состав и заряд атомного ядра. Нуклоны. Массовое и зарядовое числа. Изотопы и изобары. Радиус атомного ядра.
56. Дефект массы и энергия связи атомных ядер. Удельная энергия связи. Магические и дважды магические ядра.
- 57\*. Собственный момент импульса ядра – спин ядра  $L_{я}$ . Спиновое ядерное квантовое число (*спин ядра*).
- 58\*. Магнитный момент  $p_{тя}$  ядра. Ядерный магнетон  $\mu_{я}$ . Характеристики протона и нейтрона.
59. Радиус атомного ядра. Оцените плотность ядерного вещества.
60. Ядерные силы и их свойства. Капельная и оболочечная модели ядра.
61. Устойчивость атомных ядер. График зависимости числа нейтронов от числа протонов в ядрах и ее качественное объяснение.
62. Радиоактивное излучение. Радиоактивность. Типы радиоактивного излучения.
63. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Период полураспада  $T_{1/2}$ . Среднее время жизни  $\tau$  радиоактивного ядра.
64. Активность  $A$  нуклида и ее единица (беккерель [Бк]) и внесистемная единица активности – кюри [Ки]. Правила смещения для  $\alpha$ - и  $\beta$ -распада.
65. Радиоактивность. Графики зависимости числа нераспавшихся и распавшихся ядер от времени. Статистический характер радиоактивного распада.
- 66\*. Закономерности  $\alpha$ -распада. Квантово-механическое объяснение закономерностей  $\alpha$ -распада.
- 67\*.  $\beta^-$ -распад и его схема. Нейтрино. Особенности распределения электронов по энергиям при  $\beta^-$ -распаде. Антинейтрино.
- 68\*. Гамма-излучение и его свойства. Поглощенная доза излучения и ее единица – грей [Гр]. Экспозиционная доза излучения и ее единица – кулон на килограмм [Кл/кг].
69. Биологическая доза и ее единица – бэр [бэр]. Мощность дозы излучения: а) мощность поглощенной дозы и ее единица – грей на секунду [Гр/с]; б) мощность экспозиционной дозы и ее единица – ампер на килограмм [А/кг].
70. Методы наблюдения и регистрации радиоактивных излучений и частиц.
71. Ядерные реакции. Эффективное сечение и его единица – барн [барн]. Основные типы ядерных реакций (экзотермические и эндотермические ядерные реакции).
72. Характерное ядерное время. Признаки классификации ядерных реакций.
73. Позитрон.  $\beta^+$ -распад и его схема. Электронный захват (*e-захват*).
74. Открытие нейтрона. Ядерные реакции под действием нейтронов.
75. Реакции деления ядра. Реакции деления ядра урана.

76. Ядерные реакции и законы сохранения. Энергия ядерной реакции.
77. Особенности реакции деления тяжелых ядер. Энергия, выделяющаяся при делении ядра урана. Распределение продуктов реакции по энергии.
- 78\*. Цепная реакция деления. Минимальные размеры активной зоны (*критические размеры*). Минимальная масса делящегося вещества (*критическая масса*). Развивающаяся, самоподдерживающаяся и затухающая реакции деления. Управляемые и неуправляемые цепные реакции деления.
79. Ядерная энергетика. Ядерные реакторы. Принципы действия ядерных реакторов.
- 80\*. Реакция синтеза атомных ядер. Термоядерные реакции. Энергия реакции. Кулоновский барьер. Проблемы управляемого термоядерного (синтеза) реактора.
81. Космическое излучение. Первичное и вторичное космическое излучения.
82. Мюоны и их свойства. Схемы распада мюонов.
- 83\*.  $\pi$ -мезоны (пионы) и их свойства. Схемы распада заряженных пионов.  $K$ -мезоны и их схемы распада.
- 84\*. Типы взаимодействия заряженных частиц. Фотоны, лептоны и адроны. Частицы и античастицы.
- 85\*. Классификация элементарных частиц (фотоны, лептоны, адроны). Кварки.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### 1. Таблица производных, интегралов и некоторых тригонометрических формул

Функция	Производная	Функция	Производная	Функция	Производная
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$e^x$	$e^x$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$e^{nx}$	$ne^{nx}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - v'u}{v^2}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$			$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$			$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$		
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$			$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$		
$\int \sin x dx = -\cos x$			$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$		
$\int \cos x dx = \sin x$			$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$		
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x$			$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$		
$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \sqrt{\pi/2}, & n=1/2 \\ 1, & n=1 \\ 2, & n=2 \end{cases}$	$n=0$	$\int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx = \begin{cases} \sqrt{\pi/2}, & n=0 \\ 1/2, & n=1 \\ \sqrt{\pi/4}, & n=2 \\ 1/2, & n=3 \end{cases}$	$n=0$		
	$n=1/2$		$n=1$		
	$n=1$		$n=2$		
	$n=2$		$n=3$		
$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 2,31, & n=1/2 \\ \pi^2/6, & n=1 \\ 2,405, & n=2 \\ \pi^4/15, & n=3 \\ 24,9, & n=4 \end{cases}$	$n=1/2$	$\int_0^\alpha \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 0,225, & \alpha=1 \\ 1,18, & \alpha=2 \\ 2,56, & \alpha=3 \\ 4,91, & \alpha=5 \\ 6,43, & \alpha=10 \end{cases}$	$\alpha=1$		
	$n=1$		$\alpha=2$		
	$n=2$		$\alpha=3$		
	$n=3$		$\alpha=5$		
	$n=4$		$\alpha=10$		
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$		$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$			
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$		$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$			
$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$		$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$			

## 2. Обозначения и названия некоторых единиц

№ п/п	Обозначение и название единицы	№ п/п	Обозначение и название единицы	№ п/п	Обозначение и название единицы
1.	А – ампер	14.	дин – дина	27.	Н – ньютон
2.	Å – ангстрем	15.	Дж – джоуль	28.	П – пауз
3.	а. е. м. – атомная единица массы	16.	дптр – диоптрия	29.	Па – паскаль
4.	Б – бел	17.	К – кельвин	30.	рад – радиан
5.	б – барн	18.	кал – калория	31.	с – секунда
6.	Бк – беккерель	19.	кд – кандела	32.	См – сименс
7.	В – вольт	20.	Кл – кулон	33.	ср –стерадиан
8.	Вб – вебер	21.	л – литр	34.	Тл – тесла
9.	Вт – ватт	22.	лк – люкс	35.	Ф – фарад
10.	Гн – генри	23.	лм – люмен	36.	ч – час
11.	г – грамм	24.	м – метр	37.	Э – эрстед
12.	Гс – гаусс	25.	мин – минута	38.	эВ – электрон-вольт
13.	Гц – герц	26.	Мкс – максвелл	39.	

## 3. Десятичные приставки к названиям единиц

1.	Э – экса, $10^{18}$	6.	к – кило, $10^3$	11.	мк – микро, $10^{-6}$
2.	П – пета, $10^{15}$	7.	г – гекто, $10^2$	12.	н – нано, $10^{-9}$
3.	Т – тера, $10^{12}$	8.	д – деци, $10^{-1}$	13.	п – пико, $10^{-12}$
4.	Г – гига, $10^9$	9.	с – санти, $10^{-2}$	14.	ф – фемто, $10^{-15}$
5.	М – мега, $10^6$	10.	м – милли, $10^{-3}$	15.	а – атто, $10^{-18}$

## 4. Единицы величин в СИ

№ п/п	Величина	Единица величины в СИ	№ п/п	Величина	Единица величины в СИ
1.	Длина	м	24.	Электрический заряд	Кл
2.	Время	с	25.	Потенциал	В
3.	Скорость	м/с	26.	Напряженность электрического поля	В/м
4.	Ускорение	м/с <sup>2</sup>	27.	Электрическое смещение	Кл/м <sup>2</sup>
5.	Частота колебаний	Гц	28.	Электрический момент диполя	Кл · м <sup>2</sup>
6.	Круговая частота	с <sup>-1</sup>	29.	Поляризованность	Кл/м <sup>2</sup>
7.	Угловая скорость	рад/с	30.	Электрическая емкость	Ф
8.	Угловое ускорение	рад/с <sup>2</sup>	31.	Сила тока	А
9.	Масса	кг	32.	Плотность тока	А/м <sup>2</sup>
10.	Плотность	кг/м <sup>3</sup>	33.	Электрическое сопротивление	Ом
11.	Сила	Н	34.	Удельное сопротивление	Ом · м
12.	Давление, напряжение	Па	35.	Электрическая проводимость	См
13.	Импульс	кг · м/с	36.	Магнитная индукция	Тл
14.	Момент силы	Н · м	37.	Магнитный поток	Вб
15.	Энергия, работа	Дж	38.	Напряженность магнитного поля	А/м
16.	Мощность	Вт	39.	Магнитный момент	А · м <sup>2</sup>

17.	Плотность потока энергии	Вт/м <sup>2</sup>	40.	Намагниченность	А/м
18.	Момент импульса	кг · м <sup>2</sup> /с	41.	Индуктивность	Гн
19.	Момент инерции	кг · м <sup>2</sup>	42.	Сила света	кд
20.	Вязкость	Па · с	43.	Световой поток	лм
21.	Температура	К	44.	Освещенность	лк
22.	Теплоемкость	Дж/К	45.	Светимость	лм/м <sup>2</sup>
23.	Энтропия	Дж/К	46.	Яркость	кд/м <sup>2</sup>

### 5. Некоторые внесистемные единицы

1.	1 сут = 86400 с	7.	1 мм рт. ст. = 133,3 Па
2.	1 год = 365,25 сут = 3,16 · 10 <sup>7</sup> с	8.	1 Å = 10 <sup>-10</sup> м
3.	1° = 1,75 · 10 <sup>-2</sup> рад	9.	1 кал = 4,18 Дж
4.	1' = 2,91 · 10 <sup>-4</sup> рад; 1'' = 4,85 · 10 <sup>-6</sup> рад	10.	1 эВ = 1,6 · 10 <sup>-19</sup> Дж = 1,6 · 10 <sup>-12</sup> эрг
5.	1 атм = 1013 кПа = 760 мм рт. ст.	11.	1 а. е. м. = 1,66 · 10 <sup>-27</sup> кг = 931,5 МэВ
6.	1 бар = 100 кПа (точно)	12.	1 Ки (кюри) = 3,70 · 10 <sup>10</sup> Бк

### 6. Основные физические постоянные (округленные значения)

№ п/п	Физическая постоянная	Обозначение	Числовое значение
1.	Нормальное ускорение свободного падения	<i>g</i>	9,81 м/с <sup>2</sup>
2.	Гравитационная постоянная	<i>G</i>	6,67 · 10 <sup>-11</sup> м <sup>3</sup> /(кг · с <sup>2</sup> )
3.	Скорость света в вакууме	<i>c</i>	3 · 10 <sup>8</sup> м/с
4.	Молярная газовая постоянная	<i>R</i>	8,31 Дж/(моль · К)
5.	Постоянная Авогадро	<i>N<sub>A</sub></i>	6,022 · 10 <sup>23</sup> моль <sup>-1</sup>
6.	Постоянная Больцмана	<i>k</i>	1,38 · 10 <sup>-23</sup> Дж/К
7.	Элементарный заряд	<i>e</i>	1,6 · 10 <sup>-19</sup> Кл
8.	Масса покоя электрона	<i>m<sub>e</sub></i>	9,11 · 10 <sup>-31</sup> кг
9.	Масса покоя протона	<i>m<sub>p</sub></i>	1,672 · 10 <sup>-27</sup> кг
10.	Масса покоя нейтрона	<i>m<sub>n</sub></i>	1,675 · 10 <sup>-27</sup> кг
11.	Удельный заряд электрона	<i>e/m<sub>e</sub></i>	1,76 · 10 <sup>11</sup> Кл/кг
12.	Объем 1 моль идеального газа при н.у. ( <i>T<sub>0</sub></i> = 273,15 К, <i>p<sub>0</sub></i> = 101325 Па)	<i>V<sub>0</sub></i>	22,41 · 10 <sup>-3</sup> м <sup>3</sup> /моль
13.	Число Лошмидта	<i>N<sub>L</sub></i>	2,68 · 10 <sup>25</sup> м <sup>-3</sup>
14.	Постоянная Планка	<i>h</i>	6,63 · 10 <sup>-34</sup> Дж · с
15.	Атомная единица массы	<i>a. е. м.</i>	1,66 · 10 <sup>-27</sup> кг
16.	Энергия, соответствующая 1 а. е. м.		931,50 МэВ
17.	Электрическая постоянная	<i>ε<sub>0</sub></i>	8,85 · 10 <sup>-12</sup> Ф/м
18.	Магнитная постоянная	<i>μ<sub>0</sub></i>	4π · 10 <sup>-7</sup> Гн/м
19.	Первый борковский радиус	<i>a<sub>0</sub></i>	5,28 · 10 <sup>-11</sup> м
20.	Энергия покоя электрона	<i>E<sub>0</sub></i>	0,511 МэВ

### 7. Некоторые астрономические величины

№ n/n	Астрономическая величина	Числовое значение
1.	Радиус Земли (среднее значение)	$6,37 \cdot 10^6$ м
2.	Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24}$ кг
3.	Радиус Солнца (среднее значение)	$6,95 \cdot 10^8$ м
4.	Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30}$ кг
5.	Радиус Луны (среднее значение)	$1,74 \cdot 10^6$ м
6.	Масса Луны	$7,33 \cdot 10^{22}$ кг
7.	Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1,49 \cdot 10^{11}$ м
8.	Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3,84 \cdot 10^8$ м
9.	Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин
10.	Радиус Марса (среднее значение)	$3,39 \cdot 10^6$ м
11.	Масса Марса	$6,42 \cdot 10^{23}$ кг
12.	Расстояние от центра Марса до центра Солнца	$2,28 \cdot 10^{11}$ м

### 8. Плотность некоторых жидкостей, $10^3$ кг/м<sup>3</sup>

№ n/n	Название жидкости	Плотность
1.	Вода (при температуре 4 °С)	1,00
2.	Глицерин	1,26
3.	Керосин	0,80
4.	Масло машинное	0,90
5.	Ртуть (при 0 °С)	13,596
6.	Спирт этиловый (при 20 °С)	0,789
7.	Спирт метиловый (при 20 °С)	0,793

### 9. Плотность газов (при нормальных условиях), кг/м<sup>3</sup>

№ n/n	Название газа	Плотность
1.	Азот	1,25
2.	Аргон	1,28
3.	Водород	0,09
4.	Воздух	1,29
5.	Гелий	0,18
6.	Кислород	1,43
7.	Метан	0,72
8.	Углекислый газ	1,98
9.	Хлор	3,21

### 10. Плотность твердых тел, $10^3$ кг/м<sup>3</sup>

№ n/n	Название твердого тела	Плотность
1.	Алюминий	2,70
2.	Вольфрам	19,25
3.	Железо	7,87
4.	Кобальт	8,90
5.	Лёд (при температуре -20 °С)	0,92



Продолжение таблицы 10

6.	Медь	8,94
7.	Никель	8,90
8.	Нихром	8,40
9.	Фарфор	2,3 – 2,5
10.	Цинк	7,14

### 11. Эффективный диаметр молекулы газов, нм

№ п/п	Название газа	Эффективный диаметр
1.	Азот	0,31
2.	Аргон	0,35
3.	Водород	0,27
4.	Воздух	0,37
5.	Гелий	0,19
6.	Кислород	0,35
7.	Неон	0,24
8.	Углекислый газ	0,40
9.	Хлор	0,37
10.	Этан	0,54

### 12. Удельная теплота плавления, 10<sup>3</sup> Дж/кг

№ п/п	Название твердого тела	Удельная теплота плавления
1.	Алюминий	393
2.	Вольфрам	184
3.	Железо	270
4.	Золото	67
5.	Лёд	330
6.	Медь	213
7.	Натрий	113
8.	Олово	59
9.	Парафин	150
10.	Свинец	24,3

### 13. Удельная теплота парообразования, 10<sup>3</sup> Дж/кг (при температуре кипения и нормальном атмосферном давлении)

№ п/п	Название жидкости	Удельная теплота парообразования
1.	Азот жидкий	201
2.	Бензин	230–310
3.	Вода	2260
4.	Водород жидкий	450
5.	Воздух	197
6.	Гелий жидкий	23
7.	Керосин	209–230
8.	Кислород жидкий	214
9.	Ртуть	293
10.	Спирт этиловый	906
11.	Эфир этиловый	356

#### 14. Удельная теплоемкость, Дж/(кг · К)

(В таблице даны значения удельной теплоемкости некоторых распространенных металлов и сплавов при температуре 20 °С и удельные теплоемкости  $c_p$  распространенных жидкостей при температуре 10–25 °С и нормальном атмосферном давлении)

№ п/п	Название вещества	Удельная теплоемкость
1.	Алюминий	897
2.	Вода	4182
3.	Вольфрам	134
4.	Бензин	2090
5.	Глицерин $C_3H_5(OH)_3$	2430
6.	Керосин	2085–2220
7.	Лёд при температуре $\theta$ °С	2150
8.	Масло трансформаторное	1680
9.	Масло хлопковое	1737
10.	Медь	383
11.	Нефть	2100
12.	Нихром	460
13.	Ртуть	139
14.	Свинец	128
15.	Серебро	235
16.	Спирт метиловый (метанол) $CH_3OH$	2470
17.	Спирт этиловый (этанол) $C_2H_5OH$	2470
18.	Сталь углеродистая	468
19.	Цинк	385
20.	Эфир этиловый $C_4H_{10}O$	2340

#### 15. Постоянные Ван-дер-Ваальса

№ п/п	Газ	$a, Н \cdot м^4/моль^2$	$b, 10^{-5} м^3/моль$
1.	Азот	0,1412	3,862
2.	Аммиак	0,42257	3,707
3.	Аргон	0,1363	3,221
4.	Вода (пары)	0,5541	3,041
5.	Водород	0,0245	2,665
6.	Воздух	1,3078	11,413
7.	Гелий	0,00346	2,361
8.	Кислород	0,1358	3,167
9.	Криптон	0,2354	3,978
10.	Неон	0,2088	1,697
11.	Окись азота	0,1438	2,886
12.	Окись углерода	0,1454	3,949
13.	Метан	0,2256	4,272
14.	Углекислый газ	0,3641	4,284
15.	Хлор	0,6497	5,624
16.	Этан	0,5427	6,419

### 16. Коэффициент поверхностного натяжения жидкостей, мН/м (при 20 °С)

№ п/п	Жидкость	Коэффициент поверхностного натяжения
1.	Вода	72,5
2.	Бензин	21
3.	Керосин	24
4.	Мыльный раствор	40
5.	Молоко	46
6.	Нефть	30
7.	Ртуть	472
8.	Спирт этиловый	22
9.	Эфир этиловый при 25 °С, газовая среда: воздух	17

### 17. Коэффициент теплопроводности $\chi$ некоторых веществ, Вт/(м · К)

№ п/п	Вещество	$\chi$	№ п/п	Вещество	$\chi$
1.	Алебастровые плиты	0,48	13.	Каучук натуральный	0,042
2.	Бетон на песке	0,72	14.	Керамзитобетон	0,2
3.	Бумага	0,14	15.	Кирпич пустотелый	0,44
4.	Вата хлопковая	0,055	16.	Кирпич силикатный	0,81
5.	Войлок шерстяной	0,045	17.	Латунь	110
6.	Воздух ( $p = 760$ мм рт. ст., $t = 0$ °С)	0,0237	18.	Медь	380
7.	Гипс строительный	0,35	19.	ПВХ	0,19
8.	Гранит, базальт	3,5	20.	Резина	0,15
9.	Древесина твердых пород	0,2	21.	Сталь	52
10.	Дюралюминий	160	22.	Стекло	1,15
11.	Железобетон	1,7	23.	Чугун	56
12.	Камень	1,4	24.	Эбонит	0,16

### 18. Динамическая вязкость $\eta$ некоторых веществ при температуре 25 °С, $10^{-3}$ Па · с

№ п/п	Вещество	$\eta$	№ п/п	Вещество	$\eta$
1.	Анилин	3,847	9.	Глицерин при $t = 20$ °С	12100
2.	Ацетон	0,306	10.	Глицерин при $t = 25$ °С	934
3.	Бензол	0,604	11.	Глицерин при $t = 100$ °С	14,8
4.	Бром	0,944	12.	Нитробензол	1,863
5.	Вода при $t = 0$ °С	1,793	13.	Ртуть	1,526
6.	Вода при $t = 20$ °С	1,004	14.	Уксусная кислота	1,056
7.	Вода при $t = 25$ °С	0,890	15.	Фенол при $t = 50$ °С	3,437
8.	Вода при $t = 100$ °С	0,282	16.	Этанол	1,074

### 19. Коэффициент диффузии $D$ газов и паров, см<sup>2</sup>/с

№ п/п	Газы и (пары)	$t, ^\circ\text{C}$	$D$	№ п/п	Газы и (пары)	$t, ^\circ\text{C}$	$D$
1.	Аргон – гелий	15	0,70	9.	Кислород – азот	12,5	0,20
2.	Водород – азот	12,5	0,73	10.	Бензол – водород	0	0,29
3.	Водород – воздух	0	0,64	11.	Бензол – кислород	0	0,18
4.	Водород – кислород	0	0,69	12.	Спирт метиловый – водород	0	0,50
5.	Водород – кислород	14	0,77	13.	Спирт метиловый – воздух	0	0,13
6.	Воздух – водяной пар	0	0,22	14.	Спирт метиловый – кислород	0	0,18
7.	Воздух – водяной пар	15	0,26	15.	Спирт этиловый – водород	0	0,37
8.	Кислород – азот	0	0,18	16.	Спирт этиловый – воздух	0	0,10

### 20. Диэлектрические проницаемости различных веществ

№ п/п	Диэлектрик	$\epsilon$	№ п/п	Диэлектрик	$\epsilon$
1.	Алмаз	5,7	18.	Лед (водяной лед, при – 5 °С)	73
2.	Аммиак (жидкий; –33 °С)	16,90– 22,4	19.	Масло вазелиновое	2,0
3.	Бензин	2	20.	Масло трансформаторное	2,2
4.	Бензол (20°С– 25°С)	2,23 – 2,27	21.	Масло касторовое	4,6 – 4,8
5.	Бетон	4,5	22.	Мрамор	7,0 – 8,0
6.	Битум	2,5 – 3,0	23.	Парафин	2,0 – 2,3
7.	Бумага	2,0 – 3,5	24.	Плексиглас	3,5
8.	Вода (при +20 °С)	81	25.	Полиэтилен	2,3
9.	Воздух	1,0001959	26.	Резина	7,0
10.	Воск	7,8	27.	Слюда	7,5
11.	Германий	16 – 16,4	28.	Соль, NaCl	5,9
12.	Каучук	2,4	29.	Спирт	26
13.	Кварц	3,5 – 4,5	30.	Стекло	3,8 – 19,0
14.	Керосин	2,1	31.	Текстолит	7,5
15.	Каменная соль	6,3	32.	Фарфор	4,4 – 4,7
16.	Кремний	11,7	33.	Эбонит	2,5 – 4,0
17.	Керамика конденсаторная	10 – 200	34.	Янтарь	2,6 – 2,8

## 21. Удельные сопротивления проводников и изоляторов

№ п/п	Проводники	Удельное сопротивление (в диапазоне от 0 до 100 °C) $\rho$ , $10^{-8}$ Ом · м	Температур- ный коэффи- циент $\alpha$ , $10^{-3}$ К <sup>-1</sup>	№ п/п	Изоляторы	Удельное сопро- тивление (при 20 °C) $\rho$ , Ом · м
1.	Алюминий	2,6	4,2	1.	Битум	$10^{13} - 10^{14}$
2.	Вольфрам	5,5	5,1	2.	Бумага	$10^{10}$
3.	Железо	9,71	6,5	3.	Вода	$10^{10}$
4.	Золото	2,3	3,9	4.	Воск пче- линый	$10^{11} - 10^{12}$
5.	Иридий	4,74	3,9	5.	Гетинакс	$10^8 - 10^9$
6.	Магний	4,5	3,8	6.	Канифоль	$10^{12} - 10^{13}$
7.	Медь	1,75	4,3	7.	Мрамор	$10^5 - 10^9$
8.	Молибден	5,9	4,6	8.	Парафин	$10^{14} - 10^{16}$
9.	Натрий	4,7	5,0	9.	Полистирол	$10^{13} - 10^{15}$
10.	Никель	8,7	6,5	10.	Резина	$10^{13}$
11.	Олово	12,8	4,4	11.	Слюда	$10^{13} - 10^{16}$
12.	Платина	10,7	3,9	12.	Стекло	$10^6 - 10^{15}$
13.	Ртуть	95,8	0,9	13.	Текстолит	$10^8 - 10^9$
14.	Свинец	20,6	3,7	14.	Фарфор	$10^{13}$
15.	Серебро	1,6	4,1	15.	Эбонит	$(2,6 - 8,4) \cdot 10^{14}$
16.	Цинк	5,4	4,2	16.	Янтарь	$10^{17}$

## 22. Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

№ п/п	Парамагнетики	$\mu - 1, 10^{-6}$	№ п/п	Диамагнетики	$\mu - 1, 10^{-6}$
1.	Азот	0,013	1.	Водород	-0,063
2.	Воздух	0,38	2.	Бензол	-7,5
3.	Кислород	1,9	3.	Вода	-9,0
4.	Эбонит	14	4.	Медь	-10,3
5.	Алюминий	23	5.	Стекло	-12,6
6.	Вольфрам	176	6.	Каменная соль	-12,6
7.	Платина	360	7.	Кварц	-15,1
8.	Жидкий кислород	3400	8.	Висмут	-176

## 23. Температура Кюри $T_C$ ферромагнетиков

Мате- риал	Fe, железо	Co, кобальт	Ni, никель	Gd, гадоли- ний	Dy, диспрозий	Ho, гольмий	Tb, тербий	Er, эрбий
Темпе- ратура Кюри, К	1043	1403	631	289	87	20	25	19,6

## 24. Скорость звука в различных средах

### а) газы

Газы			
№ п/п	Вещество	$v$ , м/с	$dv/dT$ , м/(с · К)
1.	Азот	333,64	0,85
2.	Аммиак	415,0	0,73
3.	Аргон	319,0	-
4.	Водород	1286,0	2,0
5.	Воздух (сухой, 0,03 % $CO_2$ по объему)	331,46	0,607
6.	Гелий	970	1,55
7.	Кислород	314,84	0,57
8.	Метан	430	0,62
9.	Неон	435	0,78
10.	Пары воды (100 °С)	405	-
11.	Углекислый газ	260,3	0,87

### б) жидкости

Жидкости				
№ п/п	Вещество	$t$ , °С	$v$ , м/с	$dv/dT$ , м/(с · К)
1.	Азот	-199,0	962	-10
2.	Анилин	20	1659	-4,0
3.	Ацетон	25	1170	-5,5
4.	Бензол	25	1295	-5,2
5.	Вода	25	1497	+2,5
6.	Глицерин	26	1930	-1,8
7.	Керосин	25	1315	-3,6
8.	Ртуть	20	1451	-0,46
9.	Сероуглерод	25	1149	-3,3
10.	Скипидар	25	1225	-
11.	Спирт этиловый	20	1177	-3,6
12.	Толуол	25	1300	-4,3
13.	Углерод четыреххлористый	25	930	-3,0

### в) твердые тела

Твердые тела				
№ п/п	Вещество	$v_{  }$ , м/с	$v_{\perp}$ , м/с	$v$
1.	Алюминий	6400	3130	5240
2.	Бетон	4250–5250	-	-
3.	Вольфрам	5174	2842	-
4.	Гранит	5400	-	-
5.	Дерево (дуб, вдоль волокна)	-	-	4100
6.	Дерево (сосна, вдоль волокна)	-	-	3600
7.	Дюралюминий	6400	3120	-
8.	Железо	5930	-	5170

9.	Кварц кристаллический (Х-срез)	5720	-	5440
10.	Кварц плавленный	5980	3760	5760
11.	Латунь	4280–4700	2020–2110	3130–3450
12.	Медь (отожженная)	4720	-	3790
13.	Мрамор	-	-	3810
14.	Никель (отожженный, немагнитный)	-	-	4810
15.	Олово	3320	-	2730
16.	Полистирол	2350	1120	-
17.	Полиэтилен	2000	-	-
18.	Серебро	3700	1694	2802
19.	Стекло крон	5260–6120	3050–3550	4710–5300
20.	Стекло флинт	3760–4800	-	3490–4550
21.	Сталь инструмент.	5900–6100	-	5150
22.	Сталь нержавеющая	5740	3092	-
23.	Цинк	4170	-	3810
24.	Эбонит	2500	-	-

### 25. Показатели преломления веществ относительно воздуха

№ п/п	Вещество	<i>n</i>	№ п/п	Вещество	<i>n</i>
1.	Воздух	1,0	1.	Бензол	1,5
2.	Пары ртути	1,001	2.	Органическое стекло	1,5
3.	Лед	1,31	3.	Кедровое масло (при 20 °С)	1,52
4.	Вода (при 20 °С)	1,333	4.	Каменная соль	1,54
5.	Эфир	1,35	5.	Кварц	1,54
6.	Ацетон	1,36	6.	Сахар	1,56
7.	Спирт	1,36	7.	Слюда	1,58
8.	Серная кислота	1,43	8.	Сероуглерод (при 20 °С)	1,63
9.	Подсолнечное масло	1,47	9.	Рубин	1,76
10.	Глицерин	1,47	10.	Алмаз	2,417
11.	Скипидар	1,47	11.	Стекло (обычное)	1,48 – 1,53
12.	Касторовое масло	1,48	12.	Стекло (оптическое)	1,47 – 2,04

### 26. Показатели преломления *n* газов и жидкостей

№ п/п	Газы	<i>n</i>	№ п/п	Жидкости	<i>n</i>
1.	Азот	1,000298	1.	Ацетон (при 19,4 °С)	1,35886
2.	Аммиак	1,000379	2.	Бензол (при 20 °С)	1,50112
3.	Аргон	1,000281	3.	Бромформ (при 19 °С)	1,5980
4.	Водород	1,000132	4.	Бутиловый спирт (при 20 °С)	1,39931
5.	Воздух	1,000292	5.	Глицерин (при 20 °С)	1,4730
6.	Гелий	1,000035	6.	Диацетил (при 18 °С)	1,39331
7.	Кислород	1,000271	7.	Метилловый спирт (при 14,5 °С)	1,33118
8.	Неон	1,000067	8.	Муравьиная кислота (при 20 °С)	1,37137
9.	Окись углерода	1,000334	9.	Нитробензол (при 20 °С)	1,55291

10.	Сернистый газ	1,000686	10.	Толуол (при 20 °С)	1,49693
11.	Сероводород	1,000641	11.	Этил бромистый (при 20 °С)	1,42386
12.	Углекислота	1,000451	12.	Этил йодистый (при 20 °С)	1,5168
13.	Хлор	1,000768	13.	Этилбензол (при 20 °С)	1,4959
14.	Этилен	1,000719	14.	Этиловый спирт (при 18,2 °С)	1,36242
15.	Водяной пар	1,000255	15.	Этиловый эфир (при 20 °С)	1,3538

Примечание. 1. Показатели преломления зависят и от длины волны света, поэтому приведенные в таблице значения  $n$  следует рассматривать как условные.

2. В таблице даны значения коэффициентов преломления  $n$  газов при нормальных условиях для линии  $D$ , длина волны которой приближенно равна 5893 Å (желтая линия натрия).

3. В таблице даны значения коэффициентов преломления  $n$  жидкостей для луча с длиной волны, приближенно равной 5893 Å (желтая линия натрия).

### 27. Показатели преломления $n$ твердых тел

№ п/п	Твердые тела	$n$	№ п/п	Твердые тела	$n$
1.	Алмаз	1,4176	5.	Каменная соль	1,5443
2.	Известковый шпат (обыкн. л.)	1,6584	6.	Кварц плавленый	1,4585
3.	Известковый шпат (необыкн. л.)	1,4864	7.	Сильвин	1,4904
4.	Плавиновый шпат	1,4339	8.	Стекло обычное	1,5139

Примечание. В таблице даны значения коэффициента преломления твердых тел (кристаллов и стекла) при температуре 18 °С для луча с длиной волны, приближенно равной 5893 Å (желтая линия натрия).

### 28. Показатели преломления $n$ воды при температуре 20 °С в интервале длин волн приближенно от 3000 до 10000 Å

№ п/п	$\lambda$ (Å)	$n$	№ п/п	$\lambda$ (Å)	$n$	№ п/п	$\lambda$ (Å)	$n$
1.	3082	1,3567	4.	4861	1,3371	7.	6562	1,3311
2.	3611	1,3474	5.	5460	1,3345	8.	7682	1,3289
3.	4341	1,3403	6.	5893	1,3330	9.	10280	1,3245

### 29. Показатели преломления $n$ водных растворов сахара (при температуре 20 °С в зависимости от концентрации $c$ раствора ( $c$ показывает весовой процент сахара в растворе))

№ п/п	$c$ (%)	$n$	№ п/п	$c$ (%)	$n$
1.	0	1,3330	11.	35	1,3902
2.	2	1,3359	12.	40	1,3997
3.	4	1,3388	13.	45	1,4096
4.	6	1,3418	14.	50	1,4200
5.	8	1,3448	15.	55	1,4307
6.	10	1,3479	16.	60	1,4418
7.	15	1,3557	17.	65	1,4532
8.	20	1,3639	18.	70	1,4651
9.	25	1,3723	19.	75	1,4774
10.	30	1,3811	20.	80	1,4901



### 30. Работа выхода электрона из металлов

№ n/n	Металл	A, эВ	№ n/n	Металл	A, эВ	№ n/n	Металл	A, эВ
1.	Алюминий	3,74	7.	Калий	2,15	13.	Никель	4,84
2.	Барий	2,29	8.	Кобальт	4,25	14.	Платина	5,29
3.	Висмут	4,62	9.	Литий	2,39	15.	Серебро	4,28
4.	Вольфрам	4,50	10.	Медь	4,47	16.	Титан	3,92
5.	Железо	4,36	11.	Молибден	4,27	17.	Цезий	1,89
6.	Золото	4,58	12.	Натрий	2,27	18.	Цинк	3,74

### 31. Энергия (уровень) Ферми $E_F$ , эВ

Элемент	$E_F$	Элемент	$E_F$	Элемент	$E_F$	Элемент	$E_F$
Li	4,74	Au	5,53	Fe	11,1	In	8,63
Na	3,12	Be	14,3	Mn	10,9	Tl	8,15
K	2,12	Mg	7,08	Zn	9,47	Sn	10,2
Rb	1,85	Ca	4,69	Cd	7,47	Pb	9,47
Cs	1,59	Sr	3,93	Hg	7,13	Bi	9,90
Cu	7,00	Ba	3,64	Al	11,7	Sb	10,9
Ag	5,49	Nb	5,32	Ga	14,4	Ni	11,67
						Cr	6,92

### 32. Характеристические температуры Дебая ( $T_D$ ) некоторых простых веществ в кристаллическом состоянии

№ n/n	Вещество	$T_D$ , К	№ n/n	Вещество	$T_D$ , К
1.	Ag	215	14.	K	110
2.	Al	390	15.	Mg	350
3.	Au	170	16.	Mo	280
4.	B	1150	17.	Na	190
5.	Ba	115	18.	Ni	360
6.	Bi	80	19.	Pb	88
7.	Ca	230	20.	Pt	210
8.	Cd	135	21.	Sb	140
9.	Co	385	22.	Sn	110
10.	Cr	610	23.	Ti	410
11.	Cu	315	24.	U	140
12.	Fe	400	25.	W	300
13.	Ge	400	26.	Zn	210

### 33. Типы кристаллических решеток и периоды ( $a$ , $c$ ) решеток некоторых металлов

№ n/n	Металл	Кристалл. структура	Период ре- шетки, нм	№ n/n	Металл	Кристалл. структура	Период ре- шетки, нм
1.	Al	ГЦК	$a = 0,404$	9.	Ni	ГЦК	$a = 0,352$
2.	W	ОЦК	$a = 0,306$	10.	Sn	тетраг.	$a = 0,583$ $c = 0,318$
3.	Fe	ОЦК	$a = 0,286$	11.	Pt	ГЦК	$a = 0,392$
4.	Au	ГЦК	$a = 0,407$	12.	Pb	ГЦК	$a = 0,494$
5.	Co	гекц.	$a = 0,251$ $c = 0,407$	13.	Ag	ГЦК	$a = 0,408$
6.	Cu	ГЦК	$a = 0,361$	14.	Ta	ОЦК	$a = 0,330$
7.	Mo	ОЦК	$a = 0,314$	15.	Cr	ОЦК	$a = 0,288$
8.	Na	ОЦК	$a = 0,428$	16.	Zn	гекц.	$a = 0,266$ $c = 0,494$

### 34. Ширина запрещенной зоны некоторых полупроводников при $T = 300$ К

№ n/n	Полупроводник	$\Delta E$ , эВ	№ n/n	Полупроводник	$\Delta E$ , эВ
1.	B (бор)	1,1	11.	Te (теллур)	0,36
2.	C (углерод [алмаз])	5,6	12.	I (йод)	1,25
3.	Ge (германий)	0,67	13.	InSb (антимонид индия)	0,17
4.	Si (кремний)	1,12	14.	InAs (арсенид индия)	0,35
5.	$\alpha$ -Sn (олово)	0,08	15.	InP (фосфид индия)	1,26
6.	P (фосфор)	1,5	16.	GaSb (антимонид галлия)	0,67
7.	As (мышьяк)	1,2	17.	GaAs (арсенид галлия)	1,35
8.	Sb (сурьма)	0,12	18.	GaP (фосфид галлия)	2,24
9.	S (сера)	2,5	19.	AlSb (антимонид алюминия)	1,60
10.	Se (селен)	1,89	20.	AlP (фосфид алюминия)	2,45

### 35. Параметры некоторых полупроводников

№ n/n	Параметры	Si (кремний)	Ge (германий)	GaAs (арсе- нид галлия)
1.	Параметр решетки при $T = 300$ К, Å	5,430	5,658	5,554
2.	Расстояние между ближайшими соседними атомами, Å	2,85	2,45	2,45
3.	Число атомов в $1 \text{ м}^3$	$5 \cdot 10^{28}$	$4,42 \cdot 10^{28}$	$4,43 \cdot 10^{26}$
4.	Ширина запрещенной зоны: – при $T = 0$ К, эВ – при $T = 300$ К, эВ	1,21 1,105	0,756 0,665	1,52 1,43
5.	Эффективная масса электрона в единицах массы свободного электрона: – проводимости – плотности состояний в расчете на одну долину	0,22 0,33	0,12 0,26	0,043 – 0,071 0,043 – 0,071
6.	Эффективная масса дырки в единицах массы свободного электрона: – тяжелых дырок – легких дырок	0,49 0,16; 0,24	0,34 (0,28) 0,04; 0,08	0,50 – 0,68 0,12

	– плотности состояний	0,59 (0,55)	0,37 (0,39)	–
7.	Расчетная максимальная подвижность (для наиболее чистых кристаллов) электронов при $T = 300$ К, $\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$	0,190	0,395	1,10
8.	Расчетная максимальная подвижность дырок при $T = 300$ К, $\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$	0,043	0,190	0,045
9.	Концентрация электронов в собственном полупроводнике при $T = 300$ К, $\text{м}^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{16}$	$2,4 \cdot 10^{19}$	$1,4 \cdot 10^{14}$
10.	Удельное сопротивление собственного полупроводника: – при $t = 20$ °С, Ом · м – при $T = 300$ К, Ом · м	$3,86 \cdot 10^3$ $2,31 \cdot 10^3$	0,64 0,47	– $3,7 \cdot 10^6$

### 36. Значения параметров собственных полупроводников

№ n/n	Химический элемент	Молярная масса, кг/моль, $\cdot 10^{-3}$	Радиус атома, пм	Плотность при н. у., г/см <sup>3</sup>	Температура плавления, К	Удельная теплота плавления, кДж/моль	Молярная теплосемкость, Дж/(моль · К)	Температура Дебая, К	Теплопроводность при $T = 300$ К, Вт/(м · К)
1.	<sup>11</sup> <sub>5</sub> B	10,821	98	2,34	2348	23,60	11,09	1250	27,4
2.	<sup>12</sup> <sub>6</sub> C	12,0116	77	2,25	3873	50,2	8,54 (графит)	1860 (алмаз)	1,59
3.	<sup>28</sup> <sub>14</sub> Si	28,086	132	2,33	1688	50,6	20,16	645±5	149
4.	<sup>31</sup> <sub>15</sub> P	30,974	128	1,82	317,3	2,51	21,6		0,236
5.	<sup>32</sup> <sub>16</sub> S	32,076	127	2,07	386	1,23	22,61		0,27
6.	<sup>73</sup> <sub>32</sub> Ge	72,630	122,5	5,323	1210,6	36,8	23,32	360	60,2
7.	<sup>75</sup> <sub>33</sub> As	74,9216	139	5,73	1090	24,44	25,05	285	50,2
8.	<sup>79</sup> <sub>34</sub> Se	78,963	144	4,79	490	5,23	25,4	90	0,52
9.	<sup>119</sup> <sub>50</sub> Sn	18,710	162	7,31	505,06	7,19	27,11	170	66,8
10.	<sup>122</sup> <sub>51</sub> Sb	121,760	159	6,691	903,9	20,08	25,20	200	24,43
11.	<sup>128</sup> <sub>52</sub> Te	127,603	160	6,24	722,7	17,91	25,8		14,3
12.	<sup>127</sup> <sub>53</sub> I	126,905	136	4,93	386,65	15,52	54,44		0,45

### 37. Атомный номер и масса некоторых элементарных частиц и изотопов

№ n/n	Z	Название	Символ	$m$ , а. е. м.	№ n/n	Z	Название	Символ	$m$ , а. е. м.
1.	–	Электрон	e	0,0005485	7.	14	Кремний	<sup>28</sup> Si	27,9769
2.	–	Нейтрон	n	1,0086650	8.	26	Железо	<sup>56</sup> Fe	55,9349
3.	1	Протон	p	1,0072765	9.	30	Цинк	<sup>68</sup> Zn	67,9248
4.	1	Водород	<sup>1</sup> H	1,007825	10.	56	Барий	<sup>137</sup> Ba	136,058
5.	5	Бор	<sup>11</sup> B	11,0093	11.	82	Свинец	<sup>207</sup> Pb	206,9759
6.	10	Неон	<sup>20</sup> Ne	19,99244	12.	92	Уран	<sup>235</sup> U	235,04393

### 38. Край K-полосы поглощения

№ n/n	Z	Элемент	$\lambda_K$ , пм	№ n/n	Z	Элемент	$\lambda_K$ , пм
1.	23	V	226,8	8.	47	Ag	48,60
2.	26	Fe	174,1	9.	50	Sn	42,39
3.	27	Co	160,4	10.	74	W	17,85
4.	28	Ni	148,6	11.	78	Pt	15,85
5.	29	Cu	138,0	12.	79	Au	15,35
6.	30	Zn	128,4	13.	82	Pb	14,05
7.	42	Mo	61,9	14.	92	U	10,75

### 39. Массовые коэффициенты ослабления (рентгеновское излучение, узкий пучок)

№ n/n	$\lambda$ , пм	Массовый коэффициент ослабления, $\mu/\rho$ , см <sup>2</sup> /г				
		Воздух	Вода	Алюминий	Медь	Свинец
1.	10		0,16	0,16	0,36	3,8
2.	20		0,18	0,28	1,5	4,9
3.	30		0,29	0,47	4,3	14
4.	40		0,44	1,1	9,8	31
5.	50	0,48	0,66	2,0	19	54
6.	60	0,75	1,0	3,4	32	90
7.	70	1,3	1,5	5,1	48	139
8.	80	1,6	2,1	7,4	70	
9.	90	2,1	2,8	11	98	
10.	100	2,6	3,8	15	131	
11.	150	8,7	12	46	49	
12.	200	21	28	102	108	
13.	250	39	51	194	198	

### 40. Константы двухатомных молекул

№ n/n	Молекула	Межъядерное расстояние $d$ , $10^{-8}$ см	Частота колебаний $\omega$ , $10^{14}$ с <sup>-1</sup>	№ n/n	Молекула	Межъядерное расстояние $d$ , $10^{-8}$ см	Частота колебаний $\omega$ , $10^{14}$ с <sup>-1</sup>
1.	H <sub>2</sub>	0,741	8,279	9.	HF	0,917	7,796
2.	N <sub>2</sub>	1,094	4,445	10.	HCl	1,275	5,632
3.	O <sub>2</sub>	1,207	2,977	11.	HBr	1,413	4,491
4.	F <sub>2</sub>	1,282	2,147	12.	HI	1,604	4,350
5.	S <sub>2</sub>	1,889	1,367	13.	CO	1,128	4,088
6.	Cl <sub>2</sub>	1,988	1,064	14.	NO	1,150	3,590
7.	Br <sub>2</sub>	2,283	0,609	15.	OH	0,971	7,035
8.	I <sub>2</sub>	2,666	0,404				

#### 41. Период полураспада $T_{1/2}$ некоторых радиоактивных изотопов

№ n/n	Название	Символ	$T_{1/2}$	№ n/n	Название	Символ	$T_{1/2}$
1.	Водород (третий)	${}^3_1\text{H}$	12,3 года ( $\beta$ )	10.	Стронций	${}^{90}_{38}\text{Sr}$	28 лет ( $\beta$ )
2.	Углерод	${}^{14}_6\text{C}$	5700 лет ( $\beta$ )	11.	Йод	${}^{131}_{53}\text{I}$	8,02 дня ( $\beta$ )
3.	Азот	${}^{13}_7\text{N}$	10 мин ( $\alpha$ )	12.	Цезий	${}^{137}_{55}\text{Cs}$	30 лет ( $\beta$ )
4.	Фтор	${}^{18}_9\text{F}$	109,77 мин ( $\alpha$ )	13.	Висмут	${}^{210}_{83}\text{Bi}$	5 сут ( $\alpha$ )
5.	Натрий	${}^{22}_{11}\text{Na}$	2,6 года ( $\gamma$ )	14.	Иридий	${}^{192}_{77}\text{Ir}$	74 дня ( $\beta, \gamma$ )
6.	Фосфор	${}^{32}_{15}\text{P}$	14,26 сут ( $\beta$ )	15.	Полоний	${}^{210}_{84}\text{Po}$	138,4 сут ( $\alpha$ )
7.	Калий	${}^{40}_{19}\text{K}$	$1,248 \cdot 10^9$ лет ( $\beta$ )	16.	Радон	${}^{222}_{86}\text{Rn}$	3,83 сут ( $\alpha$ )
8.	Железо	${}^{59}_{26}\text{Fe}$	44,495 сут ( $\beta$ )	17.	Радий	${}^{226}_{88}\text{Ra}$	1622 года ( $\alpha$ )
9.	Кобальт	${}^{60}_{27}\text{Co}$	5,2713 года ( $\beta$ )	18.	Уран	${}^{238}_{92}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$ лет ( $\alpha$ )

#### 42. Массы легких нуклидов ( $M$ – масса нуклида в а. е. м., $A$ – массовое число)

№ n/n	Z	Нуклид	Избыток массы нуклида $M - A$ , а. е. м.	№ n/n	Z	Нуклид	Избыток массы нуклида $M - A$ , а. е. м.
1.	0	$n$	0,00867	7.	6	${}^{11}\text{C}$ ${}^{12}\text{C}$ ${}^{13}\text{C}$	0,01143 0 0,00335
2.	1	${}^1\text{H}$ ${}^2\text{H}$ ${}^3\text{H}$	0,00783 0,01410 0,01605	8.	7	${}^{13}\text{N}$ ${}^{14}\text{N}$ ${}^{15}\text{N}$	0,00574 0,00307 0,00011
3.	2	${}^3\text{He}$ ${}^4\text{He}$	0,01603 0,00260	9.	8	${}^{15}\text{O}$ ${}^{16}\text{O}$ ${}^{17}\text{O}$	0,00307 -0,00509 -0,00087
4.	3	${}^6\text{Li}$ ${}^7\text{Li}$	0,01513 0,01601	10.	9	${}^{19}\text{F}$	-0,00160
5.	4	${}^7\text{Be}$ ${}^8\text{Be}$ ${}^9\text{Be}$ ${}^{10}\text{Be}$	0,01693 0,00531 0,01219 0,01354	11.	10	${}^{20}\text{Ne}$	-0,00756
				12.	11	${}^{23}\text{Na}$ ${}^{24}\text{Na}$	-0,01023 -0,00903
				13.		${}^{24}\text{Mg}$	-0,01496
6.	5	${}^{10}\text{B}$ ${}^{11}\text{B}$	0,01294 0,00930				


#### 43. Греческий алфавит

A, $\alpha$ – альфа	I, $\iota$ – йота	P, $\rho$ – ро
B, $\beta$ – бета	K, $\kappa$ – капша	$\Sigma, \sigma$ – сигма
G, $\gamma$ – гамма	L, $\lambda$ – ламбда	T, $\tau$ – тау
$\Delta, \delta$ – дельта	M, $\mu$ – мю	$\Upsilon, \upsilon$ – ипсилон
E, $\epsilon$ – эpsilon	N, $\nu$ – ню	$\Phi, \phi$ – фи
Z, $\zeta$ – дзэта	$\Xi, \xi$ – кси	X, $\chi$ – хи
H, $\eta$ – эта	O, $\omicron$ – омикрон	$\Psi, \psi$ – пси
$\Theta, \theta, \vartheta$ – тхэта	P, $\pi$ – пи	$\Omega, \omega$ – омега

#### 44. Латинский алфавит

A, a – а	J, j – йот/жи	S, s – эс
B, b – бэ	K, k – ка	T, t – тэ
C, c – це	L, l – эль	U, u – у
D, d – дэ	M, m – эм	V, v – вэ
E, e – э	N, n – эн	W, w – дубль-вэ
F, f – эф	O, o – о	X, x – икс
G, g – гэ/жэ	P, p – пэ	Y, y – игрек/ипсилон
H, h – ха/аш	Q, q – ку	Z, z – зед
I, i – и	R, r – эр	

45. Периодическая система химических элементов Д. И. Менделеева

ПЕРИОДЫ	ГРУППЫ ЭЛЕМЕНТОВ											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII				
I	1 H водород 1,0079								2 He гелий 4,0026			
II	3 Li литий 6,941	4 Be бериллий 9,01218	5 B бор 10,811	6 C углерод 12,011	7 N азот 14,0067	8 O кислород 15,9994	9 F фтор 18,9984	10 Ne неон 20,179				
III	11 Na натрий 22,98977	12 Mg магний 24,305	13 Al алюминий 26,98154	14 Si кремний 28,0855	15 P фосфор 30,97376	16 S сера 32,066	17 Cl хлор 35,453	18 Ar аргон 39,948				
IV	19 K калий 39,0983	20 Ca кальций 40,078	21 Sc скандий 44,95591	22 Ti титан 47,88	23 V ванадий 50,9415	24 Cr хром 51,9961	25 Mn марганец 54,9380	26 Fe железо 55,847	27 Co кобальт 58,9332	28 Ni никель 58,69		
	29 Cu медь 63,546	30 Zn цинк 65,39	31 Ga галлий 69,723	32 Ge германий 72,59	33 As мышьяк 74,9216	34 Se селен 78,96	35 Br бром 79,904	36 Kr криптон 83,80				
V	37 Rb рубидий 85,4678	38 Sr стронций 87,62	39 Y иттрий 88,9059	40 Zr цирконий 91,224	41 Nb ниобий 92,9064	42 Mo молибден 95,94	43 Tc технеций 98,9062	44 Ru рутений 101,07	45 Rh родий 102,9055	46 Pd палладий 106,42		
	47 Ag серебро 107,8682	48 Cd кадмий 112,41	49 In индий 114,82	50 Sn олово 118,710	51 Sb сурьма 121,75	52 Te теллур 127,60	53 I йод 126,9045	54 Xe ксенон 131,29				
VI	55 Cs цезий 132,9054	56 Ba барий 137,33	57* La лантан 138,9055	72 Hf гафний 178,49	73 Ta тантал 180,9479	74 W вольфрам 183,85	75 Re рений 186,207	76 Os осмий 190,2	77 Ir иридий 192,22	78 Pt платина 195,08		
	79 Au золото 196,9665	80 Hg ртуть 200,59	81 Tl таллий 204,383	82 Pb свинец 207,2	83 Bi висмут 208,9804	84 Po полоний 208,9824	85 At астат 210,9871	86 Rn радон 222,0176				
VII	87 Fr франций 223,0197	88 Ra радий 226,0254	89** Ac актиний 227,0278	104 Rf резерфордий [261]	105 Db дубний [262]	106 Sg сиборгий [263]	107 Bh борий [264]	108 Hs хассий [265]	109 Mt мейтнерий [268]	110 Ds дармштадтий [271]		

## Библиографический список

- 1. Савельев, И. В.** Курс общей физики : кн. 5. : Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц : учебное пособие для вузов / И. В. Савельев. – Москва : Астрель, 2006. – 368 с. – ISBN 5-271-01307-3.
- 2. Трофимова, Т. И.** Курс физики : учебное пособие / Т. И. Трофимова. – 15-е изд., стер. – Москва : Академия, 2012. – 560 с. – ISBN 978-5-7695-4565-8.
- 3. Хусаинов, Ш. Г.** Квантовая физика : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : Изд-во РГАУ – МСХА имени К.А. Тимирязева, 2020. – 148 с. – Текст электронный. – DOI: 10.34677/2020.008.
- 4. Хусаинов, Ш. Г.** Квантовая физика: теория, задачи и вопросы : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : «Спутник +», 2021. – 127 с. – ISBN 978-5-9973-5950-8.
- 5. Хусаинов, Ш. Г.** Электромагнетизм и волны. Оптика : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : «Спутник +», 2021. – 151 с. – ISBN 978-5-9973-5922-5.
- 6. Хусаинов, Ш. Г.** Электромагнетизм и волны : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : Изд-во РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева, 2020. – 168 с. – Текст электронный. – DOI: 10.34677/2020.007.
- 7. Хусаинов, Ш. Г.** Курс физики: теория, вопросы и задачи : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : «Спутник +», 2021. – 372 с. – ISBN 978-5-9973-5921-7.
- 8. Хусаинов, Ш. Г.** Курс физики: теория, задачи и вопросы : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : Изд-во РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева, 2021. – 464 с. – Текст электронный. – ISBN 978-5-9675-1820-1.
- 9. Хусаинов, Ш. Г.** Основы механики и молекулярная физика : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : Изд-во РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева, 2020. – 146 с. – Текст электронный. – DOI: 10.34677/2020.006.
- 10. Хусаинов, Ш. Г.** Основы механики, молекулярной физики и термодинамики: учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : «Спутник +», 2021. – 131 с. – ISBN 978-5-9973-5921-8.
- 11. Хусаинов, Ш. Г.** Лекции по физике. Ч. I : Механика, молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : Изд-во РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева, 2022. – 218 с. – Текст электронный. – ISBN 978-5-9676-1927-7.
- 12. Хусаинов, Ш. Г.** Лекции по физике. Ч. II : Электромагнетизм и волны : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов – Москва : Изд-во РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева, 2022. – 240 с. – Текст электронный. – ISBN 978-5-9675-1940-6.
- 13. Яворский, Б. М.** Справочник по физике для инженеров и студентов вузов / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. – 8-е изд., перераб. и испр. – Москва: Оникс, 2006. – 1056 с. – ISBN 5-488-00330-4.



*Учебное издание*

**Хусаинов Шаукат Габдулхакович**

## **ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ**

**Часть III**

**Оптика. Атомная физика.  
Физика твердого тела. Физика атомного  
ядра и элементарных частиц**

Подписано для размещения в Электронно-библиотечной  
системе РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева 19.06.2023 г.

Оригинал-макет подготовлен Издательством РГАУ-МСХА  
127550, Москва, Тимирязевская ул., 44  
Тел. 8 (499) 977-40-64