МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ –
МСХА имени К.А. ТИМИРЯЗЕВА

Ш.Г. Хусаинов

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Часть I

Механика, молекулярная физика и термодинамика

Учебное пособие

Москва
РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева
2022

УДК 531/534+536(075.8)
ББК 22.2+22.36я73
Х985

Рецензенты:
Тимеркаев Б.А., *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики ФГБОУ ВО «КНИТУ-КАИ» (Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева - КАИ)*
Никитин О.Р., *доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой радиотехники и радиосистемы ФГБОУ ВО «ВлГУ» (Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых)*

Х985 **Хусаинов, Ш. Г.** Лекции по физике. Ч. I : Механика, молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов ; Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К. А. Тимирязева. – Москва : РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева, 2022. – 218 с. – Текст электронный.

ISBN 978-5-9676-1927-7

Учебное пособие написано в соответствии с государственными образовательными стандартами для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. В нем в краткой и доступной форме изложен теоретический материал лекций по первой части курса общей физики. Приведенные в пособии материалы будут полезны для самостоятельного написания обучающимися конспектов лекций, на практических занятиях, при выполнении индивидуальных домашних заданий и при подготовке к зачетам и экзамену.

Учебное пособие адресовано студентам РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева инженерно-технических направлений подготовки с углубленным изучением дисциплины «Физика»: 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 15.03.02 «Технологические машины и оборудование» и 35.03.06 «Агроинженерия» для получения теоретических и практических навыков и углубления знаний по физике.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией Института механики и энергетики имени В.П. Горячкина РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, протокол №3 от 1 апреля 2022 г.

Khusainov, Sh. G. Lectures on physics. Part I : Mechanics, molecular physics and thermodynamics : textbook / Sh. G. Khusainov ; Russian state agrarian University – Moscow state Agricultural Academy named after K. A. Timiryazev. – Moscow : RSAU-MTAA named after K. A. Timiryazev, 2022. – 218 p. –Text: electronic.

The textbook is written in accordance with state educational standards for engineering and technical specialties of higher educational institutions. It contains in a concise and accessible form the theoretical material of lectures on the first part of the general physics course. The materials provided in the manual will be useful for students to write lecture notes on their own, in practical classes, when doing individual homework and preparing for tests and exams.

The textbook is addressed to students of the RSAU-MTAA named after K.A. Timiryazev, engineering training areas with in-depth study of discipline of «Physics»: 13.03.01 «Thermal Engineering»; 13.03.02 «Power engineering and electrical engineering»; 15.03.02 «Technological machines and equipment» and 35.03.06 «Agroengineering» to gain theoretical and practical skills and deepen my knowledge in physics.

УДК 531/534+536(075.8)
ББК 22.2+22.36я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Учебное пособие написано в соответствии с действующей программой курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений и содержит последовательное изложение основных положений классической и современной физики. Логика изложения и содержание материала ориентированы на будущих специалистов, занятых в области аграрных технологий, и являются обобщением многолетнего опыта автора. В книге в доступной форме изложен материал лекций, включающий теоретические сведения и вопросы по всем разделам первой части курса общей физики, который может быть использован студентами для самостоятельного изучения соответствующего материала и написания конспектов лекций, на практических занятиях, при выполнении индивидуальных домашних заданий и при подготовке к зачетам и экзамену.

Учебное пособие будет полезным для студентов технических и аграрных вузов всех направлений подготовки, преподавателям курса общей физики и широкому кругу читателей, интересующихся физикой.

Книга состоит из двух частей и девяти глав (лекций), в главах материал структурирован по темам. В учебное пособие включено 41 задача с подробными решениями и разбором основных методов и математических приемов, 86 задач содержат краткие ответы и предложены для самостоятельного решения, с целью повторения материала представлено 136 теоретических вопросов, в приложении – 22 таблицы, библиографический список, включающий 8 источников (учебников, учебных пособий и справочников). Приведенный в учебном пособии справочный материал опирается на современные достижения науки и охватывает физические основы классической механики, элементы теории относительности, основы молекулярной физики и термодинамики. Книга является полезным дополнением к известным курсам физики, указанным в библиографическом списке. Ее удобно использовать для повторения пройденного материала непосредственно перед зачетом или экзаменом, а также для быстрого восстановления в памяти забытого теоретического или практического материала.

Автор выражает искреннюю благодарность профессорам Б.А. Тимеркаеву и О.Р. Никитину за рецензирование книги и важные замечания, а также доценту кафедры физики К.А. Горшкову за помощь в подготовке учебного пособия.

Автор

Введение

Физика (от греч. φύσις – природа) – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства и законы движения объектов материального мира. Понятия Физика и ее законы лежат в основе всего естествознания.

(Большая российская энциклопедия).

Любые самые сложные формы движения материи, предполагающие изменения на высокоорганизованном структурном уровне (например, техническом или биологическом), всегда могут быть сведены к более простым формам движения материи (механическим, тепловым, электромагнитным, внутриатомным), которые описываются физическими закономерностями. Понимание физических принципов, объясняющих ход течения процессов на самом фундаментальном уровне, позволяет прогнозировать поведение сложных систем, а также создавать новые устройства и технологии. Как это отмечал академик С.И. Вавилов (советский физик, общественный деятель), физика выступает в качестве основы для естественнонаучных и технических дисциплин, без знания физических закономерностей невозможно развитие инженерной отрасли и таких междисциплинарных областей, как астрофизика, биофизика, физическая химия и другие. Кроме того, нельзя оставить без внимания роль физики в формировании мировоззрения человека, расширении горизонта представлений о Вселенной.

Академик А.Ф. Иоффе (российский и советский физик) определял физику как науку, которая изучает наиболее общие свойства и законы движения вещества и поля. К настоящему моменту эти понятия считаются фундаментальными и являются двумя основными видами материи на микроуровне. Физические поля обеспечивают конкретный вид взаимодействия между частицами вещества и характеризуются, с одной стороны, непрерывностью (электромагнитные волны), а с другой – проявляют дискретность структуры (фотоны). Еще одним видом материи является обладающее дискретной пространственной структурой вещество, из которого образованы физические объекты. Между различными видами материи возможны взаимные превращения (аннигиляция и рождение пары частица-античастица), что отражает принцип единства природы.

Движение материи (любое ее изменение) и взаимодействие отдельных материальных объектов происходят в пространстве и во времени (в релятивистской физике являются частными проявлениями единого пространства-времени). Сами категории неотделимы от материи и часто определяются как формы ее существования.

Физика, как и ряд других дисциплин о природе, является наукой точной. Все основные физические закономерности и принципы устанавливаются как результат обобщения опытных фактов. Однако установить справедливость законов опытным путем можно только с ограниченной точностью. Выявление очередной закономерности всегда является всего лишь приближением к истине о том, как устроена природа. Физические принципы обычно выражаются в виде символических записей (формул) между количественными характеристиками процессов и явлений (физическими величинами). Измерение физических величин предполагает сравнение их с эталоном и выражение в определенных единицах. Наиболее распространенной является Международная система единиц (СИ), включающая в себя семь основных единиц: метр (м), килограмм (кг), секунда (с), ампер (А), кельвин (К), моль (моль), кандела (кд) – и двух дополнительных: радиан (рад) и стерадиан (ср).

Стремительное развитие наукоемких отраслей делает необходимым изучение физики студентами аграрных и технических вузов, без знания которой затруднительно квалифицированное управление уже существующими системами и достижение прогресса в разработке новых.

ЧАСТЬ 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Лекция 1. КИНЕМАТИКА

1.1. Основные понятия кинематики. Система отсчета. Траектория. Путь. Перемещение

Механика – раздел физики, занимающийся изучением закономерностей механического движения и взаимодействия тел. ***Механическое движение*** – это изменение с течением времени положения тел или их частей относительно друг друга.

Классическая (*неквантовая*) механика подразделяется на ***ньютоновскую*** (*нерелятивистскую*) механику и ***релятивистскую*** механику. В основе ньютоновской механики лежат законы Исаака Ньютона. Эта механика справедлива лишь для макроскопических тел, движущихся со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Под ***макроскопическим телом*** подразумевается тело, образованное очень большим числом атомов; масса такого тела во много раз превосходит массу отдельного атома.

Релятивистской называется механика, учитывающая требования ***специальной теории относительности*** (СТО). Она справедлива и при скоростях, сравнимых со скорость света [согласно СТО скорости тел не могут быть больше скорости света в вакууме].

Для описания движения *микроскопических тел* (отдельные атомы и элементарные частицы) законы классической механики неприменимы – они заменяются законами ***квантовой механики.***

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обусловливают. Основная задача кинематики – определить положение тела в любой момент времени.

В механике для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач используются разные ***физические модели.***

Материальная точка − тело, обладающее массой, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Абсолютно твердое тело − тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь, т. е. при всех условиях расстояние между любыми точками этого тела остается неизменным. Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко связанных между собой.

Абсолютно упругое тело − тело, которое после прекращения внешнего механического действия полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.

Абсолютно неупругое тело − тело, которое после прекращения внешнего механического действия полностью сохраняет деформированное состояние, вызванное этим воздействием.

Всякое движение твердого тела можно представить, как комбинацию поступательного и вращательного движений. ***Поступательное движение*** – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе. При ***вращательном движении*** все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения***.

Все тела существуют и движутся в пространстве и во времени. Приступая к изучению движения какого-либо тела (материальной точки), нужно указать, по отношению к какому телу (или телам) мы рассматриваем движение данного тела. Для однозначного определения положения какого-либо тела (материальной точки) в произвольный момент времени необходимо выбрать ***систему отсчета*** – совокупность системы координат и часов. Тело, относительно которого рассматривается движение, называется ***телом отсчета***. Совокупность тел, выделенная для рассмотрения, называется ***механической системой.***

В декартовой системе координат положение точки M в данной момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами x, y, z или радиус вектором $\vec{r}$, проведенным в данную точку из начала системы координат (рис. 1).

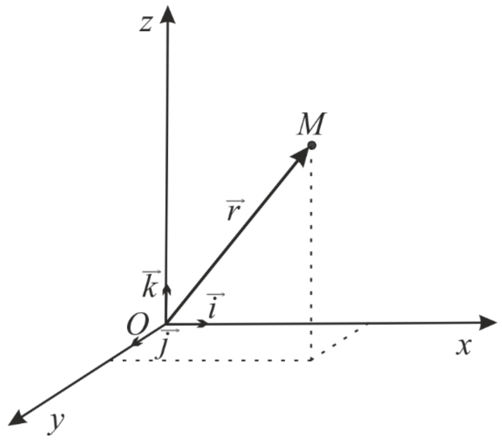

Рис. 1

При движении материальной точки M ее координаты с течением времени изменяются. Положение материальной точки в пространстве в любой момент времени определяется скалярными уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \tag{1.1}$$

эквивалентными векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1) и (1.2) называются ***кинематическими уравнениями движения материальной точки.***

Радиус-вектор можно разложить на составляющие:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{1.3}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные координатные векторы (орты).

Материальная точка при своем движении описывает некоторую линию. Эта линия называется ***траекторией***. В зависимости от формы траектории различают *прямолинейное движение*, *движение по окружности*, *криволинейное движение* и т. д.

Пусть материальная точка (*частица*) переместилась вдоль некоторой траектории из точки *1* в точку *2* (рис. 2). Расстояние между точками *1* и *2*, отсчитанное вдоль траектории, называется ***путем*** (обозначается буквой s или символом Δs), пройденным частицей.

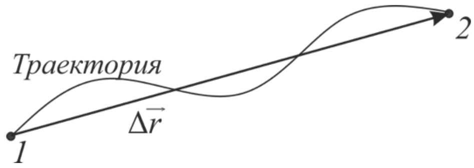

Рис. 2

Прямолинейный отрезок, проведенный из точки *1* в точку *2*, называется ***перемещением*** частицы (обозначается символами $\vec{r}_{12}$ или $\Delta\vec{r}$).

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$ равен пройденному пути Δs.

1.2. Скорость

Для характеристики направления и быстроты движения частицы в механике вводится векторная физическая величина, называемая ***скоростью***.

Вектором средней скорости $\langle\vec{v}\rangle$ в промежутке времени от t до $t + \Delta t$ называется отношение приращения $\Delta\vec{r}$ радиус-вектора частицы к промежутку времени Δt:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta\vec{r}$. При неограниченном уменьшении Δt средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется ***мгновенной скоростью*** $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.5}$$

[мгновенная скорость $\vec{v}$ есть векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения частицы в пространстве и равная первой производной радиус-вектора по времени].

Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории частицы в сторону ее движения. Модуль мгновенной скорости v частицы определяется как первая производная пути по времени:

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \quad (1.6)$$

При ***неравномерном движении*** модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. ***Средняя скорость*** (скалярная величина) ***неравномерного движения***:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Из (1.6) следует, что путь $\mathrm{d}s$, пройденный за время $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t. \quad (1.8)$$

Путь, пройденный частицей за конечный промежуток времени от t_1 до t_2, находится интегрированием:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t. \quad (1.9)$$

Пройденный путь численно равен площади заштрихованной криволинейной трапеции (рис. 3).

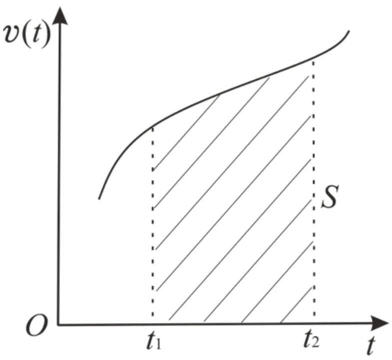

Рис. 3

Если направление вектора скорости не изменяется, то движение называется ***прямолинейным***. Если модуль скорости не изменяется с течением времени, то движение называется ***равномерным***. При равномерном движении скорость частицы постоянна:

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \text{cosnt}. \quad (1.10)$$

Путь, пройденный частицей при равномерном движении, зависит от времени линейно:

$$s = \upsilon t. \quad (1.11)$$

1.3. Ускорение и его составляющие

Скорость частицы $\vec{\upsilon}$ может изменяться со временем как по модулю, так и по направлению. Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является ***ускорение.***

Пусть в момент времени *t* частица находилась в точке *1*, имея скорость $\vec{\upsilon}_1$. Через время Δt она переместилась в точку *2*, при этом ее скорость стала равной $\vec{\upsilon}_2$ (рис. 4, *а*). Приращение вектора скорости равно $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$ (рис. 4, *б*).

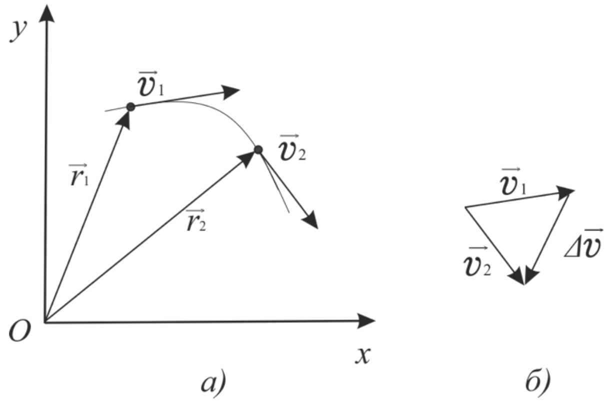

Рис. 4 *а, б*

Средним ускорением неравномерного движения в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называется векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ к интервалу времени Δt:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

Мгновенным ускорением $\vec{a}$ (***ускорением***) частицы в момент времени t будет предел среднего ускорения:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (1.13)$$

[ускорение $\vec{a}$ есть векторная величина, определяемая первой производной скорости $\vec{v}$ (*или второй производной радиус-вектора* $\vec{r}$) по времени. Ускорение направлено по вектору приращения скорости $\Delta\vec{v}$].

При *прямолинейном движении* направление скорости остается постоянным, поэтому вектор ускорения $\vec{a}$ или совпадает с направлением скорости, или противоположен ему. Если модуль ускорения при этом не изменяется с течением времени, то в первом случае движение будет ***равноускоренным***, во втором – ***равнозамедленным***. Скорость движения в любой момент времени будет определяться соотношением:

$$v = v_0 \pm at, \qquad (1.14)$$

где v_0 – начальная скорость тела, т. е. скорость в момент времени $t = 0$. Знак «+» относится к равноускоренному движению, «–» – к равнозамедленному.

Проинтегрировав формулу (1.14) в пределах от нуля до произвольного момента времени t, найдем формулу для расчета пройденного частицей пути, в случае ***равнопеременного движения***:

$$s = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t (v_0 \pm at)\mathrm{d}t = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \qquad (1.15)$$

При *криволинейном движении* вектор скорости $\vec{v}$ изменяет свое направление. При этом может изменяться и его численное значение, т. е. модуль. В этом случае вектор ускорения $\vec{a}$ можно представить в виде суммы двух составляющих. Одна из них направлена по касательной к траектории, обозначается $\vec{a}_\tau$ и называется ***тангенциальным ускорением*** (или ***касательным***), вторая составляющая направлена по главной нормали к траектории к центру ее кривизны, обозначается $\vec{a}_n$ и называется ***нормальным ускорением частицы*** (рис. 5).

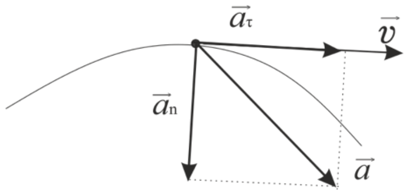

Рис. 5

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения скорости по модулю и численно равно первой производной модуля скорости по времени:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.16)$$

Если скорость по величине не изменяется, то $a_\tau = 0$; если $\mathrm{d}\upsilon > 0$, то тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по вектору скорости $\vec{\upsilon}$, если $\mathrm{d}\upsilon < 0$, то $\vec{a}_\tau$ направлено в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{\upsilon}$.

Нормальное (центростремительное) *ускорение* $\vec{a}_n$ характеризует быстроту изменения вектора скорости $\vec{\upsilon}$ по направлению и направлено всегда по главной нормали $\vec{n}$ к траектории к центру ее кривизны [проекция $\vec{a}_n$ на главную нормаль $\vec{n}$ всегда положительна, т. е. $a_n > 0$]. Численное значение нормального ускорения определяется формулой:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (1.17)$$

Если направление скорости не изменяется, то $a_n = 0$.

Из рис. 5 следует, что

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (1.18)$$

Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (1.19)$$

1.4. Кинематика вращательного движения

При ***вращательном движении*** все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью вращения*. Окружности, по которым движутся точки тела, лежат в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Простейший случай – равномерное движение. ***Равномерное движение частицы по окружности*** – движение, при котором частица (тело) за равные промежутки времени проходит равные по длине дуги окружности.

Угловое перемещение ($\mathrm{d}\vec{\varphi}$) – вектор, модуль которого равен углу поворота, выраженному в радианах [элементарные (бесконечно малые) повороты можно рассматривать как векторы (они обозначаются $\Delta\vec{\varphi}$ или $\mathrm{d}\vec{\varphi}$)]. Направление вектора $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т. е. подчиняется ***правилу правого винта*** (рис. 6).

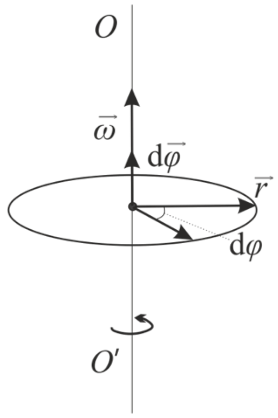

Рис. 6

Угловая скорость ($\vec{\omega}$) – векторная величина, равная первой производной угла поворота (углового перемещения) тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.20)$$

Направление вектора угловой скорости совпадает с направлением вектора углового перемещения (рис. 6).

Единица угловой скорости ω – *радиан в секунду* [рад/с].

Линейная скорость частицы (см. рис. 6):

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega,$$

т. е.

$$v = \omega R. \tag{1.21}$$

В векторном виде формула для линейной скорости запишется как векторное произведение:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{R}]. \tag{1.22}$$

Равномерное вращение ($\omega = \text{const}$) принято характеризовать периодом вращения T и частотой вращения ν.

Период вращения (T) – время, за которое тело совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол 2π. Поскольку промежутку времени $\Delta t = T$ соответствует угол поворота $\Delta\varphi = 2\pi$, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.23}$$

Частота вращения (ν) – число полных оборотов в единицу времени.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi\nu. \tag{1.24}$$

Угловое ускорение ($\vec{\varepsilon}$) – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости $\vec{\omega}$ и равная первой производной угловой скорости $\vec{\omega}$ по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.25}$$

Единица углового ускорения ε – *радиан в секунду в квадрате* [рад/с^2].

Рассмотрим случай, когда *ось вращения неподвижна*. При *ускоренном* движении ($\mathrm{d}\omega > 0$), вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$ (рис 7, *а*), при *замедленном* ($\mathrm{d}\omega < 0$) – противонаправлен ему (рис 7, *б*).

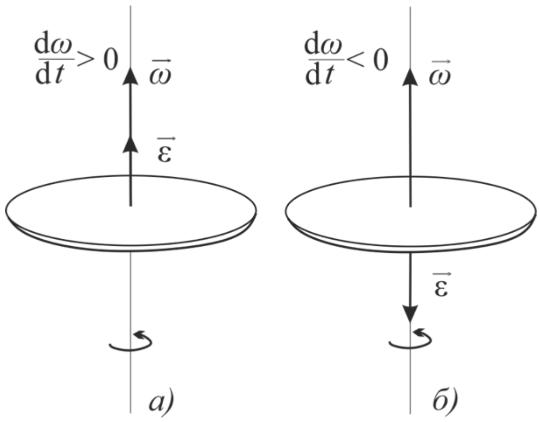

Рис. 7 *а*, *б*

Тангенциальная составляющая ускорения и линейная скорость частицы, согласно (1.16) и (1.21)

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \text{ и } \upsilon = \omega R,$$

откуда

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}(\omega R)}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\varepsilon. \tag{1.26}$$

Нормальное ускорение, согласно (1.17)

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R. \tag{1.27}$$

В случае *равнопеременного движения* ($\varepsilon = \mathrm{const}$) частицы по окружности

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \;\; \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{1.28}$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

Примеры решения задач

1.1. Зависимость пройденного материальной точкой пути от времени задается уравнением $s = 3t^3 - 5t + 7$, м. В интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 2$ с найдите мгновенные скорости и ускорения в начале и конце интервала, среднюю скорость движения.

Дано: $s = 3t^3 - 5t + 7$, м; $t_1 = 1\ c$; $t_2 = 2\ c$.

Найти: υ_1; υ_2; a_1; a_2; $< \upsilon >$.

Решение. Модуль мгновенной скорости материальной точки равен первой производной пути по времени:

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 9t^2 - 5.$$

Скорости в начале и конце интервала равны:

$$\upsilon_1 = \upsilon(t_1) = 4\ \text{м/с};\ \upsilon_2 = \upsilon(t_2) = 31\ \text{м/с}.$$

Модуль ускорения определяется как первая производная скорости по времени:

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = 18t.$$

Ускорения в начале и конце интервала равны:

$$a_1 = a(t_1) = 18\ \text{м/с}^2;\ a_2 = a(t_2) = 36\ \text{м/с}^2.$$

Средняя скорость

$$< \upsilon > = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)\ -\ s(t_1)}{t_2 - t_1};\ < \upsilon > =\ 16\ \text{м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_1 = 4$ м/с; $\upsilon_2 = 31$ м/с; $a_1 = 18$ м/с^2; $a_2 = 36$ м/с^2; $< \upsilon > = 16$ м/с.

1.2. Скорости двух частиц, движущихся по одной прямой, совпадающей с осью x декартовой системы координат, подчиняются законам $\upsilon_1 = 3bt + 4ct^2$ и $\upsilon_2 = -3bt + 4ct^2$, где $b = 3$ м/с^2, $c = 2$ м/с^3. В начальной момент времени $t = 0$ первая частица имела координату 20 м, а вторая 56 м. Найдите ускорения частиц в момент их встречи.

Дано: $\upsilon_1 = 3bt + 4ct^2$; $\upsilon_2 = -3bt + 4ct^2$; $b = 3$ м/с^2; $c = 2$ м/с^3; $x_{10} = 20$ м; $x_{20} = 56$ м.

Найти: a_1; a_2.

Решение. Определим момент времени, когда ускорения обеих частиц одинаковы. Для этого найдем выражения для координат первой и второй частицы, проинтегрировав уравнения для скоростей:

$$x_1 = \int_0^t \upsilon_1 \mathrm{d}t = \int_0^t (3bt + 4ct^2)\mathrm{d}t = \frac{3bt^2}{2} + \frac{4ct^3}{3} + C_1 = 1{,}5bt^2 + \frac{4}{3}ct^3 + C_1,$$

$$x_2 = \int_0^t \upsilon_2 \mathrm{d}t = \int_0^t (-3bt + 4ct^2)\mathrm{d}t = -\frac{3bt^2}{2} + \frac{4ct^2}{3} + C_2 =$$

$$= -1{,}5bt^2 + \frac{4}{3}ct^3 + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из начальных условий $x_1 = x_1(t) = x_1(0) = x_{10}$ и $x_2 = x_2(t) = x_2(0) = x_{20}$. Используя эти равенства, находим $C_1 = x_{10}$ и $C_2 = x_{20}$.

Тогда выражения для координат частиц имеют вид:

$$x_1 = x_{10} + 1{,}5bt^2 + \frac{4}{3}ct^3, \qquad x_2 = x_{20} - 1{,}5bt^2 + \frac{4}{3}ct^3.$$

Согласно условию задачи $x_1 = x_2$ в какой-то момент времени t. Приравнивая полученные выражения для координат, решаем уравнение относительно t:

$$x_{10} + 1{,}5bt^2 + \frac{4}{3}ct^3 = x_{20} - 1{,}5bt^2 + \frac{4}{3}ct^3.$$

Выполнив преобразования, получаем

$$t_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{x_{20} - x_{10}}{3b}} = \pm\ 2 \text{ с}.$$

Таким образом, время встречи частиц составляет $t = 2\ c$.

Ускорение частицы – это первая производная от скорости по времени:

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}.$$

Тогда

$$a_1 = 3b + 8ct \text{ и } a_2 = -3b + 8ct.$$

Подставляя в эти уравнения найденное значение $t = 2\ c$, получим ускорения частиц в момент их встречи:

$$a_1 = 41 \text{ м/с}^2;\ a_2 = 23 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_1 = 41$ м/с^2; $a_2 = 23$ м/с^2.

1.3. Зависимость угловой скорости от времени для точки, лежащей на ободе колеса радиуса $R = 20$ см, задается уравнением $\omega = At + 3Bt^4$ ($A =$ $= 1$ рад/с^2, $B = 2$ рад/с^5). Найдите для этой точки колеса к концу первой секунды после начала движения полное ускорение и число оборотов, совершаемых колесом.

Дано: $R = 0{,}2$ м; $\omega = At + 3Bt^4$; $A = 1$ рад/с^2; $B = 2$ рад/с^5; $t = 1$ с.
Найти: a; N.
Решение. Полное ускорение точки:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = \varepsilon R$ и $a_n = \omega^2 R$ – соответственно тангенциальная и нормальная составляющие ускорения; $\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ – угловое ускорение.

По условию задачи $\omega = At + 3Bt^4$, следовательно,

$$a_\tau = \varepsilon R = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R(A + 12Bt^3), \; a_n = \omega^2 R = (At + 3Bt^4)^2 R.$$

Полное ускорение

$$a = R\sqrt{(A + 12Bt^3)^2 + (At + 3Bt^4)^4}, \; a = 11 \text{ м/с}^2.$$

Число оборотов, сделанных колесом,

$$N = \frac{\varphi}{2\pi},$$

где φ – угол поворота колеса.

Угловая скорость равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

откуда

$$\varphi = \int_0^t \omega \mathrm{d}t = \int_0^t (At + 3Bt^4)\mathrm{d}t = \frac{At^2}{2} + \frac{3Bt^5}{5} = \frac{5At^2 + 6Bt^5}{10}.$$

Тогда число оборотов

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{5At^2 + 6Bt^5}{20\pi}.$$

Ответ: $a = 11$ м/с^2; $N = 0{,}271$.

1.4. Тело брошено с поверхности Земли под углом $\alpha = 60°$ к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0 = 12$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите максимальную высоту подъема, горизонтальную дальность полета, время подъема тела на максимальную высоту и время полета тела.
Дано: $\alpha = 60°$; $\upsilon_0 = 12$ м/с; $g = 9{,}81$ м/с^2.
Найти: $h_{\max}$; $x_{\max}$; t_h; t_x.
Решение. Составляющие начальной скорости на координатные оси x и y можно записать в виде:

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha,$$
$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha - gt,$$

где g – ускорение свободного падения.

[*Уравнения движения тела в проекциях на оси* x и y:

$$x = v_{0x}t; \quad v_x = v_{0x}; \quad a_x = 0;$$
$$y = v_{0y} - \frac{gt^2}{2}; \quad v_y = v_{0y} - gt; \quad a_y = g].$$

Поскольку при $y = h_{\max}$ (в высшей точке траектории) $v_{0y} = 0$, тогда $v_0 \sin\alpha - gt = 0,$ откуда время подъема тела на максимальную высоту:

$$t_h = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Время полета тела

$$t_x = 2t_h = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

[время подъема и время падения равны между собой].

Горизонтальная дальность полета тела

$$x_{\max} = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Максимальная высота подъема тела

$$h_{\max} = v_{0y}t_h - \frac{gt_h^2}{2} = (v_0 \sin\alpha - gt)\frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g^2}\sin^2\alpha = \frac{v_0^2\ \sin^2\alpha}{2g}.$$

Ответ: $h_{\max} = 5{,}51$ м; $x_{\max} = 12{,}71$ м; $t_h = 1{,}06$ с; $t_x = 2{,}12$ с.

Задачи

1. Кинематические уравнения движения двух материальных точек имеют вид: $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$ и $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, где $B_1 = 9$ м/с^2, $C_1 = 0{,}5$ м/с^3, $B_2 = -3$ м/с^2, $C_2 = -1{,}5$ м/с^2. Найдите, в какой момент времени ускорения этих точек одинаковы. Ответ: 2 с

2. Радиус-вектор материальной точки определяется выражением $\vec{r}(t) = 2t^2(6\vec{i} + 8\vec{j})$, см. Найдите вектор перемещения точки и его модуль за интервал времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 3$ с; где $\vec{i}, \vec{j}$ – единичные орты.

Ответ: $\vec{r}_{12}(t) = 10(6\vec{i} + 8\vec{j})$; 100 см

3. Материальная точка движется со скоростью $\vec{v} = t(3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k})$ (м/с). Найдите путь, пройденный точкой с момента $t_1 = 1$ с до $t_2 = 4$ с; где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты. Ответ: 53,03 м

4. Движение частицы задано уравнением $x = 3t - t^2$, м. Найдите путь, который пройдет частица, достигнув координаты $x = 0$. Ответ: 4,5 м

5. Ускорение частицы изменяется со временем по закону $a_x = 9t^{1/2}$, м/с^2. Найдите координату x частицы через 3 с после начала движения (начальные координата и скорость частицы равны нулю). Ответ: 37,41 м

6. Частица движется по прямой с ускорением $a = -0{,}75$ м/с^2. Начальная скорость частицы 3 м/с, начальная координата 1 м. Найдите путь, пройденный частицей, до изменения направления движения. Ответ: 6 м

7. Ротор электродвигателя, вращающийся с угловой скоростью 1200 об/мин, после выключения остановился через 12 с. Считая вращение ротора равнозамедленным, найдите число оборотов, которое он сделает до остановки. Ответ: 120

8. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 9t - 3t^3$, рад. Найдите среднее значение угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t_1 = 0$ до остановки, а также угловое ускорение в момент остановки тела. Ответ: 4 рад/с; 9 рад/с^2; 18 рад/с^2

9. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 20 + 10t - 2t^2$, рад. Найдите величину и направление полного ускорения точки, находящейся на расстоянии 0,2 м от оси вращения, для момента времени $t = 2$ с.

Ответ: 1,13 м/с^2; 45° (угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}_\tau$)

10. С вышки брошено тело в горизонтальном направлении с начальной скоростью 30 м/с. Какова скорость тела через 2 с после начала движения? Какой угол образует вектор скорости тела с плоскостью горизонта в этот момент времени? Ответ: 35,85 м/с; 33,2°

11. Тело брошено горизонтально со скоростью 25 м/с. Найдите отношение модуля нормального ускорения к модулю тангенциального ускорения в конце первой секунды после начала движения. Ответ: 2,55

12. Камень, брошенный с высоты 7 м под углом 60° к горизонту, падает на землю на расстоянии 50 м (по горизонтали) от места броска. Найдите начальную скорость камня, время полета и максимальную высоту подъема над уровнем земли. Ответ: 22,89 м/с; 4,37 с; 27,03 м

Лекция 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение. В основе ньютоновской механики лежат три закона динамики, сформулированные Ньютоном в «Математических началах натуральной философии» (1687 г.). Законы Ньютона возникли в результате обобщения большого количества опытных и теоретических закономерностей в области механики. Правильность этих законов (для обширного, но все же ограниченного круга явлений) подтверждается согласием с опытом тех следствий, которые из них вытекают.

2.1. Основные понятия динамики. Первый закон Ньютона

1. ***Масса тела*** (m) – скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертных и гравитационных свойств тела. Может служить мерой энергосодержания. Единица массы m – *килограмм* [кг].

Основные свойства массы:

– масса в классической механике не зависит от скорости движения;

– масса является величиной *аддитивной*, т. е. масса системы тел равняется сумме масс тел, входящих в систему;

– масса замкнутой системы остается величиной постоянной, т. е. выполняется закон сохранения массы.

Плотность тела (ρ) – скалярная физическая величина, характеристика материала, численно равная массе единицы объема:

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{2.1}$$

Единица плотности ρ – *килограмм на метр в кубе* [кг/м^3].

2. ***Импульс тела*** ($\vec{p}$) – векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{2.2}$$

Единица импульса p – *килограмм-метр в секунду* [кг · м/с]. Направление импульса $\vec{p}$ тела совпадает с направлением вектора скорости $\vec{v}$.

В релятивисткой механике выражение для импульса имеет по сравнению с (2.2) более сложный вид

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.2$'$}$$

где c – скорость распространения света в вакууме (с ≈ 3·10 м/с). При $v \ll c$ отношением v^2/c^2 можно пренебречь по сравнению с единицей, в результате формула (2.2′) переходит в (2.2).

3. ***Сила*** ($\vec{F}$) – векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело других тел или полей. Сила характеризуется *модулем* (численным значением), *направлением действия*, *точкой приложения*. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*.

Единица силы F – *ньютон* [Н].

Первый закон Ньютона: *всякое тело (материальная точка) находится в состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние*.

Первый закон Ньютона устанавливает факт существования инерциальных систем отсчета (ИСО) и описывает характер движения свободной материальной точки (частицы) в ИСО.

Система отсчета, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно называется ***инерциальной системой отчета*** (ИСО).

Неинерциальная система отчета – система, движущаяся относительно инерциальной с ускорением.

Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется ***инертностью***. Соответственно первый закон

Ньютона называют также ***законом инерции***, а движение тела, свободного от внешних воздействий, – ***движением по инерции***. Любая другая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной с постоянной скоростью, также является инерциальной.

2.2. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона, являющийся *основным законом классической механики,* отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение тела (материальной точки) под действием приложенных к ней сил.

Второй закон Ньютона: *скорость изменения импульса тела* (*материальной точки*) *равна результирующей всех сил, действующих на тело*:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}. \tag{2.3}$$

Согласно формуле (2.2), импульс тела равен $\vec{p} = m\vec{v}$. Учитывая, что масса в классической механике есть величина постоянная ($m = \mathrm{const}$), формулу (2.3) можно преобразовать следующим образом:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{m\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} \tag{2.4}$$

– *результирующая всех сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на его ускорение*.

Из выражения (2.4), следует

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{2.5}$$

Соотношение (2.5) так же выражает **второй закон Ньютона:** *ускорение, приобретаемое материальной точкой* (*тела*)*, пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки* (*тела*).

Ускорение, с которым движется тело, всегда совпадает по направлению с результирующей силой, а скорость может и не совпадать с ее направлением, например, при движении по окружности.

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Из второго закона Ньютона следует, что изменения скоростей материальных точек или тел происходят не мгновенно, а в течение конечных промежутков времени. Второй закон Ньютона (так же, как и два других его закона) является экспериментальным законом.

2.3. Третий закон Ньютона

Всякое действие тел (материальных точек) друг на друга носит характер взаимодействия: если тело *2* действует на тело *1* с силой $\vec{F}_{12}$, то при этом и тело *1*, в свою очередь, действует на тело *2* с силой $\vec{F}_{21}$. Количественное описание механического взаимодействия между телами (материальными точками) определяется **третьим законом Ньютона:** *силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие материальные точки* (*тела*)*, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки*:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.6}$$

Силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ всегда действуют парами и являются силами одной природы. Третий закон Ньютона бывает справедлив не всегда. Он выполняется вполне строго в случае контактных взаимодействий (т. е. при непосредственном соприкосновении тел), а также при взаимодействии находящихся на некотором расстоянии друг от друга покоящихся тел.

Третий закон Ньютона, как, впрочем, и первые два, справедлив только в инерциальных системах отсчета (ИСО). Третий закон Ньютона в соединении с первым и вторым законами позволяет перейти от динамики отдельной материальной точки (тела) к динамике произвольной механической системы.

2.4. Силы природы

В современной физике известно четыре вида фундаментальных взаимодействий: ***гравитационное, электромагнитное, сильное*** (или ***ядерное***) и ***слабое.***

В рамках классической механики рассматриваются *гравитационные* и *электромагнитные взаимодействия*, а также ***упругие силы*** и ***силы трения***. Упругие силы и силы трения определяются характером взаимодействия между молекулами вещества [силы взаимодействия между молекулами имеют электромагнитное происхождение, следовательно, упругие силы и силы трения являются по своей природе электромагнитными].

Гравитационные взаимодействия подчиняются **закону всемирного тяготения:** *две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой прямо пропорциональной массам этих точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними*:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.7}$$

где G = 6,67·10^{-11} (Н · м^2) /кг^2 – гравитационная постоянная.

Гравитационные силы – это силы притяжения, они направлены по линии, соединяющей центры масс (рис. 8).

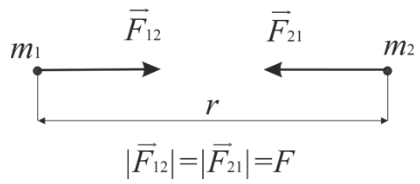

Рис. 8

Если одно из взаимодействующих тел – Земля, а тело массой m находится на высоте h от поверхности Земли, то закон всемирного тяготения записывается в виде

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}, \tag{2.8}$$

где M = 5,98·10^{24} кг – масса Земли; R = 6,37·10^{6} м – средний радиус Земли.

Если пренебречь суточным вращением Земли и высотой расположения тела над Землей ($h \ll R$), то формулу (2.8) можно записать в виде

$$F = G\frac{Mm}{R^2}. \quad (2.9)$$

Введя обозначение $g = GM/R^2$, из (2.9) получим формулу для ***силы тяжести***

$$F_{\text{тяж}} = mg, \quad (2.10)$$

где g – ускорение свободного падения.

[Сила тяжести направлена к центру Земли. В отсутствии других сил тело свободно падает на Землю с ускорением свободного падения. Среднее значение ускорения свободного падения для различных точек поверхности Земли равно 9,81 м/с^2. Зная ускорение свободного падения и средний радиус Земли ($R_З$ = 6,37·10^6 м), можно вычислить массу Земли $M_з = gR_з^2/G$].

Электромагнитные взаимодействия. [Основным законом сил, создаваемых электростатическими взаимодействиями, является **закон Кулона**: *сила взаимодействия* F *двух неподвижных точечных зарядов в вакууме прямо пропорциональна произведению зарядов* q_1 *и* q_2 *и обратно пропорциональна квадрату расстояния* r *между ними*

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2.11)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Если заряды движутся, то кроме *кулоновской силы* (2.11), на них действуют *магнитные силы*. Магнитная сила (*сила Лоренца*), действующая на точечный заряд q, движущийся со скоростью v в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, определяется формулой

$$\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (2.12)$$

Если на движущийся электрический заряд помимо магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ действует и электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, то результирующая сила $\vec{F}$, приложенная к заряду, равна векторной сумме сил – силы, действующей со стороны электрического поля ($q\vec{E}$), и силы Лоренца (2.12):

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (2.13)$$

(Выражение (2.13) называется ***формулой Лоренца***)].

Частными случаями проявления электромагнитных взаимодействий являются *силы упругости* и *силы трения*. Для упругих сил и сил трения можно получить лишь приближенные эмпирические, т. е. основанные на опыте, формулы.

1. Упругие силы. Под действием внешних сил возникают деформации (т. е. *изменение размеров* и *формы тел*). Если после прекращения действия сил восстанавливаются прежняя форма и размеры тела, то деформация называется *упругой*. Для упругих деформаций справедлив **закон Гука**: *сила упругости пропорциональна абсолютному удлинению*

$$F_x = -kx, \tag{2.14}$$

где F_x – проекция силы упругости на ось x; k – коэффициент упругости [для пружины – *жесткость*; знак «–» указывает на то, что F_x направлена в сторону, противоположную деформации x]; x – абсолютное удлинение пружины.

Для однородных стержней также справедлив **закон Гука**, который принято формулировать следующим образом: *для малых деформаций механическое напряжение σ прямо пропорционально относительному удлинению ε*

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{2.15}$$

где E – *модуль Юнга*. Единица модуля Юнга E – *ньютон на метр в квадрате* $[\text{Н/м}^2] = [\text{Па}]$, паскаль. ***Модуль Юнга*** (*модуль упругих деформаций*) – физическая величина, характеризующая упругие свойства материала. Зависит только от свойств материала и не зависит от размеров и формы тела.

Механическое напряжение:

$$\sigma = \frac{F_\perp}{S}, \tag{2.16}$$

где $F_\perp$ – упругая сила, действующая перпендикулярно площади поперечного сечения стержня S.

Относительное удлинение:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \tag{2.17}$$

где Δl – приращение длины; l_0 – первоначальная длина.

2. Силы трения. Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей относительно друг друга. Различают ***внешнее*** (*сухое*) и ***внутреннее*** (*жидкое* или *вязкое*) ***трение***.

а) ***Внешним трением*** называется трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении [если соприкасающиеся тела неподвижны друг относительно друга, говорят о ***трении покоя***, если же происходит относительное перемещение этих тел, то в зависимости от характера их относительного движения говорят о ***трении скольжения, качения*** или ***верчения***].

Закон сухого трения: *сила трения скольжения пропорциональна модулю силы нормальной реакции опоры и не зависит от площади соприкосновения тел* (рис. 9):

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \tag{2.18}$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы материалов и качества обработки соприкасающихся поверхностей (значения μ определяют экспериментальным путем).

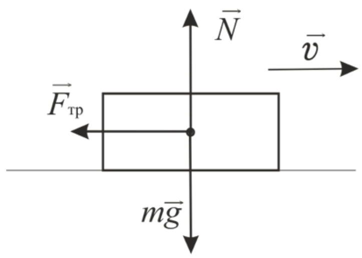

Рис. 9

б) ***Внутренним трением*** называется трение между частями одного и того же тела, например, между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою.

Закон вязкого трения. На тело, движущееся в вязкой (*жидкой* или *газообразной*) среде, действует сила – ***сила вязкого трения*** $\vec{F}_{\text{тр}}$, тормозящая его движение. При небольших скоростях $\vec{F}_{\text{тр}}$ растет линейно со скоростью:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v}, \tag{2.19}$$

где $\vec{v}$ – вектор скорости движения тела; r – коэффициент сопротивления, зависящий от формы и размеров тела, характера его поверхности, а также от свойств среды. Знак «–» указывает на то, что сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ направлена противоположно вектору скорости $\vec{v}$.

При больших скоростях в окружающей тело среде возникают завихрения, а силы сопротивления становятся пропорциональными квадрату скорости:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -rv^2\vec{e}_v, \tag{2.19'}$$

где $\vec{e}_v$ – орт вектора скорости.

Закон Архимеда: *на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила $\vec{F}_A$, равная весу вытесненной телом жидкости или газа* (рис. 10)

$$F_A = \rho_{\text{ж}} gV, \tag{2.20}$$

где $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости; V – объем части тела, погруженной в жидкость или газ [выталкивающая сила F_A также называется ***архимедовой*** или ***гидростатической подъемной силой***].

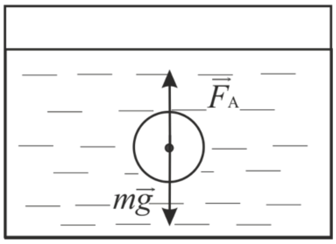

Рис. 10

2.5. Закон сохранения импульса. Центр масс

Совокупность материальных точек (тел), выделенных для рассмотрения, называется ***механической системой***. Силы взаимодействия между материальными точками (телами) механической системы называются ***внутренними*** (*согласно третьему закону Ньютона, геометрическая сумма внутренних сил системы равна нулю*). Силы, с которыми на материальные точки (тела) системы действуют внешние тела, называются ***внешними.*** Система называется ***замкнутой*** (или ***изолированной***), если на нее не действуют внешние силы.

Второй закон Ньютона (2.3.), записанный для одного тела, можно применить и к системе тел

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \vec{F}^{\text{внеш}}, \tag{2.21}$$

где $\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i$ – импульс системы; $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ – равнодействующие внешних сил; $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \ldots, \vec{F}'_n$ – равнодействующие внутренних сил [геометрическая сумма равнодействующих внутренних сил по третьему закону Ньютона равна нулю].

Если система является замкнутой (*внешних сил нет*), то из (2.21) следует, что

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\vec{v}_i) = 0, \qquad \text{т. е.} \qquad \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \text{const}. \tag{2.22}$$

Выражение (2.22) представляет собой **закон сохранения импульса:** *импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени*.

[Область действия закона сохранения импульса выходит за пределы ньютоновской механики, в рамках которой он получен. Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц (они подчиняются законам квантовой механики). Закон сохранения импульса является следствием однородности пространства (равноправия всех его точек) и поэтому носит универсальный характер, т. е. является *фундаментальным законом природы*].

Закон сохранения импульса выполняется и для *незамкнутых систем* в следующих частных случаях:

1. Если сумма внешних сил равна нулю.

2. Векторная сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю сумма проекций этих сил на какое-либо направление, например, на направление оси x. Полный импульс системы при этом не сохраняется, но сохраняется проекция импульса на направление оси x.

3. Время взаимодействия продолжается очень короткое время Δt, а внешние силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ ограничены, то изменением импульса системы $\Delta\vec{p}$ можно

пренебречь (считать, $\Delta t \to 0$). Примером является взаимодействие тел при ударе, взрыве.

Центром масс (или ***центром инерции***) системы материальных точек m_1, m_2, …, m_n называют воображаемую точку C, положение которой характеризует распределение массы этой системы. Радиус-вектор точки C равен

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}, \tag{2.23}$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно масса и радиус-вектор i-ой материальной точки; n – число материальных точек в системе; $m = \sum m_i$ – масса системы. Связанную с центром масс поступательно движущуюся систему отсчета будем называть *системой центра масс*.

Скорость центра масс

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{m} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\sum \vec{p}_i}{m} = \frac{\vec{p}}{m} \tag{2.24}$$

[учли, что $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, а $\sum \vec{p}_i$ есть импульс $\vec{p}$ системы]. Откуда

$$\vec{p} = m\vec{v}_C, \tag{2.25}$$

т. е. *импульс системы $\vec{p}$ равен произведению массы m системы на скорость $\vec{v}_C$ ее центра масс*.

Подставив выражение (2.25) в уравнение (2.21), получим **закон движения центра масс**:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}^{\text{внеш}}, \tag{2.26}$$

центр масс С механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила $\vec{F}^{\text{внеш}}$, равная геометрической сумме внешних сил, приложенных к системе.

Этот закон показывает, что для изменения скорости центра масс C системы необходимо, чтобы на систему действовала внешняя сила.

Примеры решения задач

2.1. На материальную точку массой 850 г действует сила $\vec{F} = 8t\vec{i} + 7t\vec{j}$ (Н), где $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные орты. Найдите скорость $\vec{v}$ и модуль v скорости точки в момент времени $t = 5$ с. Какой путь пройдет эта точка за время $\tau = 5$ с от начала движения? Начальная скорость была равна нулю.

Дано: $m = 0{,}85$ кг; $\vec{F} = 8t\vec{i} + 7t\vec{j}$ (Н); $t = 5$ с; $\tau = 5$ с; $v_0 = 0$.

Найти: $\vec{v}$; v; s.

Решение. По второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m}(8t\vec{i} + 7t\vec{j}).$$

По определению, ускорение есть первая производная скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t},$$

откуда

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\mathrm{d}t.$$

Интегрируя, получаем:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\,\mathrm{d}t = \int_0^t \vec{a}\,\mathrm{d}t,$$

[учли, что в начальный момент времени $t = 0$ начальная скорость $v_0 = 0$].

Таким образом, искомый вектор скорости, согласно записанным выражениям, имеет вид:

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\int_0^t (8t\vec{i} + 7t\vec{j})\mathrm{d}t = \frac{1}{m}(4t^2\vec{i} + 3{,}5t^2\vec{j}).$$

Модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{t^2}{m}\sqrt{28{,}25}.$$

Путь, пройденный точкой за время $\tau = 5$ с,

$$s = \int_0^\tau v(t)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{28{,}25}}{m}\int_0^\tau t^2\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{28{,}25}}{m}\frac{\tau^3}{3}.$$

Ответ: $\vec{v} = (4t^2\vec{i} + 3{,}5t^2\vec{j})/m$; $v = 156{,}33$ м/с; $s = 260{,}54$ м.

2.2. Тело движется вниз равноускоренно по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Зависимость пройденного пути от времени задается уравнением $s = 5t + 2{,}4t^2$. Найдите коэффициент трения μ тела о плоскость.

Дано: $\alpha = 45°$; $s = 5t + 2{,}4t^2$; $g = 9{,}81$ м/с^2.

Найти: μ.

Решение. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}},$$

где $m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{N}$ – сила реакции опоры: $\vec{F}_{\text{тр}} = \mu\vec{N}$ – сила трения.

Уравнение в проекциях на выбранные оси x и y запишется в виде:

$$\text{на } x\text{: } ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$$

$$\text{на } y\text{: } mg\cos\alpha = N.$$

Преобразовывая выражения, найдем коэффициент трения

$$\mu = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}.$$

Ускорение тела

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 4{,}8\ \text{м/с}^2.$$

Тогда искомый коэффициент трения

$$\mu = \frac{g\sin\alpha - 4{,}8}{g\cos\alpha}.$$

Ответ: $\mu = 0{,}308$.

2.3. Ракета движется в отсутствие внешних сил, выпуская непрерывную струю газа со скоростью 500 м/с, постоянной относительно ракеты. Расход газа $\mu = 4$ кг/с. Найдите скорость v ракеты относительно Земли через время 5 с после начала движения, если в начальный момент она имела массу (с топливом) 25 кг и ее скорость была равна нулю.

Дано: $u = 500$ м/с; $\mu = 4$ кг/с; $t = 5$ с; $m_0 = 25$ кг; $v_0 = 0$.

Найти: v.

Решение. Изменение импульса системы тел «ракета – выбрасываемый газ» за отрезок времени $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}\vec{p} = m\mathrm{d}\vec{v} + \vec{u}\mathrm{d}m = \mathrm{d}(m\vec{v}) + \mathrm{d}(m\vec{u}) = \mathrm{d}\vec{p}_1 + \mathrm{d}\vec{p}_2, \qquad (1)$$

где $\mathrm{d}\vec{p}_1$ и $\mathrm{d}\vec{p}_2$ – соответственно изменения импульса ракеты и выбрасываемой массы газа за время $\mathrm{d}t$.

По условию задачи, ракета движется в отсутствие внешних сил, поэтому импульс системы тел остается постоянным (система замкнута):

$$\mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}\vec{p}_1 + \mathrm{d}\vec{p}_2 = 0; \quad (2) \quad \mathrm{d}\vec{p}_1 = (m_0 - \mu t)\mathrm{d}\vec{v} \quad (3) \quad \text{и} \quad \mathrm{d}\vec{p}_2 = \mu\vec{u}\mathrm{d}t, \quad (4)$$

где $[m = m_0 - \mu t]$ – масса ракеты в момент времени t; $\vec{v}$ – скорость ракеты в момент времени t; $\mathrm{d}\vec{v}$ – изменение скорости ракеты за счет реактивного действия выбрасываемой струи газа за время $\mathrm{d}t$; $\vec{u}$ – скорость непрерывной струи газа; $\mu\mathrm{d}t$ – масса выбрасываемой порции газа.

Подставляя выражения (3) и (4) в формулу для изменения импульса системы тел (2), получим

$$(m_0 - \mu t)\mathrm{d}\vec{v} + \mu\vec{u}\mathrm{d}t = 0. \tag{5}$$

В проекции на ось x (ось направим по направлению полета ракеты) уравнение (5) запишется в виде:

$$(m_0 - \mu t)\mathrm{d}v - \mu u\mathrm{d}t = 0,$$

откуда

$$\mathrm{d}v = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t}\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Интегрируя полученное выражение в пределах от 0 до t (учтя, что при $t = 0$ начальная скорость $v_0 = 0$), найдем:

$$v = u\int_0^t \frac{\mu\mathrm{d}t}{m_0 - \mu t}, \tag{7}$$

отсюда скорость ракеты относительно Земли через время t:

$$v = u\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t}. \tag{8}$$

Ответ: $v = 804{,}72$ м/с.

2.4. В замкнутой системе, в результате столкновения двух частиц, образовалась новая частица. Найдите ее скорость $\vec{u}$ и модуль u, если масса у второй частицы в четыре раза больше, чем у первой, а их скорости перед столкновением равны $\vec{v}_1 = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$ и $\vec{v}_2 = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, где $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ – единичные орты.

Дано: $m_2 = 4m_1$; $\vec{v}_1 = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$; $\vec{v}_2 = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$.

Найти: $\vec{u}$; u.

Решение. Удар абсолютно неупругий (механическая энергия не сохраняется). Согласно закону сохранения импульса, полный импульс замкнутой системы двух взаимодействующих частиц остается постоянным:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \mathrm{const},$$

где $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ и $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$ сответственно импульсы частиц до удара; $\vec{p} = (m_1 + m_2)\vec{u}$ – полный импульс системы частиц после удара; $\vec{u}$ – скорость системы частиц после удара (одинаковая для обеих частиц).

Подставляя записанные выражения в формулу закона сохранения импульса, получим:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

откуда

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1 + 4m_1\vec{v}_2}{5m_1} = \frac{1}{5}(3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 8\vec{\imath} - 12\vec{\jmath}) = 2{,}2\vec{\imath} - 1{,}4\vec{\jmath}.$$

Модуль скорости:

$$u = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2{,}61 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\vec{u} = 2{,}2\vec{\imath} - 1{,}4\vec{\jmath}$; $u = 2{,}61$ м/с.

Задачи

13. Материальная точка движется по закону: $x = 3t^2 - t^3$ (м). В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна 9 Н. Найдите значение силы в момент изменения направления движения. Ответ: –9 Н

14. Найдите модуль силы, действующей на частицу массой 5 кг при ее движении по закону $x = 3\sin \pi t$ (м), $y = 4\cos \pi t$ (м), в момент времени $t = 1$ с.
Ответ: 20 Н

15. На тело массы 1 кг, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент времени $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени как $F = 3t$, Н. Направление этой силы все время составляет угол 45° с горизонтом. Найдите скорость тела в момент отрыва от плоскости и путь, пройденный телом к этому моменту времени. Ответ: 22,68 м/с; 34,97 м

16. Брусок массой 1,5 кг покоится на бруске массой 3 кг, лежащем на гладкой горизонтальной поверхности. На нижний брусок начинает действовать горизонтальная сила, возрастающая со временем по закону $F = 3 + 7t$, Н. Коэффициент трения между брусками равен 0,3. Найдите, в какой момент времени после начала действия силы брусок начнет проскальзывать. Ответ: 1,46 с

17. Маленький шарик массой 10 г, привязанный к нити длинной 1 м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Найдите угловую скорость шарика, если натяжение нити равно 1,44 Н. Ответ: 12 рад/с

18. Найдите, за какое время тело, соскальзывая вдоль наклонной плоскости длиной 9,81 м, пройдет вторую половину пути, если угол наклона плоскости к горизонту равен 30°. Коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 0{,}3$.
Ответ: 0,845 с

19. Стальной шарик массой 15 г упал с высоты 1,44 м на стальную плиту и подскочил после удара на 1,21 м. Найдите модуль изменения импульса шарика при ударе. Ответ: 0,153 кг · м/с

20. Частица массой 50 г, двигаясь равномерно по окружности радиуса 0,5 м, за время 0,05 с прошла половину окружности. Найдите модуль изменения импульса частицы за это время. Ответ: 3,14 кг · м/с

Лекция 3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

3.1. Механическая работа. Мощность

Элементарной работой $\mathrm{d}A$ силы $\vec{F}$ на малом перемещении $\mathrm{d}\vec{r}$ точки приложения силы называется скалярное произведение $\vec{F}$ на $\mathrm{d}\vec{r}$:

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = F_s\mathrm{d}s, \tag{3.1}$$

где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\mathrm{d}\vec{r}$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$ – элементарный путь; F_s – проекция вектора $\vec{F}$ на направление вектора $\mathrm{d}\vec{r}$; $F_s = F\cos\alpha$ (рис. 11).

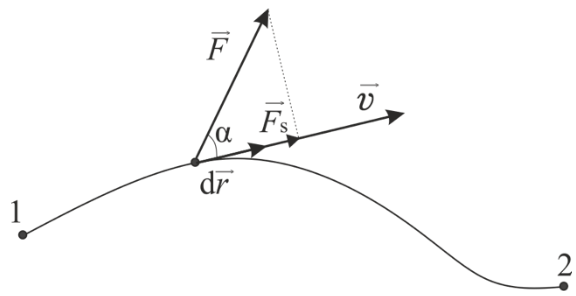

Рис. 11

Работа A совершаемая силой $\vec{F}$ на участке траектории от точки *1* до точки *2* равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути

$$A = \int_1^2 \mathrm{d}A = \int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_1^2 F\mathrm{d}s\cos\alpha = \int_1^2 F_s\,\mathrm{d}s. \tag{3.2}$$

Работу можно вычислить *графически* (рис. 12). Искомая работа A, согласно формуле (3.2), определяется на графике площадью заштрихованной фигуры. Если, например, тело движется прямолинейно, сила $F = \mathrm{const}$ и $\alpha = \mathrm{const}$, то получим

$$A = \int_1^2 F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = F\cos\alpha\int_1^2 \mathrm{d}s = Fs\cos\alpha, \tag{3.3}$$

где s – пройденный телом путь.

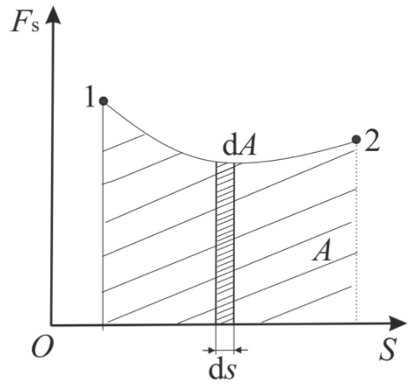

Рис. 12

Из формулы (3.2) следует, что работа силы может быть *положительной* или *отрицательной*: а) если угол α (угол между $\vec{F}$ и d$\vec{r}$) острый ($0 < \alpha < \pi/2$), то работа силы положительна; б) если угол α тупой ($\pi/2 < \alpha < \pi$) – работа силы отрицательна.

Сила *не совершает работы*: а) если тело покоится ($\mathrm{d}\vec{r} = 0$); б) если направление силы $\vec{F}$ перпендикулярно направлению перемещения d$\vec{r}$ ($\alpha = \pi/2$).

Работа потенциальной силы на произвольном замкнутой траектории L точки ее приложения равна нулю:

$$\oint_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = 0. \qquad (3.4)$$

Не изменяющееся с течением времени (стационарное) поле, действующее на материальную точку с силой $\vec{F}$, называется ***потенциальным полем***, если сила $\vec{F}$ потенциальна, т. е. удовлетворяет условию (3.4).

Единица работы A – *джоуль* [Дж]; 1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (1 Дж = 1 Н · м).

Мощность (N) – скалярная физическая величина, характеризующая быстроту совершения работы и численно равная работе, совершаемой за единицу времени

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}. \qquad (3.5)$$

Единица мощности N – *ватт* [Вт]; 1 Вт – мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

За время $\mathrm{d}t$ сила $\vec{F}$ совершает работу $\mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ [см. (3.1)], и мощность (***мгновенная мощность***) развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$N = \frac{\vec{F}\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v}, \tag{3.6}$$

т. е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы.

Если работа A совершается за время t, то ***средняя мощность***

$$< N > = \frac{A}{t}. \tag{3.7}$$

3.2. Энергия. Кинетическая и потенциальная энергии

Энергия – это универсальная мера всех форм движения материи и типов взаимодействия материальных объектов. Энергия не исчезает и не возникает из ничего: она может лишь переходить из одной формы в другую. Понятие энергии связывает воедино все явления природы. В соответствии с различными формами движения материи рассматривают различные виды энергии: механическую, внутреннюю, электромагнитную, ядерную и др. Механическая энергия бывает двух видов: *кинетическая* и *потенциальная*. Кинетическая энергия (*энергия движения*) определяется массами и скоростями рассматриваемых тел (материальных точек). Потенциальная энергия (*или энергия положения*) определяется взаимным расположением тел и характером сил взаимодействия между ними.

Кинетическая энергия ($E_к$) численно равна половине произведения массы тела на квадрат скорости:

$$E_к = \frac{mv^2}{2}. \tag{3.8}$$

[При рассмотрении простейшей системы, состоящей из одной частицы (материальной точки) массы m, движущейся под действием сил, результирующая которых равна $\vec{F}$, уравнение движения частицы:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}. \tag{3.9}$$

Умножив обе части уравнения (3.9) на элементарное перемещение $\mathrm{d}\vec{s}$, получим

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{s} = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}. \tag{3.10}$$

Учтя, что $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{v}\mathrm{d}t$ [см. формулы (1.5), (1.6) и (1.8), а так же, что перемещение $\mathrm{d}\vec{s}$ совпадает с приращением радиус-вектора $\mathrm{d}\vec{r}$ и $\mathrm{d}s = |d\vec{r}|$], представим левую часть равенства (3.10) в виде

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\vec{v}\mathrm{d}t = m\vec{v}\mathrm{d}\vec{v} \tag{3.11}$$

Согласно формуле $\vec{v}\mathrm{d}\vec{v} = v\mathrm{d}v$, тогда

$$m\vec{v}\mathrm{d}\vec{v} = mv\mathrm{d}v = \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right). \tag{3.12}$$

Заменив выражением (3.12) левую часть формулы (3.10), получим

$$\mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}. \tag{3.13}$$

Если результирующая сил $\vec{F}$, действующая на частицу, равна нулю, $d(mv^2/2) = 0$, а сама величина

$$E_\text{к} = \frac{mv^2}{2} \tag{3.14}$$

остается постоянной].

Из формулы (3.8) видно, что кинетическая энергия $E_\text{к}$ зависит только от массы m и скорости v частицы (тела). Приняв во внимание, что импульс частицы $\vec{p} = m\vec{v}$, выражение (3.8) можно записать

$$E_\text{к} = \frac{mv^2}{2}\cdot\frac{m}{m} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}. \tag{3.15}$$

Изменение кинетической энергии тела $\Delta E_\text{к}$ равно работе A всех сил, действующих на тело:

$$A = \Delta E_к = E_{к2} - E_{к1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (3.16)$$

Выражение (3.16), утверждающее, что изменение кинетической энергии равно работе результирующей силы, называется ***теоремой о кинетической энергии.***

[Работа A результирующей силы $\vec{F}$, совершаемой на пути ds (ds – модуль перемещения d$\vec{s}$):

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}. \qquad (3.17)$$

Проинтегрировав, обе части равенства (3.13) вдоль траектории от точки *1* до точки *2,* получим

$$\int_1^2 \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}, \qquad (3.18)$$

откуда

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{к2} - E_{к1}, \qquad (3.19)$$

т. е. левая часть полученного равенства (3.18) представляет собой приращение кинетической энергии частицы, а правая часть есть работа A_{12} силы на пути *1 – 2*:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}. \qquad (3.20)$$

Из (3.19) и (3.20) следует, что *работа A_{12} результирующей всех сил, действующих на частицу* (*тело*)*, идет на приращение кинетической энергии частицы*:

$$A_{12} = E_{к2} - E_{к1}. \qquad (3.21)].$$

Формулы (3.8) и (3.15) для кинетической энергии частицы справедливы в любой системе отсчета независимо от того, инерциальна она или нет.

Потенциальная энергия ($E_п$) характеризует взаимодействие между материальными точками (частицами) в зависимости от их взаимного расположения.

Понятие потенциальной энергии применимо только к консервативным силам. [Сила взаимодействия между частицами называется ***консервативной***, если работа этой силы зависит только от начального и конечного положения частиц, но не зависит от траектории их перемещения (силы, не удовлетворяющие этому условию, называют ***неконсервативными***). Система материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, называется ***консервативной системой***. Внешнее стационарное поле называется ***потенциальным***, если работа поля при перемещении частицы зависит только от ее начального и конечного положения, но не зависит от ее траектории. *Примеры консервативных сил*: гравитационные, упругие, кулоновские. *Примеры неконсервативных сил*: силы сухого и вязкого трения, силы сопротивления, силы давления газа, силы вихревого электрического поля и т. д.].

Частица, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией $E_\text{п}$. Работа $\mathrm{d}A$ консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_\text{п}. \tag{3.22}$$

Работа $\mathrm{d}A$, согласно формуле (3.1), выражается как скалярное произведение силы $\vec{F}$ на перемещение $\mathrm{d}\vec{r}$ и выражение (3.22) для элементарной работы можно представить в виде

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}E_\text{п} \tag{3.23}$$

[если известна функция $E_\text{п}(\vec{r})$, то из формулы (3.23) можно найти силу $\vec{F}$ по модулю и направлению].

Из формулы (3.23) можно определить потенциальную энергию частицы:

$$E_\text{п} = -\int\limits_{r_1}^{r_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} + C, \tag{3.24}$$

где C – постоянная интегрирования, т. е. $E_\text{п}$ определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной C. В каждой конкретной задаче для получения однозначной зависимости потенциальной энергии $E_\text{п}$ рассматриваемой системы от ее конфигурации выбирают ***нулевую конфигурацию***, в которой потенциальную энергию полагают равной нулю ($E_\text{п} = 0$).

Можно показать, что *работа консервативных сил* равна разности значений функции $E_п$ в начальной и конечной точках пути, т. е. убыли потенциальной энергии:

$$A_{12} = E_п(r_1) - E_п(r_2). \tag{3.25}$$

[Если известно выражение $E_п(x, y, z)$ для потенциальной энергии, можно найти силу, действующую на частицу в каждой точке поля. Записав равенство (3.25) для двух близких точек, лежащих на некоторой оси x, получим

$$E_п(x) - E_п(x + \mathrm{d}x) = F_x \mathrm{d}x.$$

Следовательно, проекция силы на произвольное направление выражается через производную от потенциальной энергии:

$$F_x = -\frac{\partial E_п}{\partial x} \tag{3.26}$$

(частная производная $\frac{\partial}{\partial x}$ означает, что $E_п$ рассматривается как функция одной переменной). Для компонент силы по осям y и z получаются аналогичные выражения:

$$F_y = -\frac{\partial E_п}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_п}{\partial z}. \tag{3.26$'$}$$

Сумма произведений компонент силы на соответствующие орты координатных осей дает вектор силы:

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + \vec{F}_y\vec{\jmath} + \vec{F}_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial E_п}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_п}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_п}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\, E_п, \tag{3.27}$$

где $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ – единичные координатные векторы (орты) координатных осей. Вектор, определяемый выражением (3.27) называется ***градиентом скаляра*** $E_п$.

Часто формулу (3.27) записывают также в виде

$$\vec{F} = -\nabla E_п, \tag{3.27$'$}$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ – ***оператор набла***.

Для центрального поля формула (3.26) принимает вид

$$F_r = -\frac{\mathrm{d}E_п(r)}{\mathrm{d}r}. \qquad (3.28)]$$

Конкретный вид функции $E_п(x; y; z)$ зависит от характера силового поля.

Пример 1. Потенциальная энергия материальной точки (тела) ***в поле силы тяжести Земли***. Потенциальная энергия тела массой m, поднятого на высоту h над поверхностью Земли, равна

$$E_п = mgh, \tag{3.29}$$

где высота h отсчитывается от оговоренного нулевого уровня, для которого $E_{п0} = 0$. [Выражение (3.29) вытекает непосредственно из того, что потенциальная энергия равна работе силы тяжести mg при перемещении тела массой m с высоты $h_1 = h$ на высоту $h_2 = 0$, т. е. на поверхность Земли: $mgh_1 - mgh_2 = mgh_1 = mgh$].

В отличие от кинетической энергии, которая всегда положительная, потенциальная энергия может быть как положительной ($E_п > 0$), так и отрицательной ($E_п < 0$). Если принять за нуль потенциальную энергию тела ($E_п = 0$), лежащего на поверхности Земли ($h = 0$), то потенциальная энергия тела, находящегося на дне ямы глубины h', будет равна $E_п = -mgh'$.

Пример 2. Потенциальная энергия ***упругодеформированного тела*** **(*пружины*)**. Сила упругости пропорциональна деформации [подчиняется закону Гука (2.8)]:

$$F_{x\,упр} = -kx,$$

где $F_{x\,упр}$ – проекция силы упругости на ось x; k – коэффициент упругости (для пружины – *жесткость*); знак минус указывает, что $F_{x\,упр}$ направлен в сторону, противоположную деформации x.

Работа силы упругости равна

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2,$$

где x_1 и x_2 – начальная и конечная деформации пружины.

Следовательно, потенциальная энергия упругодеформированного тела (пружины) равна

$$E_п = \frac{kx^2}{2}, \tag{3.30}$$

где за нуль ($E_п = 0$) принята энергия недеформированного тела (пружины).

Потенциальная энергия системы является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам.

Полная механическая энергия системы – энергия механического движения и взаимодействия:

$$E = E_к + E_п,$$

т. е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

Закон сохранения механической энергии: *полная механическая энергия системы материальных точек* (*тел*)*, находящихся под действием только консервативных сил, остается постоянной*:

$$E = E_к + E_п = \mathrm{const}. \tag{3.31}$$

Утверждение (3.31) является частным проявлением **общего фундаментального принципа сохранения энергии:** *полная энергия замкнутой системы сохраняется*. Общий принцип сохранения энергии выходит далеко за пределы ньютоновской механики, в рамках которого был получен закон сохранения механической энергии. Этот принцип тесно связан фундаментальным условием ***однородности времени*** [равнозначность всех моментов времени, заключающаяся в том, что замена момента времени t_1 моментом времени t_2 без изменения значений координат и скоростей тел не изменяет механических свойств системы; поведение системы, начиная с момента времени t_2, будет таким же, каким оно было бы, начиная с момента t_1], он является основанием всего здания современной физики.

[Действие *неконсервативных сил* (например, сил трения) уменьшает механическую энергию системы. Такой процесс называется диссипацией энергии (латинское слово «диссипация» означает «рассеяние»). Силы, приводящие к диссипации энергии, называются *диссипативными*. При диссипации энергии механическая энергия системы преобразуется в другие виды энергии (например, во внутреннюю энергию). Преобразование идет в соответствии со всеобщим законом природы – законом сохранения энергии].

Закон сохранения и превращения энергии имеет всеобщий характер (является *фундаментальным законом природы*), он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микротел. Полное количество энергии в изолированной системе тел и полей всегда остается постоянным; *энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой*. Этот факт является проявлением неуничтожимости материи и ее движения.

3.3. Соударение тел

При соударении тела деформируются. При этом энергия движения тел частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию тел (*увеличение внутренней энергии приводит к нагреванию тел*).

Предельными, идеализированными видами соударений являются *абсолютно неупругий* и *абсолютно упругий удары*.

Абсолютно неупругим называется удар, при котором потенциальная энергия упругой деформации не возникает; кинетическая энергия тел частично или полностью переходит во внутреннюю. После удара тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое с одинаковой скоростью или покоятся. При таком ударе выполняется только закон сохранения импульса. Механическая энергия не сохраняется – она частично или полностью переходит во внутреннюю.

Абсолютно упругим называется удар, при котором полная механическая энергия тел сохраняется. Сначала кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую и тела разлетаются. При таком ударе выполняются закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса.

Рассмотрим ***центральный удар*** двух однородных шаров. Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры (рис. 13). Будем предполагать, что шары движутся поступательно (т. е. не вращаясь), и что они образуют замкнутую систему. Обозначим массы шаров m_1 и m_2, скорости шаров до удара $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после удара $\vec{u}$ или $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$.

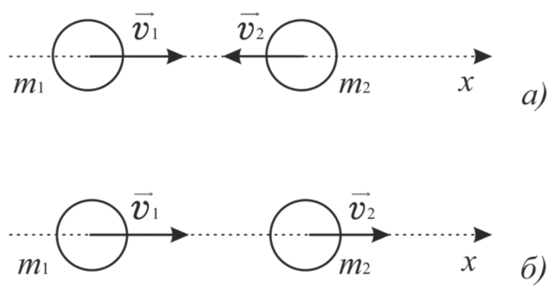

Рис. 13

1. ***Абсолютно неупругий удар***. По закону сохранения импульса

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

где $\vec{u}$ – скорость движения шаров после удара. Отсюда

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.32)$$

При абсолютно неупругом ударе закон сохранения механической энергии не соблюдается. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей тепловую или другие формы энергии. Эту «потерю» можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta E_к = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \qquad (3.33)$$

Используя формулу (3.32), получаем

$$\Delta E_к = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \qquad (3.34)$$

Если тело *2* (ударяемое тело) было первоначально неподвижно ($v_2 = 0$), то

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta E_к = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}. \tag{3.35}$$

[В случае абсолютно неупругого удара, не являющегося прямым центральным, формула (3.32) позволяет найти скорость центра масс (см. п. 2.5), соединяющихся при ударе тел. Однако в результате такого удара может также возникнуть вращение системы вокруг ее центра масс, согласующееся с законом сохранения момента импульса (см. п. 4.4)].

2. ***Абсолютно упругий удар***. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \tag{3.36}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \tag{3.37}$$

Произведя соответствующие преобразования в уравнениях (3.36) и (3.37), получим

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \tag{3.38}$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2), \tag{3.39}$$

откуда

$$\vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{v}_2 + \vec{u}_2. \tag{3.40}$$

Умножив (3.40) на m_1 и вычтя результат из (3.38), а затем умножив (3.40) на m_2 и сложив результат с (3.38), найдем скорости шаров после удара:

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2 \vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \tag{3.41}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1 \vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{3.42}$$

Чтобы выполнить расчеты, нужно спроецировать векторы скоростей на ось x (рис. 13). Если при расчете какая-то проекция скорости окажется отрицательной, то это означает, что вектор этой скорости направлен в сторону, противоположную направлению оси x.

Примеры решения задач

3.1. Тело массой 5 кг под действием некоторой силы движется прямолинейно согласно уравнению $s = 2t + 3t^2 + 4t^3$. Найдите работу силы в течение первых $t = 2$ с.

Дано: $m = 5$ кг; $s = 2t + 3t^2 + 4t^3$; $t = 2$ с.

Найти: A.

Решение. Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещение $\mathrm{d}\vec{r}$ называется скалярная величина:

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = F_s\mathrm{d}s,$$

где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\mathrm{d}\vec{r}$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$ – элементарный путь; F_s – проекция вектора силы $\vec{F}$ на направление вектора перемещения $\mathrm{d}\vec{r}$.

Работа силы на участке траектории от точки *1* до точки *2* равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Это сумма приводится к интегралу

$$A = \int_1^2 F\mathrm{d}s\cos\alpha = \int_1^2 F_s\,\mathrm{d}s.$$

Учитывая, что $F = ma$ и $\mathrm{d}s = vdt$, получаем:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} mav\mathrm{d}t.$$

Скорость и ускорение тела:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2 + 6t + 12t^2; \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6 + 24t.$$

Подставив полученные выражения в формулу для работы, находим:

$$A = \int_0^t m(2 + 6t + 12t^2)(6 + 24t)\mathrm{d}t = 12mt(1 + 3{,}5t + 6t^2 + 6t^3).$$

Ответ: $A = 9{,}6$ кДж.

3.2. Тело массы $m = 10$ кг начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 4t\vec{i} + 15t^2\vec{j}$, где $\vec{i}, \vec{j}$ – единичные орты. Найдите мощность, развиваемую силой в момент времени $t = 3$ с.

Дано: $m = 10$ кг; $\vec{F} = 4t\vec{i} + 15t^2\vec{j}$; $t = 3$ с.

Найти: P.

Решение. Согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на тело, равна

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 4t\vec{i} + 15t^2\vec{j},$$

откуда

$$\mathrm{d}\vec{v} = \frac{1}{m}(4t\vec{i} + 15t^2\vec{j})\mathrm{d}t$$

или

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\int_0^t (4t\vec{i} + 15t^2\vec{j})\mathrm{d}t = \frac{1}{m}(2t^2\vec{i} + 5t^3\vec{j}).$$

По определению, мощность – это работа, совершаемая в единицу времени:

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v}.$$

Подставив выражения для $\vec{F}$ и $\vec{v}$ в эту формулу, получим искомую мощность, развиваемую силой за время t:

$$P = \frac{1}{m}(4t\vec{i} + 15t^2\vec{j})(2t^2\vec{i} + 5t^3\vec{j}) = \frac{1}{m}(8t^3 + 75t^5).$$

Ответ: $P = 1844{,}1$ Вт.

3.3. Происходит центральное соударение двух абсолютно упругих шаров. Скорость первого шара перед ударом 12 м/с. Второй шар неподвижен. Масса первого шара в 5 раз больше массы второго. Найдите скорости шаров после удара. Удар считать упругим, центральным и прямым.

Дано: $v_1 = 12$ м/с; $v_2 = 0$; $m_1 = 5m_2$.

Найти: u_1; u_2.

Решение. При абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения импульса и механической энергии:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2},$$

где u_1 и u_2 – скорости шаров после удара [предполагается, что при прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$) и после ($\vec{u}_1, \vec{u}_2$) удара лежат на прямой, соединяющей их центры; проекции векторов скорости на эту прямую равны модулям скоростей].

По закону сохранения импульса, учитывая, что второй шар до удара покоился ($v_2 = 0$), в проекции на ось x получим:

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

Из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Решая совместно уравнения для импульса и энергии, найдем искомые скорости шаров после удара:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

(учли, что $v_2 = 0$).

Ответ: $u_1 = 8$ м/с; $u_2 = 20$ м/с.

Задачи

21. Сила, действующая на частицу, имеет вид $\vec{F} = 4\vec{\imath}$, где $\vec{\imath}$ – единичный орт. Найдите работу, совершаемую над частицей этой силой на пути от точки с координатами (2; 3; 4) (м) до точки с координатами (8; 6; 5) (м). Ответ: 24 Дж

22. Материальная точка совершила перемещение из точки *1* с радиус-вектором $\vec{r}_1 = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ (м), в точку *2* с радиус-вектором $\vec{r}_2 = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$ (м). При этом на точку действовала сила $\vec{F} = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$ (Н), где $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ – единичные орты. Найдите работу этой силы. Ответ: 14 Дж

23. Найдите кинетическую энергию, которой должно обладать тело массы 4 кг, чтобы по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30° подняться на высоту 2 м. Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью равен 0,2. Ответ: 105,67 Дж

24. Маленький шарик висит на конце легкой нити длиной 90 см. Найдите минимальную горизонтальную скорость, которую нужно придать шарику для того, чтобы нить с шариком совершила полный оборот вокруг оси, проходящей через точку подвеса и перпендикулярной нити. Ответ: 6,64 м/с

25. Происходит центральное соударение двух абсолютно упругих шаров. Скорость первого шара перед ударом 6 м/с. Второй шар неподвижен. Масса первого шара в 4 раза больше массы второго. Найдите скорость первого шара после удара. Удар считать упругим, центральным и прямым. Ответ: 3,6 м/с

26. Найдите приращение кинетической энергии системы из двух шаров с массами 3 кг и 6 кг при их абсолютно неупругом соударении. До соударения скорости шаров были 4 м/с и 8 м/с. Ответ: –144 Дж

27. Пуля массой 9 г, летящая горизонтально со скоростью 315 м/с, попадает в брусок массой 1,2 кг, висящий на нити длиной 1,8 м, и застревает в нем. Найдите угол отклонения нити и количество теплоты, выделившейся при ударе. Ответ: 32,4°; 443,76 Дж

Лекция 4. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Момент инерции

Моментом инерции (J) системы (тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений элементарных масс m_i на квадраты их расстояний r_i^2 до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \tag{4.1}$$

[Строго говоря, тело нужно рассматривать как механическую систему, масса m которой непрерывно распределен по объему V тела; так что момент инерции тела

$$J = \int_m r^2 \mathrm{d}m = \int_V r^2 \rho \mathrm{d}V, \tag{4.1$'$}$$

где ρ – плотность тела; величина r в этом случае есть функция положения точки с координатами $x; y; z$].

Единица момента инерции J – *килограмм-метр в квадрате* [кг · м^2].

[В качестве *примера* найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой h и радиусом R относительно его геометрической оси (рис. 14). Разобьем цилиндр на отдельные слои радиуса r и бесконечно малой толщины dr. Масса такого слоя равна dm = $= \rho \mathrm{d}V = \rho \cdot 2\pi r h \mathrm{d}r$ (dV – объем слоя). Все точки слоя отстоят от геометрической оси на одинаковое расстояние r, поэтому момент инерции слоя равен

$$\mathrm{d}J = r^2 \mathrm{d}m = 2\pi\rho h r^3 \mathrm{d}r.$$

Проинтегрировав последнее выражение по r в пределах от 0 до R (R – радиус цилиндра), получим искомый *момент инерции сплошного цилиндра*:

$$J = \int_0^R dJ = 2\pi\rho h \int_0^R r^3\, dr = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\rho h \pi R^2 \cdot R^2 = \frac{1}{2} m R^2, \tag{4.2}$$

где $m = \rho h \pi R^2$ – масса цилиндра. По формуле (4.2) можно найти момент инерции тонкого диска относительно перпендикулярной к нему проходящей через его центр оси, так как выражение (4.2) не зависит от высоты цилиндра h].

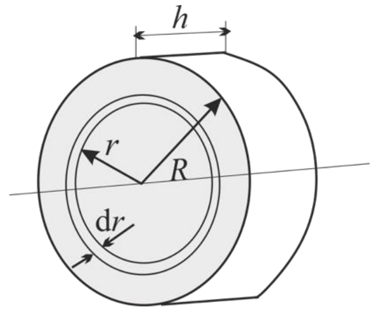

Рис. 14

Момент инерции тела относительно произвольной оси рассчитывается с помощью ***теоремы Штейнера*:** момент инерции тела J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс C тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между осями:

$$J = J_C + ma^2. \qquad (4.3)$$

Например, *момент инерции диска* относительно оси перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его край равен $3mR^2/2$ $[J = mR^2/2 + {} + mR^2 = 3mR^2/2]$.

Минимальный момент инерции среди всех параллельных осей получается для оси, проходящей через центр масс C тела. [В зависимости от симметрии тела его характеризуют одним, двумя или тремя моментами инерции по отношению к главным осям, проходящим через центр инерции].

Момент инерции J является мерой инертности твердого тела по отношению к вращательному движению, т. е. играет ту же роль, что масса m тела для поступательного движения. Момент инерции тела зависит от материала, формы и размеров тела, а также от расположения тела относительно оси вращения.

Всякое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или находиться в покое. Аналогично массе m момент инерции J является величиной аддитивной.

Моменты инерции для некоторых тел *правильной геометрической формы* (тела считаются однородными, m – масса тела) приведены в таблице 1.

Таблица 1

№ п/п	Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
1.	Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии *«по цилиндру»*	$J = mR^2$
2.	Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии *«по цилиндру»*	$J = mR^2/2$
3.	Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = ml^2/12$
		Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$J = ml^2/3$
4.	Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$J = 2mR^2/5$

4.2. Кинетическая энергия вращательного движения

Энергия, которой обладает твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс C тела, называется ***кинетической энергией вращательного движения*** этого ***тела***. Эта энергия складывается из кинетических энергий материальных точек, составляющих тело:

$$E_{\text{к(вр)}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \cdots + \frac{m_n v_n^2}{2}, \text{ или } E_{\text{к(вр)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2},$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – соответственно массы и линейные скорости материальных точек. Используя выражение для угловой скорости $\omega = v_1/r_1 = = v_2/r_2 = \cdots = v_n/r_n$, получим:

$$E_{\text{к(вр)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где ω – угловая скорость; $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – расстояния материальных точек от оси вращения z; J_z – момент инерции тела относительно оси z. Таким образом, *кинетическая энергия вращающегося тела*

$$E_{\text{к(вр)}} = \frac{J_z \omega^2}{2}. \tag{4.4}$$

Для вращательного движения также справедлива *теорема об изменении кинетической энергии* [см. формулу (3.16)]:

$$A = \Delta E_{\text{к(вр)}} = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}. \tag{4.5}$$

При плоском движении тело (например, цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения) участвует в двух движениях: поступательном и вращательном. В этом случае полная кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений и рассчитывается по формуле:

$$E = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}, \tag{4.6}$$

где m – масса катящегося тела; v_C – скорость центра масс тела; J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость.

4.3. Момент силы

а) *Моментом силы $\vec{M}$ относительно неподвижной точки O* называется векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку приложения силы, на силу $\vec{F}$ (рис.15).

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]. \tag{4.7}$$

Модуль момента силы

$$M = Fr\sin\alpha = Fl, \tag{4.8}$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$; $l = r\sin\alpha$ – плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы $\vec{F}$ и точкой O).

$\vec{M}$ – псевдовектор, его направление совпадает с направлением правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$.

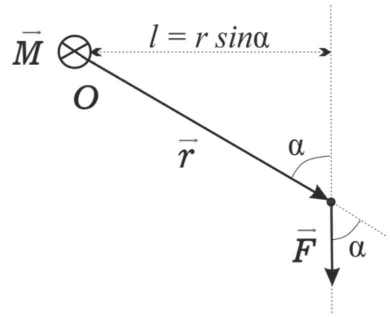

Рис. 15

б) ***Моментом силы относительно неподвижной оси*** z называется скалярная величина M_Z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определенного относительно точки O данной оси z (рис. 16).

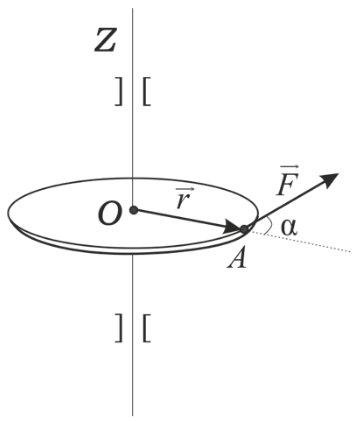

Рис. 16

Если ось z совпадает с направлением вектора $\vec{M}$, то момент силы

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r}\vec{F}\right]_Z \tag{4.9}$$

[$\vec{M}_z$ представляется в виде вектора, совпадающего с осью z].

Работу $\mathrm{d}A$, совершаемая внешней силой $\vec{F}$ при повороте твердого тела на бесконечно малый угол $\mathrm{d}\varphi$, можно представить формулой

$$\mathrm{d}A = M_z \mathrm{d}\varphi, \tag{4.10}$$

где M_z – момент силы относительно оси z [учли (4.8) и формулу для элементарной работы $\mathrm{d}A = F_s \mathrm{d}s = F \sin\alpha \, r \mathrm{d}\varphi$, где $F_s = F \sin\alpha$ и $\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\varphi$]. Таким образом, работа при вращении равна произведению момента действующей силы на угол поворота.

Проинтегрировав выражение (4.10), можно найти работу A, совершаемую при повороте вращающегося тела на угол $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathrm{d}A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \mathrm{d}\varphi. \tag{4.11}$$

Если $M = \mathrm{const}$, то

$$A = M\varphi. \tag{4.12}$$

Из выражения (4.10), разделив работу $\mathrm{d}A$ на время $\mathrm{d}t$, за которое тело повернулось на угол $\mathrm{d}\varphi$, найдем мощность, развиваемую силой F:

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = M\omega, \tag{4.13}$$

где ω – угловая скорость.

Работа $\mathrm{d}A$ при вращении твердого тела идет на увеличение его кинетической энергии [см. формулу (4.5): $\mathrm{d}A = \mathrm{d}E_{\text{к(вр)}}$], но

$$\mathrm{d}E_{\text{к(вр)}} = \mathrm{d}\left(\frac{J_z\omega^2}{2}\right) = J_z\omega\mathrm{d}\omega,$$

поэтому

$$M_z\mathrm{d}\varphi = J_z\omega\mathrm{d}\omega,$$

или

$$M_z\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = J_z\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

Учитывая, что $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, получим

$$M_z = J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_z\varepsilon \quad \text{или} \quad M_z = J_z\varepsilon, \tag{4.14}$$

где ε – угловое ускорение.

Уравнение (4.14) представляет собой ***уравнение динамики вращательного движения твердого тела*** относительно неподвижной оси.

Если ось z совпадает с главной осью инерции проходящей через центр масс C твердого тела, то имеет место векторное равенство

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \tag{4.15}$$

где J – главный момент инерции тела.

Единица момента силы M – *ньютон-метр* [Н · м].

4.4. Момент импульса

1. ***Моментом импульса*** $(\vec{L}_i)$ ***материальной точки относительно неподвижной точки*** O называется векторное произведению радиус-вектора $\vec{r}_i$ материальной точки, проведенного из точки O, на импульс этой материальной точки $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ (рис. 17):

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i\vec{p}_i] = [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i]. \tag{4.16}$$

Направление $\vec{L}_i$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}_i$ к $\vec{p}_i$.

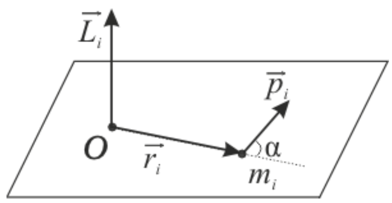

Рис. 17

Модуль вектора момента импульса

$$L_i = r_i p_i \sin\alpha = m_i v_i r_i \sin\alpha = p_i l, \tag{4.17}$$

где α – угол между векторами $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$; l – плечо вектора $\vec{p}_i$ относительно точки O.

Единица момента импульса L – *килограмм-метр в квадрате на секунду* [кг · м^2/с].

2. Проекция вектора $\vec{L}$ на произвольную ось z, проходящую через точку O, называется ***моментом импульса*** (L_z) ***материальной точки (частицы) относительно*** *этой* ***оси***:

$$L_Z = [\vec{r}\vec{p}]_{\text{пр.}z}. \quad (4.18)$$

3. ***Момент импульса*** (L_z) ***твердого тела относительно неподвижной оси вращения*** z будет равен сумме проекций моментов импульсов отдельных точек (частиц) на эту ось:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i. \quad (4.19)$$

Используя формулу (1.21) $v_i = \omega r_i$, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \, \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z \omega,$$

т. е.

$$L_z = J_z \omega \quad (4.20)$$

– момент импульса L_z твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции J_z тела относительно той же оси на угловую скорость ω.

Так как вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения (рис. 18), то вектор $\vec{L}$ также будет направлен по оси вращения. Тогда формулу (4.20) можно переписать в векторном виде

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (4.21)$$

Продифференцируем по времени t выражение (4.20):

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_z \varepsilon = M_z,$$

т. е.

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z. \quad (4.22)$$

Выражение (4.22) представляет собой ***уравнение динамики вращательного движения твердого тела*** *относительно неподвижной оси:* производная по времени от момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси.

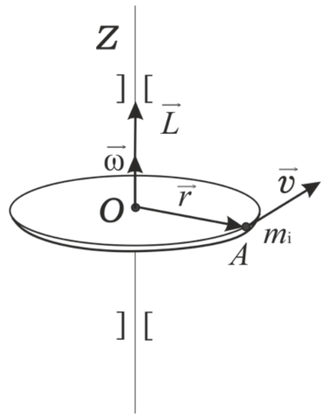

Рис. 18

Можно показать, что *уравнение динамики вращательного движения векторной форме* имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} \qquad (4.23)$$

– *скорость изменения момента импульса со временем равна суммарному моменту сил, действующих на частицу*.

Из выражения (4.23) следует, что если $\vec{M} = 0$ (в замкнутой системе момент внешних сил равен нулю) и $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = 0$, откуда

$$\vec{L} = \mathrm{const}. \qquad (4.24)$$

Выражение (4.24) представляет собой **закон сохранения момента импульса:** *момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным*.

Закон сохранения момента импульса можно применять и для незамкнутых систем, если алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно оси вращения равна нулю.

В основе закона сохранения момента импульса лежит ***изотропия пространства***, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям. Закона сохранения момента импульса – *фундаментальный закон природы*.

Примеры решения задач

4.1. Однородный цилиндр, радиуса 20 см, имеющий массу 15 кг, вращается под действием постоянной касательной силы 120 Н, приложенной к ободу цилиндра, с постоянным угловым ускорением ($\varepsilon = \text{const}$). Найдите момент сил трения, действующих на цилиндр при вращении, если его движение подчиняется закону $\varphi = 18t^2 + 9t + 5$.
Дано: $R = 20$ см $= 0{,}2$ м; $m = 15$ кг; $F_\tau = 120$ Н; $\varphi = 18t^2 + 9t + 5$; $\varepsilon = \text{const}$.
Найти: $M_{\text{тр}}$.
Решение. На цилиндр при вращении действуют сила $\vec{F}_\tau$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Согласно второму закону Ньютона для вращательного движения, результирующий момент сил, под действием которого вращается цилиндр, равен

$$M = F_\tau R - M_{\text{тр}}.$$

С другой стороны, согласно основному закону динамики вращательного движения, вращающий момент, приложенный к цилиндру,

$$M = J\varepsilon,$$

где $J = mR^2/2$ – момент инерции цилиндра; ε – угловое ускорение.

Угловое ускорение ε цилиндра, по определению, равно второй производной угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = 36 \text{ рад/с}^2.$$

Приравняв полученные выражения для вращающего момента сил, найдем искомый момент сил трения:

$$F_\tau R - M_{\text{тр}} = J\varepsilon,$$

откуда

$$M_{\text{тр}} = F_\tau R - J\varepsilon = F_\tau R - \frac{mR^2\varepsilon}{2}.$$

Ответ: $M_{\text{тр}} = 13{,}2$ Н · м.

4.2. Сравните кинетические энергии двух цилиндров с одинаковыми плотностями, катящихся по плоскости с одинаковой скоростью, если радиус второго цилиндра в четыре раза меньше радиуса первого.
Дано: $l_1 = l_2 = l$; $v_1 = v_2 = v$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; $R_2 = R_1/4$.
Найти: $E_{\text{к}_2}/E_{\text{к}_1}$.
Решение. Кинетическая энергия цилиндра, катящегося по плоскости без скольжения, складывается из энергии поступательного и вращательного движений:

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где m – масса цилиндра; $J = mR^2/2$ – момент инерции цилиндра относительно оси симметрии; $v = \omega R$ – скорость центра масс цилиндра; ω – угловая скорость цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс; R – радиус цилиндра.

Подставив эти выражения в формулу для кинетической энергии, получаем:

$$E_\text{к} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Учитывая, что масса цилиндра

$$m = \rho V = \pi R^2 l\rho,$$

искомое отношение кинетических энергий

$$\frac{E_{\text{к}_2}}{E_{\text{к}_1}} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

Ответ: $E_{\text{к}_2}/E_{\text{к}_1} = 1/16$.

4.3. Шар скатывается с наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 24°. Найдите длину наклонной плоскости, если скорость шара в конце наклонной плоскости равна 8 м/с, а коэффициент трения равен $\mu = 0{,}15$.

Дано: $\alpha = 24°$; $v = 8$ м/с; $\mu = 0{,}15$; $g = 9{,}81$ м/с^2.

Найти: l.

Решение. При скатывании шара с наклонной плоскости его потенциальная энергия частично переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движений и расходуется на работу по преодолению силы трения.

Потенциальная энергия шара на высоте h наклонной плоскости

$$E_\text{п} = mgh = mgl\sin\alpha,$$

где l – длина наклонной плоскости.

Работа по преодолению силы трения на пути l

$$A = F_\text{тр}l = \mu mgl\cos\alpha,$$

где $F_\text{тр} = \mu mg\cos\alpha$ – сила трения; μ – коэффициент трения.

Кинетическая энергия шара в конце наклонной плоскости

$$E_\text{к} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где $J = 2mR^2/5$ – момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр масс; v – скорость центра масс шара; $\omega = v/R$ – угловая скорость относительно оси, проходящей через центр масс; R – радиус шара.

Подставив эти выражения в формулу для кинетической энергии, получаем:

$$E_\text{к} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mR^2}{5}\frac{v^2}{2R^2} = \frac{7mv^2}{10} = 0{,}7mv^2.$$

По закону сохранения энергии:

$$E = A + E_\text{к},$$

следовательно,

$$mgl\sin\alpha = \mu mgl\cos\alpha + 0{,}7mv^2,$$

откуда искомое значение длины наклонной плоскости

$$l = \frac{0{,}7v^2}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}.$$

Ответ: $l = 16{,}93$ м.

4.4. Платформа в виде сплошного диска радиуса 2,8 м и массы 220 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой 15 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой 80 кг. Найдите, какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек (считая его точечной массой), если он перейдет на край платформы.

Дано: $R = 2{,}8$ м; $M = 220$ кг; $\nu_1 = 15$мин$^{-1}$ = 0,25 с$^{-1}$; $m = 80$ кг.

Найти: v.

Решение. Согласно условию задачи, платформа с человеком вращается по инерции, т. е. результирующий момент всех внешних сил, приложенных к вращающейся системе «платформа – человек» равен нулю. При этом условии для этой системы выполняется закон сохранения момента импульса ($L_z = J_z\omega = \mathrm{const}$), т. е.

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где $J_1 = MR^2/2$ – момент инерции системы, когда человек стоит в центре платформы (учли, что момент инерции человека, стоящего в центре платформы, равен нулю); $J_2 = MR^2/2 + mR^2$ – момент инерции системы, когда человек стоит на краю платформы (учли, что момент инерции платформы равен $MR^2/2$); R – радиус платформы; ω_1 и ω_2 – соответственно угловые скорости системы, когда человек стоял в центре и на краю платформы ($\omega_1 = 2\pi\nu_1$ и $\omega_2 = 2\pi\nu_2 = v_2/R$; v_2 – линейная скорость человека относительно пола помещения).

Подставив записанные выражения в формулу закона сохранения момента импульса, получаем:

$$\frac{MR^2}{2}2\pi\nu_1 = \left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\frac{v_2}{R},$$

откуда искомая скорость человека

$$v_2 = 2\pi\nu_1 R\frac{M}{M + 2m}.$$

Ответ: $v_2 = 2{,}55$ м/с.

Задачи

28. Определите момент инерции шара массой 600 г и радиусом 8 см относительно оси, являющейся касательной к его поверхности.

Ответ: $53{,}76\cdot 10^{-4}$ кг · м^2

29. Однородный диск массы 3 кг и радиуса 0,8 м вращается с угловой скоростью 4 рад/с вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку, отстоящую от его центра на половину радиуса. Найдите момент импульса диска относительно этой оси. Ответ: 5,76 кг · м^2/с

30. Вентилятор, момент инерции которого равен 10 кг · м^2, вращается с частотой 4 с$^{-1}$. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав 20 оборотов, остановился. Найдите: 1) время, за которое вентилятор остановился; 2) момент сил торможения; 3) работу сил торможения.

Ответ: 10 с; 25,12 Н · м; 3155,07 Дж

31. Вычислите момент импульса Земли L_0, обусловленный ее вращением вокруг своей оси. Сравните этот момент с моментом импульса L, обусловленным движением Земли вокруг Солнца. Землю считать однородным шаром, массой $5{,}96\cdot 10^{24}$ кг и средним радиусом $6{,}37\cdot 10^{6}$ м, а орбиту Земли – окружностью, радиуса $1{,}496\cdot 10^{11}$ м (среднее расстояние от Солнца до Земли).

Ответ: $L_0 = 7\cdot 10^{33}$ кг · м^2/с; $L = 2{,}7\cdot 10^{40}$ кг · м^2/с $= 3{,}86\cdot 10^{6}L_0$

32. Вал массы 120 кг и радиуса 6 см вращался с частотой 10 об/с. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой 60 Н, под действием которой вал остановился через 14 с. Найдите коэффициент трения.

Ответ: 0,269

33. Кинетическая энергия вращательного движения шара, катящегося по горизонтальной поверхности, равна 30 Дж. Определите кинетическую энергию поступательного движения шара и его полную кинетическую энергию.

Ответ: 75 Дж; 105 Дж

34. Человек массой 80 кг, стоящий на краю горизонтальной платформы массой 160 кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой 6 мин$^{-1}$, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека – точечной массой, определите, с какой частотой будет тогда вращаться платформа. Ответ: 0,2 с$^{-1}$

35. Найдите отношение скоростей центров масс сплошного и тонкого полого цилиндров, имеющих одинаковые массы и радиусы, после их скатывания без проскальзывания с горки с одинаковой высоты. Ответ: 1,15

Лекция 5. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

5.1. Давление в жидкости и газе

Гидроаэромеханика – раздел механики, изучающий движение жидких и газообразных сред и их взаимодействие между собой и с граничащими с ними твердыми телами. Гидроаэромеханика заменяет действительную молекулярную структуру жидкостей и газов идеализированными представлениями о материальной среде, обладающей двумя основными свойствами ***сплошностью*** (*непрерывностью*) и ***легкой подвижностью*** (*текучестью*). *Основной задачей гидродинамики* является исследование изменения параметров *в движущейся жидкости* (***течение***): скорость движения частиц жидкости; давление в рассматриваемой точке; силы воздействия жидкости на погруженные в нее тела и т. д.

Для описания движения жидкостей используются различные *модели*. В простейшей модели жидкость (или газ) предполагается ***несжимаемой*** (т. е. жидкость, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем) и ***идеальной*** (т. е. воображаемая несжимаемая жидкость, у которой внутренне трение между движущимися слоями и теплопроводность полностью отсутствуют). [В отличие от жидкостей газы, вообще говоря, нельзя считать несжимаемыми, так как при постоянной температуре ($T = \mathrm{const}$) плотность газа ρ пропорциональна его давлению p ($\rho \sim p$). Однако, как показывают расчеты, сжимаемостью газа можно пренебречь при не слишком больших скоростях υ течения (например, пренебрежение сжимаемостью воздуха при $\upsilon \leq 100$ м/с приводит к ошибке, не превышающей 5 %). В ***реальных жидкостях*** при перемещении слоев жидкости друг относительно друга возникают силы внутреннего трения, тормозящие относительное смещение слоев. Однако в ряде случаев влияние внутреннего трения невелико и им можно пренебречь].

Давлением p жидкости называется физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади поверхности в перпендикулярном к поверхности направлении (рис. 19):

$$\Delta p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \tag{5.1}$$

Единица давления p – *паскаль* [Па]; 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2 (1 Па = 1 Н/м^2).

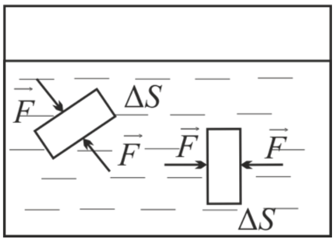

Рис. 19

Закон Паскаля: *давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.*

Если несжимаемая жидкость находится в равновесии давление по горизонтали всегда одно и то же. Свободная поверхность жидкости всегда горизонтальна, за исключением места около стенок сосуда. У несжимаемой жидкости плотность не зависит от давления. Если поперечное сечение цилиндрического столба жидкости равно S, высота столба h, плотность жидкости ρ, тогда вес P этого столба равен:

$$P = \rho g S h. \tag{5.2}$$

Используя формулу (5.1), получим давление на нижнее основание столба жидкости:

$$p = \frac{P}{S} = \frac{\rho g S h}{S} = \rho g h, \tag{5.3}$$

т. е. давление столба несжимаемой жидкости на дно сосуда зависит от высоты и плотности жидкости. Давление, которое вычисляется выражением (5.3) называют ***гидростатическим давлением.*** Гидростатическое давление жидкости (*воды*) обладает двумя основными свойствами: 1) давление p направлено по внутренней нормали к площади, на которую действует; 2) величина давления

p в данной точке не зависит от направления (т. е. от ориентированности в пространстве площадки, на которой находится точка).

Давление внутри жидкости p на глубине h, будет складываться из *атмосферного давления* p_0 и *гидростатического давления* $\rho g h$:

$$p = p_0 + \rho g h. \tag{5.4}$$

Согласно формуле (5.3), давление, оказываемое на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, определяемая **законом Архимеда**: *на тело, погруженное в жидкость* (*газ*)*, действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости* (*газа*):

$$F_{\text{А}} = \rho g V, \tag{5.5}$$

где ρ – плотность жидкости; V – объем погруженного в жидкость (газ) тела. $F_{\text{А}}$ – сила Архимеда.

5.2. Уравнение неразрывности (*теорема о неразрывности струи*)

Движение жидкости называется ***течением***, а непрерывную массу частиц жидкости, движущуюся в определенном направлении – ***потоком жидкости***. Для наглядного представления движения жидкости вводится понятие ***линия тока*** – это мысленно проведенная в потоке линия, касательная к которой в любой ее точке совпадает по направлению с вектором скорости $\vec{v}$ жидкости в этой точке в данный момент времени (рис. 20). [Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее. По картине линий тока можно судить не только о направлении, но и о модуле вектора скорости $\vec{v}$ в разных точках пространства, т. е. можно определить состояние движения жидкости. Картина линий тока может непрерывно меняться (поскольку разные частицы могут проходить через данную точку пространства с разными скоростями ($v = v(t)$)].

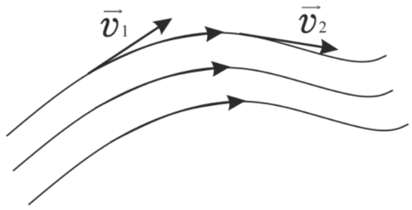

Рис. 20

Если скорость в каждой точке пространства остается постоянным ($\upsilon = \text{const}$), то течение жидкости называется ***стационарным*** (*установившимся*). При стационарном течении любая частица жидкости проходит через данную точку пространства с одной и той же скоростью υ (линии тока в этом случае совпадают с траекториями частиц).

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется ***трубкой тока***. Часть потока, ограниченная трубкой тока, называется ***струйкой***. Вектор скорости $\vec{\upsilon}$ будет касательным к поверхности трубки тока в каждой ее точки; следовательно, частицы жидкости при своем движении не пересекают стенок трубки тока.

Рассмотрим тонкую трубку тока (рис. 21). Выберем два ее сечения S_1 и S_2, перпендикулярные направлению вектора скорости $\vec{\upsilon}$. При стационарном течении количество жидкости, втекающей в единицу времени в трубку тока через сечение S_1, равно количеству жидкости, вытекающей через сечение S_2 [за время Δt через сечение S проходит объем жидкости $S\upsilon\Delta t$; следовательно, за 1 с через S_1 пройдет объем жидкости $S_1\upsilon_1$, где υ_1 – скорость течения жидкости в месте сечения S_1; через сечение S_2 за 1 с пройдет объем жидкости $S_2\upsilon_2$, где υ_{21} – скорость течения жидкости в месте сечения S_2].

Если поперечное сечение трубки тока бесконечно мало, то можно считать, что скорость жидкости одинакова во всех точках одного и того же поперечного сечения ($\upsilon = \text{const}$).

Отсюда следует, что объемы жидкости, протекающие в единицу времени через сечения S_1 и S_2, должны быть одинаковыми [здесь предполагается, что жидкость *несжимаема*, т. е. плотность всюду одинакова ($\rho = \text{const}$)]:

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2 = \text{const} \ \text{ или } \ S\upsilon = \text{const}. \tag{5.6}$$

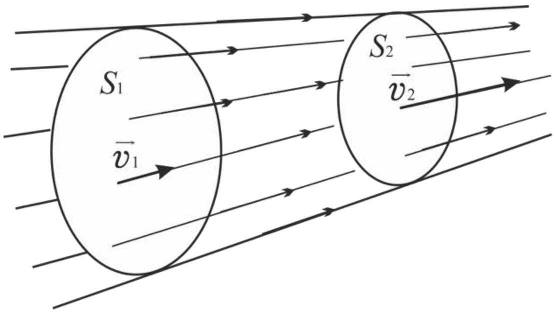

Рис. 21

Соотношение (5.6) представляет собой ***уравнение неразрывности*** (***теорему о неразрывности струи***) для несжимаемой жидкости: *для несжимаемой жидкости при стационарном течении произведение $S\upsilon$ в любом сечении данной трубки тока имеет одинаковое значение, т. е. есть величина постоянная.*

Из (5.6) следует, что при переменном сечении трубки тока частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением. В горизонтальной трубке это ускорение может быть обусловлено только постоянством давления вдоль оси трубки – в местах, где скорость меньше, давление должно быть больше, и наоборот [см. п. 5.3].

Соотношение (5.6) справедливо не только для несжимаемых сплошных сред жидкостей, но также и для газов, плотность ρ которых может изменяться вдоль струйки.

Для элементарной струйки с малым поперечным сечением $\mathrm{d}S$ величины $\mathrm{d}V_{\text{сек}} = \upsilon\mathrm{d}S$ и $\mathrm{d}m_{\text{сек}} = \rho\upsilon\mathrm{d}S$ называются соответственно ***секундным объемным расходом*** и ***секундным массовым расходом жидкости***.

Для струи конечных размеров объемный и массовый расходы находятся путем интегрирования $\mathrm{d}V_{\text{сек}}$ и $\mathrm{d}m_{\text{сек}}$ по всей площади S поперечного сечения струи:

$$V_{\text{сек}} = \int_0^S \upsilon\mathrm{d}S \quad \text{и} \quad m_{\text{сек}} = \int_0^S \rho\upsilon\mathrm{d}S. \qquad (5.6')$$

Если плотность ρ и скорость υ одинаковы во всех точках поперечного сечения струи, то $V_{\text{сек}} = \upsilon S$ и $m_{\text{сек}} = \rho\upsilon S$.

5.3. Уравнение Бернулли

Вторым основным уравнением гидродинамики является ***уравнение Бернулли*** (опубликовано в 1738 г.), устанавливающее взаимосвязь между скоростью и давлением в различных сечениях одной и той же струйки [см. формулу (5.11)].

[Рассмотрим стационарное течение несжимаемой идеальной жидкости. Выделим трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2, по которой слева направо течет жидкость (рис. 22).

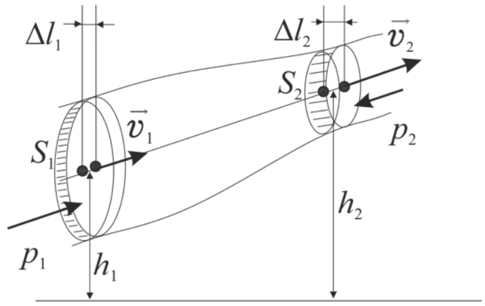

Рис. 22

Различные части трубки могут находиться на разных высотах, например, на высоте h_1 расположено сечение S_1, а на высоте h_2 – сечение S_2. Пусть в месте сечения S_1 скорость течения будет υ_1, а давление p_1; аналогично, в месте сечения S_2 скорость течения υ_2 и давление p_2. За малый промежуток времени Δt объем жидкости перемещается вдоль трубки тока, причем сечение S_1 получает перемещение Δl_1, а сечение – перемещение Δl_2.

Согласно закону сохранения энергии, работа A совершаемая при этом силами давления по перемещению массы m жидкости, равна изменению полной энергии:

$$A = E_2 - E_1, \tag{5.7}$$

где E_1 и E_2 – соответственно полные энергии жидкости массы m в местах сечений S_1 и S_2.

С другой стороны, работа сил давления, приложенных к сечениям S_1 и S_2 равна

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2)\Delta V. \tag{5.8}$$

где ΔV – объем жидкости, заключенный между сечениями S_1 и S_2.

Полная энергия рассматриваемого объема жидкости слагается из кинетической энергии и потенциальной энергии в поле земного тяготения. Вследствие стационарности течения полная энергия той части жидкости (на рис. 22 – это внутренняя незаштрихованная часть трубки тока), за время Δt не изменяется. Таким образом, для приращения полной энергии $\Delta E = A$ (см. формулу (5.7)) получается следующее выражение:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2\right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1\right) \qquad (5.9)$$

(учли, что приращение полной энергии ΔE равно разности значений полной энергии заштрихованных объемов ΔV_2 и ΔV_1, масса которых $\Delta m = \rho \Delta V$; где ρ – плотность жидкости).

Приравнивая выражения (5.8) и (5.9), получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \qquad (5.10)].$$

При выводе формулы (5.10) сечения S_1 и S_2 выбирались произвольно, поэтому можно утверждать, что *в стационарно текущей несжимаемой и идеальной жидкости вдоль любой линии тока* выполняется условие

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}, \qquad (5.11)$$

где p – ***статическое давление*** (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела); $\rho v^2/2$ – ***динамическое давление*** (*скоростной напор*)]; $\rho g h$ – *гидростатическое давление* [см. формулу (5.3)]. Выражение (5.11) называется ***уравнением Бернулли***. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, у которых внутреннее трение не очень велико.

Для горизонтальной трубки тока [$h_1 = h_2$] уравнение (5.10) имеет вид

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 \text{ или } \frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}, \qquad (5.12)$$

где $p + \rho v^2/2$ называется ***полным давлением***.

Из формулы (5.12) видно, что давление меньше в тех местах, где скорость больше [см. рис. 23].

Статическое давление p в жидкости может быть измерено с помощью ***манометра***, перемещающегося вместе с жидкостью. Практически давление в разных сечениях трубы измеряется с помощью манометрических трубок, вставленных через боковые стенки в поток жидкости, так чтобы нижние концы трубок были параллельны скоростям частиц жидкости (рис. 23). [В манометрической трубке *3*, прикрепленной к узкой части трубы, уровень жидкости ниже, чем в манометрических трубках *1* и *2*, т. е. $h_3 < h_2 < h_1$].

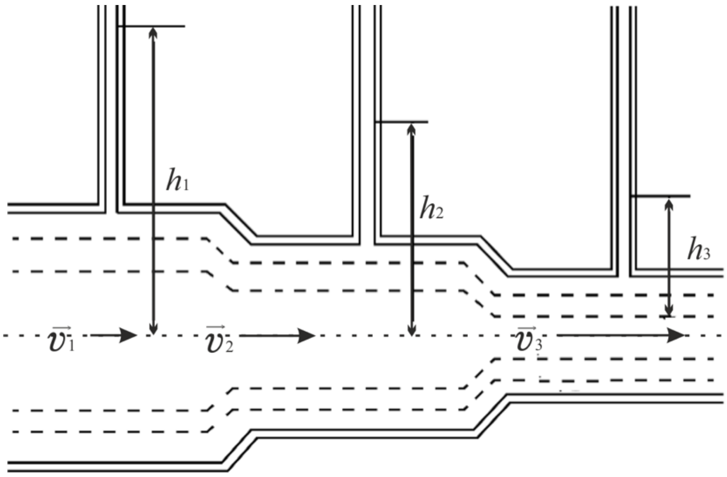

Рис. 23

Из уравнения Бернулли следует: *давление в жидкости, текущей по горизонтальной трубе переменного сечения, больше в тех сечениях потока, в которых скорость ее движения меньше, и наоборот, давление меньше в тех сечениях, в которых скорость больше*.

Так как динамическое давление $(\rho v^2/2)$ связано со скоростью v жидкости (газа), то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости. Например, при истечении идеальной несжимаемой жидкости из отверстия в боковой стенке или дне широкого сосуда линии тока начинаются вблизи свободной поверхности жидкости и проходят через отверстие (рис. 24).

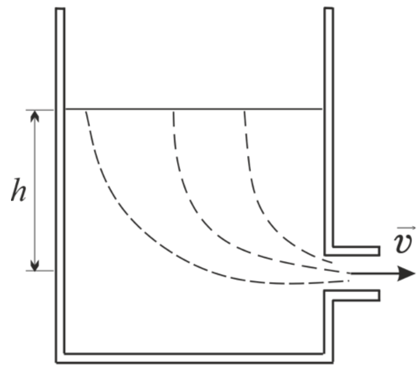

Рис. 24

Поскольку скорость жидкости вблизи поверхности в широком сосуде пренебрежимо мала, то уравнение Бернулли (5.10) принимает вид

$$\rho g h + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0, \tag{5.13}$$

где h – высота свободной поверхности жидкости над отверстием (линей тока); p_0 – атмосферное давление.

Таким образом, искомая скорость истечения идеальной несжимаемой жидкости из отверстия:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (5.14)$$

Формула (5.14) называется ***формулой Торричелли***. Из нее следует, что *скорость истечения идеальной несжимаемой жидкости из отверстия, находящегося на глубине h над свободной поверхностью жидкости такая же, как и при свободном падении тела с высоты h без начальной скорости*.

Для *реальных жидкостей* скорость v истечения будет меньше, причем тем сильнее отличается от значения (5.14), чем больше вязкость жидкости [см. п. 5.4].

5.4. Вязкость (*внутреннее трение*). Ламинарное и турбулентное течения

Вязкость (***внутреннее трение***) – это свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой. [Между движущимися друг относительно друга слоями жидкости или газа возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. И наоборот, слой, движущийся быстрее, замедляет свое движение под действием сил внутреннего трения. Сила внутреннего трения $\vec{F}$ тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя S (рис. 25), и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою. *Градиент скорости* $\Delta v/\Delta x$ – величина, показывающая, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении x, перпендикулярном направлению движения слоев (Δx – расстояние между слоями; $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – соответственно векторы скоростей слоев *1* и *2*; $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_2$].

Экспериментально установлено, что модуль силы F внутреннего трения, приложенной к площадке S, лежащей на границе между слоями, определяется формулой

$$F = \eta \left|\frac{\Delta v}{\Delta x}\right| S, \quad (5.15)$$

где η – ***динамическая вязкость*** (*вязкость*) [η зависит от природы и состояния (например, от температуры) жидкости; чем больше вязкость тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем бо́льшие силы внутреннего трения $\vec{F}$ в ней возникают].

Единица динамической вязкости η – *паскаль-секунда* [Па · с]; 1 Па · с равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения 1 Н на 1 м^2 поверхности касания слоев ($1\ \text{Па} \cdot \text{с} = 1\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$).

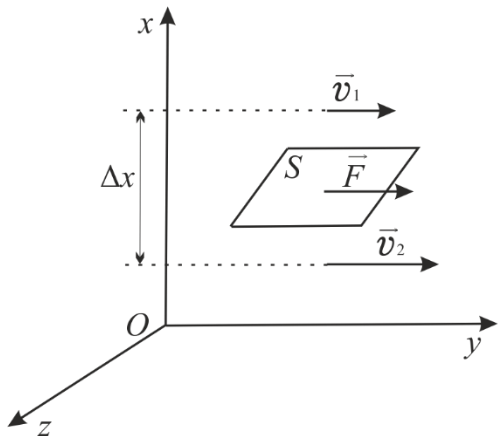

Рис. 25

Существует два типа течения жидкостей: *ламинарное* (слоистое) и *турбулентное* (вихревое). ***Ламинарное течение*** (от лат. *lamina* – пластинка) – это течение, при котором вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, т. е. траектории частиц среды практически параллельны направлению основного потока (рис. 26). В общем случае различные слои жидкости (или газа) движутся с разными скоростями; ламинарное течение является стационарным, т. е. скорость течения в каждой точке пространства остается постоянной. [Ламинарное течение жидкости наблюдается в очень вязких жидкостях, а также при достаточно медленном обтекании жидкостью (или газом) тел малых размеров. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижной. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы. Ламинарное течение жидкости наблюдается в узких (капиллярных) трубках, в слое смазки в подшипниках, в тонком пограничном слое вблизи обтекаемой поверхности]. ***Турбулентное течение*** (от лат. *turbulentus* – бурный, беспорядочный) – это течение, при котором вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание слоев движущейся жидкости (или газа), т. е. частицы среды совершают неупорядоченные движения по сложным траекториям. [При таком течении скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Поэтому профиль скорости при турбулентном течении в трубах (рис. 26) отличается от параболического профиля при ламинарном течении более быстрым возрастанием скорости у стенок трубы и меньшей кривизной в центральной части течения. Из-за большого градиента скоростей ($\Delta v/\Delta x$) у поверхности трубы происходит образование вихрей].

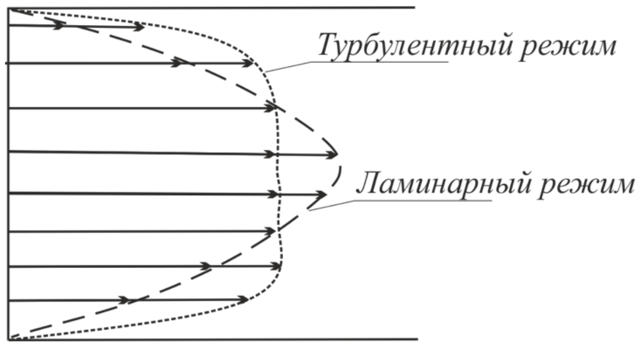

Рис. 26

Английский ученый О. Рейнольдс установил (1883 г.), что характер течения жидкости зависит от значения безразмерной величины:

$$\mathrm{R_e} = \frac{\rho\langle v\rangle d}{\eta} = \frac{\langle v\rangle d}{\nu}, \tag{5.16}$$

где ρ – плотность жидкости; $\langle v\rangle$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; d – характерный линейный размер, например диаметр трубы; η – динамическая вязкость (вязкость); ν – кинематическая вязкость [$\nu = \eta/\rho$]. Величина $\mathrm{R_e}$ – называется ***числом Рейнольдса***.

При малых значениях числа Рейнольдса ($\mathrm{R_e} \leq 1000$) наблюдается ламинарное течение; при $1000 \leq \mathrm{R_e} \leq 2000$ происходит переход к турбулентному течению; при $\mathrm{R_e} = 2300$ (для гладких труб) течение – турбулентное. При одинаковых $\mathrm{R_e}$ режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

5.5. Методы определения вязкости

1. Метод Стокса. В методе медленно падающего небольшого тела сферической формы (*шарика*), основанном на **законе Стокса** [см. (5.17)], измеряют скорость υ установившегося движения шарика в исследуемой среде (жидкости) под действием силы тяжести.

При малых $\mathrm{R_e}$, т. е. при небольших скоростях движения [и небольших d; см. (5.16)], сопротивление среды обусловлено практически только силами трения. Согласно закону, установленному Стоксом (1851 г.), сила F сопротивления в этом случае пропорциональна коэффициенту динамической вязкости η , скорости υ движения тела относительности жидкости и характерному размеру тела d: $F \sim \eta \upsilon d$. Для шарика радиуса r, Стокс эмпирически установил:

$$F = 6\pi\eta r\upsilon. \tag{5.17}$$

На шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют три силы (рис. 27):
сила тяжести

$$P = mg = \rho V g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \tag{5.18}$$

[m, ρ, и V – соответственно масса, плотность и объем шарика],
сила Архимеда

$$F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g \tag{5.19}$$

[ρ' –плотность жидкости],
и сила сопротивления (*сила Стокса*)

$$F = 6\pi\eta r\upsilon.$$

При равномерном движении ($\upsilon = \mathrm{const}$) шарика

$$P = F_\mathrm{A} + F \text{ или } \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi\eta r\upsilon,$$

откуда

$$v = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9\eta}. \tag{5.20}$$

Измерив скорость v равномерного движения шарика, можно определить вязкость η жидкости (газа).

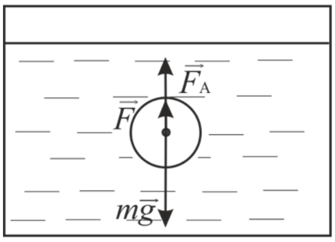

Рис. 27

2. Метод Пуазейля. Определение вязкости *капиллярным вискозиметром* основано на **законе Пуазейля** и состоит в измерении времени протекания известного количества жидкости (или газа) через калиброванный капилляр при заданном перепаде давления. [***Вискозиметрия*** (от лат. *viscosus* – клейкий, вязкий и … метрия) – это совокупность методов измерения вязкости жидкостей и газов; приборы, используемые в вискозиметрии, называются ***вискозиметрами***].

За время t из трубки (капилляра), вытекает жидкость, объем V которой

$$V = \frac{\pi R^4 t \Delta p}{8\eta l} = \frac{\pi d^4 t \Delta p}{128\eta l}, \tag{5.21}$$

откуда динамическая вязкость

$$\eta = \frac{\pi R^4 t \Delta p}{8Vl} = \frac{\pi d^4 t \Delta p}{128Vl}, \tag{5.22}$$

где R – радиус трубки; $p_1 - p_2 = \Delta p$ – перепад давления жидкости на концах трубки; l – длина трубки; d – диаметр трубки.

Формула (5.22) называется ***формулой Пуазейля***. Формула (5.22) справедлива, во-первых, если течение жидкости ламинарное, и, во-вторых, ламинарное течение установившееся, профиль скоростей в котором описывается течением Пуазейля, когда можно пренебречь влиянием концов трубки.

Примеры решения задач

5.1. Медный шарик диаметром 2,44 мм падает с постоянной скоростью 4 см/с в сосуде, наполненном глицерином. Найдите коэффициент вязкости глицерина. Плотности меди и глицерина соответственно равны $\rho_1 = 8{,}94$ г/см^3 и $\rho_2 = 1{,}26$ г/см^3.

Дано: $d = 2{,}44$ мм $= 2{,}44 \cdot 10^{-3}$ м; $\upsilon = 4$ см/с $= 4 \cdot 10^{-2}$ м/с; $\rho_1 = 8{,}94 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\rho_2 = 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3; $g = 9{,}81$ м/с^2.

Найти: η.

Решение. Поскольку шарик движется в жидкости с постоянной скоростью, на него действуют три силы mg – сила тяжести; $F_A = \rho_2 V g$ – сила Архимеда (выталкивающая сила); $F_C = 6\pi\eta r\upsilon$ – сила сопротивления (внутреннего трения), определяемая по формуле Стокса [ρ_2 – плотность глицерина; V – объем шарика; η – динамическая вязкость; r – радиус шарика; υ – скорость движения шарика; g – ускорение свободного падения].

Учитывая эти формулы, и условие задачи [$\upsilon = \text{const}$], можем записать

$$mg = \rho_2 V g + 6\pi\eta r\upsilon.$$

Масса, объем и радиус медного шарика:

$$m = \rho_1 V = \rho_1 \frac{\pi d^3}{6}, \text{т. к. } V = \frac{\pi d^3}{6} \text{ и } r = \frac{d}{2},$$

где ρ_1 – плотность меди; d – диаметр шарика.

Тогда

$$\frac{\rho_1 \pi d^3 g}{6} = \frac{\rho_2 \pi d^3}{6} + 3\pi\eta\upsilon d,$$

откуда искомый коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{(\rho_1 - \rho_2) d^2 g}{18\upsilon}.$$

Ответ: $\eta = 0{,}62$ Па · с.

5.2. В бак течет вода, причем за единицу времени наливается объем воды 0,32 л/с. Каким должен быть диаметр отверстия в дне бака, чтобы вода в нем держалась на постоянном уровне 9 см?

Дано: $V_t = 0{,}32$ л/с $= 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^3/с; $h = 9$ см $= 9 \cdot 10^{-2}$ м; $g = 9{,}81$ м/с^2.

Найти: d.

Решение. По условию задачи, чтобы вода в баке держалась на постоянном уровне, необходимо, чтобы за одинаковые промежутки времени в бак втекало и вытекало из него одинаковое количество (объем) воды:

$$V_t = \frac{V}{t} = \frac{lS}{t} = S\upsilon, \text{отсюда } \upsilon = \frac{V_t}{S},$$

где $S = \pi d^2/4$ – площадь поперечного сечения отверстия; υ – скорость истечения воды из отверстия; откуда

$$\upsilon = \frac{V_t}{S} = \frac{4V_t}{\pi d^2}$$

[учли, что площадь отверстия (круга) $S = \pi d^2/4$].

Согласно уравнению Бернулли,

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} = \rho g h,$$

откуда

$$\upsilon = \sqrt{2gh}$$

[формула Торричелли, позволяющая определить скорость истечения жидкости (воды) из малого отверстия в открытом широком сосуде; h – глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости (воды) в сосуде].

Тогда

$$\sqrt{2gh} = \frac{4V_t}{\pi d^2},$$

откуда искомый диаметр отверстия

$$d = \sqrt{\frac{4V_t}{\pi\sqrt{2gh}}}.$$

Ответ: $d = 1{,}75$ см.

Задачи

36. Отверстие в дне бака для воды заделано цилиндрической пробкой. Чтобы выдавить пробку наружу, надо приложить к ней силу 14 Н. До какой предельной высоты можно наливать в этот бак воды, если площадь пробки 8 см^2? Плотность воды 1 г/см^3. Ответ: 1,78 м

37. Стальной шарик объемом 1 см^3 равномерно падает в воде. При перемещении шарика на 10 м выделяется 0,67 Дж тепла. Найдите плотность стали. Плотность воды 1 г/см^3. Ответ: 7830 кг/м^3

38. По трубе диаметром 3 см за время 20 мин протекает 0,1 м^3 воды. Найдите скорость течения. Плотность воды 1 г/см^3. Ответ: 0,12 м/с

39. Железный шарик диаметром 2,5 мм падает с постоянной скоростью 3,63 см/с в сосуде, наполненном глицерином. Найдите коэффициент вязкости глицерина. Плотности железа и глицерина соответственно равны 7,87 г/см^3 и 1,26 г/см^3. Ответ: 0,62 Па · с

40. В бак течет вода, причем за единицу времени наливается объем воды 0,35 л/с. Каким должен быть диаметр отверстия в дне бака, чтобы вода в нем держалась на постоянном уровне 5 см? Ответ: 2,12 см

41. Два стальных шарика диаметрами 4 и 2 мм опускают в сосуд с глицерином высотой 0,8 м. Считая, что скорость шариков сразу становится равномерной, определите, на сколько раньше и какой из шариков достигнет дна сосуда. Плотности стали и глицерина соответственно равны 7,87 г/см^3 и 1,26 г/см^3; коэффициент вязкости глицерина 0,62 Па · с.

Ответ: t_1 = 8,61 с, t_2 = 34,42 с; $t_2/t_1 = (d_1/d_2)^2 = 4$ (шарик меньшего диаметра будет опускаться в 4 раза медленнее).

42. Медный шарик радиусом 1,5 мм падает в касторовом масле с постоянной скоростью. Найдите время, затрачиваемое шариком на прохождение расстояния 15 см. Плотности меди и касторового масла соответственно равны 8,94 г/см^3 и 0,96 г/см^3. Динамическая вязкость масла 0,987 Па · с. Ответ: 3,78 с

Лекция 6. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6.1. Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея

В классической механике Ньютона предполагается, что время во всех системах отсчета течет одинаково, а размеры тела не зависят от его движения. Все инерциальные системы отсчета (ИСО) считаются равноправными, а законы ньютоновской механики во всех ИСО – одинаковыми. Следовательно, невозможно осуществить такие эксперименты в механике, с помощью которых можно было бы, находясь в какой-либо ИСО, определить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно. В классической механике справедлив, сформулированный Г. Галилеем в 1636 г., **механический принцип относительности (*принцип относительности Галилея*)**: *законы движения* (механики) *одинаковы во всех инерциальных системах отсчета*.

Для доказательства принципа относительности Галилея рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью $\vec{u}$ ($\vec{u} = \text{const}$) Одну из этих систем обозначим буквой K и будем считать условно неподвижной. Тогда вторая система K' будет двигаться прямолинейно и равномерно со скоростью $\vec{u}$ ($\vec{u} = \text{const}$). Выберем координатные оси x', y', z' системы K' так, чтобы оси x и x' совпадали, а оси y и y', а также z и z' были параллельны друг другу (рис. 28). Отчет времени начнем, когда начала координат систем K и K' совпадают.

Найдем связь между координатами x, y, z некоторой точки M в обеих системах координат. Из рис. 28 видно, что

$$K' \to K \quad x = x' + ut, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \tag{6.1}$$

$$K \to K' \quad x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

[учли, что в классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета (время в обеих системах течет одинаковым образом, т. е. $t = t'$)].

Выражения (6.1) представляют собой ***преобразования Галилея***.

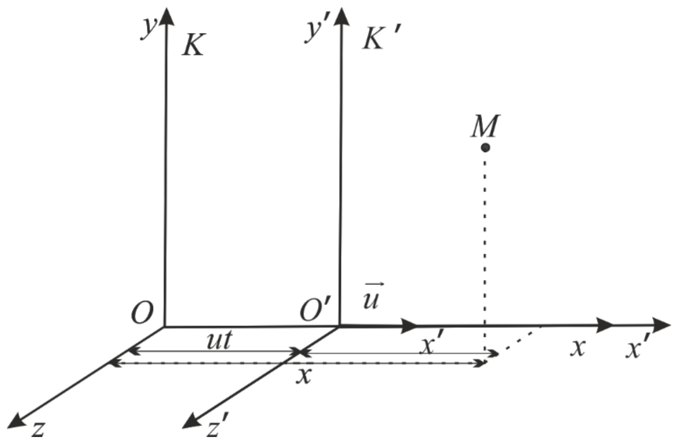

Рис. 28

[Дифференцируя уравнения (6.1) по времени, можно получить соотношения между скоростями движения точки M и ее ускорениями в системах отсчета K и K':

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} + u; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}. \tag{6.2}$$

Введя обозначения проекций скоростей точки M в системе K на оси x, y, z

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z,$$

в системе K' на оси x', y', z'

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = v'_x; \quad \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = v'_y; \quad \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = v'_z,$$

запишем соотношения (6.2) в виде

$$v_x = v'_x + u; \quad v_y = v'_y; \quad v_z = v'_z. \qquad (6.3)].$$

Откуда, получим уравнение

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \tag{6.4}$$

которое представляет собой ***правило сложения скоростей в классической механике***.

Ускорение $\vec{a}$ в системе отсчета K

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{v}' + \vec{u})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = \vec{a}', \text{т. е.}\, \vec{a} = \vec{a}'. \tag{6.5}$$

Таким образом, ускорение точки M в системах отсчета K и K', движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно ($\vec{u} = \text{const}$), оказывается одним и тем же. Следовательно, если система отсчета K инерциальная, т. е. ускорение тела $a = 0$, то и остальные системы K' будут инерциальными, т. е. $a' = 0$.

В классической механике считается, что масса материальной точки (тела) не зависит от скорости ее движения, т. е. одинакова во всех инерциальных системах отсчета $m = m'$. Из второго закона Ньютона имеем

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \text{ и } \vec{a}' = \frac{\vec{F}'}{m}.$$

Тогда, согласно уравнения (6.5), получим

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}'}{m}, \text{откуда } \vec{F} = \vec{F}'. \tag{6.6}$$

Таким образом, силы, действующие на тело в системе K и K' также будут одинаковы. Поскольку системы K и K' были выбраны произвольно, то полученный результат (6.6) означает, что *уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой*. Это утверждение называется *механическим принципом относительности* (или *принципом относительности Галилея*). ***Принцип относительности Галилея*** можно записать в иной формулировке: *никакими механическими опытами, проводимыми в инерциальной системе отсчета, нельзя обнаружить движение этой системы относительно других инерциальных систем*. Механический принципом относительности свидетельствует о том, что в механике все ИСО совершенно равноправны. Величины, которые имеют одно и то же численное значение во всех системах отсчета, называются ***инвариантными*** [от лат. *invarians* (*invariantis*) – *неизменяющийся*]. В преобразованиях Галилея *инвариантными величинами* являются масса, ускорение, сила, время; *неинвариантные*: *скорость, импульс, кинетическая энергия*.

Законы Ньютона выполняются только при условии, что движение рассматривается относительно инерциальных систем отсчета.

6.2. Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца

В основе ***специальной теории относительности*** (СТО) лежат два постулаты Эйнштейна, сформулированные им в 1905 г. в работе «К электродинамике движущихся тел».

I. Принцип относительности Эйнштейна: *в любых инерциальных системах отсчета* (ИСО) *все физические явления при одних и тех же условиях протекают одинаково*. Иначе говоря, первый постулат утверждает, что *все законы природы инвариантны* (независимы) по отношению к переходу от одной ИСО к другой: уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковую форму во всех ИСО.

II. Принцип инвариантности скорости света: *скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех инерциальных системах отсчета*. Опыты показывают, что скорость света c в вакууме – предельная скорость в природе. Согласно второму постулату, постоянство скорости света – *фундаментальное свойство природы*. Если все другие скорости изменяются при переходе от одной ИСО к другой, то скорость света в вакууме – величина инвариантная. Постоянство скорости света c приводит к тому, что понятие одновременности, считающееся в ньютоновской механике абсолютным, в действительности является относительным.

Явления, описываемые СТО, называют *релятивистскими эффектами*. Эти эффекты проявляются при скоростях движения тел, сравнимых со скоростью света. В СТО преобразования Галилея заменяются новыми соотношениями – *преобразованиями Лоренца*, удовлетворяющими постулатам Эйнштейна.

[Для получения этих преобразований рассмотрим две инерциальные системы отсчета K (с координатами x, y, z) и K' (с координатами x', y', z'), движущуюся относительно K (вдоль оси x) со скоростью $\vec{v} = \text{const}$ (рис. 29). Предположим, что в начальный момент времени $t = t' = 0$, когда начала координат O и O' совпадали, излучается световой сигнал. Согласно второму постулату Эйнштейна, скорость света в системах K и K' одна и та же и равна c. Поэтому если за время t в системе K сигнал дойдет до некоторой точки A, пройдя расстояние

$$x = ct, \tag{6.7}$$

то в системе K' координата светового сигнала в момент достижения точки A

$$x' = ct', \tag{6.8}$$

где t' – время прохождения светового сигнала от начала координат до точки A в системе K'. Вычитая (6.7) из (6.8), получим

$$x' - x = c(t' - t).$$

Так как $x' \neq x$ (система K' перемещается по отношению к системе K), то

$$t' \neq t,$$

т. е. отсчет времени в системах K и K' различен – *отсчет времени имеет относительный характер* (в классической физике считается, что время во всех ИСО течет одинаково, т. е. $t' = t$ (см. (6.1)).

Эйнштейн показал, что в теории относительности классические преобразования Галилея (6.1), описывающие переход из одной ИСО в другой, заменяются преобразованиями Лоренца, удовлетворяющими постулатам СТО].

Преобразования Лоренца имеют вид (формулы представлены для случая, когда K' движется относительно K со скоростью v вдоль оси x):

$$\begin{array}{ll}
K \to K' & K' \to K \\
x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}; & x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}; \\
y' = y; & y = y'; \\
z' = z; & z = z'; \\
t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}; & t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.
\end{array} \tag{6.9}$$

Уравнения (6.9) отличаются лишь знаком при v. В отличие от преобразований Галилея (6.1), где трехмерное пространство и одномерное время сосуществуют независимо друг от друга, в преобразованиях Лоренца (6.9) пространственные координаты и время неразрывно связаны, образуя ***четырехмерное пространство-время***. В этом четырехмерном пространстве-времени величины x, y, z и ct рассматриваются как четыре координаты события.

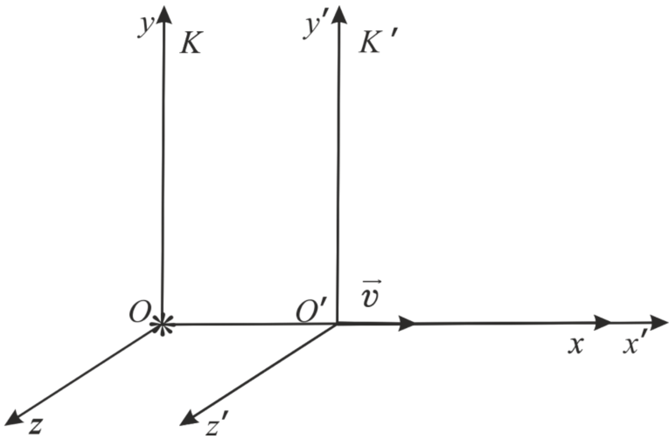

Рис. 29

Из преобразований Лоренца (6.9) следует, что при $v > c$ выражения для x, x', t и t' теряют физический смысл [становятся мнимыми: $(1 - v^2/c^2) < 0$]. Следовательно, скорость v относительного движения двух ИСО не может превысить скорость распространения света в вакууме, т. е. движение со скоростями, большими c, невозможно. Кроме того, при малых скоростях, т. е. когда $v \ll c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея; стало быть *преобразования Галилея являются частным случаем* общих преобразований Лоренца при скоростях, во много раз меньших скорости распространения света в вакууме.

6.3. Следствия из преобразований Лоренца

1. Релятивистский закон сложения скоростей. Используя те же инерциальные системы отсчета (см. п. 6.1) K и K', одна из которых (K') движется относительно другой (K) со скоростью v в положительном направлении оси x, рассматривая материальную точку A, движущуюся со скоростью u' относительно системы K' в том же направлении (рис. 30), можно с помощью соответствующих преобразований формул (6.9) определить скорость u материальной точки в системе K:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}. \tag{6.10}$$

Из преобразований Лоренца (6.9) можно получить также выражение для определения скорости u' в системе K' через скорость u в системе K:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}. \qquad (6.10')$$

Формулы (6.10) и (6.10′) представляют собой ***релятивистский закон сложения скоростей*** для частного случая – движения материальной точки (тела) вдоль одной из осей координат, при этом формула (6.10′) отличается от формулы (6.10) только изменением знака у скорости v, поскольку системы K и K' физически равноправны.

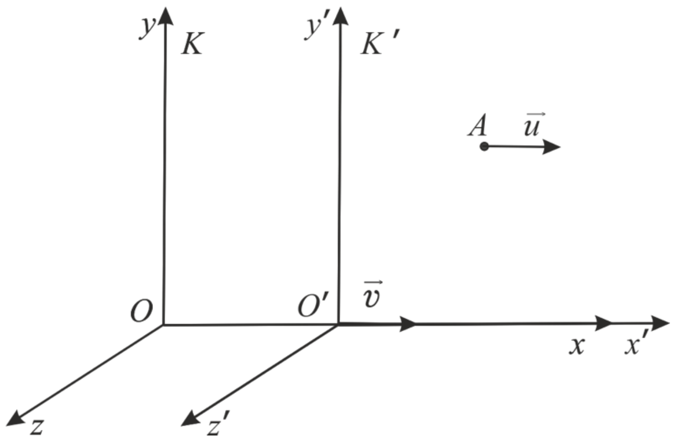

Рис. 30

Можно показать, что если скорости v, u' и u малы по сравнению со скоростью c, то формулы (6.10) и (6.10′) переходят в закон сложения скоростей в классической механике [см. (6.4)]. Релятивистский закон сложения скоростей [(6.10) и (6.10′)] отражает важнейшую из особенностей релятивистской кинематики – *независимость скорости света от движения источника*.

2. Одновременность событий в разных системах отсчета. Используя преобразования Лоренца (6.9), можно показать, что два события, происходящие в двух разных точках с координатами x_1 и x_2 в системе K одновременно ($t_1 = t_2$), в системе K', движущейся со скоростью v относительно системы K, не будут одновременными ($t_1' \neq t_2'$).

Действительно, согласно преобразованиям Лоренца,

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.11}$$

[В системе K' им (событиям) соответствуют координаты x_1' и x_2' и моменты времени t_1' и t_2'. Если *события в системе К происходят в одной точке* $(x_1 = x_2)$ *и являются одновременными* $(t_1 = t_2)$, то, согласно преобразованиям Лоренца (6.9),

$$x_1' = x_2', \quad t_1' = t_2',$$

т. е. *эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета*. Если *события в системе К пространственно разобщены* $(x_1 \neq x_2)$*, но одновременны* $(t_1 = t_2)$, то в системе K', согласно преобразованиям Лоренца (6.9), этим событиям будут соответствовать координаты

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

и моменты времени

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$x_1' \neq x_2', \quad t_1' \neq t_2'].$$

Из соотношений (6.11) следует, что

$$t_2' - t_1' = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{6.12}$$

т. е. в системе K' эти события, *оставаясь пространственно разобщенными, оказываются и неодновременными* $(t_2' \neq t_1')$. Из формулы (6.12) видна основная черта СТО – время и пространственные координаты неразрывны, поскольку промежутки времени определяются также и пространственными расстояниями.

3. Длительность событий в разных системах отсчета. Определим промежуток времени (*длительность события*) τ' между двумя событиями, которые происходят в одной и той же точке системы K', движущейся вместе с часами со скоростью v относительно системы K. Длительность этого события (разность показаний часов в конце и начале события) в системе K'

$$\tau' = t_2' - t_1', \tag{6.13}$$

где индексы 1 и 2 соответствуют началу и концу события. Длительность этого же события в системе K

$$\tau = t_2 - t_1. \tag{6.14}$$

Началу и концу события в системе K', согласно преобразованиям Лоренца (6.9), соответствуют

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.15}$$

Подставляя (6.15) в (6.13), получим длительность события в системе K'

$$\tau' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

или

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.16}$$

Откуда длительность события, измеренная часами системы K

$$\tau = \tau'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{6.16'}$$

Из выражений (6.16) и (6.16′) следует, что $\tau < \tau'$, длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна, т. е. *в движущейся системе* *отсчета время протекает медленней*. Из (6.16) вытекает, что замедление часов становится заметным лишь при скоростях, близких к скорости распространения света в вакууме c.

[Причиной релятивистского изменения промежутков времени в СТО является не изменение хода часов в разных системах отсчета (*часы в каждой из систем К и K' идут одинаково*), а относительность промежутков времени: понятие длительности события имеет смысл лишь по отношению к определенной системе отсчета. В СТО Эйнштейна существует понятие *собственного времени* τ_0 – времени, показываемого часами в той системе отсчета, относительно которой эти часы покоятся (*собственное время не зависит от скорости системы отсчета*). Соотношение (6.12) получило прямое подтверждение в экспериментах с π-мезонами – нестабильными, самопроизвольно распадающимися элементарными частицами. Среднее время жизни π-мезона (измеренное в системе отсчета, связанной с частицей) составляет $\sim 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ с. Зная время жизни и скорость движения π-мезонов, можно определить среднее расстояние, которое пройдут частицы от рождения до распада, и сравнить его с экспериментальным. Следовательно, π-мезоны, образующиеся в верхних слоях атмосферы (на высоте ~ 30 км) и движущиеся со скоростью, близкой к скорости c, должны были бы проходить расстояния $c\tau \approx 6{,}6$ м, т. е. не могли бы достичь земной поверхности, что противоречить действительности. Расхождение объясняется релятивистским замедлением хода времени: для земного наблюдателя срок жизни π-мезона

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а путь этих частиц в атмосфере

$$v\tau' = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v}{c}c\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Так как $v/_c \approx 1$, то $v\tau' \gg c\tau$].

4. Длина тел в разных системах отсчета. Рассмотрим жесткий стержень, расположенный вдоль оси x' и неподвижный в систем K' (рис. 31). Длина стержня в системе K' будет $l_0 = x_2' - x_1'$, где x_1' и x_2' не изменяющиеся со временем координаты концов стержня. Относительно системы K стержень движется со скоростью v в направлении оси x.

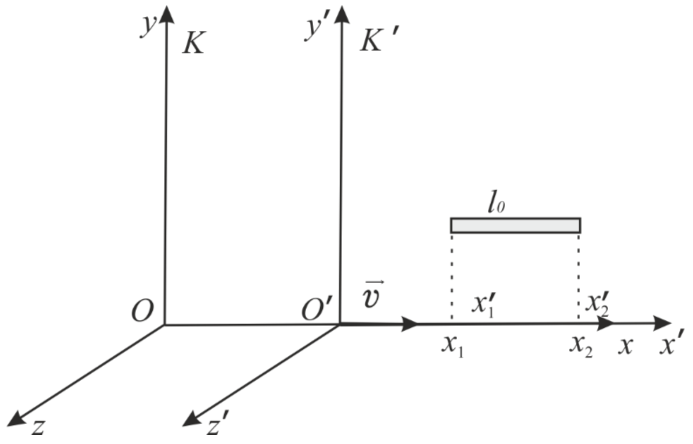

Рис. 31

Найдем длину l этого стержня в системе K, движущейся относительно системы K' со скоростью v в направлении оси x. Для этого необходимо найти разность координат концов стержня x_2 и x_1 в один и тот же момент времени $t_2 = t_1$ в системе K: $l = x_2 - x_2$. Используя преобразования Лоренца (6.9), найдем координаты x_1' и x_2' начала и конца стержня

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Положив в этих соотношениях $t_2 = t_1$, получим

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{6.17}$$

откуда

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{6.17′}$$

Таким образом, длина стержня в СТО зависит от скорости системы отсчета: один и тот же стержень имеет разные длины в различных системах отсчета. Наибольшую длину стержень имеет в той системе отсчета, относительно которой он покоится. Из выражения (6.17′) следует, что у движущегося тела линейный размер в направлении движения сокращается в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз. Это так называемое ***лоренцево сокращение длины*** тем больше, чем больше скорость движения тела. Поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех ИСО:

$$y_2' - y_1' = y_2 - y_1 \text{ и } z_2' - z_1' = z_2 - z_1, \tag{6.17''}$$

что непосредственно следует из преобразований Лоренца (6.9).

5. Интервал между событиями. Формулы для определения расстояния между двумя точками и промежутками времени между событиями при переходе от одной системы отсчета к другой значительно усложняются, когда речь идет о двух событиях, происходящих в разных местах пространства и в разные моменты времени. В СТО, в которой каждое событие характеризуется четырьмя координатами (x, y, z, t), такой физической величиной является ***интервал*** между двумя событиями:

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}, \tag{6.18}$$

где $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l_{12}$ – расстояние между точками трехмерного пространства, в которых эти события произошли. Введя обозначение $t_{12} = t_2 - t_1$, получим

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}. \tag{6.19}$$

С помощью преобразований Лоренца (6.9) можно показать, что пространственно-временной интервал s_{12} между событиями остается неизменным при переходе от одной системы отсчета к другой, т. е. *инвариантен* относительно преобразований Лоренца:

$$\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \sqrt{c^2 (t_{12}')^2 - (l_{12}')^2},$$

или

$$s_{12}^2 = (s_{12}')^2. \tag{6.20}$$

Инвариантность интервала между двумя событиями означает, что пространство и время, будучи взаимосвязанными, образуют единую форму существования материи – «пространство-время». Пространство и время не существуют вне материи и независимо от нее.

6.4. Основной закон релятивистской динамики материальной точки

Из принципа относительности Эйнштейна следует, что математическая запись любого закона физики должна быть одинаковой во всех ИСО. Это означает, что уравнения, описывающие какое-либо явление в системе отсчета K', получаются из уравнений, описывающих это же явление в системе отсчета K. Это условие называется ***условием ковариантности*** уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца.

Основное уравнение динамики в СТО сохраняет свой вид, т. е. является инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}, \tag{6.21}$$

где $\vec{p}$ – релятивистский импульс материальной точки (частицы). [*Основной закон динамики Ньютона* для материальной точки $m\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = \vec{F}$ или $\mathrm{d}(m\vec{v})/\mathrm{d}t = \vec{F}$, в котором масса m этой точки и действующая на нее сила $\vec{F}$ считаются одинаковыми во всех ИСО. Поэтому в классической механике масса – это коэффициент пропорциональности между силой и изменением скорости. *Масса не зависит от скорости* и инвариантна по отношению к выбору системы отсчета. Инертная масса не зависит от направления действия силы. В классической механике принято, что импульс материальной точки пропорционален ее массе и совпадает по направлению со скоростью $\vec{v}$ этой точки: $\vec{p} = m\vec{v}$, поэтому $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ – *основной закон динамики* (второй закон Ньютона)].

В отличие от классической механики ***релятивистский импульс*** материальной точки не линейная функция от скорости:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{6.22}$$

где m – масса материальной точки.

Подставив выражение (6.22) в (6.21), получим *релятивистское уравнение движения* – ***основной закон (уравнение) релятивистской динамики*** материальной точки:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \tag{6.23}$$

Таким образом уравнение (6.23) инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца и, следовательно, удовлетворяет принципу относительности Эйнштейна. Следует отметить, что ни импульс $\vec{p}$, ни сила $\vec{F}$ не являются инвариантными [в различных ИСО $\vec{p}$ и $\vec{F}$ имеют различные модули и направления].

В релятивистской динамике выполняется **закон сохранения релятивистского импульса**: *релятивистский импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.*

При малых скоростях ($v \ll c$) уравнение (6.23) практически совпадает с основным уравнением механики Ньютона [см. (2.4)] (следовательно, условием применимости законов ньютоновской механики является условие $v \ll c$). Законы классической (ньютоновской) механики получаются как следствие теории относительности для предельного случая $v \ll c$. Таким образом, механика Ньютона есть механика малых скоростей, т. е. механика макротел, движущихся со скоростями v, много меньшими скорости света в вакууме ($v \ll c$).

6.5. Релятивистское выражение для энергии

Определим кинетическую энергию релятивистской частицы таким же путем, как и в ньютоновской механике [см. п. 3.2)]:

$$\mathrm{d}E_{\text{к}} = \mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\vec{v}\mathrm{d}t = \vec{v}\mathrm{d}\vec{p} = \frac{mv\mathrm{d}v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \mathrm{d}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \qquad 6.24)$$

[учли основной закон релятивисткой динамики (6.23)].

[Полученный результат можно проверить дифференцированием. Согласно, основному закону релятивистской динамики

$$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}(m\vec{v}) = \mathrm{d}m \cdot \vec{v} + m\mathrm{d}\vec{v},$$

где m – релятивистская масса. Поэтому

$$\mathrm{d}E_{\text{к}} = \mathrm{d}m(\vec{v}\cdot\vec{v}) + m(\mathrm{d}\vec{v}\cdot\vec{v}) = v^2\mathrm{d}m + m\cdot v\mathrm{d}v$$

[учли, что $\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} = v\mathrm{d}v$ и $(\vec{v}\cdot\vec{v}) = v^2$]. Эту формулу можно упростить. Для этого формулу зависимости массы от скорости возведем в квадрат и приведем ее к виду: $m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2$. Найдем дифференциал этого выражения, имея в виду, что m_0 и c – постоянные величины:

$$2mc^2\mathrm{d}m = 2mv^2\mathrm{d}m + 2m^2v\mathrm{d}v.$$

Если теперь разделить это равенство на $2m$, то его правая часть совпадет с выражением для $\mathrm{d}E_{\text{к}}$. Отсюда следует

$$\mathrm{d}E_{\text{к}} = c^2\mathrm{d}m = c^2 d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Таким образом, *приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению ее релятивистской массы*. Кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее масса равна массе покоя m_0. Поэтому, проинтегрировав последнее выражение, получаем

$$E_{\text{к}} = \int_{m_0}^{m} \mathrm{d}E_{\text{к}} = \int_{m_0}^{m} c^2\mathrm{d}m = (m-m_0)c^2,$$

или

$$E_{\text{к}} = (m-m_0)c^2; \quad E_{\text{к}} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Это и есть выражение для релятивистской кинетической энергии частицы].

Интегрируя выражение (6.24), получим

$$E_{\text{к}} = \int \mathrm{d}E_{\text{к}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + C. \tag{6.25}$$

Поскольку кинетическая энергия при $v = 0$ должна обращаться в нуль, то постоянная интегрирования $C = -mc^2$. Следовательно, ***кинетическая энергия релятивистской частицы***

$$E_{\text{к}} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{6.26}$$

При малых скоростях $\upsilon \ll c$, выражение (6.26) для релятивистской кинетической энергии переходит в ньютоновское:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (6.27)$$

Полная энергия свободной частицы, т. е. частицы на которую не действуют внешние силы, движущуюся со скоростью υ:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \qquad (6.28)$$

выражает *фундаментальный закон природы* – **закон взаимосвязи массы и энергии**.

Полная энергия E частицы в разных системах отсчета различна. Если тело (частица) покоится ($\upsilon = 0$), то полная энергия E обращается *не в нуль*, а в

$$E_0 = mc^2. \qquad (6.29)$$

Величина, определяемая выражением (6.29), называется ***энергией покоя.*** Эта энергия представляет собой внутреннюю энергию тела, не связанную с движением тела как целого. В энергию покоя (6.29), как и в полную энергию (6.28), не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле.

Исключив из уравнений (6.22) и (6.28) скорость υ [уравнение (6.22) нужно взять в скалярном виде], получим выражение полной энергии E частицы через импульс p:

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}\,. \qquad (6.30)$$

Полученное соотношение выражает *связь между полной энергией, импульсом и массой частицы*.

В случае, когда $p \ll mc$, формулу (6.30) можно представить в виде

$$E = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \approx mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2\right] = mc^2 + \frac{p^2}{2m}. \qquad (6.31')$$

Полученное выражение $(6.31')$ отличается от ньютоновского выражения для кинетической энергии $E_{\text{к}} = p^2/2m$ [см. (3.15)] слагаемым mc^2.

Из выражений (6.28), (6.26) и (6.29) следует, что полная энергия

$$E = E_{\text{к}} + E_0 = E_{\text{к}} + mc^2, \tag{6.31}$$

т. е. складывается из ее кинетической энергии и энергии покоя.

Подставив (6.31) в (6.30) [$E^2 = E_0^2 + p^2c^2$, где $E_0^2 = m^2c^4$], получим

$$pc = \sqrt{E_{\text{к}}(E_{\text{к}} + 2mc^2)}, \tag{6.32}$$

откуда следует, что при $E_{\text{к}} \ll mc^2$ выражение (6.32) переходит в ньютоновское $p = \sqrt{2mE_{\text{к}}}$, а при $E_{\text{к}} \gg mc^2$ приобретает вид $p = E_{\text{к}}/c$.

Обобщая закон для энергии (6.28), можно утверждать, что *всякое изменение массы тела* Δm *всегда сопровождается изменением энергии покоя* ΔE_0:

$$\Delta E_0 = \Delta mc^2. \tag{6.33}$$

Выражение (6.33) носит название **закона взаимосвязи массы и энергии покоя.** [Таким образом, массу и энергию, нельзя рассматривать как независимые величины, подчиняющиеся разным законам сохранения – в СТО имеет место единый закон сохранения массы и энергии, в котором обе эти величины взаимосвязаны. При обычных макроскопических процессах изменение массы Δm тела оказывается чрезвычайно малым, недоступным для измерений. Справедливость *закона взаимосвязи массы и энергии* экспериментально проверена в ядерной физике. Это обусловлено тем, что ядерные процессы и процессы превращения элементарных частиц сопровождаются весьма большими изменениями энергии, сравнимыми с энергией покоя E_0 самих частиц. Опыт Бертоцци (1964 г.) экспериментально доказывает, что нельзя ускорить электрон до скорости, превышающей c].

Частицы с нулевой массой. Существование частиц с нулевой массой ($m = 0$) не противоречит законам релятивисткой механики. [Законы ньютоновской механики не допускают существование частиц с нулевой массой. Такие частицы под действием ничтожно малой силы получали бы бесконечно большое ускорение (см. п. 2.2:].

Согласно формулам СТО [см. (6.22) и (6.28)]

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

частица с нулевой массой $m = 0$ может обладать отличными от нуля импульсом и энергией лишь в том случае, если $v = c$ [отношение 0/0 представляет неопределенность, которая может равняться конечному числу]. Таким образом, частицы с нулевой массой могут существовать, только двигаясь со скоростью c – скоростью распространения света в вакууме. Для такой частицы из формулы (6.30) $\left[E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}\right]$ вытекает соотношение

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\varepsilon_0}{c}. \qquad (6.34)$$

К числу частиц с нулевой массой принадлежит световая частица – ***фотон***. Энергия фотона определяется формулой

$$\varepsilon_0 = h\nu, \qquad (6.35)$$

где h – постоянная Планка; ν – частота света; ε_0 – энергия фотона.

Выражения (6.34) и (6.35) связывают ***корпускулярные*** характеристики фотона – импульс и энергию (p и ε_0) с ***волновой*** характеристикой света – его частотой ν.

СТО лежит в основе всей современной физики. Вся совокупность экспериментальных данных в физике высоких энергий, ядерной физике, астрофизике, спектроскопии, электродинамике и других областях физики согласуется с теорией относительности в пределах точности эксперимента. Фактически СТО является инженерной наукой. Ее формулы используются при расчете ускорителей элементарных частиц. Обработка огромных массивов данных по столкновению частиц, двигающихся с релятивистскими скоростями в электромагнитных полях, основана на законах релятивистской динамики, отклонения от которых обнаружено не было. Поправки, следующие из СТО и ОТО (*общая теория относительности*), используются в системах спутниковой навигации (GPS, ГЛОНАСС). СТО лежит в основе ядерной энергетики и т. д.

Примеры решения задач

6.1. Какой промежуток времени τ пройдет между двумя событиями на Земле по неподвижным относительно Земли часам, если по часам на космическом корабле пройдет $\tau' = 3$ года? Корабль движется относительно Земли со скоростью $\upsilon = 0{,}9c$ (c – скорость распространения света в вакууме).

Дано: $\tau' = 3$ года; $\upsilon = 0{,}9c$.

Найти: τ.

Решение. Релятивистское замедление хода часов

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

откуда

$$\tau = \tau' \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}},$$

где τ' – промежуток времени между двумя событиями, отсчитанный покоящимися часами, т. е. по часам, неподвижным относительно Земли; τ – промежуток времени между теми же событиями, отсчитанный по часам, неподвижным относительно корабля.

Подставив в формулу числовые значения, получим:

$$\tau = 3\sqrt{1 - \frac{0{,}81c^2}{c^2}} = 1{,}3077 \text{ года}.$$

Ответ: $\tau = 1{,}31$ года.

6.2. Нейтрон движется со скоростью $\upsilon = 0{,}85c$ (c – скорость распространения света в вакууме). Найдите импульс и кинетическую энергию нейтрона. Масса нейтрона $m = 1{,}675\cdot10^{-27}$ кг.

Дано: $\upsilon = 0{,}85c$; $\beta = \upsilon/c = 0{,}85$; $m = 1{,}675\cdot10^{-27}$ кг; $c = 3\cdot10^8$ м/с.

Найти: p; $E_к$.

Решение. Релятивистский импульс частицы (нейтрона)

$$p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = mc\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где m – масса частицы; υ – ее скорость; $\beta = \upsilon/c$.

Подставив в эту формулу числовые значения, получим

$$p = 1{,}675 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{0{,}85}{\sqrt{1 - (0{,}85)^2}} = 8{,}1082 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы $E_к$ определяется как разность между полной энергией E и энергией покоя E_0 этой частицы

$$E_к = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right).$$

Подставив числовые значения, получим искомую кинетическую энергию:

$$E_к = 1{,}675 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}85)^2}} - 1\right) = 13{,}5421 \cdot 10^{-11}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $p = 8{,}11 \cdot 10^{-19}$ кг · м/с; $E_к = 13{,}54 \cdot 10^{-11}$ Дж.

6.3. Найдите скорость v движения космического корабля, если известно, что релятивистское сокращение длины корабля составило 40 %.

Дано: $\Delta l / l_0 = 0{,}4$; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Найти: v.

Решение. В системе отсчета, относительно которой корабль [стержень] покоится (собственная длина), его длина равна l_0. В системе отсчета, относительно которой корабль движется со скоростью v, длина корабля [стержня] равна l. Длины l_0 и l связаны соотношением («релятивистское [лоренцево] сокращение длины»):

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \text{ или } \frac{l}{l_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

По условию задачи:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0} = 0{,}4,$$

откуда

$$1 - \frac{l}{l_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0{,}4; \quad \text{т. е.} \quad 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0{,}4.$$

Решая равенство относительно v, получим искомую скорость движения корабля:

$$v = c\sqrt{1 - 0{,}36} = 2{,}4 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v = 2{,}4 \cdot 10^8$ м/с.

Задачи

43. С момента образования до распада некоторая нестабильная частица пролетела расстояние 1,4 км. Время жизни частицы в неподвижной системе координат равно $5{,}2\cdot10^{-6}$ с. Найдите время жизни частицы по часам в системе координат, движущейся вместе с ней ($c = 3\cdot10^{8}$ м/с – скорость распространения света в вакууме). Ответ: $2{,}3\cdot10^{-6}$ с

44. Какой промежуток времени τ пройдет между двумя событиями на Земле по неподвижным, относительно Земли часам, если по часам на космическом корабле пройдет $\tau' = 2$ года? Корабль движется относительно Земли со скоростью $\upsilon = 0{,}8c$ (c – скорость распространения света в вакууме). Ответ: 1,2 года

45. Найдите, во сколько раз увеличивается продолжительность существования частицы (по часам, находящимся в лабораторной системе отсчета), если она движется со скоростью, составляющей 80 % скорости света? Ответ: 1,67

46. Какую продольную скорость нужно сообщить стержню для того, чтобы его длина стала равной 75 % длины, которую он имеет в состоянии покоя?

Ответ: $0{,}661c$ (c – скорость света в вакууме)

47. Нейтрон движется со скоростью $0{,}75c$ (c – скорость распространения света в вакууме). Найдите импульс и кинетическую энергию нейтрона. Масса нейтрона $m_n = 1{,}675\cdot10^{-27}$ кг. Ответ: $5{,}7\cdot10^{-19}$ кг · м/с; $7{,}72\cdot10^{-11}$ Дж

48. Релятивистская частица увеличила свою скорость от $0{,}6c$ до $0{,}9c$ (c – скорость распространения света в вакууме). Найдите, во сколько раз работа, необходимая для этого, больше, чем величина, рассчитанная по формулам классической механики. Ответ: 4,64

49. Определите импульс электрона, обладающего кинетической энергией 6,5 МэВ. Энергия покоя электрона $E_0 = 0{,}511$ МэВ. Ответ: $3{,}73\cdot10^{-21}$ кг · м/с

50. Найдите полную энергию частицы массой $9{,}11\cdot10^{-31}$ кг, движущуюся со скоростью, на 20 % меньшей скорости света в вакууме. Ответ: $1{,}37\cdot10^{-13}$ Дж

51. Кинетическая энергия протона в 2,7 раза меньше его энергии покоя. Определите скорость движения протона.

Ответ: $0{,}684c$ (c – скорость света в вакууме)

52. Найдите импульс, полную и кинетическую энергию электрона, движущегося со скоростью $0{,}8c$ (c – скорость света в вакууме). Масса электрона $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг и его энергия покоя $E_0 = 0{,}511$ МэВ.

Ответ: $36{,}44\cdot10^{-23}$ кг · м/с; $13{,}63\cdot10^{-14}$ Дж; $54{,}54\cdot10^{-15}$ Дж

53. Определите скорость протона, если его полная энергия в 2,8 раза больше энергии покоя. Ответ: $0{,}934c$ (c – скорость света в вакууме)

Теоретические вопросы

1. Предмет физики и ее связь с другими науками. Единицы физических величин [система интернациональная (СИ)].
2. Модели в механике (материальная точка, абсолютно твердое тело). Система отсчета. Кинематические уравнения движения материальной точки. Число степеней свободы.
3. Траектория, длина пути и перемещение.
4. Скорость: вектор средней скорости, мгновенная скорость и средняя скорость неравномерного движения.
5. Ускорение и его составляющие; полное ускорение. Единица ускорения.
6. Выражение для вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ через вектор мгновенной скорости $\vec{v}$. Выражение для $\Delta\vec{v}$ через вектор мгновенного ускорения $\vec{a}$.
7. Нахождение пути при прямолинейном и криволинейном движении точки.
8. Уравнение траектории. Получите уравнение траектории, исходя из кинематических уравнений для координат: $x = A\cos bt$; $y = A\sin bt$. Укажите геометрической смысл величины A.
9. Уравнение траектории. Получите уравнение траектории, исходя из кинематических уравнений для координат: $x = A\cos bt$; $y = B\sin bt$. Укажите геометрической смысл величин A и B.
10. Радиус кривизны траектории. Тангенциальное и нормальное ускорение при криволинейном движении точки.
11. Выражение для векторов перемещения, скорости и ускорения с помощью единичных векторов. Средний вектор скорости и средний вектор ускорения.
12. Нормальное ускорение. Вывод формулы нормального ускорения в случае движения точки по окружности.
13. Равноускоренное прямолинейное движение ($a_x = \text{const}$). Выражения для $v_x(t)$ и $x(t)$.
14. Равноускоренное прямолинейное движение ($a_x = \text{const}$). Получите формулу для Δx через v_x.
15. Движение тела, брошенного с высоты h горизонтально со скоростью v_0: формулы для v_x и v_y; $x(t)$ и $y(t)$.
16. Движение тела, брошенного горизонтально с высоты h со скоростью v_0: уравнение траектории.
17. Движение тела, брошенного горизонтально с высоты h со скоростью v_0: время полета, дальность полета.
18. Движение тела, брошенного с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0: формулы для v_x и v_y; $x(t)$ и $y(t)$.

19. Движение тела, брошенного с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0: уравнение траектории.
20. Движение тела, брошенного с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0: максимальная высота подъема и дальность полета тела.
21. Движение тела, брошенного с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0: максимальный и минимальный радиусы кривизны траектории.
22. Кинематика вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси: угловая скорость и угловое ускорение; частота и период вращения. Выражения для угла поворота $\Delta\varphi$ через угловую скорость ω и для $\Delta\omega$ через угловое ускорение ε. Единицы угла поворота, угловой скорости и углового ускорения.
23. Кинематика вращательного движения твердого тела с постоянным угловым ускорением: выражения для угловой скорости и угла поворота как функций времени (для равноускоренного и равнозамедленного вращения).
24. Кинематика вращательного движения твердого тела с постоянным угловым ускорением. Получите выражение для угла поворота через угловую скорость и угловое ускорение.
25. Связь между линейными и угловыми характеристиками движения материальной точки вращающегося тела. Тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки как функции угловой скорости и углового ускорения.
26. Вектор угловой скорости. Связь между линейной и угловой скоростью в векторном виде.
27. Инерциальные системы отсчета (ИСО) и первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея.
28. Масса, импульс и сила. Второй закон Ньютона (запись через ускорение и через импульс). Формула для изменения импульса точки (через вектор силы). Средняя сила.
29. Третий закон Ньютона. Внутренние и внешние силы в системе материальных точек. Формула для изменения импульса системы.
30. Центр масс механической системы. Координаты центра масс. Скорость центра масс (связь с импульсом системы). Ускорение центра масс. Свойства центра масс замкнутой системы.
31. Силы в природе (четыре вида взаимодействий). Единица силы.
32. Силы в механике. Силы трения (сухое и вязкое трение).
33. Силы в механике. Силы упругости. Закон Гука.
34. Применение основного закона динамики к движению тела на неподвижной наклонной плоскости. Сделайте чертеж, обозначьте на нем все силы и напишите выражения для них.

35. Изменение импульса тела при прямом упругом ударе о стенку. Сделайте чертеж и укажите на нем векторы начального, конечного импульсов и вектор изменения импульса. Средняя сила при ударе. Единица импульса.
36. Изменение импульса тела при косом абсолютно упругом ударе о стенку. Сделайте чертеж и укажите на нем векторы начального и конечного импульсов и вектор изменения импульса. Средняя сила при ударе.
37. Закон сохранения импульса системы материальных точек и его связь со вторым и третьим законами Ньютона.
38. Применение закона сохранения импульса к абсолютно неупругому столкновению двух тел масс m_1 и m_2, движущихся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Получите выражение для вектора скорости $\vec{u}$ после удара, используя представления скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ с помощью единичных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Как отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?
39. Работа силы (определение). Единица работы. Работа постоянной силы. Средняя и мгновенная мощность. Единица мощности.
40. Кинетическая энергия поступательного движения тела. Единица энергии. Связь работы с изменением кинетической энергии.
41. Работа и кинетическая энергия. Вывод формулы для кинетической энергии.
42. Консервативные и неконсервативные силы. Диссипативные силы. Работа консервативных сил и потенциальная энергия.
43. Механическая энергия. Закон сохранения механической энергии. Изменение механической энергии в случае действия неконсервативных и сторонних сил.
44. Применение закона сохранения импульса к абсолютно неупругому соударению двух тел. Изменение кинетической энергии.
45. Применение законов сохранения к абсолютно упругому центральному удару шаров. Получите выражения для скоростей сталкивающихся тел после удара.
46. Момент инерции тела – мера инертности твердых тел при вращательном движении. Момент инерции системы (тела) относительно оси вращения.
47. Момент инерции твердого тела. Момент инерции полого тонкостенного цилиндра и диска (сплошного цилиндра). Теорема Штейнера о моментах инерции.
48. Момент инерции твердого тела. Момент инерции прямого тонкого стержня и шара. Теорема Штейнера о моментах инерции.
49. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела.
50. Момент силы относительно неподвижной точки. Момент силы относительно неподвижной оси. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси ($M_z = J_z\varepsilon$; $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$).
51. Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки и неподвижной оси.

52. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси ($\mathrm{d}L_z/\mathrm{d}t = M_z$; $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = \vec{M}$).
53. Закон сохранения момента импульса – фундаментальный закон природы.
54. Уравнения для плоского движения твердого тела. Скатывание тел с наклонной плоскости.
55. Кинетическая энергия при качении тел при отсутствии проскальзывания. Примеры: качение цилиндра, шара.
56. Деформации твердого тела: упругая, пластическая (остаточная). Напряжение. Относительная деформация. Коэффициент Пуассона. Модуль Юнга. Коэффициент упругости. Закон Гука. Связь между деформацией и напряжением [диаграмма напряжений $\sigma(\varepsilon)$].
57. Давление жидкости и газа. Единица давления – паскаль (Па). Закон Паскаля. Гидростатическое давление. Закон Архимеда.
58. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли (динамическое, гидростатическое и полное давление).
59. Вязкость (внутренне трение). Единица вязкости – паскаль-секунда (Па $\cdot$ с). Ламинарное и турбулентные режимы течения. Число Рейнольдса.
60. Методы определения вязкости: метод Стокса и метод Пуазейля. Сила Стокса. Формула Пуазейля.
61. Преобразование координат Галилея. Правило сложения скоростей в классической механике. Принцип относительности в механике (принцип относительности Галилея).
62. Постулаты специальной (частной) теории относительности. Преобразования Лоренца для координат и времени.
63. Следствия из преобразований Лоренца: одновременность событий в разных системах отсчета.
64. Следствия из преобразований Лоренца: длительность событий в разных системах отсчета.
65. Следствия из преобразований Лоренца: длина тел в разных системах отсчета.
66. Следствия из преобразований Лоренца: релятивистский закон сложения скоростей.
67. Получите релятивистский закон сложения скоростей (для движения вдоль оси x), исходя из преобразований Лоренца.
68. Интервал между событиями.
69. Основной закон релятивисткой динамики материальной точки. Релятивистский импульс материальной точки.
70. Энергия в релятивистской механике. Кинетическая энергия релятивисткой частицы. Полная энергия свободной частицы. Энергия покоя. Преобразования импульса и энергии.

71. Получите выражение для кинетической энергии релятивистской частицы, используя выражение для релятивистского импульса.
72. Кинетическая энергия релятивистской частицы. График зависимости кинетической энергии от скорости. Переход к нерелятивистскому пределу [когда скорость частицы много меньше скорости света в вакууме ($\upsilon \ll c$)].
73. Полная энергия релятивистской частицы и ее сохранение в процессах распада и взаимодействия частиц. Соотношение между изменением энергии покоя и изменением массы в этих процессах.
74. Связь полной энергии релятивистской частицы массы m с ее импульсом p.
75. Частицы с нулевой массой. Связь энергии с импульсом для частиц нулевой массы (фотонов).
76. Связь кинетической энергии релятивистской частицы массы m с ее импульсом p.
77. Границы применимости ньютоновской механики.

ЧАСТЬ 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Лекция 7. ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

7.1. Статистический и динамический методы исследования. Основные характеристики атомов и молекул

Молекулярная физика и термодинамика – разделы физики, изучающие физические свойства макроскопических систем, которые состоят из большого числа содержащихся в них атомов и молекул.

Молекулярная физика – раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из так называемых молекулярно-кинетических представлений. Согласно ***молекулярно-кинетической теории строения вещества*** [начала которой заложены в трудах М.В. Ломоносова, а дальнейшее количественное развитие получила в работах Р. Клаузиуса, Дж. Максвелла, Л. Больцмана, Д. Гиббса и других ученых] любое тело состоит из большого числа частиц (атомов и молекул), находящихся в непрерывном *беспорядочном* (*хаотическом*) *движении*; молекулы взаимодействуют между собой: на больших расстояниях притягиваются, на малых – отталкиваются. Непосредственным доказательством существования хаотического движения молекул служит ***броуновское движение*** – тепловое движение мельчайших микроскопических частиц, взвешенных в жидкости или газе [открыто английским ботаником Р. Броуном в 1827 г.].

Если в механике для описания движения частиц достаточно было знать их координаты и скорости в каждый момент времени, то в молекулярной физике такой способ описания поведения частиц непригоден. Здесь используют ***статистический метод***, задача которого – вычисление средних значений физических величин и установление связей между ними для объяснения тех физических свойств вещества, которые непосредственно могут измерены опытным путем (температура, давление, плотность и др.).

В отличие от молекулярной физики **термодинамика** изучает наиболее общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, а также различные процессы, связанные с изменением состояния системы. Для исследования этих процессов в термодинамике используют ***фундаментальные законы энергетических превращений*** (называемые ***началами*** термодинамики), установленные путем обобщения большой совокупности опытных фактов. Термодинамический метод, использующий начала термодинамики, позволяет объяснить различные свойства вещества и изменение его состояния вне зависимости от внутренней структуры и механизмов процессов, определяющих поведение изучаемой системы.

У молекулярной физики и термодинамики общий предмет изучения – свойства веществ и происходящие в них процессы, однако отличаясь различным подходом к описанию изменений состояния вещества, они тесно связаны между собой и дополняют друг друга.

Термодинамическая система – совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с внешней средой. Для характеристики свойств термодинамической системы вводят физические величины, которые называют ***термодинамическими параметрами системы*** (***параметрами состояния***). Основными параметрами являются давление p, объем V, температура T. Между этими величинами существует функциональная зависимость вида

$$f(p, V, T) = 0, \tag{7.1}$$

которая называется ***уравнением состояния***.

Параметры состояния [p, V, T, ρ (плотность), υ (удельный объем), n (концентрация) и др.] термодинамической системы могут изменяться. Изменение хотя бы одного из термодинамических параметров системы называется ***термодинамическим процессом***.

Равновесным состоянием макроскопической системы называется такое состояние, при котором все параметры системы имеют определенные значения, остающиеся при неизменных внешних условиях постоянными сколь угодно долго.

Состояние системы называется ***неравновесным***, если оно без всякого воздействия извне самопроизвольно меняется со временем. [В неравновесном состоянии всем или некоторым параметрам нельзя приписать определенные значения. Система, находящаяся в неравновесном состоянии и предоставленная самой себе, постепенно переходит в равновесное состояние].

Температура – физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. Температура одно из основных понятий в физике. В соответствии с решением XI Генеральной конференции по мерам и весам (Париж, 1960 г.) в настоящее время можно применять только две температурные шкалы – ***термодинамическую*** [была предложена в 1848 г. английским ученым Уильямом Томсоном (он же лорд Кельвин)] и ***Международную* практическую**, градуированные соответственно в кельвинах (К) и в градусах Цельсия ($°C$) [*шкала Цельсия* – была предложена в 1742 г. шведским астрономом Андерсом Цельсием, в которой за *нуль* принималась температура смеси воды и льда (температура замерзания), а температура кипения воды приравнивалась к 100 $°C$ при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па (***реперные точки***)]. Градус Цельсия равен кельвину. В термодинамической шкале температура замерзания воды равна 273,15 К (при давлении $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па). Термодинамическая температура T и температура t по Международной практической шкале связаны соотношением

$$T = t + 273{,}15.$$

Температура $T = 0$ К ($t = -273{,}15\,°C$) называется ***абсолютным нулем температуры*** (*нулем кельвин*). Абсолютный нуль принципиально недостижим, хотя приближение к нему сколь угодно возможно [в настоящее время практически достигнуты температуры, отличающиеся от абсолютного нуля на ~10^{-6}К].

Для *характеристики атомов и молекул* применяются следующие величины.

1. ***Относительная атомная масса*** химического элемента (A_r) – отношение массы атома этого элемента к 1/12 массы атома ${}^{12}_{6}C$ (изотопа углерода с массовым числом 12).

2. ***Относительная молекулярная масса*** вещества (M_r) –отношение массы молекулы этого вещества к 1/12 массы атома углерода ${}^{12}_{6}C$

$$M_r = \frac{m_0}{\frac{1}{12} m_{\text{ат}C}}, \tag{7.2}$$

где m_0 – масса молекулы.

Относительные атомная и молекулярная массы являются величинами безразмерными. Масса, равная 1/12 массы ${}^{12}_{6}C$, называется *атомной единицей массы* (а. е. м.): 1 а. е. м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

3. ***Количество вещества*** (ν) – физическая величина, определяемая числом специфических структурных элементов – атомов, молекул, ионов, электронов или других структурных единиц из которых состоит вещество (система). Единица количества вещества ν – *моль* [моль]. 1 моль любого вещества содержит определенное число молекул, называемое ***числом*** (***постоянной***) ***Авогадро***, равное числу атомов в 0,012 кг изотопа углерода ${}^{12}_{6}C$: $N_\text{А} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ [опытным путем найдено]. Для числа молей ν получим:

$$\nu = \frac{N}{N_\text{А}}, \tag{7.3}$$

где N – число молекул в системе.

4. ***Молярная масса*** (M) – масса одного моля вещества. Единица молярной массы M – *килограмм на моль* [кг/моль].

Молярная масса (M) и относительная молекулярная масса (M_r) вещества связаны соотношением:

$$M = M_r \cdot 10^{-3}. \tag{7.4}$$

Число молей ν, содержащихся в массе m вещества (системы), определяется формулой:

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_А}, \quad (7.5)$$

где M – молярная масса вещества; $m = m_0 N$ – масса системы; m_0 – масса одной молекулы; N – число молекул в системе.

Масса одной молекулы m_0 определяется, как

$$m_0 = \frac{M}{N_А} = \frac{m}{N} = \frac{\rho}{n}, \quad (7.6)$$

где ρ – плотность вещества; $n = N/V$ – число частиц в единице объема (концентрация). Единица концентрации n – [$м^{-3}$].

5. Размеры атомов и молекул принято характеризовать *эффективным диаметром* [$d_{эф} \approx 10^{-10}$м], зависящим от химической природы вещества. ***Эффективный диаметр*** ($d_{эф}$) – это наименьшее расстояние, на которое сближаются центры двух молекул при столкновении (его наличие говорит о том, что между молекулами действуют *силы взаимного отталкивания*).

6. ***Удельный объем*** υ – объем единицы массы. Удельный объем *однородного тела* (плотность $\rho = \text{const}$) определяется формулой:

$$\upsilon = \frac{V}{m}, \quad (7.7)$$

где V – объем тела. Единица удельного объема υ – [м^3/кг].

Так как при постоянной массе ($m = \text{const}$) удельный объем υ пропорционален общему объему V, то *макроскопические свойства однородного тела* можно характеризовать объемом тела V.

7. ***Молярный объем*** (V_m) – физическая величина, равная отношению объема V однородной системы к количеству вещества ν системы

$$V_m = \frac{V}{\nu}. \quad (7.8)$$

Единица молярного объема V_m – [м^3/моль].

Согласно **закону Авогадро** *при нормальных условиях* [$p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $t_0 = 0$ °C], объем 1 моль *любого газа* равен $22{,}4$ л/моль $= 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль.

7.2. Идеальный газ. Опытные законы идеального газа

Простейшей макроскопической системой является ***идеальный газ***. Идеальный газ – это идеализированная физическая модель, согласно которой считают, что молекулы газа имеют пренебрежимо малый собственный объем, не взаимодействуют друг с другом на расстоянии и столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Модель идеального газа может быть использована при изучении *реальных газов* [в реальных газах существуют силы межмолекулярного притяжения и отталкивания], так как они (такие, как воздух, N_2, O_2) в условиях, близких к нормальным, а также при низких давлениях и высоких температурах весьма близки по свойствам к идеальному газу. Особенно близки по своим свойствам к идеальному газу He и H_2.

Изопроцессами в газах называются процессы, при которых один из параметров состояния (давление p, объем V, температура T) остается неизменным в течение всего процесса. Закономерности, наблюдаемые при изопроцессах, называют *газовыми законами*.

Закон Бойля – Мариотта: *для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная*:

$$pV = \text{const при } T = \text{const}, m = \text{const}. \qquad (7.9)$$

Процесс, протекающий при постоянной температуре называется ***изотермическим процессом***. График зависимости между параметрами состояния газа при постоянной температуре называется ***изотермой***. Изотермы в координатах p, V представляют собой гиперболы, расположенные на графике тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс (рис. 32).

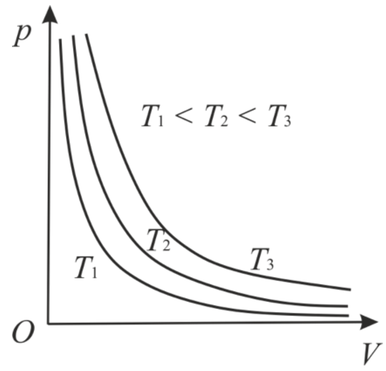

Рис. 32

[Уравнение (7.9) было получено из эксперимента английским физиком Р. Бойлем (1662 г.) и независимо от него французским физиком Э. Мариоттом (1676 г.)].

Законы Гей-Люссака: 1) *при постоянном давлении объем данной массы газа изменяется линейно с температурой*:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \text{ при } p = \text{const}, m = \text{const}. \qquad (7.10)$$

2) *при постоянном объеме давление данной массы газа изменяется линейно с температурой*:

$$p = p_0(1 + \alpha t) \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const}. \qquad (7.11)$$

В уравнениях (7.10) и (7.11) t – температура газа по шкале Цельсия, p_0 и V_0 – давление и объем при 0 °C, коэффициент $\alpha = 1/273$ К$^{-1}$.

Процесс, протекающий при постоянном давлении ($p = \text{const}$), называется ***изобарным*** (или *изобарическим*). На диаграмме в координатах V, t (рис. 33) этот процесс изображается прямой, называемой ***изобарой***. Процесс, протекающий при постоянном объеме ($V = \text{const}$), называется ***изохорным*** (или *изохорическим*). На диаграмме в координатах p, t (рис. 34) он изображается прямой, называемой ***изохорой***.

[Зависимость объема V газа от температуры при неизменном давлении ($p = \text{const}$) была экспериментально исследована французским физиком Ж. Гей-Люссаком (1862 г.). Впоследствии он же объединил свой закон [см. (7.10)] с законом Бойля – Мариотта (7.9), что позволило описывать в том числе и *изохорный процесс*. Экспериментально зависимость давления p газа от температуры исследовал французский физик Ж. Шарль (1787 г.).

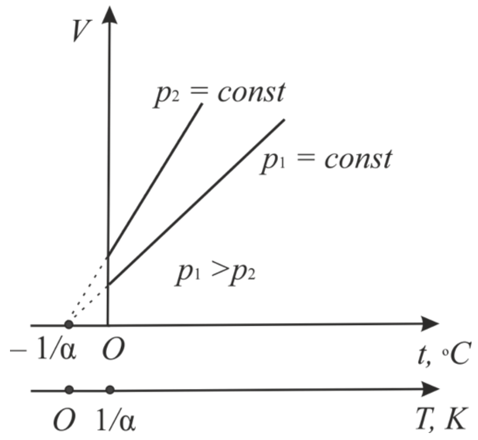

Рис. 33

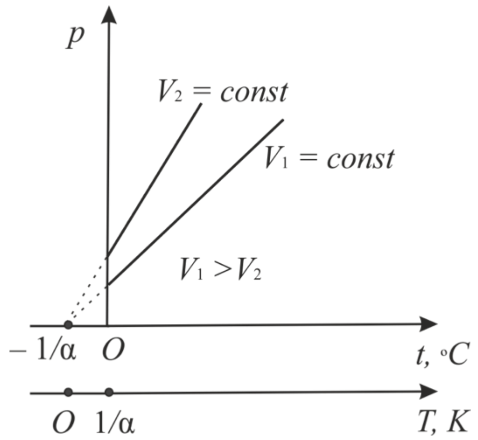

Рис. 34

Как следует из (7.10) и (7.11) все изобары и изохоры пересекают ось t в одной и той же точке, определяемой из условия

$$1 + \alpha t = 0,$$

откуда

$$t = -1/\alpha = -273{,}15\ °C.$$

Сместив начало отсчета температур t в эту точку, мы перейдем от шкалы температур Цельсия к шкале Кельвина (см. рис. 33 и 34), откуда

$$T = t + 273{,}15 = t + \frac{1}{\alpha} \text{ или } t = T - \frac{1}{\alpha}. \qquad (7.12)].$$

Подставив (7.12) в формулы (7.10) и (7.11) получим [*законы Гей-Люссака через термодинамическую температуру*],

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0\left[1 + \alpha\left(T - \frac{1}{\alpha}\right)\right] = V_0 \alpha T,$$

откуда

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ при } p = \text{const}, m = \text{const}; \qquad (7.13)$$

$$p = p_0(1 + \alpha t) = p_0\left[1 + \alpha\left(T - \frac{1}{\alpha}\right)\right] = p_0 \alpha T,$$

откуда

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const}, \qquad (7.14)$$

[индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям газа].

Закон Дальтона: *давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений $p_1, p_2, \ldots, p_n$ входящих в нее газов*:

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i, \tag{7.15}$$

где p_i – парциальное давление i-го компонента смеси.

Парциальное давление – давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

7.3. Уравнение Клапейрона – Менделеева

Соотношение, определяющее связь между параметрами состояния какого-либо газа, называется *уравнением состояния* этого газа [см (7.1), где каждая из переменных является функцией двух других, например $p = f(V, T)$; $V = f(p, T)$; $T = f(p, V)$].

Объединив законы Бойля – Мариотта (7.9) и Гей-Люссака (7.14), можно найти уравнение состояние идеального газа.

[Для этого возьмем на диаграмме (p, V) два произвольных состояния газа *1* и *2*, определяемых значениями параметров соответственно p_1, V_1, T_1 и p_2, V_2, T_2 (рис. 35). Переход из состояния *1* в состояние *2* осуществляется в виде двух процессов: изотермического (изотерма *1*–*1*$'$) и изохорного (изохора *1*$'$–*2*).

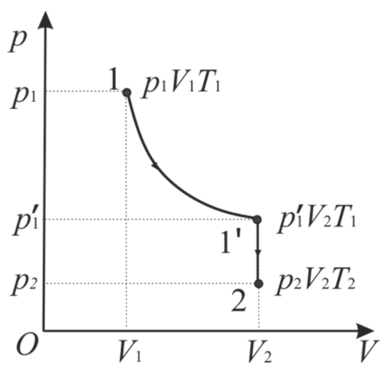

Рис. 35

Состояния *1* и *1*$'$ лежат на одной изотерме, поэтому в соответствии с (7.9) запишем:

$$p_1V_1 = p_1'V_2. \tag{7.16}$$

Состояния *1′* и *2* лежат на одной изохоре, поэтому в соответствии с (7.14), имеем

$$\frac{p_1'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{7.17}$$

Исключив из уравнений (7.16) и (7.17) p_1', получим

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

Поскольку для данной массы газа ($m = \text{const}$) состояния *1* и *2* были взяты произвольно, можно утверждать, что для любого состояния

$$\frac{pV}{T} = B = \text{const}, \tag{7.18}$$

т. е. для данной массы газа величина pV/T остается постоянной; B – постоянная, пропорциональная массе газа и различная для разных газов].

Выражение (7.18) называется ***уравнением Клапейрона***.

Согласно *закону Авогадро*, при *одинаковых* p и T молярные объемы V_m различных газов отнесенные к 1 моль газа одинаковы, поэтому постоянная B будет одинаковой для всех газов. Эта общая для всех газов постоянная обозначается R и называется ***универсальной газовой постоянной*** (или ***молярной газовой постоянной***) [впервые введена в употребление Д.И. Менделеевым в 1879 г.].

Заменив постоянную B на R [см. (7.18)], уравнение (7.18) для 1 моль газа можно записать следующим образом:

$$pV_m = RT. \tag{7.19}$$

Уравнение (7.19) является *уравнением состояния идеального газа*, называемым также ***уравнением Клапейрона – Менделеева*** для 1 моль газа.

[Числовое значение молярной газовой постоянной можно определить из формулы (7.19), полагая, что 1 моль газа находится при нормальных условиях ($p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $t_0 = 0\ °C$ или $T_0 = 273{,}15$ К, $V_m = 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль):

$$R = \frac{pV_m}{T} = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 22{,}4 \cdot 10^{-3}}{273{,}15} = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}].$$

От уравнения (7.19) для 1 моль газа можно перейти к ***уравнению Клапейрона – Менделеева для произвольной массы газа***:

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT, \tag{7.20}$$

где $V = mV_m/M$ – объем газа; M – молярная масса; $\nu = m/M$ – количество вещества. Легко видеть, что из этого уравнения вытекают уравнения (7.9), (7.13) и (7.14).

Умножив и разделив правую часть уравнения (7.19) на число Авогадро $N_\text{А}$, получим

$$p = \frac{N_\text{А}}{V_m} \frac{R}{N_\text{А}} T = nkT,$$

т. е.

$$p = nkT, \tag{7.21}$$

где $n = N_\text{А}/V_m$ – концентрация молекул (число молекул в единице объема).

Величина

$$k = \frac{R}{N_\text{А}} = \frac{8{,}31\ \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}}{6{,}022\ \text{моль}^{-1}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{Дж/К} \tag{7.21$'$}$$

называется ***постоянной Больцмана***.

Из уравнения (7.21) следует, что давление p идеального газа при данной температуре T пропорционально концентрации n его молекул (или плотности ρ газа).

Из уравнения состояния идеального газа (7.21) можно получить число молекул, содержащихся в 1 м^3 газа при *нормальных условиях* ($p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273{,}15$ К), называемое ***числом Лошмидта***:

$$N_L = \frac{p_0}{kT_0} = 2{,}68 \cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}. \tag{7.21$''$}$$

Уравнения (7.19), (7.20) и (7.21) представляют различные формы записи *уравнения идеального газа*.

7.4. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов связывает макроскопический параметр системы – давление, с характеристиками молекул. При выводе этого уравнения предполагается, что массы всех молекул одинаковы, скорости всех молекул одинаковы по модулю, а все направления движения молекул равновероятны. В результате получается уравнение следующего вида:

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2, \tag{7.22}$$

где m_0 – масса молекулы; n – концентрация молекул.

Выражение (7.22) называется ***основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа***.

Величина

$$\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} \tag{7.23}$$

называется ***средней квадратичной скоростью молекул***; где $M = m_0 N_{\text{A}}$ – молярная масса газа; $k = R/N_{\text{A}}$ – постоянная Больцмана; $\rho = m_0 n$ – плотность газа; $p = nkT$ – давление газа; n – концентрация молекул.

[Используя модель идеального газа (*молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между молекулами газа пренебрежимо мало по сравнению с числом ударов о стенки сосуда, а соударения молекул со стенками сосуда абсолютно упругие*), вычислим давление газа на стенку сосуда. Выделим на стенке сосуда некоторую элементарную площадку ΔS (рис. 36) и вычислим давление, оказываемое на эту площадку. За время Δt площадки ΔS достигнут только те молекулы, которые заключены в объеме цилиндра с основанием ΔS и высотой $\upsilon \cdot \Delta t$. Число этих молекул равно

$$n \Delta S \upsilon \Delta t,$$

где n – концентрация молекул.

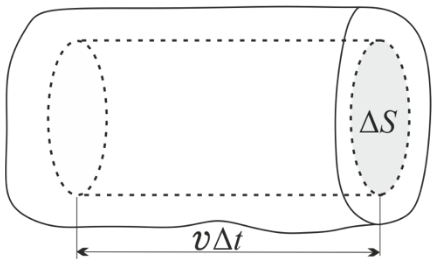

Рис. 36

При каждом соударении молекула, движущаяся перпендикулярно площадке, передает ей импульс

$$m_0 v - (-m_0 v) = 2m_0 v,$$

m_0 – масса молекулы; v – ее скорость.

Реально молекулы движутся к площадке ΔS под разными углами и имеют различные скорости, причем при каждом соударении скорость молекул меняется. Для упрощения расчетов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени вдоль каждого из них движется 1/3 молекул, причем половина молекул 1/6 движется вдоль данного направления в одну сторону, половина – в противоположную. Тогда число ударов молекул, движущихся в заданном направлении, о площадку ΔS будет

$$\frac{1}{6} n\Delta S v\Delta t.$$

При столкновении с площадкой ΔS эти молекулы передадут ей импульс

$$\Delta P = 2m_0 v \cdot \frac{1}{6} n\Delta S v\Delta t = \frac{1}{3} n m_0 v^2 \Delta S\Delta t.$$

Тогда давление газа, оказываемое им на стенку сосуда:

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta t\Delta S} = \frac{1}{3} n m_0 v^2. \qquad (7.24)$$

Если газ в объеме V содержит N молекул, движущихся со скоростями v_1, v_2, …, v_N, то целесообразно рассматривать ***среднюю квадратичную скорость***

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2}, \qquad (7.25)$$

характеризующую всю совокупность молекул газа.

Уравнение (7.24) с учетом (7.25) примет вид

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_0 \rangle,$$

т. е. получили ***основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа*** [см. (7.22)]; где $\langle \varepsilon_0 \rangle = m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2 / 2$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа].

Учитывая, что концентрация газа $n = N/V$, из (7.22) получим

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2, \tag{7.26}$$

или

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} E, \tag{7.27}$$

где E – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{E}{N} = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT \tag{7.28}$$

пропорциональна термодинамической температуре T и зависит только от нее, но не зависит от массы молекулы [при получении (7.28) использовали формулы (7.27) и (7.23)].

Из формулы (7.28) следует физический смысл термодинамической температуры: *термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа*. При температурах, близких к 0 К, выражение (7.28) несправедливо, т. е. средняя кинетическая энергия молекул не пропорциональна температуре. Поэтому некорректно говорить о том, что при температуре 0 К движение молекул прекращается. В настоящее время доказано, что даже при 0 К частицы вещества совершают нулевые колебания.

7.5. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения

При объяснении свойств газов, зависящих от скоростей молекул, предполагалось, что все молекулы характеризуются одной и той же скоростью [см. п. 7.4]. По молекулярно-кинетической теории, для характеристики скорости теплового движения молекул массой m_0 в газе, находящемся в состоянии равновесия при $T = \text{const}$, используют среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$, которая при столкновениях молекул остается постоянной [см. (7.23)]. В действительности скорости молекул не одинаковы и подчиняются закономерностям, имеющим статистический характер [этот закон теоретически выведен Дж. Максвеллом (1859)].

С помощью теории вероятностей Максвеллу удалось получить формулу, позволяющую определить долю $\mathrm{d}N$ из общего числа молекул N, скорости которых лежат в пределах интервала от v до $v + \mathrm{d}v$ при любых значениях v. Если интервал скоростей $\mathrm{d}v$ достаточно мал, то число молекул $\mathrm{d}N(v)$, имеющих скорости в этом интервале, пропорционально $\mathrm{d}v$. Поскольку $\mathrm{d}N(v)$ пропорционально общему числу молекул N и зависит каким-то образом от v, можно записать:

$$\frac{\mathrm{d}N(v)}{N} = f(v)\mathrm{d}v,$$

откуда

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}N(v)}{N\mathrm{d}v}.$$

Функцию $f(v)$ называют ***функцией распределения молекул по скоростям*** [определяет относительное число (долю) молекул $\mathrm{d}N(v)/N$, обладающих данной скоростью из общего числа молекул N].

Для однородно газа, находящегося в равновесном состоянии, Максвелл получил формулу

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}N(v)}{N\mathrm{d}v} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}, \qquad (7.29)$$

где v – абсолютное значение скорости молекулы массой m_0; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

Выражение (7.29) является **законом о распределении молекул идеального газа по скоростям**. Из него видно, что конкретный вид функции распределения $f(v)$ зависит от рода газа (массы молекулы m_0) и от температуры T [давление p газа и объем V на распределение молекул по скоростям не влияют].

Функция распределения $f(v)$ должна удовлетворять условию нормировки, то есть должно выполняться условие:

$$\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = 1. \qquad (7.30)$$

Левая часть выражения (7.30) дает вероятность того, что молекула обладает скоростью в интервале от 0 до ∞. Поскольку скорость молекулы обязательно имеет какое-то значение, то указанная вероятность есть вероятность достоверного события и, следовательно, равна единице.

Схематичный график функции распределения Максвелла приведен на рис. (рис. 37).

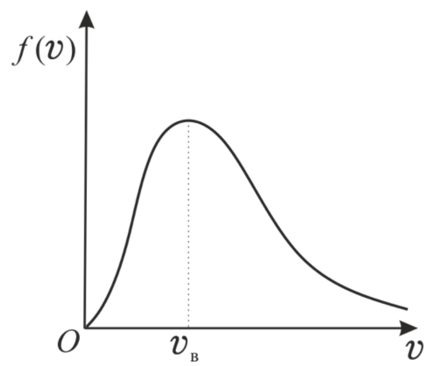

Рис. 37

Из графика видно, что функция распределения $f(v)$, начинаясь от нуля, достигает максимума при $v_в$ и затем асимптотически стремится к нулю [$v_в$ – называется ***наиболее вероятной скоростью***; отвечает максимальному значению функции распределения]. Кривая несимметрична относительно $v_в$. При скоростях, стремящихся к нулю ($v \to 0$) и к бесконечности ($v \to \infty$) функция распределения $f(v)$ также стремится к нулю. Это означает, что очень большие и очень маленькие скорости молекул маловероятны.

[Для нахождения максимума функции $f(v)$ продифференцируем выражение (7.29), предварительно заменив через

$$C = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2},$$

т. е.

$$f(v) = Cv^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = Ce^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2,$$

откуда

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = Ce^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v\left(2 - \frac{m_0 v^2}{kT}\right).$$

Приравняв к нулю $\mathrm{d}f(v)/\mathrm{d}v = 0$, получим

$$Ce^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v\left(2 - \frac{m_0 v^2}{kT}\right) = 0 \qquad (*)].$$

Значение v, при котором выражение в скобках становится равным нулю [см. $(*)$], и есть искомая *наиболее вероятная скорость* $v_в$:

$$v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \qquad (7.31)$$

Из формулы (7.31) следует, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям (рис. 38) сместится вправо, т. е. значение наиболее вероятной скорости $v_в$ становится больше [кривая распределения имеет асимметричный характер – это означает, что доля молекул, имеющих скорости больше наиболее вероятной $v_в$, больше доли молекул, имеющих скорости меньше наиболее вероятной $v_в$]. Однако площадь, ограниченная кривой, остается неизменной, поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться [см. рис. 38].

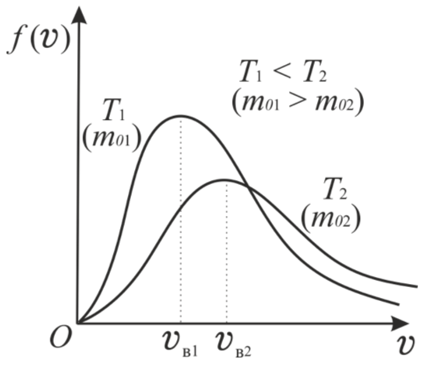

Рис. 38

Пользуясь функцией распределения Максвелла (7.29), можно найти ряд средних величин, характеризующих состояние молекул.

Средняя скорость молекулы $\langle \upsilon \rangle$ (или ***средняя арифметическая скорость***) определяется по формуле

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty \upsilon \mathrm{d}N(\upsilon) = \int_0^\infty \upsilon f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \qquad (7.32)$$

[*средняя арифметическая скорость* – это сумма скоростей всех молекул, деленная на число молекул N:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2 + \cdots + \upsilon_N}{N} \qquad (7.33)].$$

Подставляя в (7.32) значение $f(\upsilon)$ [см. (7.29)] и интегрируя полученное выражение, получим

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\,. \qquad (7.34)$$

Сопоставляя формулы (7.23), (7.31) и (7.34), можно заметить, что $\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle$, $\upsilon_{\text{в}}$, $\langle \upsilon \rangle$ одинаково зависят от температуры газа и молярной массы, отличаясь только множителем. Их отношение выглядит следующим образом:

$$\upsilon_{\text{в}} : \langle \upsilon \rangle : \langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = 1 : 1{,}13 : 1{,}22.$$

Исходя из распределения молекул по скоростям [см. (7.29)]

$$\mathrm{d}N(v) = N4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}, \tag{7.35}$$

можно найти распределение молекул идеального газа по значениям кинетической энергии ε. Для этого перейдем от переменной v к переменной $\varepsilon = m_0 v^2/2$. Подставив в (7.35) $v = \sqrt{2\varepsilon/m_0}$ и $\mathrm{d}v = (2m_0\varepsilon)^{-1/2}\mathrm{d}\varepsilon$, получим

$$\mathrm{d}N(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}e^{-\varepsilon/(kT)}\mathrm{d}\varepsilon = Nf(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon, \tag{7.36}$$

где $\mathrm{d}N(\varepsilon)$ – число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от ε до $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$.

Таким образом, ***функция распределения молекул по энергиям теплового движения***

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}e^{-\varepsilon/(kT)}. \tag{7.37}$$

Средняя кинетическая энергия $\langle\varepsilon\rangle$ молекулы идеального газа

$$\langle\varepsilon\rangle = \int\limits_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\int\limits_0^\infty \varepsilon^{3/2}\,e^{-\varepsilon/(kT)}\mathrm{d}\varepsilon = \frac{3}{2}kT, \tag{7.38}$$

т. е. получили результат, совпадающий с формулой (7.28) для *средней кинетической энергии поступательного движения молекулы*.

Экспериментальная проверка закона о распределении Максвелла впервые осуществлена в 1920 г. немецким физиком О. Штерном.

7.6. Барометрическая формула. Распределение Больцмана

Закон изменения давления p идеального газа с высотой h в однородном поле тяготения описывается ***барометрической формулой Лапласа***

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} = p_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}, \tag{7.39}$$

где p и p_0 – соответственно давление газа на высоте h и h_0; M – молярная масса;

g – ускорение свободного падения; R – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура; k – постоянная Больцмана; m_0 – масса молекулы. Формула (7.39) получена в предположении, что газ находится в состоянии термодинамического равновесия, т. е. его температура $T = \text{const}$.

Формула (7.39) позволяет найти атмосферное давление в зависимости от высоты или, измерив давление, найти высоту.

[Известно, что атмосферное давление убывает с высотой. Найдем функцию $p(h)$, описывающую зависимость давления p от высоты h, предполагая, что поле тяготения однородно, температура постоянна ($T = \text{const}$) и масса всех молекул одинакова. Выделим на высоте h вертикальный столб газа площадью поперечного сечения равной 1 м^2 (рис. 39).

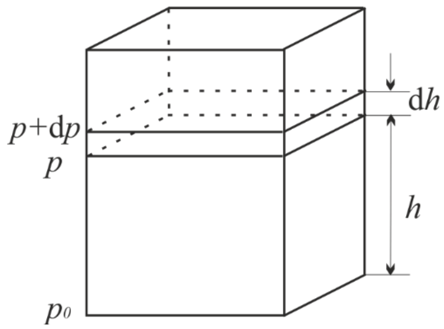

Рис. 39

Если атмосферное давление на высоте h равно p, то на высоте $h + \mathrm{d}h$ оно равно $p + \mathrm{d}p$ (при $\mathrm{d}h > 0$ $\mathrm{d}p < 0$, так как давление с высотой убывает). Разность давлений p и $p + \mathrm{d}p$ равна весу газа, заключенного в объеме столба газа высотой $\mathrm{d}h$ с основанием $S = 1$ м^2:

$$p - (p + \mathrm{d}p) = \rho g \mathrm{d}h,$$

где ρ – плотность газа на высоте h.

Отсюда

$$\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}h. \tag{7.40}$$

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа (7.20), плотность газа ρ можно выразить через давление p и температуру T:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Подставив выражение для ρ в (7.40), получим

$$\mathrm{d}p = -\frac{Mg}{RT} p \mathrm{d}h,$$

откуда

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{RT}\mathrm{d}h. \qquad (7.41)$$

Для случая, когда температура постоянна ($T = \mathrm{const}$), проинтегрировав уравнение (7.41), находим

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{RT}\int_{0}^{h}\mathrm{d}h, \quad \ln\frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT}h$$

(учли, что высоты обозначаются относительно уровня моря ($h = 0$), где давление считается нормальным (p_0)). Потенцируя последнее выражение, получим зависимость давления p от высоты h

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}. \qquad (7.42)$$

Выражение (7.42) называется ***барометрической формулой*** (см. формулу (7.39))].

Из барометрической формулы (7.39) следует, что давление p убывает с высотой h тем быстрее, чем тяжелее газ (чем больше M) и чем ниже температура T. На рис. 40 представлены две кривые, описанные уравнением (7.39). Их можно рассматривать, как соответствующие разным M (при одинаковой температуре T), или как соответствующие разным T (при одинаковой молярной массе M).

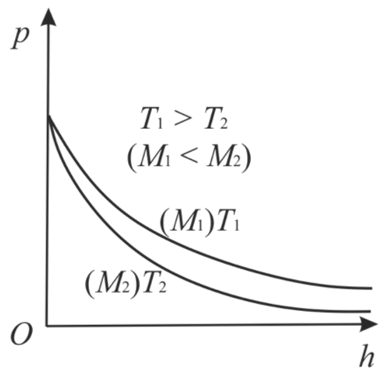

Рис. 40

Заменив в (7.39) давление p через $p = nkT$ [см. (7.21], получим **закон изменения с высотой числа молекул в единице объема**:

$$n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \qquad (7.43)$$

где n и n_0 – соответственно концентрации молекул на высоте h и $h_0 = 0$.

Так как, $R = kN_А$, а $M = m_0 N_А$ [m_0 – масса молекулы; $N_А$ – число Авогадро; k – постоянная Больцмана], то

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}, \qquad (7.44)$$

где $m_0 gh = E_п$ – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения, т. е.

$$n = n_0 e^{-\frac{E_п}{kT}}. \qquad (7.45)$$

Формула (7.45) называется ***распределением Больцмана*** для внешнего потенциального поля. Из него следует, что молекулы располагаются с большей концентрацией там, где меньше их потенциальная энергия, и, наоборот, с меньшей концентрацией в местах, где их потенциальная энергия больше. Выражение (7.45) справедливо для любого потенциального поля независимо от его физической природы.

7.7. Средняя длина свободного пробега молекул

Молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется ***эффективным диаметром молекулы*** d (рис. 41). Он зависит от скорости сталкивающихся молекул, т. е. от температуры T газа (несколько уменьшается с ростом T). Величина $\sigma = \pi d^2$ называется ***эффективным сечением молекулы***.

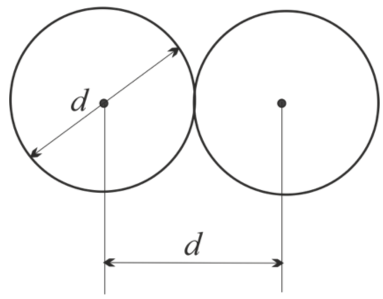

Рис. 41

Между двумя последовательными столкновениями молекулы проходят некоторый путь λ, который называется ***длиной свободного пробега***. Длина свободного пробега λ – случайная величина. Поэтому имеет смысл ввести понятие ***средней длины свободного пробега*** $\langle\lambda\rangle$. Так как за 1 с молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости $\langle\upsilon\rangle$, и если $\langle z\rangle$ – ***среднее число столкновений***, испытываемых одной молекулой газа за 1 с, то средняя длина свободного пробега

$$\langle\lambda\rangle = \frac{\langle\upsilon\rangle}{\langle z\rangle}. \tag{7.46}$$

Для определения $\langle z\rangle$, предположим, что все молекулы газа, за исключением одной, неподвижны и распределены равномерно по всему объему [молекулу представим в виде шарика диаметром d]. Эта молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся на расстояниях, равных или меньших d, т. е. лежат внутри «ломаного» цилиндра радиусом d (рис. 42).

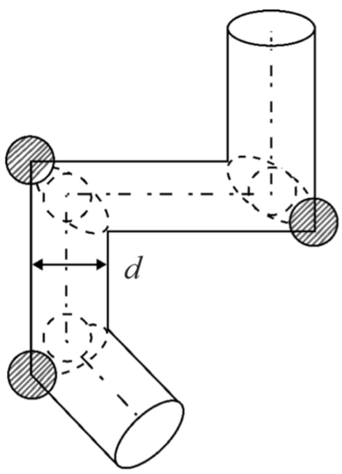

Рис. 42

Если n – концентрация молекул газа, то ***среднее число соударений молекулы за*** 1 с равно числу молекул в объеме V «ломаного» цилиндра:

$$\langle z\rangle = nV = n\pi d^2\langle\upsilon\rangle,$$

где $\langle\upsilon\rangle$ – средняя скорость молекулы или путь, пройденный ею за 1 с.

В действительности все молекулы движутся, вследствие чего число соударений определяется средней скоростью движения молекул по отношению друг к другу. Расчеты показывают, что при учете движения других молекул

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} n \pi d^2 \langle \upsilon \rangle \qquad (7.47)$$

[множитель $\sqrt{2}$ учитывает движение встречных молекул].

Подставив (7.47) в (7.46), получим для средней длины свободного пробега следующее выражение

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}. \qquad (7.48)$$

Из (7.48) следует, что $\langle \lambda \rangle$ обратно пропорциональна концентрации n молекул. С другой стороны, из $p = nkT$ [см. (7.21)] следует, что при постоянной температуре n пропорциональна давлению p. Следовательно,

$$\frac{\langle \lambda_1 \rangle}{\langle \lambda_2 \rangle} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_2}{p_1}.$$

[Используя формулы (7.46) – (7.48), можно оценить $\langle \lambda \rangle$ и $\langle z \rangle$ по порядку величины, например для молекулы водорода при нормальных условиях ($p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273{,}15$ К). При нормальных условиях n равно числу Лошмидта, т. е. $N_L = 2{,}68 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ [см. (7.21$''$)]; эффективный диаметр d молекулы H_2 примем равным 0,27 нм [см. табл. 11], а ее среднюю скорость $\langle \upsilon \rangle$ при $T_0 = 273{,}15$ К, равной 1700,5 м/с [см. (7.34)]. Подставив значения n и d в формулу (7.48), получим

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2{,}68 \cdot 10^{25} \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}27 \cdot 10^{-9})^2} = 1{,}1526 \cdot 10^{-7} \text{м} \approx 115{,}3 \text{ нм}.$$

Из формулы (7.46) найдем среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой H_2 за 1 с:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle \lambda \rangle} = \frac{1700{,}5}{1{,}1526 \cdot 10^{-7}} = 14{,}75 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, при нормальных условиях число столкновений $\langle z \rangle$ составляет несколько десятков миллиардов в секунду].

7.8. Явления переноса

До сих пор мы рассматривали равновесные состояния физических систем (газа), подчиняющиеся уравнению состояния $f(p, V, T) = 0$ [см. (7.1)]. Такое состояние газа характеризуется тем, что параметры газа (объем, давление, температура) не изменяются.

Неравновесные процессы, в результате которых в физической системе (например, в газе) происходит пространственный перенос какой-либо физической величины (*энергии, массы, импульса*) за счет хаотического теплового движения, называются ***явлениями переноса***. К ним относятся ***теплопроводность*** (обусловлена переносом энергии в виде тепла), ***диффузия*** (обусловлена переносом массы) и ***внутреннее трение*** [или ***вязкость***] (обусловлено переносом импульса). Предположим, что некоторая физическая величина [при диффузии такой величиной является концентрация n молекул, в случае теплопроводности – температура T, а при внутреннем трении – импульс $\vec{p}$] является функцией только одной координаты, например x; систему отсчета выбираем так, чтобы ось x была ориентирована в направлении переноса.

1. Теплопроводность. С точки зрения молекулярно-кинетической теории процесс теплопроводности состоит в том, что при наличии градиента температуры $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ молекулы из более нагретых слоев, где их кинетическая энергия больше, проникают в более холодные слои и каждая из них переносит энергию в форме теплоты, т. е. отдает часть своей энергии окружающим молекулам.

Перенос энергии в форме теплоты подчиняется **закону теплопроводности Фурье** (1822 г.):

$$j_E = -\chi \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}, \tag{7.49}$$

где j_E – ***плотность теплового потока*** – величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x; χ – ***теплопроводность*** (*коэффициент теплопроводности*); $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ – градиент температуры, равный скорости изменения температуры на единицу длины x в направлении нормали $\vec{n}$ к этой площадке. Знак «–» показывает, что внутренняя энергия переносится в направлении убывания температуры. Единица теплопроводности χ – *ватт на метр-кельвин* [Вт/(м · К].

Согласно кинетической теории газов, коэффициент теплопроводности χ рассчитывается по формуле:

$$\chi = \frac{1}{3} c_V \rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle, \tag{7.50}$$

где c_V – ***удельная теплоемкость газа при постоянном объеме*** [количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг газа на 1 К при постоянном объеме (см. п. 8.4.)]; ρ – плотность газа; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость теплового движения его молекул; $\langle \lambda \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

В общем случае *трехмерной теплопроводности*, когда температура является функцией трех координат x, y, z, т. е. $T = T(x, y, z)$, ***закон Фурье*** имеет вид

$$\vec{j}_E = -\chi \operatorname{grad} T, \tag{7.50$'$}$$

где $\vec{j}_E$ – ***вектор плотности теплового потока***, модуль которого имеет указанный выше смысл, а направление совпадает с направлением переноса энергии.

2. Диффузия. Если в смеси газов существует градиент плотности $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x$, молекулярное движение приведет к проникновению молекул одного газа в другой. В этом процессе, получившем название *диффузии*, из мест с большей концентрацией молекулы переходят в места с меньшей концентрацией, т. е. происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов [жидкостей и твердых тел]; диффузия сводится к обмену масс частиц этих тел, возникает и продолжается, пока существует градиент плотности.

В химически однородном газе перенос вещества при диффузии подчиняется **закону диффузии Фика** (1855 г.):

$$j_{\mathrm{m}} = -D\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}, \qquad (7.51)$$

где j_{m} – ***плотность потока массы*** – величина, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x; D – ***диффузия*** (*коэффициент диффузии*); $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x$ – градиент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины x в направлении нормали $\vec{n}$ к этой площадке. Знак «–» показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности. Единица диффузии D – *метр в квадрате на секунду* [м^2/с].

Согласно кинетической теории газов,

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\,\langle\lambda\rangle, \qquad (7.52)$$

где $\langle v\rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул; $\langle\lambda\rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Коэффициент диффузии D газов растет с температурой пропорционально $\sqrt{T}$, а с ростом давления p коэффициент диффузии уменьшается.

В общем случае *трехмерной диффузии*, когда плотность ρ зависит от трех координат x, y, z, т. е. $\rho = \rho(x, y, z)$, ***закон Фика*** для *плотности потока молекул*

$$\vec{j}_n = -D\,\mathrm{grad}\,n, \qquad (7.52')$$

где $\vec{j}_n$ – ***вектор плотности потока молекул***, модуль которого имеет прежний смысл, а направление совпадает с направлением переноса вещества; $n = \rho/m_0$ – концентрация молекул; m_0 – масса молекулы.

3. Внутреннее трение (вязкость). Явление внутреннего трения (вязкости) связано с возникновением сил трения между слоями газа или жидкости, движущимися параллельно друг другу с различными по величине скоростями. Переходя из одного слоя в другой (вследствие хаотического теплового движения), молекулы переносят собой импульс упорядоченного движения. В результате возникает процесс переноса импульса из слоев, где скорость потока больше, в слои, где она меньше, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости) подчиняется **закону Ньютона** (1687 г.) [см. формулу (5.15)]:

$$F = \eta \left|\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}\right| S, \tag{7.53}$$

η – динамическая вязкость (вязкость) [*коэффициент внутреннего трения*]; $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}x$ – градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении x, перпендикулярном направлению движения слоев; S – площадь, на которую действует сила F. Единица вязкости η – *килограмм на метр-секунду* [кг/(м · с)] или [Па · с].

Взаимодействие двух слоев согласно второму закону Ньютона можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передается импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда выражение (7.53) можно представить в виде

$$j_p = -\eta \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}, \tag{7.54}$$

где j_p – ***плотность потока импульса*** – величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси x через единичную площадку, перпендикулярную оси x. Знак «–» показывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости.

В кинетической теории газов показано, что динамическую вязкость (вязкость) η можно вычислить по формуле:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle, \tag{7.55}$$

где ρ – плотность газа; $\langle\upsilon\rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул; $\langle\lambda\rangle$ – средняя длина пробега молекул.

Как и коэффициент теплопроводности χ, коэффициент внутреннего трения η не зависит от плотности ρ и давления p газа. Это связано с тем, что с повышением давления p увеличивается число молекул, участвующих в переносе импульса, но одновременно уменьшается средняя длина свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ [этот вывод остается верным до тех пор, пока длина свободного пробега мала с размерами сосуда].

Между коэффициентами переноса χ, D и η существует простая связь, вытекающая из сопоставления формул (7.50), (7.52) и (7.55):

$$\eta = \rho D, \tag{7.56}$$

$$\frac{\chi}{\eta c_V} = 1, \tag{7.57}$$

где ρ – плотность газа; c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Приведенный анализ явлений переноса относится только к простейшему агрегатному состоянию вещества – газообразному, где молекулы в виде упругих сферических частиц с определенным эффективным сечением σ взаимодействуют друг с другом в момент столкновения. Строгую теорию явлений переноса, применительно к любому агрегатному состоянию, дает термодинамика неравновесных процессов.

Примеры решения задач

7.1. Найдите число молекул водорода в 1 м^3, если давление равно 10^5 Па, а средняя квадратичная скорость молекул равна 2100 м/с. Молярная масса водорода 2 кг/кмоль; постоянная Авогадро $N_А = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Дано: $V = 1$ м^3; $p = 10^5$ Па; $\langle v_{кв} \rangle = 2{,}1 \cdot 10^3$ м/с; $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $N_А = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Найти: n.

Решение. Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории идеальных газов,

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{кв} \rangle^2,$$

где n – концентрация молекул; m_0 – масса одной молекулы; $\langle v_{кв} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул.

Масса молекулы

$$m_0 = \frac{M}{N_А},$$

где M – молярная масса; $N_А$ – постоянная Авогадро.

Учитывая выражение для массы молекулы, получаем искомое число молекул в 1 м^3 (концентрацию):

$$n = \frac{3pN_А}{M\langle\upsilon_{кв}\rangle^2}.$$

Ответ: $n = 2{,}05 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

7.2. В баллоне объемом 0,2 м^3 находится смесь 0,2 кг гелия и 0,4 кг азота при температуре 17 °C. Считая газы идеальными, найдите давление, молярную массу, удельный объем и плотность смеси газов. Молярные массы гелия и азота соответственно равны 4 кг/кмоль и 28 кг/кмоль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Дано: $V =$ 0,2 м^3; $m_1 = 0{,}2$ кг; $m_2 = 0{,}4$ кг; $t =$ 17 °C ($T =$ 290 К); $M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Найти: p; M; $\upsilon_{см}$; ρ.

Решение. Согласно закону Дальтона, давление p смеси газов равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2.$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона имеем:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT \text{ и } p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT.$$

Выразив отсюда p_1 и p_2 и подставив в формулу закона Дальтона, получим искомое давление смеси газов:

$$p = \frac{m_1 RT}{M_1 V} + \frac{m_2 RT}{M_2 V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}.$$

Молярная масса смеси

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}},$$

где $\nu_1 = m_1/M_1$ – количество молей гелия; $\nu_2 = m_2/M_2$ – количество молей азота.

Удельный объем смеси газов

$$\upsilon_{см} = \frac{V}{m_1 + m_2} = \frac{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT}{(m_1 + m_2)p}.$$

Плотность газовой смеси

$$\rho = 1/\upsilon_{см}.$$

Ответ: $p = 7{,}75 \cdot 10^5$ Па; $M = 9{,}33 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $v_{\text{см}} = 0{,}33$ м^3/кг; $\rho = 3{,}03$ кг/м^3.

7.3. Найдите среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул, содержащихся в 1 моль и в 1 кг аргона при температуре 7 $°C$. Молярная масса аргона 40 кг/кмоль; молярная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).
Дано: $\nu = 1$ моль; $m = 1$ кг; $M = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 280$ К.
Найти: $\langle E_1 \rangle$; $\langle E_2 \rangle$.
Решение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

По определению 1 моль различных веществ содержит одно и то же число молекул, называемое постоянной Авогадро ($N_\text{А} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$), тогда средняя кинетическая энергия содержащихся в 1 моль молекул

$$\langle E_1 \rangle = N_\text{А} \langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kTN_\text{А} = \frac{3}{2} RT,$$

где $R = kN_\text{А}$ – молярная газовая постоянная.

Средняя кинетическая энергия молекул идеального газа в произвольной массе m газа

$$\langle E_2 \rangle = \nu \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT,$$

где ν – количество вещества; M – молярная масса.

Ответ: $\langle E_1 \rangle = 3490{,}2$ Дж; $\langle E_2 \rangle = 87255$ Дж.

7.4. Найдите среднюю арифметическую, среднюю квадратичную и наиболее вероятную скорости молекул идеального газа, плотность которого при давлении 42 кПа равна 0,4 кг/м^3.
Дано: $p = 42$ кПа $= 4{,}2 \cdot 10^4$ Па; $\rho = 0{,}4$ кг/м^3.
Найти: $\langle v \rangle$; $\langle v_\text{кв} \rangle$; $v_\text{в}$.
Решение. Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории идеальных газов,

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_\text{кв} \rangle^2,$$

где n – концентрация молекул; m_0 – масса одной молекулы; $\langle v_\text{кв} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул.

Учитывая, что $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$, $v_\text{в} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$, $\langle v_\text{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$,

получаем

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\,\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle \text{ и } \upsilon_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle.$$

По определению, плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Nm_0}{V} = nm_0,$$

где $m = Nm_0$ – масса газа; V – его объем; N – число молекул газа.

Тогда

$$p = \frac{1}{3}nm_0\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{1}{3}\rho\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2,$$

откуда

$$\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}; \quad \langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8p}{\pi\rho}}; \quad \upsilon_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}.$$

Ответ: $\langle \upsilon \rangle = 517{,}22$ м/с; $\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = 561{,}25$ м/с; $\upsilon_{\text{в}} = 458{,}26$ м/с.

7.5. Баллон емкостью 3 л содержит гелий при температуре 17 $°C$ и давлении 1,3 атм. Найдите число молекул в баллоне, среднее число столкновений молекулы за 1 с, число столкновений между всеми молекулами за 1 с, среднюю длину свободного пробега молекул. Молярная масса гелия 4 г/моль, эффективный диаметр молекул принять равным $1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м.

Дано: $V = 3$ л $= 3 \cdot 10^{-3}$ м^3; $t = 17$ $°C$ ($T = 290$ К); $p = 1{,}3$ атм $= 1{,}317 \cdot 10^5$ Па; $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $d = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Найти: N; $\langle z \rangle$; z; $\langle \lambda \rangle$.

Решение. Среднее число $\langle z \rangle$ столкновений молекулы в 1 с определяется отношением средней арифметической скорости $\langle \upsilon \rangle$ молекулы к средней длине ее свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ (при $p = \text{const}$):

$$\langle z \rangle = \frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle \lambda \rangle},$$

где средняя арифметическая скорость определяется по формуле:

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}},$$

где M – молярная масса газа; R – молярная газовая постоянная; k – постоянная Больцмана; m_0 – масса одной молекулы.

Число z столкновений между всеми молекулами за 1 с (при $p = \text{const}$)

$$z = \frac{1}{2}N\langle z \rangle,$$

где N – число молекул в баллоне.

Средняя длина свободного пробега молекул газа $\langle\lambda\rangle$ определяется формулой:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул (число молекул в единице объема).

Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона,

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где $m = Nm_0$ – масса газа; $M = m_0 N_\text{А}$ – молярная масса вещества; $N_\text{А}$ – постоянная Авогадро.

Подставив эти формулы в уравнение Менделеева – Клапейрона, найдем число молекул в баллоне:

$$pV = \frac{Nm_0}{m_0 N_A}RT = \frac{N}{N_\text{А}}RT, \text{откуда } N = \frac{pVN_\text{А}}{RT}.$$

Концентрация молекул

$$n = \frac{N}{V} = \frac{pVN_\text{А}}{VRT} = \frac{p}{kT},$$

где $k = R/N_\text{А} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Среднее число $\langle z\rangle$ столкновений молекулы за 1 с:

$$\langle z\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle\lambda\rangle} = \sqrt{2}\,\pi d^2 \frac{p}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

число z столкновений между всеми молекулами за 1 с:

$$z = \frac{1}{2}N\langle z\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{pVN_A}{RT}\frac{\pi d^2 p}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 p^2 V}{2k^2T^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

средняя длина свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Ответ: $N = 9{,}87 \cdot 10^{22}$; $\langle z\rangle = 6{,}54 \cdot 10^9$ с$^{-1}$; $z = 3{,}23 \cdot 10^{32}$ с$^{-1}$; $\langle\lambda\rangle = 1{,}90 \cdot 10^{-7}$ м.

7.6. Найдите давление воздуха на высоте 3 км над поверхностью Земли и в шахте на глубине 3 км, считая, что температура и молярная масса воздуха не зависят от высоты [на поверхности Земли воздух находится при нормальных условиях: $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $t_0 = 0$ °C]. Молярная масса воздуха 29 кг/кмоль; универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Дано: $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па; $T = 273$ К; $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К); $h_1 = 3$ км $= 3 \cdot 10^3$ м; $h_2 = -3$ км $= -3 \cdot 10^3$ м.

Найти: p_1; p_2.

Решение. Давление воздуха, согласно барометрической формуле,

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}},$$

где p и p_0 – давление газа (воздуха) на высоте h и h_0 соответственно; M – молярная масса; g – ускорение свободного падения; R – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура.

Следовательно, для состояний (высот) h_1 и h_2:

$$p_1 = p_0 e^{-\frac{Mgh_1}{RT}} \text{ и } p_2 = p_0 e^{-\frac{Mgh_2}{RT}}.$$

Подставив числовые значения, получаем:

$$p_1 = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot e^{-\frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot 3 \cdot 10^3}{8{,}31 \cdot 273}} = 0{,}696 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$p_2 = 1{,}013 \cdot 10^5 e^{-\frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 (-3 \cdot 10^3)}{8{,}31 \cdot 273}} = 1{,}476 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Ответ: $p_1 = 0{,}696 \cdot 10^5$ Па; $p_2 = 1{,}476 \cdot 10^5$ Па.

7.7. Найдите, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости инертных газов гелия η_1 и аргона η_2, если температура газов одинакова. Эффективные диаметры молекул гелия и аргона соответственно равны 0,19 нм и 0,35 нм.

Дано: $T_1 = T_2 = T$; $d_1 = 0{,}19$ нм $= 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м; $d_2 = 0{,}35$ нм $= 3{,}5 \cdot 10^{-10}$ м; $M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_2 = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: η_1/η_2.

Решение. Коэффициент динамической вязкости газа:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle,$$

где средняя арифметическая скорость молекул

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$$

[учли $p = nkT$, где p – давление газа; n – концентрация молекул],
и плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$$

[учли уравнение Менделеева – Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$].

Подставляя полученные выражения в формулу для вязкости газа и учитывая условие задачи ($T_1 = T_2 = T$), найдем искомое отношение коэффициентов динамической вязкости:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}.$$

Ответ: $\eta_1/\eta_2 = 1{,}07$.

7.8. Найдите коэффициент внутреннего трения и коэффициент диффузии неона, находящегося при температуре 320 К и давлении $2 \cdot 10^5$ Па. Молярная масса неона $20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, эффективный диаметр молекул неона $2{,}4 \cdot 10^{-10}$ м.

Дано: $M = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 320$ К; $p = 2 \cdot 10^5$ Па; $d = 2{,}4 \cdot 10^{-10}$ м; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Найти: η; D.

Решение. Коэффициент динамической вязкости (внутреннее трение) газа:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle\lambda\rangle,$$

где плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$$

(учли $pV = \frac{m}{V}RT$);

средняя арифметическая скорость

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

и средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

(давление p газа и концентрация n молекул связаны формулой $p = nkT$).

Подставляя полученные выражения в формулу для вязкости газа, найдем искомый коэффициентов динамической вязкости:

$$\eta = \frac{2}{3}\frac{k}{\pi d^2}\sqrt{\frac{MT}{\pi R}}.$$

Коэффициент диффузии газа

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle\lambda\rangle.$$

Из формул коэффициента динамической вязкости η и коэффициента диффузии D следует, что коэффициент вязкости:

$$\eta = \rho D,$$

откуда искомый коэффициент диффузии:

$$D = \frac{\eta}{\rho} = \frac{RT}{pM}\frac{2}{3}\frac{k}{\pi d^2}\sqrt{\frac{MT}{\pi R}} = \frac{2kT}{3\pi d^2 p}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}.$$

Ответ: $\eta = 2{,}52\cdot10^{-5}$ кг/(м · с); $D = 1{,}68\cdot10^{-5}$ м²/с.

7.9. Найдите коэффициент теплопроводности водорода, если его коэффициент вязкости при одинаковых условиях равен 8,4 мкПа · с. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Дано: $\eta = 8{,}4\cdot10^{-6}$ кг/(м · с); $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К); $M = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль; $i = 5$.

Найти: χ.

Решение. Коэффициент теплопроводности газа определяется по формуле:

$$\chi = \frac{1}{3}c_V\rho\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle,$$

где $c_V = iR/2M$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; i – число степеней свободы молекулы; R – молярная газовая постоянная; ρ – плотность газа; $\langle\upsilon\rangle$ – средняя арифметическая скорость теплового движения его молекул; $\langle\lambda\rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул; M – молярная масса.

Коэффициент динамической вязкости

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle.$$

Коэффициент теплопроводности:

$$\chi = \eta c_V = \eta\frac{iR}{2M}.$$

Ответ: $\chi = 87{,}26$ мВт/(м · К).

7.10. Найдите коэффициент теплопроводности аргона, находящегося в баллоне, при температуре 17 °C. Аргон считать идеальным газом, эффективный диаметр молекулы $3{,}5\cdot10^{-10}$ м. Молярная масса аргона $M = 40\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Дано: $T = 290$ К; $d = 3{,}5\cdot10^{-10}$ м; $M = 40\cdot10^{-3}$ кг/моль; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К); $N_A = 6{,}022\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$; $i = 3$.

Найти: χ.

Решение. Коэффициент теплопроводности

$$\chi = \frac{1}{3}c_V\rho\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle,$$

где удельная теплоемкость газа при постоянном объеме

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}$$

[i – число степеней свободы молекулы (для аргона $i = 3$)]; плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$$

(учли $pV = \frac{m}{M}RT$); средняя арифметическая скорость молекул

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

и средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу для теплопроводности газа, найдем искомый коэффициент теплопроводности аргона:

$$\chi = \frac{2}{3}\frac{kc_V}{\pi d^2}\sqrt{\frac{MT}{\pi R}} = \frac{i}{3}\frac{R}{\pi d^2 N_\text{A}}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}$$

(учли $k = R/N_\text{A}$ – постоянная Больцмана).

Ответ: $\chi = 4{,}97$ мВт/(м · К).

Задачи

54. Найдите концентрацию молекул гелия, если давление газа $3 \cdot 10^5$ Па, а средняя квадратичная скорость молекул равна 2200 м/с. Молярная масса гелия 4 кг/кмоль; число Авогадро $N_\text{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Ответ: $2{,}8 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$

55. В сосуде объемом 10 л находится кислород, концентрация молекул которого равна $18{,}42 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$. Найдите массу газа. Молярная масса кислорода $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; число Авогадро $N_\text{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Ответ: 0,98 г

56. В сосуде объемом 200 см^3 содержится некоторый газ при температуре 17 °C. Найдите, на сколько понизится давление, если вследствие утечки из сосуда выйдет $4 \cdot 10^{20}$ молекул. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Ответ: 8 кПа

57. Найдите среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул, содержащихся в 1 моль и в 1 кг гелия при температуре 17 °C. Молярная масса гелия 4 кг/кмоль; газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Ответ: 3614,85 Дж; 903,71 кДж

58. Найдите среднюю квадратичную и наиболее вероятную скорости молекул идеального газа, если их средняя арифметическая скорость 480 м/с.

Ответ: 520,86 м/с; 425,28 м/с

59. Найдите число молекул водорода в сосуде объемом 200 см^3, если при средней квадратичной скорости 1200 м/с, они производят давление на стенки сосуда 30 кПа. Число Авогадро N_A = 6,022·10^{23} моль$^{-1}$; молярная масса водорода 2·10^{-3} кг/моль. Ответ: 3,76·10^{21}

60. Найдите плотность воздуха на высоте 4000 м. Температуру принять равной 0 °C, давление у поверхности земли p_0 = 1,013·10^5 Па. Воздух считать идеальным газом с молярной массой 29 г/моль, ускорение силы тяжести не зависящим от высоты (g = 9,81 м/с^2). Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К). Ответ: 0,785 кг/м^3

61. Найдите давление воздуха на высоте 7 км над поверхностью Земли и в шахте на глубине 7 км, считая, что температура и молярная масса воздуха не зависят от высоты (на поверхности Земли воздух находится при нормальных условиях: p_0 = 1,013·10^5 Па, t_0 = 0 °C). Молярная масса воздуха 29 кг/кмоль; универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К).

Ответ: 0,42·10^5 Па; 2,44·10^5 Па

62. При температуре 20 °C, длина свободного пробега молекул водорода 1,8 см. Найдите давление этого газа. Эффективный диаметр молекул водорода принять равным d = 2,7·10^{-10} м. Число Авогадро N_A = 6,022·10^{23} моль$^{-1}$.

Ответ: 0,694 Па

63. В изобарном процессе абсолютная температура идеального газа увеличилась на 44 %. Найдите, во сколько раз при этом увеличился коэффициент вязкости газа. Ответ: 1,2

64. В изотермическом процессе коэффициент диффузии идеального газа увеличился в 1,6 раза. Найдите, на сколько процентов при этом уменьшилось давление газа. Ответ: 37,5 %

65. Кислород при некоторых условиях имеет коэффициент вязкости 1,4·10^{-5} кг/(м · с). Найдите коэффициент теплопроводности кислорода в этих условиях. Молекулы кислорода считать жесткими. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К). Ответ: 2,91·10^{-4} Вт/(м · К)

Лекция 8. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Термодинамика – такая наука, которая устанавливает, какими должны быть законы природы, чтобы вечный двигатель оказался невозможен.

А. Эйнштейн

Термодинамика изучает общие свойства веществ на основе законов различных превращений энергии. Фундаментальные законы энергетических превращений (*начала термодинамики*) установлены опытным путем без какого-либо учета внутренней структуры исследуемых веществ и характера движения отдельных частиц.

8.1. Внутренняя энергия термодинамической системы. Число степеней свободы. Закон равнораспределения энергии по степеням свободы

Внутренней энергией U тела (*термодинамической системы*) называется энергия этого тела за вычетом кинетической энергии тела как целого и потенциальной энергии тела во внешнем поле сил. Следовательно, в понятие внутренней энергии включаются кинетическая энергия хаотического движения молекул, потенциальная энергия взаимодействия между молекулами и внутримолекулярная энергия, т. е. энергия электронных оболочек атомов и внутриядерная энергия.

Внутренняя энергия U является *функцией* термодинамического состояния системы. Это означает, что в каждом состоянии система обладает вполне определенной энергией и приращение внутренней энергии ΔU при переходе системы из одного состояния в другое всегда равно разности значений внутренней энергии в конечном U_2 и начальном U_1 состояниях и не зависит от процесса, которым осуществляется переход.

Числом степеней свободы i механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы в пространстве. Экспериментально установлено, что при определении числа степеней свободы молекул, атомы нужно рассматривать как материальные точки. У *одноатомной молекулы* есть только три степени свободы (рис. 43, *а*), соответствующие поступательному движению: $i = i_{\text{п}} = 3$. У *жесткой двухатомной молекулы*, кроме поступательных, есть еще две вращательные степени свободы (рис. 43, *б*) [полярные углы, задающие ее направление в пространстве]: $i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} = 5$. У *жесткой многоатомной (нелинейной) молекулы* (рис. 43, *в*) – три поступательные и три вращательные степени свободы, поэтому $i = i_{\text{п}} +$ $+ i_{\text{вр}} = 6$.

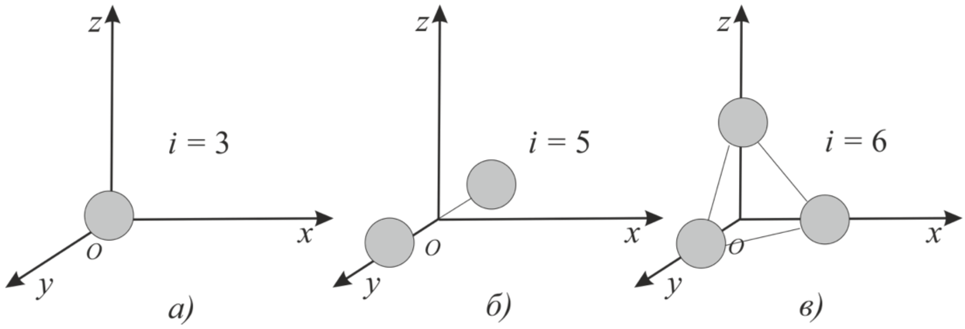

Рис. 43 *а, б, в*

Независимо от общего числа степеней свободы молекул три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимущества перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная $1/3$ значения $\langle\varepsilon_0\rangle$ в (7.28):

$$\langle\varepsilon_0\rangle = \frac{\langle\varepsilon_0\rangle}{3} = \frac{1}{2}kT.$$

В классической статистической физике доказывается ***теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы*** [*закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул*]: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $kT/2$, а на каждую колебательную степень свободы – в среднем энергия, равная kT [колебательная степень «обладает» вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая энергия (как в случае поступательного и вращательного движений), но и потенциальная, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы]. Таким образом, *средняя энергия молекулы*

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT,$$

где i – сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$$

[обозначает математическое число колебательных степеней свободы].

Внутренняя энергия, отнесенная к 1 моль идеального газа, будет равна сумме кинетических энергий N_{A} молекул:

$$U_m = \frac{i}{2}kTN_{\text{A}} = \frac{i}{2}RT \qquad (8.1)$$

[учли, что в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (молекулы между собой не взаимодействуют)].

Внутренняя энергия для произвольной массы m газа

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \nu\frac{i}{2}RT, \qquad (8.2)$$

где M – молярная масса; $\nu = m/M$ – количество вещества.

Из (8.2) следует, что внутренняя энергия идеального газа не зависит от давления и объема, а определяется природой газа и его температурой. Следовательно, изменение внутренней энергии идеального газа

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1). \qquad (8.3)$$

8.2. Работа газа при изменении его объема

Рассмотрим газ, находящийся в цилиндрическом сосуде, закрытом плотно пригнанным невесомым поршнем (рис. 44). Допустим, что газ начал медленно расширяться и переместил поршень на бесконечно малое расстояние $\mathrm{d}l$.

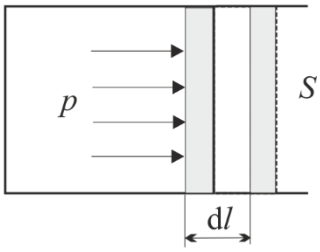

Рис. 44

Элементарная работа δA, совершаемая газом против внешних сил, равна

$$\delta A = F\mathrm{d}l = pS\mathrm{d}l = p\mathrm{d}V,$$

где F – сила, с которой газ давит на поршень; S – площадь поршня; $\mathrm{d}V$ – изменение объема цилиндра (системы). [Так как работа не является функцией состояния, то бесконечная малая работа (*элементарная работа*) обозначена δA, чтобы отличить ее от бесконечно малого изменения функции (дифференциала)].

Таким образом,

$$\delta A = p\mathrm{d}V. \tag{8.4}$$

Полную работу A, совершаемую газом при изменении его объема от V_1 до V_2, найдем интегрированием формулы (8.4):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V. \tag{8.5}$$

Обратимый процесс изменения объема тела (газа) можно изобразить на диаграмме p, V (рис. 45). Элементарной работе $\delta A = p\mathrm{d}V$ соответствует площадь узкой заштрихованной полоски.

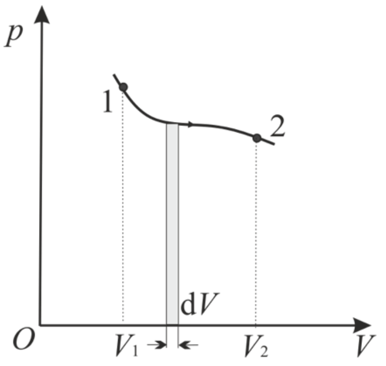

Рис. 45

Полная работа A, совершаемая газом при изменении его объема от значения V_1 до значения V_2, будет численно равна площади фигуры, ограниченной осью V, кривой $p = f(V)$ и прямыми V_1 и V_2.

8.3. Первое начало термодинамики

В отличие от механической энергии, которая может изменятся только за счет работы, внутренняя энергия U может изменятся как за счет совершения над телом работы A' [например, при движении поршня внутрь цилиндра газ, находящийся в нем, сжимается, в результате чего его температура повышается, т. е. тем самым изменяется (увеличивается) внутренняя энергия газа], так и при контакте с телами, имеющими другую температуру, т. е. в процессе теплообмена [например, за счет сообщения телу некоторого количества теплоты Q – энергии]. Энергия, переданная при теплообмене (подведении тепла), называется *количеством теплоты* или *теплотой* и обозначается Q. Теплота считается положительной ($Q > 0$), если система получает энергию, отрицательной ($Q < 0$), если отдает; работа – положительной ($A > 0$), когда система (тело) совершает ее против внешних сил, отрицательной ($A < 0$), если внешние тела (силы) совершают ее над данной системой (телом). Очевидно, что для одного и того же процесса $A = -A'$ (это вытекает из третьего закона Ньютона) и $Q = -Q'$ [A – работа, совершаемая данным телом над внешними телами; A' – работа, совершаемая внешними телами над данным телом; Q – количеством теплоты, переданное данному телу внешней средой; Q' – количеством теплоты, переданное данным телом внешней среде].

В соответствии с законом сохранения энергии при любом способе перехода системы из первого состояния во второе изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ будет одинаковым и равным разности между количеством теплоты Q, полученным системой, и работой A, совершенной системой против внешних сил:

$$\Delta U = Q - A,$$

или

$$Q = \Delta U + A. \tag{8.6}$$

Уравнение (8.6) выражает **первое начало термодинамики**: *количество теплоты, сообщенное системе, идет на изменение ее внутренней энергии и совершение системой работы над внешними телами*.

Выражение (8.6) для элементарного процесса можно записать в виде

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A, \tag{8.7}$$

где $\mathrm{d}Q$ – бесконечно малое количество теплоты; $\mathrm{d}U$ – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы; $\mathrm{d}A$ – элементарная работа.

[Здесь следует отметить, что только внутренняя энергия системы является однозначной функцией состояния. Работа и количество теплоты зависят от пути перехода системы из начального состояния в конечное, а не только от начального и конечного состояний системы. В зависимости от пути перехода системы из одного состояния в другое величину $\mathrm{d}U$ можно разбить на количество теплоты $\mathrm{d}Q$ и работу $\mathrm{d}A$ разными способами. Соответственно величины $\mathrm{d}Q$ и $\mathrm{d}A$ не являются полными дифференциалами, по которым может производиться интегрирование]. Подчеркивая это обстоятельство, для бесконечно малого количество теплоты δQ и элементарной работы δA, выражение (8.7) *для незначительного изменения состояния системы* записывается в виде

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A, \tag{8.8}$$

где $\mathrm{d}U$ – бесконечно малое изменение внутренней энергии.

Из формулы (8.6) следует, что в СИ количество теплоты Q выражается в тех же единицах, что работа A и энергия U, т. е. Q[Дж] – в джоулях.

Первое начало термодинамики – это **закон сохранения и превращения энергии**: *при разнообразных процессах, протекающих в природе, энергия не возникает из ничего и не исчезает, но превращается лишь из одних видов в другие*.

Первое начало термодинамики можно также формулировать следующим образом: *невозможен вечный двигатель первого рода, т. е. такой периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем полученная им извне энергия*.

8.4. Теплоемкость. Уравнение Майера

Одним из основных тепловых свойств тел, используемых в термодинамическом методе является теплоемкость. ***Теплоемкостью*** называется физическая величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы нагреть его на 1 К:

$$C = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}, \tag{8.9}$$

где δQ – количество теплоты, сообщение которого повышает температуру тела на $\mathrm{d}T$.

Теплоемкость тела зависит от его химического состава, массы тела и его термодинамического состояния, а также от вида процесса изменения состояния тела, в котором поступает количество теплоты δQ. Единица теплоемкости C – *джоуль на кельвин* [Дж/К].

Теплоемкость, отнесенную к единице массы вещества, называется ***удельной теплоемкостью*** – это величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m\mathrm{d}T}. \tag{8.10}$$

Единица удельной теплоемкости c – *джоуль на килограмм-кельвин* [Дж/(кг · К)].

Теплоемкость, отнесенную к один моль вещества, называется ***молярной теплоемкостью*** – это величина равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моль вещества на 1 К:

$$C_m = \frac{\delta Q}{\nu \mathrm{d}T}, \tag{8.11}$$

где $\nu = m/M$ – количество вещества. Единица молярной теплоемкости C_m – *джоуль на моль-кельвин* [Дж/(моль · К)].

Удельная c и молярная C_m теплоемкости связаны соотношением

$$c = \frac{C_m}{M}, \tag{8.12}$$

где M – молярная масса вещества.

Теплоемкость зависит от условий, при которых происходит нагревание тела. Различают теплоемкости при *постоянном объеме* C_V и *постоянном давлении* C_p, если в процессе нагревания вещества его объем V или давление p поддерживается постоянным.

Если нагревание производится при постоянном объеме ($V = \mathrm{const}$), то тело не совершает работы над внешними телами ($\mathrm{d}A = 0$) и, следовательно, согласно (8.7), вся теплота идет на приращение внутренней энергии тела:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U. \tag{8.13}$$

Отсюда следует, что *теплоемкость любого тела при постоянном объеме* равна

$$C_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} \tag{8.14}$$

[учли (8.9)].

Следовательно, *молярная теплоемкость газа, отнесенная к* 1 *моль* газа при постоянном объеме ($V = \mathrm{const}$):

$$C_V = \frac{\mathrm{d}U_\mathrm{m}}{\mathrm{d}T}, \tag{8.15}$$

т. е. равна изменению внутренней энергии 1 моль газа при повышении его температуры на 1 К.

Согласно формуле (8.1) для 1 моль газа,

$$\mathrm{d}U_m = \frac{i}{2} R\mathrm{d}T,$$

тогда *молярная теплоемкость газа при постоянном объеме*

$$C_V = \frac{i}{2} R, \tag{8.16}$$

где i – число степеней свободы.

Согласно первому началу термодинамики (8.7) $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A$, отнесенному к 1 моль газа с учетом (8.1) и (8.11):

$$C_\mathrm{m}\mathrm{d}T = \mathrm{d}U_\mathrm{m} + p\mathrm{d}V_\mathrm{m}, \tag{8.17}$$

где $p\mathrm{d}V_\mathrm{m} = \mathrm{d}A$.

Если газ нагревается при постоянном давлении ($p = \mathrm{const}$), то выражение (8.17) можно записать в виде

$$C_p = \frac{\mathrm{d}U_\mathrm{m}}{\mathrm{d}T} + \frac{p\mathrm{d}V_\mathrm{m}}{\mathrm{d}T}. \tag{8.18}$$

Учитывая формулу (8.15) и дифференцируя уравнение состояния идеального газа [см. (7.19): $pV_m = RT$] по T для $p = \mathrm{const}$ $p\mathrm{d}V_\mathrm{m} = R\mathrm{d}T$, выражение (8.18) запишется в виде

$$C_p = C_V + R. \tag{8.19}$$

Выражение (8.19) называется ***уравнением Майера*** [в этом уравнении C_p и C_V – молярные теплоемкости; уравнение (8.19) справедливо только для идеального газа]. Уравнение Майера показывает, что C_p всегда больше C_V на величину молярной газовой постоянной R. [Это объясняется тем, что при нагревании газа при постоянном давлении ($p = \mathrm{const}$) требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы по расширению газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа].

Для удельных теплоемкостей c_p и c_V уравнение Майера (8.19) имеет вид

$$c_p = c_V + \frac{R}{M}, \tag{8.20}$$

где M – молярная масса газа.

Использовав (8.16), выражения (8.19) можно записать в виде

$$C_p = \frac{i+2}{2}R \tag{8.21}$$

[C_p – молярная теплоемкость при постоянном давлении].

Из выражения (8.19) следует, что работа, которую совершает 1 моль идеального газа при повышении его температуры на 1 К при постоянном давлении ($p = \mathrm{const}$), оказывается равной универсальной газовой постоянной R.

При рассмотрении термодинамических процессов важно знать характерное для каждого газа отношение C_p к C_V:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i\ +\ 2}{i}, \tag{8.22}$$

где i – число степеней свободы. В дальнейшем мы установим, что значение γ определяется числом и характером степеней свободы молекулы [γ – ***показатель адиабаты***, или ***коэффициент Пуассона***; см. п. 8.6].

8.5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Изохорный процесс ($V = \mathrm{const}$). В изохорном процессе газ не совершает работу над внешними телами, поскольку $\mathrm{d}V = 0$, и согласно (8.4)

$$\delta A = p\mathrm{d}V = 0.$$

Первое начало термодинамики (8.7) для изохорного процесса приобретает вид

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U,$$

т. е. вся теплота, сообщаемая газу, идет на изменение его внутренней энергии.

Согласно формуле (8.15),

$$\mathrm{d}U_\mathrm{m} = C_V \mathrm{d}T.$$

Тогда для произвольной массы газа получим

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U = \frac{m}{M} C_V \mathrm{d}T. \qquad (8.23)$$

Изобарный процесс ($p = \mathrm{const}$). Изобара в координатах p, V изображается прямой, параллельной оси V. При изобарном процессе работа газа [см. (8.5)] при увеличении объема от V_1 до V_2 равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = p(V_2 - V_1) \qquad (8.24)$$

и определяется площадью тонированного прямоугольника (рис. 46).

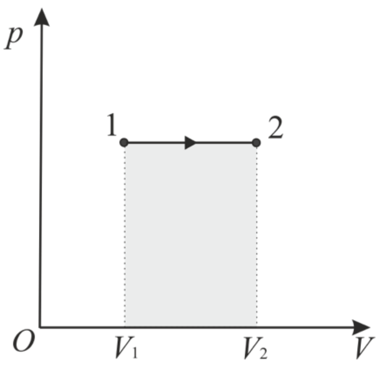

Рис. 46

Из уравнения Менделеева – Клапейрона (7.20) для состояний *1* и *2*

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1, \;\; pV_2 = \frac{m}{M} RT_2.$$

Подставив эти формулы в (8.24), получим, что работа изобарного расширения

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \qquad (8.25)$$

В изобарном процессе при сообщении газу массой m количества теплоты

$$\mathrm{d}Q = \frac{m}{M} C_p \mathrm{d}T \tag{8.26}$$

его внутренняя энергия возрастает на величину [согласно (8.15)]

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M} C_V \mathrm{d}T. \tag{8.27}$$

При этом газ совершает работу, определяемую формулой (8.25). [Из выражения (8.25) вытекает физический смысл молярной газовой постоянной R: если $T_2 - T_1 = 1$ К, то для 1 моль газа $R = A$, т. е. R численно равна работе изобарного расширения 1 моль идеального газа при нагревании его на 1 К. В случае изобарного сжатия работа $A < 0$, т. е. не газ совершает работу, а, наоборот, внешние силы совершают положительную работу A' по сжатию газа, т. е. $A' = -A$].

Изотермический процесс ($T = \text{const}$). Рассмотрим изотермическое расширение идеального газа [подчиняется закону Бойля – Мариотта (7.9) $p_1 V_1 = p_2 V_2$]. При $T = \text{const}$ внутренняя энергия идеального газа не изменяется, т. е.

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M} C_V \mathrm{d}T = 0.$$

Изотерма в координатах p, V задается гиперболой (рис. 47). Работа изотермического расширения газа с учетом (8.2) и (7.20)

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} R \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2} \tag{8.28}$$

и определяется площадью тонированной фигуры на рис. 47.

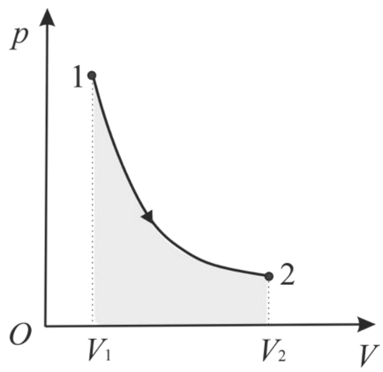

Рис. 47

Из первого начала термодинамики (8.7) следует, что в случае изотермического процесса все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}A. \tag{8.29}$$

Тогда согласно (8.29) и (8.28)

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln\frac{p_1}{p_2}. \tag{8.30}$$

Следовательно, для того чтобы при расширении газа температура не понижалась, к газу в течение изотермического процесса необходимо подводить количество теплоты, эквивалентное внешней работе расширения.

Теплоемкость газа в изотермическом процессе $C_T = \pm\infty$, так как $\mathrm{d}Q \neq 0$, а $\mathrm{d}T = 0$.

8.6. Адиабатический процесс

Термодинамический процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой ($\mathrm{d}Q = 0$), называется ***адиабатическим*** (или ***адиабатным***). Практически адиабатный процесс осуществляется при достаточно быстром расширении или сжатии газа, чтобы не успел произойти теплообмен между газом и окружающей средой (как это происходит, например, при расширении газа в двигателях внутреннего сгорания). Из определения адиабатического процесса и первого начала термодинамики (8.7) следует, что при таком процессе

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}U, \tag{8.31}$$

т. е. работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы.

Уравнение (8.31) с учетом (8.4) и (8.2) запишем в виде

$$p\mathrm{d}V = -\frac{m}{M} C_V \mathrm{d}T. \tag{8.32}$$

Продифференцировав уравнение Клапейрона – Менделеева [см. (7.20)], получим

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = \frac{m}{M} R\mathrm{d}T. \qquad (8.33)$$

Исключив из (8.32) и (8.33) температуру T, найдем

$$\frac{p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p}{p\mathrm{d}V} = -\frac{R}{C_V} = -\frac{C_p - C_V}{C_V}$$

[учли уравнение Майера (8.19)]. Разделив переменные и учитывая, что $\gamma = C_p/C_V$ [см. (8.22)], найдем

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\gamma \frac{\mathrm{d}V}{V}. \qquad (8.34)$$

Интегрируя это уравнение в пределах от p_1 до p_2 и соответственно от V_1 до V_2, а затем потенцируя, придем к выражению

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \quad \text{или} \quad p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}.$$

Так как состояния *1* и *2* выбраны произвольно, можно записать

$$pV^{\gamma} = \mathrm{const}. \qquad (8.35)$$

Полученное выражение (8.35) – ***уравнение адиабаты*** в переменных p и V, называемое также ***уравнением Пуассона***.

При переходе к переменным T, V или p, T необходимо из формулы (8.35) исключить с помощью уравнения состояния (7.20) соответственно p или V. Тогда

$$TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}, \qquad (8.36)$$

$$T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \mathrm{const}. \qquad (8.37)$$

Выражения (8.35) – (8.37) представляют собой ***уравнения адиабатического процесса***. В этих уравнениях безразмерная величина [см. (8.22)]

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{i + 2}{i}, \qquad (8.38)$$

называется ***показателем адиабаты*** (или ***коэффициентом Пуассона***); i – число степеней свободы.

Из уравнения (8.36) вытекает, что при адиабатическом расширении ($\mathrm{d}V > 0$) идеальный газ охлаждается ($\mathrm{d}T < 0$), а при сжатии ($\mathrm{d}V < 0$) нагревается ($\mathrm{d}T > 0$).

График зависимости между параметрами состояния идеального газа при $\mathrm{d}Q = 0$ называется ***адиабатой***. Адиабата в координатах p, V изображается гиперболой (рис. 48).

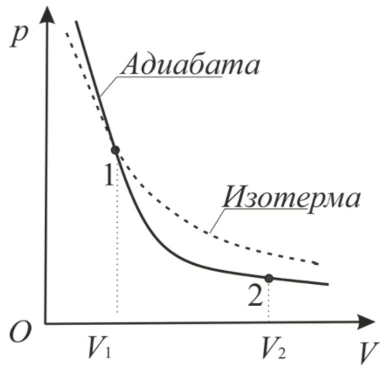

Рис. 48

Для любого идеального газа коэффициент Пуассона $\gamma > 1$. Поэтому в $p - V$-диаграмме адиабата ($pV^{\gamma} = \mathrm{const}$) изображается кривой, идущей более круто, чем изотерма ($pV = \mathrm{const}$) [тангенс угла наклона касательной в γ раз больше, чем у изотермы, – адиабата идет круче, чем изотерма]. Это объясняется тем, что при адиабатном сжатии увеличение давления газа происходит не только за счет уменьшения его объема, как при изотермическом сжатии, но также связано с возрастанием температуры. При адиабатном расширении газа его температура уменьшается и давление газа падает быстрее, чем при соответствующем изотермическом расширении.

Работа газа в адиабатном процессе [см. (8.31)]

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}U = -\frac{m}{M}C_V\mathrm{d}T.$$

Если газ адиабатически расширяется от объема V_1 до V_2, то его температура уменьшается от T_1 до T_2 и работа расширения идеального газа

$$A = -\frac{m}{M}C_V\int_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}T = \frac{m}{M}C_V(T_1 - T_2) = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right] \qquad (8.39)$$

[измеряется площадью криволинейной трапеции $V_1 12 V_2$ (см. рис. 48)].

Выражение (8.39) для работы при адиабатическом расширении можно преобразовать к виду

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right], \qquad (8.40)$$

где $p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT_1$.

Если использовать соотношения

$$pT^{\gamma/(\gamma-1)} = \text{const}, \qquad (8.36')$$

$$VT^{1/(\gamma-1)} = \text{const}, \qquad (8.37')$$

то можно написать

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

и работу газа при адиабатном процессе представить в форме:

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]. \qquad (8.40')$$

8.7. Политропический процесс

Политропическим называется процесс, в ходе которого теплоемкость тела остается постоянной

$$C = \text{const}. \qquad (8.41)$$

Уравнение политропного процесса

$$pV^n = \text{const}, \qquad (8.42)$$

где n – показатель политропы,

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}. \qquad (8.43)$$

График зависимости между параметрами состояния идеального газа при $C = \mathrm{const}$ называется ***политропой***. Политропа в координатах p, V изображается гиперболой (рис. 49); занимает промежуточное положение между изотермой и адиабатой.

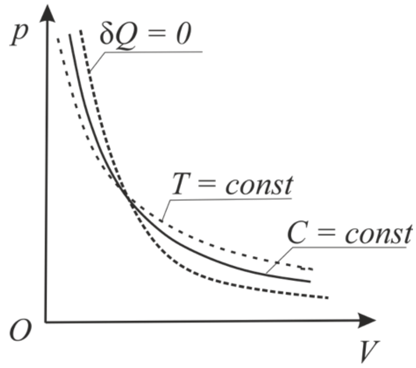

Рис. 49

[Исходя из первого начала термодинамики (8.7) ($\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A$) при условии постоянства теплоемкости ($C = \mathrm{const}$), можно найти уравнение политропы для идеального газа, подставив в место $\mathrm{d}Q$ выражение $(m/M)\,C\mathrm{d}T$:

$$\frac{m}{M}C\mathrm{d}T = \frac{m}{M}C_V\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V.$$

Преобразовав это соотношение (умножили обе части равенства на R), получим

$$\frac{m}{M}(C - C_V)R\mathrm{d}T = Rp\mathrm{d}V. \quad (8.44)$$

Из уравнения (8.33) вытекает, что

$$\frac{m}{M}R\mathrm{d}T = p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p.$$

Осуществив такую замену в (8.44), найдем

$$(C - C_V - R)p\mathrm{d}V + (C - C_V)V\mathrm{d}p = 0.$$

Разделив это уравнение на pV и с учетом, что $C_V + R = C_p$, в итоге получим

$$\left(C - C_p\right)\frac{\mathrm{d}V}{V} + (C - C_V)\frac{\mathrm{d}p}{p} = 0. \quad (8.45)$$

Введем величину

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}. \quad (8.46)$$

Тогда уравнению (8.45) можно придать вид

$$n\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}p}{p}=0. \qquad (8.47)$$

Уравнение (8.47) отличается от уравнения (8.34) лишь тем, что вместо постоянной величины γ при $\mathrm{d}V/V$ стоит постоянная величина n. Поэтому решение уравнения (8.47) можно получить, заменив в (8.35) γ на n:

$$pV^n=\text{const}, \qquad (8.48)$$

т. е. получили уравнение политропы идеального газа [см. (8.42)].

Уравнение политропы в переменных T и V также получается из (8.35) заменой γ на n:

$$TV^{n-1}=\text{const}, \qquad (8.49)$$

$$T^n p^{1-n}=\text{const}. \qquad (8.50)$$

Работа, совершаемая идеальным газом в политропном процессе *1 – 2*,

$$A=\frac{m}{M}\frac{R}{n-1}(T_1-T_2)=\frac{p_1V_1}{n-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(n-1)}\right]. \qquad (8.51)$$

Формула (8.51) неприменима к изотермическому процессу, т. е. $n=1$.

8.8. Круговой процесс (цикл). Необратимость тепловых процессов. Тепловой двигатель и холодильная машина

Процесс, при котором система после ряда изменений возвращается в исходное состояние, называется ***круговым процессом*** или ***циклом***. Тело, совершающее круговой процесс и обменивающееся энергией с другими телами, называется ***рабочим телом***. Обычно таким телом является газ. Круговой процесс на диаграмме $p-V$ изображен замкнутой кривой $abcda$ (рис. 50). Цикл, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы расширения (a–c) и сжатия (c– a) газа. Работа, совершаемая газом за один цикл, складывается из работы на участке abc [*работа расширения* положительна ($\mathrm{d}V>0$) – определяется площадью фигуры $abcV_2V_1a$] и работы на участке cda [*работа сжатия* отрицательна ($\mathrm{d}V<0$) – определяется площадью фигуры $cdaV_1V_2c$]. Следовательно, работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой.

Если за *цикл* совершается положительная работа ($A = \oint p\mathrm{d}V > 0$) (цикл совершается по часовой стрелке), то он называется ***прямым*** (см. рис. 50), если за цикл совершается отрицательная работа ($A = \oint p\mathrm{d}V < 0$) (цикл протекает против часовой стрелки), то он называется ***обратным***.

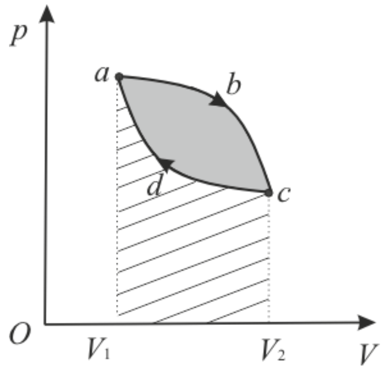

Рис. 50

Прямой цикл используется в ***тепловых машинах*** – периодически действующих ***тепловых двигателях***, совершающих работу за счет полученной извне теплоты [в тепловом двигателе, теплота от внешних источников поступает к рабочему телу и часть ее отдается в форме работы другим телам]. Обратный цикл используется в ***холодильных машинах*** – периодически действующих установках, в которых за счет затраты положительной работы внешних сил теплота переносится к телам с более высокой температурой.

После совершения цикла система возвращается в исходное состояние, поэтому изменение внутренней энергии системы равно нулю ($\Delta U = 0$). Первое начало термодинамики (8.6) для кругового процесса

$$Q = \Delta U + A = A, \qquad (8.52)$$

т. е. работа A, совершаемая за цикл рабочим телом, равна количеству полученной извне теплоты

$$Q = Q_1 - Q_2,$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой; Q_2 – количество теплоты, отданное системой.

Термический коэффициент полезного действия (КПД) для кругового процесса равен отношению совершаемой за один цикл работы A к получаемому от нагревателя за цикл количеству теплоты Q_1:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \tag{8.53}$$

Рассмотренный случай соответствует прямому циклу. При обратном цикле теплота передается от холодного тела к горячему – над системой совершается работа внешними силами. [В прямом цикле $Q > 0$, т. е. к рабочему телу подводится больше количество теплоты, чем от него отводится. Соответственно за цикл совершается положительная работа $A = Q$. В обратном цикле $Q < 0$, и за цикл внешние силы совершают работу $A' = -A > 0$].

Различают *обратимые* и *необратимые круговые процессы*. ***Обратимым*** называется такой термодинамический процесс, при котором система возвращается в исходное состояние таким образом, что ни в ней, ни в окружающей среде не остается никаких остаточных изменений. Обратимые процессы – это идеализация реальных процессов. Процесс, который не удовлетворяет вышеуказанному условию, называется ***необратимым процессом***. *Все тепловые процессы являются необратимыми.*

[Примером *обратимого процесса* могут служить *незатухающие колебания*, которые совершает в вакууме тело, подвешенное на абсолютно упругой пружине. Система тело – пружина является консервативной. Ее механические колебания не вызывают изменения энергии теплового движения частиц. Изменение состояния этой системы связано только с изменением ее конфигурации и скорости движения, которые полностью повторяются через одинаковые промежутки времени, равные периоду колебаний T. Примером *необратимого процесса* является *торможение тела* под действием силы трения. Если это сила – единственная, действующая на тело, то скорость тела уменьшается, и оно в конце концов останавливается].

Принципиальная схема теплового двигателя (используется *прямой цикл*) дана на рис. 51, *а*. Сначала газ (*рабочее тело*) приводят в контакт с *нагревателем*, т. е. телом, температура которого T_1 выше температуры газа. Газ получит от нагревателя тепло Q_1 и расширится от объема V_1 до объема V_2. Затем газ надо сжать до объема V_1, т. е. вернуть его в исходное состояние. Для этого его приводят в контакт с *холодильником*, т. е. телом, температура которого T_2 ниже температуры газа. При этом газ отдает холодильнику тепло Q_2.

В холодильных машинах используется *обратный цикл*. За цикл от термостата с более низкой температурой T_2 (рис. 51, *б*) отбирается количество теплоты Q_2 и отдается термостату с более высокой температурой T_1 количество теплоты Q_1.

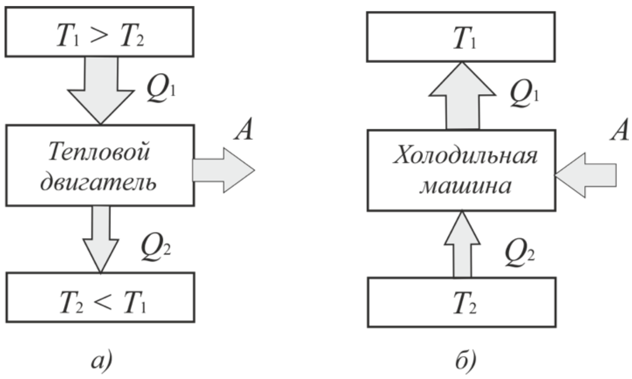

Рис. 51

Для кругового процесса $Q = A$, но по условию $Q = Q_2 - Q_1 < 0$ и $A < 0$. Тогда

$$Q_2 - Q_1 = A'$$

[поскольку $A' = -A$ (см. п. 8.3)] или

$$Q_1 = Q_2 + A',$$

т. е. количество теплоты Q_1, отданное системой источнику теплоты при более высокой температуре T_1, больше количества теплоты Q_2, полученного от источника теплоты при более низкой температуре T_2, на величину работы A', совершенной над системой.

Величина, равная отношению отобранного от охлаждаемого тела количества теплоты Q_2 к затраченной на это механической работе A' в обратном цикле, называется ***холодильным коэффициентом***:

$$\eta' = \frac{Q_2}{A'} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

8.9. Цикл Карно

Общее свойство всех круговых процессов состоит в том, что их невозможно провести, приводя рабочее тело в тепловой контакт только с одним тепловым резервуаром. Для работы теплового двигателя необходимо наличие двух тепловых резервуаров – *нагревателя*, имеющего более высокую температуру T_1 [двигатель получает в ходе цикла количество теплоты Q_1], и *холодильника*, имеющему более низкую температуру T_2 [двигатель отдает теплоту Q_2].

Анализируя работу тепловых машин, французский инженер Сади Карно в 1824 г. пришел к выводу, что *наиболее полное превращение тепловой энергии в механическую работу должно происходить в цикле, включающем два обратимых изотермических процесса* (один из которых протекает при большей температуре, другой – при меньшей), *а в промежутках между этими процессами рабочее тело обратимо изменяет свою температуру адиабатически* (без теплообмена с нагревателем и холодильником). Цикл Карно сыграл большую роль в развитии термодинамики и теплотехники, так как позволил подойти к анализу КПД тепловых двигателей.

Такой обратимый круговой процесс, совершаемый идеальным газом и состоящий из двух изотерм [изотермического расширения *1–2* и изотермического сжатия *3–4* (температуры T_1 и T_2)] и двух адиабат [адиабатного расширения *2–3* и адиабатного сжатия *4–1*], изображен на рис. 52.

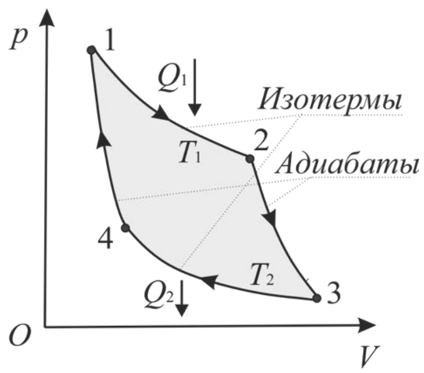

Рис. 52

Прямой процесс начинается с изотермического расширения газа от состояния *1* (p_1, V_1, T_1) к состоянию *2* (p_2, V_2, T_1). При изотермическом расширении

($\Delta U = 0$), согласно (8.30), количество теплоты Q_1, полученное газом от нагревателя, равно работе расширения A_{12}, совершаемой газом при переходе из состояния *1* в состояние *2*:

$$A_{12} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1. \tag{8.54}$$

При адиабатном расширении *2–3* теплообмен с окружающей средой отсутствует и работа расширения A_{23} совершается за счет изменения внутренней энергии [см. (8.31) и (8.39)]

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1).$$

Количество теплоты Q_2, отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии *3–4*, равно работе сжатия A_{34}:

$$A_{34} = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2. \tag{8.55}$$

Работа адиабатного сжатия *4–1*

$$A_{41} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}.$$

Работа, которую совершает рабочее тело в прямом цикле Карно (*в результате кругового процесса*), равна

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2$$

и определяется площадью, тонированной на рис. 52.

Термический КПД цикла Карно [см. (8.53)] определяется следующим образом:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \tag{8.56}$$

т. е. равен отношению работы A, совершенной рабочим телом в прямом обратимом цикле, к количеству теплоты Q_1, сообщенному в этом процессе рабочему телу нагревателями. Термический КПД характеризует экономичность цикла теплового двигателя.

Применив уравнение (8.36) для адиабат *2–3* и *4–1*, получим

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \ \ T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1},$$

откуда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \tag{8.57}$$

Подставляя (8.54) и (8.55) в формулу (8.53) и учитывая (8.57), получаем

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{M} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} RT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

или

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{8.58}$$

т. е. для цикла Карно КПД определяется только температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2.

[Согласно теореме Карно, коэффициент полезного действия η всех обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей T_1 и T_2, одинаков и определяется только температурами нагревателя и холодильника. Следовательно, КПД цикла Карно идеальной тепловой машины меньше единицы и зависит только от соотношения меду температурами нагревателя и холодильника. В термодинамике доказывается, что из всех циклических процессов цикл Карно идеальной тепловой машины обладает наибольшим коэффициентом полезного действия (***вторая теорема Карно***), а сам коэффициент теплового действия цикла Карно не зависит от природы рабочего тела, а определяется только температурами нагревателя и холодильника (***первая теорема Карно***).

Формула (8.58) объясняет причину низкого коэффициента полезного действия η паровых машин. Так, при $T_1 = 400\ K$ и $T_2 = 300\ K$ максимальное значение η идеальной машины составляет 25 %. В реальных паровых машинах вследствие потерь энергии η не достигает и 10 %].

8.10. Энтропия и ее статистический смысл

Для описания теплового движения вводят количественную меру степени молекулярного беспорядка – *энтропию*. Понятие энтропии (от греч. *entropia* – поворот, превращение) введено в 1865 г. Р. Клаузиусом.

Величина, равная отношению количества теплоты Q, переданного рабочему телу (или рабочим телом) в изотермическом процессе, к температуре T теплоотдающего тела называется ***приведенным количеством теплоты***. Энтропию определяют как *функцию состояния* S термодинамической системы, приращение которой $\mathrm{d}S$ для бесконечно малого обратимого процесса равно отношению элементарного количества теплоты δQ, полученной системой, к термодинамической температуре T системы:

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}. \tag{8.59}$$

Приведенное количество теплоты, сообщаемое телу *в любом обратимом круговом процессе*, равно нулю

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0, \tag{8.60}$$

следовательно, изменение энтропии в изолированной системе ($\delta Q = 0$) для *обратимого процесса*

$$\Delta S = 0. \tag{8.61}$$

Протекание в изолированной системе ($\delta Q = 0$) *необратимого процесса* сопровождается ростом энтропии:

$$\Delta S > 0. \tag{8.62}$$

Если системе сообщается количество теплоты δQ [процесс протекает в неизолированной системе], то ее энтропия может вести себя любым образом. Формулы (8.61) и (8.62) можно объединить в одну формулу:

$$\Delta S \geq 0, \tag{8.63}$$

где знак равенства относится к обратимым, а знак неравенства – к необратимым процессам. Выражение (8.63) называется ***неравенством Клаузиуса***.

Утверждение о том, что *энтропия изолированной термодинамической системы может только возрастать либо по достижению максимального значения оставаться постоянной* (иными словами, не может убывать), носит название **закона возрастания энтропии** или **второго начала термодинамики** (см. п. 8.11). [Отметим, что при протекании обратимого процесса *в неизолированной системе* энтропия может как возрастать (если $\delta Q > 0$), так и убывать (если $\delta Q < 0$)].

Если система совершает равновесный переход из состояния *1* в состояние *2*, то, согласно (8.59), изменение энтропии

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}U + \delta A}{T}. \tag{8.64}$$

Физический смысл имеет не сама энтропия, а разность энтропий. Представив в уравнении (8.8) первого начала термодинамики значения $\mathrm{d}U$ и δA [см. (8.27), (8.4) и (8.28)], и исходя из выражения (8.64), найдем изменение энтропии в процессах идеального газа:

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V},$$

или

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}\right). \tag{8.65}$$

Таким образом, изменение энтропии $\Delta S_{1\to 2}$ идеального газа при переходе его из состояния *1* в состояние *2* не зависит от вида процесса перехода *1→2*. Из формулы (8.65) следует, что при *изотермическом процессе* ($T_1 = T_2$)

$$\Delta S = \frac{m}{M} R\ln\frac{V_2}{V_1}, \tag{8.66}$$

при *изохорическом процессе* ($V_1 = V_2$)

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}. \tag{8.67}$$

Изоэнтропийный процесс ($S = \text{const}$) – это адиабатный обратимый процесс, для которого $\delta Q = 0$, поэтому $\Delta S = 0$ и, следовательно, $S = \text{const}$, т. е. *адиабатный обратимый процесс* в системе протекает при постоянном значении ее энтропии.

Энтропия системы обладает свойством ***аддитивности***, т. е. энтропия системы равна сумме энтропий отдельных ее частей, входящих в систему. Свойством аддитивности обладают также масса, внутренняя энергия, объем (температура и давление таким свойством не обладают).

Энтропию макроскопического состояния связывают с ***термодинамической вероятностью*** W этого состояния [Больцман (1872 г.)], т. е. числом различных состояний, которые его реализуют. Число различных микросостояний, соответствующих данному макросостоянию, называется ***статистическим весом макросостояния*** Ω (или ***термодинамической вероятностью*** макросостояния). Макросостояние с максимальным Ω называется *равновесным*. [Таким образом, статистический вес представляет собой число микроскопических способов, которыми может быть осуществлено данное макросостояние; по определению $W \geq 1$, т. е. термодинамическая вероятность отличается от математической вероятности (последняя ≤ 1)].

Энтропия S системы в данном макросостоянии связана с термодинамической вероятностью W следующим образом:

$$S = k \ln W, \tag{8.68}$$

где k – постоянная Больцмана. Формула (8.68) называется ***формулой Больцмана***. Согласно (8.68), энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. [При неравновесных процессах система переходит от менее вероятных к более вероятным состояниям. Логарифм обеспечивает аддидивность энтропии: статистический вес системы Ω (термодинамическая вероятность макросостояния), состоящий из двух независимых подсистем, равен произведению их статистических весов Ω_1 и Ω_2]. Следовательно, энтропия может рассматриваться *как мера вероятности* состояния термодинамической системы. Формула Больцмана (8.68) позволяет дать энтропии следующее статистическое толкование: *энтропия является мерой неупорядоченности системы*. В соответствии с формулой Больцмана (8.68), изолированная система при протекании в ней необратимых процессов самопроизвольно переходит из менее вероятного состояния в более вероятное состояние, т. е. в состояние равновесия. В состоянии равновесия число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия. Следовательно, равновесное состояние является состоянием с максимальным статистическим весом, т. е. наиболее вероятным состоянием. Так как *реальные процессы необратимы*, можно утверждать, что все процессы в изолированной системе ведут к увеличению ее энтропии – *принцип возрастания энтропии.* Сопоставляя выражения (8.63) и (8.68), видим, что энтропия S и термодинамическая вероятность W состояний изолированной системы могут либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянными (в случае обратимых процессов).

8.11. Второе начало термодинамики

Первое начало термодинамики не позволяет установить *направление* протекания процессов. Он не исключает возможности такого процесса, единственным результатом которого было бы превращение теплоты, полученной от некоторого тела, в эквивалентную ей работу. [Например, первое начало допускает построение периодически действующего двигателя (***вечного двигателя* [перпетуум мобиле] *второго рода***), совершающего работу за счет охлаждения одного источника теплоты. Поскольку тепловые процессы необратимы (см. п. 8.8), то теплообмен самопроизвольно может проходить только в одном направлении – от более нагретых тел к менее нагретым, и в результате происходит выравнивание термодинамических параметров, например, температур. Обобщение огромного экспериментального материала привело к выводу *о невозможности построения вечного двигателя второго рода* и получило название **второго начала термодинамики**].

Направление самопроизвольно протекающих термодинамических процессов устанавливает второе начало термодинамики. Второе начало термодинамики утверждает, что невозможно получить работу за счет энергии тел, находящихся в термодинамическом равновесии. Одновременно оно дает ограничение на направление протекания термодинамических процессов, отражая их необратимость, и указывает, какие процессы в природе возможны, а какие невозможны.

Кроме приведенной в п. 8.10 формулировки, заключающейся в том, что *энтропия изолированной системы не может убывать* [см. (8.63): $\Delta S \geq 0$], имеются и другие эквивалентные друг другу формулировки **второго начала термодинамики**. Приведем наиболее известные формулировки:

1. *Невозможен процесс, единственным результатом которого является совершение работы за счет охлаждения одного тела* [***формулировка Томсона*** (*лорда Кельвина*) (1851 г.)]. Эта же формулировка, но выраженная другими словами, утверждает невозможность создания *вечного двигателя второго рода* – периодически действующего двигателя, совершающего работу за счет охлаждения одного источника теплоты (т. е. производящего работу за счет внутренней энергии теплового резервуара).

2. *Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от холодного тела к горячему* [***формулировка Клаузиуса*** (1850 г.)]. Иными словами, теплота не может самопроизвольно переходить от холодных тел к горячим.

3. *Невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты в работу при постоянной температуре* [***формулировка Карно*** (1824 г.)]. Например, нельзя произвести работу за счет охлаждения озера, моря или иного резервуара при установившейся постоянной температуре.

Все формулировки второго начала термодинамики эквивалентны между собой. Как в постулате Клаузиуса, так и в постулате Томсона при ограничении возможности протекания процессов отмечается, что запрет распространяется только на процессы, единственным конечным результатом которых являлся бы или переход теплоты «от более холодного тела к более теплому», или «работа, совершаемая за счет отвод теплоты от теплового резервуара». Таким образом, указанные процессы не запрещены в принципе, а только ограничены невозможностью их протекания без каких-либо изменений в окружающей среде и в самой термодинамической системе.

При абсолютном нуле температуры ($T = 0\ K$) всякое тело (система), как правило, находится в состоянии, термодинамическая вероятность W которого равна единице. Согласно формуле (8.68) энтропия в этом случае равна нулю [при $T = 0\ K$ система находится в наинизшем энергетическом состоянии]. Отсюда следует, что *энтропия любого тела* (*системы*) ***в состоянии равновесия стремится к нулю при стремлении к абсолютному нулю температуры***:

$$\lim_{T\to 0} S = 0. \tag{8.69}$$

Это утверждение называется ***теоремой Нернста*** или **третьим началом термодинамики**.

[Чтобы найти абсолютное значение энтропии, необходимо знать теплоемкость при абсолютном нуле температуры. Измерив теплоемкость многих веществ при температурах, очень близких к абсолютному нулю, Вальтер Нернст пришел к выводу, что *теплоемкость всех кристаллических веществ при абсолютном нуле температуры равна нулю*. Эта «тепловая теорема Нернста» (1906 г.) теперь называется третьим началом термодинамики. Ее значение в том, что она позволяет сравнивать между собой энтропии разных веществ, так как все они равны нулю при абсолютном нуле температуры. Из теоремы Нернста следует, что теплоемкости C_p и C_V системы, а также ее температурные коэффициенты объемного расширения и давления при $T \to 0\ K$ стремятся к нулю. Третье начало термодинамики относится только к равновесным состояниям].

Примеры решения задач

8.1. Найдите для массы 1 кг азота при температуре 400 К: 1) среднюю кинетическую энергию поступательного движения $\langle\varepsilon_1\rangle$, приходящуюся на одну степень свободы молекулы; 2) среднюю кинетическую энергию поступательного движения $\langle\varepsilon_\text{п}\rangle$ молекулы; 3) среднюю кинетическую энергию вращательного движения $\langle\varepsilon_\text{вр}\rangle$ молекулы; 4) среднее значение полной кинетической энергии $\langle\varepsilon\rangle$ молекулы; 5) среднюю кинетическую энергию вращательного движения $\langle E_\text{вр}\rangle$ всех молекул газа; 6) среднюю кинетическую энергию поступательного движения $\langle E_\text{п}\rangle$ всех молекул газа. Газ считать идеальным. Молярная масса азота 28 г/моль.

Дано: $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m = 1$ кг; $T = 400$ К; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К); $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Найти: $\langle \varepsilon_1 \rangle$; $\langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle$; $\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle$; $\langle \varepsilon \rangle$; $\langle E_{\text{вр}} \rangle$; $\langle E_{\text{п}} \rangle$.

Решение. По условию задачи, азот является идеальным газом; молекула азота – двухатомная. Связь между атомами считаем жесткой, тогда число степеней свободы молекулы азота равно $i = 5$ [поступательному движению приписывается три ($i_{\text{п}} = 3$), а вращательному две ($i_{\text{вр}} = 2$) степени свободы].

Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну степень свободы молекулы,

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

где k – постоянная Больцмана.

Средняя кинетическая энергия поступательного и вращательного движений молекулы соответственно:

$$\langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle = \frac{i_{\text{п}}}{2} kT \ \text{ и } \langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = \frac{i_{\text{вр}}}{2} kT,$$

где $i_{\text{п}} = 3$ – сумма числа поступательных; $i_{\text{вр}} = 2$ – сумма числа вращательных степеней свободы молекулы.

Среднее значение полной кинетической энергии молекулы:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где $i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} = 5$ – число степеней молекулы азота (двухатомный газ).

Средняя кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа:

$$\langle E_{\text{вр}} \rangle = \langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle N = \frac{i_{\text{вр}}}{2} kT \frac{mN_{\text{А}}}{M} = \frac{i_{\text{вр}}}{2} \frac{m}{M} RT,$$

где $N = mN_{\text{А}}/M$ – число молекул; m – масса газа; $N_{\text{А}}$ – постоянная Авогадро; $R = kN_{\text{А}}$ – молярная газовая постоянная.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул азота:

$$\langle E_{\text{п}} \rangle = \langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle N = \frac{i_{\text{п}}}{2} kT \frac{mN_{\text{А}}}{M} = \frac{i_{\text{п}}}{2} \frac{m}{M} RT.$$

Ответ: $\langle \varepsilon_1 \rangle = 2{,}76 \cdot 10^{-21}$ Дж; $\langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle = 8{,}28 \cdot 10^{-21}$ Дж; $\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = 5{,}52 \cdot 10^{-21}$ Дж; $\langle \varepsilon \rangle = 1{,}38 \cdot 10^{-20}$ Дж; $\langle E_{\text{вр}} \rangle = 118{,}71$ кДж; $\langle E_{\text{п}} \rangle = 178{,}07$ кДж.

8.2. Гелий массой 4 кг охлаждают при постоянном давлении от 300 К до 280 К. Найдите изменение внутренней энергии, количество выделенной теплоты и внешнюю работу. Молярная масса гелия 4 г/моль; универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Дано: $M = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль; $T_1 = 300$ К; $T_2 = 280$ К; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К); $m = 4$ кг; $i = 3$.

Найти: ΔU; Q; A.

Решение. Изменение внутренней энергии произвольной массы m газа:

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1),$$

где i – число степеней свободы (для одноатомного газа – гелия $i = 3$); m – масса газа; M – молярная масса газа; R – молярная газовая постоянная.

Количество теплоты, выделяющееся при охлаждении газа при постоянном давлении ($p = \text{const}$):

$$Q = \frac{m}{M}C_p\Delta T = \frac{m}{M}\frac{i+2}{2}R(T_2 - T_1)$$

[учли, что молярная теплоемкость при постоянном давлении $C_p = \frac{i+2}{2}R$].

Работа газа в изобарном процессе ($p = \text{const}$):

$$A = p\Delta V = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1)$$

[учли, уравнение Менделеева – Клапейрона для начального *1* и конечного *2* состояний газа, при $p = \text{const}$: $pV_1 = \frac{m}{M}RT_1$ и $pV_2 = \frac{m}{M}RT_2$].

Ответ: $\Delta U = –249{,}3$ кДж; $Q = – 415{,}5$ кДж; $A = –166{,}2$ кДж.

8.3. Неон массой 80 г, находящийся при нормальных условиях расширяется адиабатно, причем объем газа увеличивается в четыре раза. Найдите изменение внутренней энергии и работу расширения газа. Молярная масса неона 20 г/моль; универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Дано: $m = 80$ г $= 8\cdot10^{-2}$ кг; $M = 20\cdot10^{-3}$ кг/моль; $V_2 = 4V_1$; $p_0 = 1{,}013\cdot10^5$ Па; $t_0 = 0$ °C ($T_0 = T_1 = 273{,}15$ К); $i = 3$.

Найти: ΔU; A.

Решение. Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты Q, переданное системе (газу), расходуется на изменение ее внутренней энергии ΔU и на совершение ею работы A против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A.$$

В случае адиабатного процесса (в нашем случае, расширения) $Q = 0$, поэтому:

$$\Delta U = -A.$$

Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния *1* в состояние *2*

$$\Delta U = \frac{m}{M}C_V\Delta T = \frac{m}{M}\frac{iR}{2}(T_2 - T_1),$$

где m – масса газа; M – молярная масса газа; $C_V = iR/2$ – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме ($V = \text{const}$); i – число степеней свободы (для одноатомного газа $i = 3$); R – молярная газовая постоянная; T_1 и T_2 – температуры, соответствующие начальному (1) и конечному (2) состояниям газа.

Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона):

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1},$$

где показатель адиабаты $\gamma = C_p/C_V = (i+2)/i = 5/3$.

Из уравнения Пуассона найдем:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}.$$

Подставив полученное выражение T_2 в формулу для ΔU, найдем изменение внутренней энергии, а также, учитывая равенство $\Delta U = -A$, работу расширения газа:

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right) \quad \text{и} \quad A = -\Delta U = -\frac{m}{M}\frac{i}{2}RT_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right).$$

Ответ: $\Delta U =$ – 8214,45 Дж; $A =$ 8214,45 Дж.

8.4. Найдите показатель политропы для одноатомного идеального газа, который совершает политропный процесс, в ходе которого молярная теплоемкость газа $5R/2$ остается постоянной.

Дано: $i = 3$; $C = 2{,}5R = \text{const}$; $R =$ 8,31 Дж/(моль · К).

Найти: n.

Решение. Процесс, в котором теплоемкость остается постоянной ($C = \text{const}$), называется политропным. Уравнение политропного процесса:

$$pV^n = \text{const},$$

где $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$ – показатель политропы; C_p и C_V – соответственно молярные теплоемкости при постоянном давлении ($p = \text{const}$) и при постоянном объеме ($V = \text{const}$):

$$C_p = \frac{i+2}{2}R \text{ и } C_V = \frac{i}{2}R,$$

где i – число степеней свободы; R – молярная газовая постоянная.

По условию задачи $i = 3$ (рассматривается одноатомный газ), тогда имеем:

$$C_p = \frac{5}{2}R \text{ и } C_V = \frac{3}{2}R.$$

Подставив эти значения в формулу для показателя политропы, найдем: $n = 0$.

Ответ: $n = 0$.

8.5. В результате изотермического расширения объем аргона массой 80 г увеличился в три раза. Найдите изменение энтропии газа. Молярная масса аргона $40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).
Дано: $m = 80$ г $= 8 \cdot 10^{-2}$ кг; $M = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К); $V_2 = 3V_1$; $T = \text{const}$.
Найти: ΔS.
Решение. Изменение энтропии системы, учитывая, что процесс изотермический ($T = \text{const}$),

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 \mathrm{d}Q = \frac{Q}{T},$$

где Q – количество теплоты, сообщенное газу; T – температура газа; S_1 и S_2 – значения энтропии, соответствующие начальному (1) и конечному (2) состояниям газа.

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты, полученное системой (газом),

$$Q = \Delta U + A.$$

Для изотермического ($T = \text{const}$) процесса $\Delta U = 0$, поэтому $Q = A$ (все подводимое количество теплоты идет на работу по расширению газа).

Работа газа в изотермическом процессе:

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Подставив это выражение в формулу для ΔS, получим искомое изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{m}{M}R\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Ответ: $\Delta S = 18{,}26$ Дж/К.

8.6. Лед массой 4 кг, находящийся при температуре –23 $°C$, нагрели и превратили в пар при 100 $°C$. Найдите изменение энтропии. Удельная теплоемкость льда 2,1 Дж/(г · К); удельная теплота плавления льда 335 Дж/г; удельная теплоемкость воды 4,19 Дж/(г · К); удельная теплота парообразования воды 2260 Дж/г.
Дано: $m = 4$ кг; $t_1 = –23$ $°C$ ($T_1 = 250$ К); $t_2 = 0$ $°C$ ($T_2 = 273$ К); $t_3 = 100$ $°C$ ($T_3 = 373$ К); $c_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К); $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг; $c_2 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К); $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/(кг · К).
Найти: ΔS.
Решение. Общее изменение энтропии:

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i,$$

где ΔS_i – изменение энтропии, происходящие на отдельных этапах процесса (энтропия – величина аддитивная, поэтому общее изменение энтропии равно сумме изменений энтропии, происходящих на отдельных этапах процесса).

Изменение энтропии определяется общей формулой:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T}.$$

Изменение энтропии ΔS_1 при нагревании льда от начальной температуры T_1 до температуры плавления T_2:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}Q_1}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_1 \mathrm{d}T}{T} = mc_1 \ln\frac{T_2}{T_1}$$

[учли, что при бесконечно малом изменении температуры $\mathrm{d}T$ нагреваемого тела затрачивается количество теплоты $\mathrm{d}Q_1 = mc_1\mathrm{d}T$, где m – масса тела; c – удельная теплоемкость тела].

Изменение энтропии ΔS_2 при плавлении льда (плавление льда происходит при постоянной температуре $T_2 = \mathrm{const}$):

$$\Delta S_2 = \int \frac{\mathrm{d}Q_2}{T_2} = \frac{1}{T_2}\int \mathrm{d}Q_2 = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{\lambda m}{T_2},$$

где $Q_1 = \lambda m$ – количество теплоты, переданное при плавлении льда; λ – удельная теплота плавления.

Изменение энтропии ΔS_3 при нагревании воды от температуры T_2 до температуры кипения T_3 (величина ΔS_3 аналогично ΔS_1):

$$\Delta S_3 = mc_2 \ln\frac{T_3}{T_2},$$

где c_2 – удельная теплоемкость воды.

Изменение энтропии ΔS_4 при испарении воды (происходит при постоянной температуре T_3):

$$\Delta S_4 = \frac{1}{T_3}\int \mathrm{d}Q_4 = \frac{Q_4}{T_3} = \frac{rm}{T_3},$$

где $Q_4 = rm$ – количество теплоты, переданное при превращении нагретой воды в пар той же температуры; r – удельная теплота парообразования.

Общее изменение энтропии:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = m\left(c_1 \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + c_2 \ln\frac{T_3}{T_2} + \frac{r}{T_3}\right).$$

Ответ: $\Delta S = 35{,}12$ кДж/кг.

8.7. Найдите КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, и полезную мощность машины, если нагреватель за 1 с передает ей 1,5 кДж теплоты. Температура нагревателя тепловой машины 490 К. Температура холодильника 390 К.

Дано: $t = 1$ с; $Q_1 = 1{,}5$ кДж = 1500 Дж; $T_1 = 490$ К; $T_2 = 390$ К.
Найти: η; N.
Решение. Термический КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 и T_2 – термодинамические температуры нагревателя и холодильника соответственно.

КПД тепловой машины:

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

где A – работа, совершаемая тепловой машиной; Q_1 – количество теплоты, переданное нагревателем за 1 с (по условию задачи).

Приравняв выражения для КПД, получаем:

$$A = \eta Q_1 = \frac{Q_1(T_1 - T_2)}{T_1}.$$

Работа A совершается за 1 с, следовательно, полезная мощность тепловой машины:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Q_1(T_1 - T_2)}{tT_1}.$$

Ответ: $\eta = 20{,}41$ %; $N = 306{,}12$ Вт.

8.8. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно, и за один цикл совершает работу 1,5 кДж. Температура нагревателя 520 К, а холодильника 410 К. Найдите КПД машины, количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя за цикл, и количество теплоты, отдаваемое холодильнику за цикл.
Дано: $A = 1{,}5$ кДж = 1500 Дж; $T_1 = 520$ К; $T_2 = 410$ К.
Найти: η; Q_1; Q_2.
Решение. Термический КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 и T_2 – термодинамические температуры нагревателя и холодильника соответственно.

КПД любой тепловой машины:

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

где A – работа совершаемая, рабочим телом тепловой машины; Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя.

Откуда искомое количество теплоты:

$$Q_1 = \frac{A}{\eta}.$$

Количество теплоты, отдаваемое холодильнику за цикл,

$$Q_2 = (1 - \eta)Q_1$$

[учли $\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1$].

Ответ: $\eta = 21{,}15$ %; $Q_1 = 7{,}09$ кДж; $Q_2 = 5{,}59$ кДж.

Задачи

66. Найдите средние кинетические энергии поступательного и вращательного движения молекул, содержащихся в 3 кг азота при температуре 300 К. Молярная масса азота 28 кг/кмоль; газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К). Азот считать идеальным газом, связь между атомами газа – жесткая.

Ответ: 400,66 кДж; 267,11 кДж

67. Углекислый газ массой 500 г был нагрет на 80 К при постоянном давлении. Найдите количество теплоты, полученное газом. Молекулы – жесткие, линейные. Молярная масса углекислого газа 44 г/моль; универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К). Ответ: 30,22 кДж

68. Азот массой 4 кг охлаждают при постоянном давлении от 300 до 280 К. Найдите изменение внутренней энергии, внешнюю работу и количество выделенной теплоты. Молярная масса азота 28 г/моль; универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К). Ответ: –51,94 кДж; –20,78 кДж; –72,71 кДж

69. При изохорном нагревании гелия объемом 15 л давление газа изменилось на 20 кПа. Найдите количество теплоты, сообщенное газу. Ответ: 4,5 кДж

70. Газ массой 20 г расширяется изотермически от объема V_1 до объема $V_2 = 3V_1$. Работа расширения газа равна 2,8 кДж. Найдите наиболее вероятную, среднюю и среднюю квадратичную скорости молекул газа.

Ответ: 505 м/с; 571 м/с; 616 м/с

71. При адиабатическом сжатии 2 кг водорода была затрачена работа 332,4 кДж. Найдите конечную температуру газа, если он вначале находился при температуре 290 К. Молярная масса водорода $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К). Ответ: 306 К

72. Найдите показатель политропы n и изменение внутренней энергии для двухатомного газа, который подвергается политропному сжатию, в результате

чего давление газа возросло от 20 кПа до 60 кПа, а объем газа уменьшился от 7 л до 2,8 л. Ответ: 1,2; 70 Дж

73. Найдите изменение энтропии при изобарном расширении 8 г азота в 2 раза. Молярная масса азота 28 г/моль; универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К). Ответ: 5,76 Дж/К

74. Объем аммиака массой 170 г при постоянной температуре увеличился в 2 раза. Найдите изменение энтропии газа. Молярная масса аммиака 17 г/моль; универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К). Ответ: 57,6 Дж/К

75. Воду массой 5 кг нагрели от температуры 20 до 100 $°C$, при которой она вся превратилась в пар. Найдите приращение энтропии системы. Удельная теплота парообразования воды 2,26 МДж/кг, ее удельная теплоемкость равна 4,19 Дж/(г · К). Ответ: 35,31 кДж/К

76. Количество теплоты, отданное тепловой машиной за цикл, равно 2,1 кДж, КПД двигателя 30 %. Найдите полученное от нагревателя за цикл количество теплоты. Ответ: 3 кДж

77. Тепловая машина, имеющая КПД 20 %, за один цикл отдает холодильнику 32 кДж тепла. Найдите мощность этой машины, если за время t = 1 мин она совершает 30 циклов. Ответ: 4 кВт

Лекция 9. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ. СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

9.1. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Поведение реальных газов при достаточно высоких температурах и низких давлениях хорошо описывается уравнением состояния идеального газа [см. (7.20)]. При повышении давления, возрастает плотность газа, вследствие чего возникают заметные отклонения от уравнения (7.20). При увеличении плотности газа уменьшается среднее расстояние между молекулами, поэтому при получении уравнения состояния реального газа необходимо учитывать объем молекул и взаимодействие между ними на расстоянии.

Для описания поведения реальных газов было предложено более семидесяти различных уравнений. Уравнение Ван-дер-Ваальса является наиболее удачным из всех этих уравнений (1873 г.). Это уравнение было получено путем внесения поправок в уравнение (7.19) [$pV_{\mathrm{m}} = RT$] и имеет вид [для 1 моль газа]

$$\left(p + \frac{a}{V_{\mathrm{m}}^2}\right)(V_{\mathrm{m}} - b) = RT, \qquad (9.1)$$

где V_{m} – молярный объем; a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса, имеющие для разных газов различные значения, определяемые экспериментально.

Первая поправка – это учет собственного объема молекул газа. Постоянная b учитывает уменьшение свободного объема для движения молекул за счет их собственного объема; считается, что это константа равна учетверенному объему всех молекул:

$$b = 4N_A \cdot \frac{1}{6}\pi d^3,$$

где N_A – постоянная Авогадро; $\pi d^3/6$ – объем молекулы реального газа.

Поправка b представляет собой «запрещенный объем», приходящийся на все N_A молекул. Из формулы следует, что значение b зависит от эффективного диаметра d молекул, т. е. от химической природы газа.

Вторая поправка – это учет сил взаимодействия между молекулами реального газа. Действие сил притяжения газа приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого ***внутренним давлением*** (p'). По вычислениям Ван-дер-Ваальса, p' обратно пропорционально квадрату молярного объема V_{m}, т. е.

$$p' = \frac{a}{V_{\mathrm{m}}^2}, \tag{9.2}$$

где a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

Для произвольной массы газа уравнение Ван-дер-Ваальса примет вид

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT, \text{ или } \left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT, \tag{9.3}$$

где $\nu = {}^{m}/_{M}$ – количество вещества; $V = \nu V_{\mathrm{m}}$ – объем газа.

Реальные газы следуют уравнению Ван-дер-Ваальса лишь приближенно. Воображаемый газ, точно подчиняющийся уравнению (9.1), называется ***ван-дер-ваальсовским***.

9.2. Изотермы реальных газов

На рис. 53 изображены изотермы Ван-дер-Ваальса, т. е. кривые, описываемые уравнением (9.1), для четырех различных температур ($T_1 < T_2 < T_3 < T_4$).

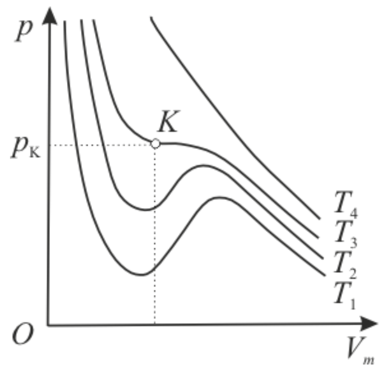

Рис. 53

При высоких температурах ($T_4 > T_к$) изотерма реального газа имеет форму, близкую к изотерме идеального газа. С уменьшением температуры форма изотерм изменяется и при некоторой ***температуре*** $T_к$, называемой ***критической***, на изотерме появляется точка перегиба K (изотерма при T_3), которая называется ***критической***. В точке K касательная к графику параллельна оси абсцисс. Соответствующие точке K ***объем*** $V_к$ и ***давление*** $p_к$ называются ***критическими***. Состояние с критическими параметрами ($p_к$, $V_к$, $T_к$) называется ***критическим состоянием***. При низких температурах ($T < T_к$) изотермы Ван-дер-Ваальса становятся сложными по форме (изотермы при T_1, T_2).

Для пояснения характера изотерм преобразуем уравнение Ван-дер-Ваальса (9.1) [если все члены уравнения (9.1) привести к общему знаменателю, то получится уравнение третьей степени относительно объема V_m] к виду

$$pV_{\mathrm{m}}^3 - (RT + pb)V_{\mathrm{m}}^2 + aV_{\mathrm{m}} - ab = 0. \qquad (9.4)$$

При решении подобного типа уравнений [уравнение (9.4) при заданных p и T является уравнением третьей степени относительно V_{m}] вычисляется три корня по формулам Кардана; следовательно уравнение (9.1) может иметь три вещественных корня, либо один вещественный и два мнимых (последние физического смысла не имеют). В том случае, когда решение уравнения (9.1) дает три вещественных корня, данному значению давления p будет соответствовать три возможных значения объема газа (V_1, V_2 и V_3) [первому случаю соответствуют изотермы при низких температурах; второму случаю – изотермы при высоких температурах].

Реальные изотермы, полученные опытным путем, отличаются от теоретических, приближаясь к изотермам Ван-дер-Ваальса только на участках кривой $a - b$ и $c - d$ (см. рис. 54). В средней части кривой экспериментальная изотерма идет по изобаре $c - b$, а не по кривой $b - b' - c' - c$, как этого требует уравнение (9.1). Участок $a - b$ на рис. 54 отвечает газообразному состоянию вещества, а участок $c - d$ – жидкому состоянию [в точке b газ начинает конденсироваться и по мере уменьшения объема переходит постепенно в жидкое состояние, при этом давление остающихся над жидкостью паров сохраняется постоянным до окончания конденсации]. Горизонтальный участок изотермы $b - c$ соответствует одновременному существованию вещества в двух агрегатных состояниях (***фазах***) – жидком и газообразном. Вещество в газообразном состоянии при температуре ниже критической называется ***паром***, а ***пар*** находящийся в равновесии со своей жидкостью называется ***насыщенным***. При температурах выше критической ($T_к$) вещество существует только в газообразном состоянии и ни при каких давлениях не может быть превращено в жидкость. [В точке c пар полностью превращается в жидкость и дальнейшее уменьшение объема становится затруднительным вследствие слабой сжимаемости жидкости (участок изотермы $c - d$ представляет собой почти вертикальную линию, незначительно приближающуюся к оси давлений p). Чем выше температура, при которой получаются экспериментальные изотермы, тем короче становится горизонтальные участки $c - b$ изотерм; при критической температуре $T_к$ участок $c - b$ изотермы исчезает совсем и на графике возникает точка перегиба – критическая точка K (см. рис. 53)].

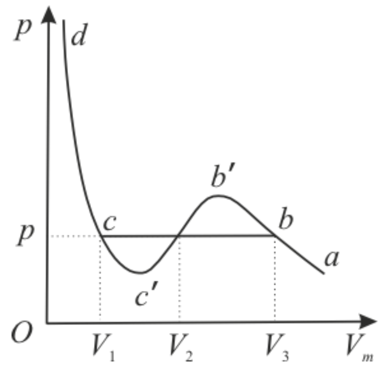

Рис. 54

В критической точке K все три корня уравнения (9.4) должны совпадать ($V_1 = V_2 = V_3 = V_к$). Решая уравнение (9.4) для критического состояния ($p = p_к$, $T = T_к$), можно выразить *критические параметры* молярный объем $V_к$, давление $p_к$ и температуру $T_к$ через универсальную газовую постоянную R и постоянные a и b Ван-дер-Ваальса:

$$V_к = 3b, \;\; p_к = \frac{a}{27b^2}, \;\; T_к = \frac{8a}{27Rb}, \tag{9.5}$$

где R – молярная газовая постоянная.

9.3. Внутренняя энергия реального газа

Известно, что *внутренняя энергия идеального газа* зависит только от температуры газа. Она определяет среднюю кинетическую энергию теплового движения молекул и для 1 моль равна $C_{\mathrm{V}}T$ (см. п. 8.4).

Внутренняя энергия U реального газа равна сумме кинетической энергии $W_{\mathrm{к}}$ теплового (хаотического) движения молекул и их взаимной потенциальной энергии $W_{\mathrm{п}}$ межмолекулярного взаимодействия:

$$U = W_{\mathrm{к}} + W_{\mathrm{п}}.$$

Потенциальная энергия реального газа обусловлена только силами притяжения между молекулами. Взаимодействие молекул реального газа обуславливает появление внутреннего давления [см. формулу (9.2)]:

$$p' = \frac{a}{V_{\mathrm{m}}^2}.$$

Работа, которая затрачивается для преодоления сил притяжения, действующих между молекулами газа, идет на увеличение потенциальной энергии системы [см. (8.4)], т. е. $\delta A = p'\mathrm{d}V_{\mathrm{m}} = \delta U_{\mathrm{m}}$, или $\delta U_{\mathrm{m}} = (a/V_{\mathrm{m}}^2)\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}$, откуда

$$U = -\frac{a}{V_{\mathrm{m}}}.$$

Знак «–» означает, что молекулярные силы, создающие внутреннее давление p', являются силами притяжения. Учитывая слагаемые $C_{\mathrm{V}}T$ и a/V_{m}, получим, что внутренняя энергия 1 моль реального газа

$$U_{\mathrm{m}} = C_V T - \frac{a}{V_m}, \tag{9.6}$$

для произвольной массы реального газа

$$U = \frac{m}{M}\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right), \tag{9.7}$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; a – постоянная Ван-дер-Ваальса; V_m – молярный объем; $\nu = {}^{m}/_{M}$ – количество вещества.

9.4. Свойства жидкостей

Жидкостями называются вещества, находящиеся в конденсированном состоянии, которое является промежуточным между твердым кристаллическим состоянием и газообразным состоянием. Жидкости обладают определенным объемом и принимают форму сосуда, в котором они находятся. Область существования жидкостей ограничена со стороны высоких температур перехода ее в газообразное состояние, со стороны низких температур – переходом в твердое состояние. [В жидкостях расстояние между молекулами значительно меньше, чем в газах (плотность жидкостей в ~ 6000 раз больше плотности насыщенного пара вдали от критической температуры)].

Силы межмолекулярного взаимодействия в жидкостях, в отличие от газов, являются основным фактором, который определяет свойства жидкостей. Подобно твердым телам, жидкости характеризуются очень малой сжимаемостью и сопротивляются растяжению. Жидкости и газы обладают текучестью.

Свойства веществ определяются движением и взаимодействием частиц, из которых они состоят. [*В газах* в столкновениях участвуют в основном две молекулы. Следовательно, теория газов сводится к решению задач двух тел, которая может быть решена точно. *В твердых телах* молекулы совершают колебательное движение в узлах кристаллической решетки в периодическом поле, созданным другими молекулами. Такая задача поведения частиц в периодическом поле, также решается точно. *В жидкостях* каждую молекулу окружают несколько других. Задача подобного типа (*задача многих тел*) в общем виде, независимо от природы молекул, характера их расположения до сих пор точно не решена].

В жидкостях молекулы совершают малые колебания в пределах, ограниченных межмолекулярными расстояниями. Однако время от времени в результате флуктуаций молекула может получить от соседних молекул энергию, которой хватит, скачком переместиться в новое положение равновесия. В новом положении равновесия молекула может находиться некоторое время, пока снова, в результате флуктуаций не получит энергию для скачка. Колебания, которые сменяются скачками, представляют собой *тепловое движение молекул* жидкости.

Среднее время, которое молекула находится в состоянии равновесия, называется ***временем релаксации***:

$$\tau = Be^{\frac{W}{kT}}, \tag{9.8}$$

где B – коэффициент, имеющий смысл периода колебаний молекулы; W – энергия активации молекулы, т. е. энергия необходимая для совершения скачка молекулы; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура [при повышении температуры T увеличивается энергия молекул, следовательно, увеличивается вероятность флуктуаций, время релаксации τ при этом уменьшается].

Внутренне трение в жидкостях, как и в газах, возникает при движении слоев жидкости из-за переноса импульса в направлении нормали к направлению движения слоев жидкости. Зависимость коэффициента вязкости η от температуры T определяется ***формулой Френкеля – Андраде***:

$$\eta = Ae^{\frac{W}{kT}}, \tag{9.9}$$

где A – коэффициент, зависящий от дальности скачка молекулы, частоты ее колебаний и температуры.

Величина обратная вязкости называется *текучестью*. При понижении температуры вязкость некоторых жидкостей увеличивается настолько, что они практически перестают течь, образуя ***аморфные тела*** (стекло, смолы, пластмассы и т. д.).

9.5. Поверхностное натяжение

Для молекул на поверхности жидкостей и твердых тел возникает особый класс явлений, называемых *поверхностными*. Молекулы внутри жидкости окружены со всех сторон такими же молекулами (рис. 55), поэтому силы притяжения со стороны соседей скомпенсированы. Векторная сумма сил притяжения со стороны соседей равна нулю – молекула находится в равновесии. Для молекул же вблизи границы появляются отличные от нуля силы, направленные внутрь этого элемента, перпендикулярно его границе. Эти силы стремятся уменьшить площадь поверхности данного элемента, их макроскопическое проявление называется ***силами поверхностного натяжения***. Энергия молекул в поверхностном слое отлична от их энергии внутри тела. Разность между энергией всех молекул вблизи поверхности раздела и той энергией, которую эти молекулы имели бы, если бы они находились внутри тела, называется ***поверхностной энергией***. [*Поверхностная энергия* – это избыток энергии поверхностного слоя на границе раздела фаз (по сравнению с энергией вещества внутри тела), обусловленный различием межмолекулярных взаимодействий в обоих веществах].

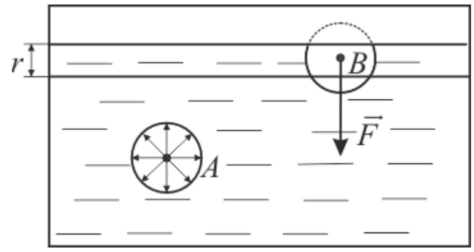

Рис. 55

Очевидно, что поверхностная энергия ΔE пропорциональна площади ΔS поверхности раздела:

$$\Delta E = \sigma \Delta S, \qquad (9.10)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения [*поверхностное натяжение*] – зависит от природы соприкасающихся сред и от их состояния.

[Из курса механики известно, что силы действуют всегда так, чтобы привести тело в состояние с наименьшей энергией. В частности, и поверхностная энергия ΔE стремится принять наименьшее возможное значение. Из этого следует, что поверхность раздела двух сред всегда стремится уменьшиться. Именно с этим связано стремление капелек жидкости (или пузырьков газа) принять сферическую форму: при заданном объеме шар обладает наименьшей из всех фигур поверхностью. Итак, условием устойчивого равновесия жидкости является минимум поверхностной энергии].

Для перемещения молекул из жидкости на ее поверхность требуется совершить работу A, по модулю равную поверхностной энергии ΔE, т. е.

$$A = \Delta E = \sigma \Delta S,$$

откуда

$$\sigma = \frac{A}{\Delta S}, \tag{9.11}$$

т. е. ***коэффициент поверхностного натяжения*** (*поверхностное натяжение*) σ равен работе A, требуемой для образования поверхности жидкости площадью ΔS при постоянной температуре.

Поверхностное натяжение σ может быть определено не только энергетически. Поверхностное натяжение проявляет себя как сила в следующем простом примере. Представим себе пленку жидкости (например, мыльную пленку), натянутую на квадратную проволочную рамку (рис. 56), каждая из сторон которой имеет длину L. Благодаря стремлению поверхности уменьшиться, на проволоку будет действовать сила, которую можно непосредственно измерить. Коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{A}{\Delta S} = \frac{FL}{LL} = \frac{F}{L} \tag{9.12}$$

[учли, что при постоянной силе F работа равна $A = FL$].

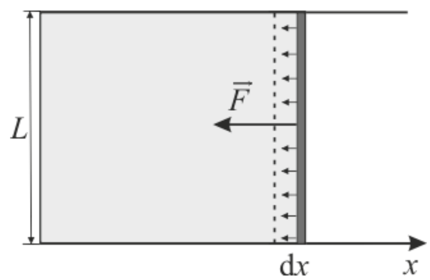

Рис. 56

Таким образом, ***коэффициент поверхностного натяжения*** σ равен силе поверхностного натяжения F, действующей на единицу длины L отрезка, на котором действует эта сила (линии возможного разрыва). Единица коэффициента поверхностного натяжения σ – *ньютон на метр* [Н/м] или *джоуль на метр в квадрате* [Дж/м^2] [см. формулы (9.12) и (9.10)].

Силы поверхностного натяжения никак не изменяются по мере сокращения площади поверхности пленки, так как плотность жидкости, а, следовательно, и среднее расстояние между молекулами на поверхности не изменяется. Поверхностное натяжение σ с повышением температуры уменьшается, так как увеличиваются средние расстояния между молекулами жидкости.

[Коэффициент поверхностного натяжения σ существенным образом зависит от примесей, имеющихся в жидкостях. *Химические соединения*, которые, концентрируясь на поверхности раздела фаз, вызывают снижение поверхностного натяжения, называются ***поверхностно-активными веществами*** (ПАВ). Примером является додецилсульфат натрия $C_{12}H_{25}SO_4Na$, который широко применяется в промышленности и в быту как чистящее и моющее средство. Это вещество может понизить величину σ воды несколько раз. Наиболее распространенным ПАВ по отношению к воде является мыло (в мире потребляется ежегодно ~9 млн. т мыла). Оно сильно уменьшает ее поверхностное натяжение σ (примерно с $7{,}5\cdot10^{-2}$ до $4{,}5\cdot10^{-2}$ Н/м)].

9.6. Смачивание

Смачивание – это явление, возникающее вследствие взаимодействия молекул жидкости с молекулами твердых тел и приводящее к искривлению поверхности жидкости у поверхности твердого тела. Смачивание проявляется в растекании жидкости по твердой поверхности, находящейся в контакте с газом (паром) или другой жидкостью, из-за наличия межмолекулярных сил притяжения, возникающих между молекулами твердого тела и молекулами растекающейся жидкости.

Если при контакте жидкости и твердого тела взаимодействие между их молекулами более сильное, чем взаимодействие между молекулами самой жидкости, то жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения и растекается по поверхности твердого тела. В этом случае жидкость *смачивает твердое тело*. Если взаимодействие между молекулами жидкости сильнее, чем взаимодействие между молекулами жидкости и твердого тела, то жидкость сокращает поверхность соприкосновения. В этом случае жидкость *не смачивает твердое тело*. Например, вода смачивает стекло, но не смачивает парафин; ртуть смачивает поверхности металлов, но не смачивает стекло.

Количественно смачивание характеризуется *углом смачивания* (***краевым углом***). ***Угол смачивания*** θ – это угол между смачиваемой поверхностью твердого тела и поверхностью жидкости на границе «жидкость – твердое тело» (точнее между смачиваемой поверхностью и касательной к поверхности жидкости в точке данной границы) (рис. 57).

Рассмотрим каплю жидкости на поверхности твердого тела (рис. 57 и 58). Форма капли определяется взаимодействием трех сред: газа (3), жидкости (2) и твердого тела (1). Три силы поверхностного натяжения, отнесенные к единице длины линии соприкосновения, равны соответствующим поверхностным натяжениям σ_{12}, σ_{13}, σ_{23}.

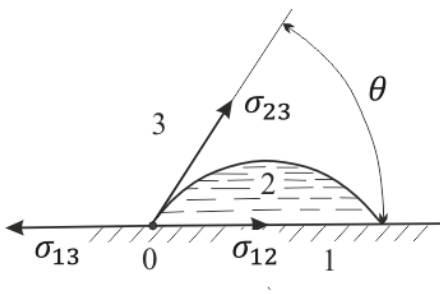

Рис. 57

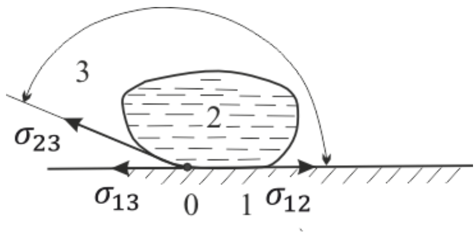

Рис. 58

Условием равновесия капли (рис. 57) является равенство нулю суммы проекций сил поверхностного натяжения на направление касательной к поверхности твердого тела, т. е.

$$-\sigma_{13} + \sigma_{12} + \sigma_{23} \cos\theta = 0,$$

откуда

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}. \tag{9.13}$$

Из условия (9.13) вытекает, что краевой угол θ может быть острым, или тупым в зависимости от значений σ_{13} и σ_{12}. Если $\sigma_{13} > \sigma_{12}$, то $\cos\theta > 0$ и угол θ – острый (рис. 57), т. е. жидкость смачивает твердую поверхность. Если $\sigma_{13} < \sigma_{12}$, то $\cos\theta < 0$ и угол θ – тупой (рис. 58), т. е. жидкость не смачивает твердую поверхность.

Краевой угол θ удовлетворяет условию (9.13), если

$$\frac{|\sigma_{13} - \sigma_{12}|}{\sigma_{23}} \leq 1. \tag{9.14}$$

Возможны следующие случаи:

1. ***Полное смачивание*** $\theta = 0^\circ$ – растекание жидкости по поверхности субстрата до монослоя (например, бензин или нефть на поверхности воды).

2. ***Сильное смачивание*** $0 < \theta < 90^\circ$ (например, спирт на полированном столе; поверхность с сильным смачиванием называют *смачиваемой поверхностью*).

3. ***Слабое смачивание*** $90^\circ < \theta < 180^\circ$ (например, капелька воды на тефлоновой сковородке; такую поверхность называют *несмачиваемой поверхностью*).

4. ***Полное несмачивание*** $\theta = 180^\circ$ (например, шарик ртути на тщательно очищенной и отполированной поверхности металла).

Свойство полной несмачиваемости водой имеет важное значение в ряде технологий. Обладающие такими свойствами поверхности называются еще *водоотталкивающими* или *гидрофобными*. Современные нанотехнологии позволяют изготавливать совершенно несмачиваемые, так называемые *супергидрофобные*, покрытия.

Кривизна поверхности жидкости приводит к возникновению ***избыточного (добавочного) давления***, действующего на жидкость под этой поверхностью. Это давление, обусловленное силами поверхностного натяжения, для выпуклой поверхности положительно, для вогнутой поверхности – отрицательно.

Избыточное давление Δp на жидкость, создаваемое силами поверхностного натяжения и обусловленное кривизной поверхности [сферы, радиуса R; *поверхность жидкости выпуклая*] определяется формулой:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}, \tag{9.15}$$

если *поверхность жидкости вогнутая*, то

$$\Delta p = -\frac{2\sigma}{R}. \qquad (9.16)$$

Формулы (9.15) и (9.16) являются частным случаем ***формулы Лапласа***, определяющей избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (9.17)$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух любых взаимно перпендикулярных нормальных поверхностей жидкости в данной точке. [Лапласовское давление очевидно направлено к центру кривизны поверхности. Поэтому в случае выпуклой поверхности оно направлено внутрь жидкости и добавляется к нормальному давлению жидкости. В случае вогнутой поверхности жидкость будет находиться под меньшим давлением, чем жидкость под плоской поверхностью, так как лапласовское давление направлено за пределы жидкости].

В случае *сферической поверхности* ($R_1 = R_2 = R$) формула (9.17) переходит в (9.15), для *цилиндрической поверхности* ($R_1 = R,\ R_2 = \infty$), эта формула принимает вид

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{\sigma}{R}\,. \qquad (9.18)$$

Если *поверхность раздела плоская* ($R_1 = R_2 = \infty$) силы поверхностного натяжения избыточного давления не создают.

9.7. Капиллярные явления

С явлениями смачивания и несмачивания связаны так называемые ***капиллярные явления***. Если в жидкость опустить ***капилляр*** [от латинского cappilus – «волос»] – трубку малого диаметра, то поверхность жидкости в капилляре принимает вогнутую форму, близкую к сферической в случае смачивания (рис. 59) и выпуклую в случае несмачивания (рис. 60). Такие поверхности называются ***менисками***. [В первом случае форма мениска у стенки сосуда такая, что угол θ между плоскостью, касательной к поверхности жидкости и стенкой острый (угол $0 < \theta < 90°$). Во втором случае угол θ тупой (угол $90^\circ < \theta < 180^\circ$) (жидкость как бы «отходит от стенки»). В капиллярах мениск жидкости при полном смачивании или несмачивании стенок трубки можно принять за полусферу, радиус которой равен радиусу капилляра r].

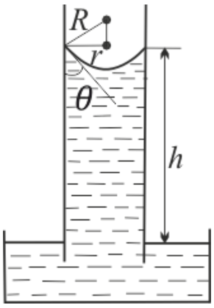

Рис. 59

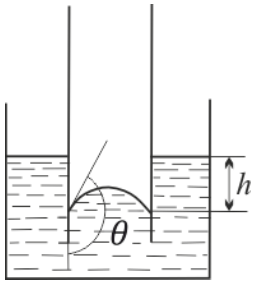

Рис.60

Под вогнутой поверхностью жидкости появится отрицательное избыточное давление, определяемое по формуле (9.16). Наличие этого давления приводит к тому, что жидкость в капилляре поднимается, так как под плоской поверхностью жидкости в широком сосуде избыточного давления нет. Если же жидкость не смачивает стенки капилляра, то положительное избыточное давление приведет к опусканию жидкости в капилляре. Явление изменения высоты уровня жидкости в капиллярах называется ***капиллярностью***.

Лапласовское давление вызывает подъем жидкости в капилляре [или опускание жидкости] на такую высоту h (рис. 59), пока гидростатическое давление [*давление столба жидкости*] $\rho g h$ не уравновесит лапласовское давление Δp, т. е.

$$\rho g h = \frac{2\sigma}{R},$$

где ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Из последнего уравнения получим высоту h подъема жидкости [или опускания жидкости] в капилляре:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R} = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r} \tag{9.19}$$

[учли, что $R = r/\cos\theta$; r – радиус капилляра; θ – краевой угол].

Выражение (9.19) называется ***формулой Жюрена***. Если жидкость не смачивает стенки капилляра – мениск выпуклый ($\cos\theta < 0$), то жидкость в этом случае опускается ниже уровня жидкости в сосуде на глубину $-h$ [см. формулу (9.19) и рис. 60].

Капиллярные явления играют большую роль в природе и технике. Капиллярными свойствами обладает всякое пористое тело: например, фильтровальная бумага, сухой мел, разрыхленная почва и т. д. Благодаря многочисленным капиллярам в почве вода поднимается вверх и интенсивно испаряется. Влагообмен в растениях осуществляется за счет поднятия воды по тончайшим капиллярам. В фитиле керосинки или лампы керосин непрерывно поднимается по капиллярам вверх, где и сгорает. Пористые тела легко пропитываются смачивающими жидкостями и хорошо их удерживают. Для несмачивающих жидкостей, наоборот, эти тела являются непроницаемыми. Этим объясняется, например, водонепроницаемость смазанных жиром перьев и пуха водоплавающих птиц.

Примеры решения задач

9.1. Даны постоянные, $a = 20{,}88\cdot10^{-2}$ Н · м^4/моль^2 и $b = 16{,}97\cdot10^{-6}$ м^3/моль, входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса. Найдите значения критического объема, критической температуры и критического давления неона. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Дано: $a = 20{,}88\cdot10^{-2}$ Н · м^4/моль^2; $b = 16{,}97\cdot10^{-6}$ м^3/моль; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Найти: $V_{\text{кр}}$; $T_{\text{кр}}$; $p_{\text{кр}}$.

Решение. Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса) для произвольной массы газа:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT,$$

где a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса; $\nu = m/M$ – количество вещества; R – молярная газовая постоянная.

Из уравнения Ван-дер-Ваальса можно получить формулы для критических параметров (объем, давление и температура):

$$V_{\text{кр}} = 3b, \;\; p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}, \;\; T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb}.$$

Ответ: $V_{\text{кр}} = 50{,}91\cdot10^{-6}$ м^3/моль; $p_{\text{кр}} = 26{,}85\cdot10^{6}$ Па; $T_{\text{кр}} = 438{,}71$ К.

9.2. Криптон, плотность которого 0,02 г/см^3, находится в баллоне под давлением 0,7 МПа. Принимая поправки Ван-дер-Ваальса: $a = 23{,}54 \cdot 10^{-2}$ Н · м^4/моль^2 и $b = 39{,}78 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль, найдите его температуру (T_2) и сравните ее с температурой (T_1) идеального газа [криптон] при тех же условиях. Молярная масса криптона $83{,}798 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; молярная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).
Дано: $\rho = 0{,}02$ г/см^3 $= 20$ кг/м^3; $p = 7 \cdot 10^5$ Па; $a = 23{,}54 \cdot 10^{-2}$ Н · м^4/моль^2; $b = 39{,}78 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль; $M = 84 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).
Найти: T_1; T_2.
Решение. Идеальный газ подчиняется уравнению Менделеева – Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} R T_1,$$

где p – давление газа; V – объем газа; m – масса газа; M – молярная масса; R – молярная газовая постоянная; T_1 – температура идеального газа.

Учитывая, что плотность газа $\rho = m/V$, найдем искомую температуру идеального газа (*криптона*):

$$T_1 = \frac{pM}{\rho R}.$$

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса) для произвольной массы газа имеет вид:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu R T,$$

где $\nu = m/M$ – количество вещества; a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса.

Подставив

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{\rho V}{M}$$

в уравнение Ван-дер-Ваальса, получим

$$\left(p + \frac{\rho^2 a}{M^2}\right)(M - \rho b) = \rho R T,$$

откуда температура реального газа (криптона)

$$T_2 = \frac{\left(p + \frac{\rho^2 a}{M^2}\right)(M - \rho b)}{\rho R}.$$

Ответ: $T_1 = 353{,}79$ К; $T_2 = 357{,}12$ К.

9.3. Вертикальная стеклянная капиллярная трубка внутренним диаметром 0,9 мм опущена в бензин марки АИ-95. Найдите массу бензина, поднявшегося в трубке, если коэффициент поверхностного натяжения бензина 0,021 Н/м (при температуре 15 °C). Считать, что бензин полностью смачивает стекло.
Дано: $d_1 = 0{,}9$ мм $= 9 \cdot 10^{-4}$ м; $\sigma = 0{,}021$ Н/м; $g = 9{,}81$ м/с^2.

Найти: m.

Решение. Масса жидкости (бензина) в капиллярной трубке:

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi d_1^2}{4} h,$$

где $V = \pi d_1^2/4$ – объем жидкости в капилляре; d_1 – внутренний диаметр капилляра; h – высота жидкости в капилляре.

Жидкость в капиллярной трубке поднимается на такую высоту h, при которой давление столба жидкости p (гидростатическое давление) уравновешивается избыточным давлением Δp,

$$\rho g h = \frac{2\sigma}{R},$$

где g – ускорение свободного падения; R – радиус свободной поверхности жидкости, имеющей форму полусферы, который определяется по формуле:

$$R = \frac{r}{\cos\theta},$$

где r – радиус капилляра; θ – краевой угол.

Тогда

$$\rho g h = \frac{2\sigma\cos\theta}{r},$$

откуда высота капиллярного подъема

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}.$$

Если считать, что бензин полностью смачивает стекло (условие задачи), то $\theta = 0$ и $\cos\theta = 1$. Тогда, высота, на которую поднимется бензин в капиллярной трубке,

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \frac{4\sigma}{\rho g d_1}.$$

Подставив полученное выражение h в формулу для массы, получим искомую массу бензина в капиллярной трубке:

$$m = \frac{\pi d_1 \sigma}{g}.$$

Ответ: $m = 6{,}05 \cdot 10^{-6}$ кг.

Задачи

78. Даны поправки, $a = 2{,}35 \cdot 10^{-1}$ Н · м^4/моль^2 и $в = 39{,}78 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль, входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса. Найдите значения критической температуры и критического давления криптона. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К). Ответ: 210,63 К; 5,5 Мпа

79. Найдите эффективный диаметр молекул реального газа, для которого поправка (*постоянная*) Ван-дер-Ваальса на недоступный объем составляет $3{,}862 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. Число Авогадро $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Молекулы считать шарами. Ответ: 0,31 нм

80. В баллоне емкостью 120 л находится 60 моль реального газа. Найдите внутреннее давление, обусловленное силами притяжения молекул между собой. Постоянная Ван-дер-Ваальса для этого газа равна $6{,}25 \cdot 10^{-1}$ Н · м^4/моль^2.

Ответ: 156,25 кПа

81. Аргон массой 90 г находится в сосуде емкостью 8 л. Найдите внутреннее давление и собственный объем молекул аргона. Постоянные Ван-дер-Ваальса для данного газа: $a = 1{,}36 \cdot 10^{-1}$ Н · м^4/моль^2, $в = 32{,}19 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К). Ответ:10,79 кПа; 0,018 л

82. В капиллярной трубке радиусом 0,8 мм жидкость поднялась на высоту 7 мм. Найдите плотность данной жидкости, если ее коэффициент поверхностного натяжения равен 22 мН/м. Жидкость полностью смачивает стенки капилляра. Ответ: 0,8 г/см^3

83. Найдите давление воздуха в воздушном пузырьке диаметром 3 мкм, который находится в воде на глубине 4 м. Атмосферное давление принять нормальным. Коэффициент поверхностного натяжения воды 0,073 Н/м, ее плотность 1 г/см^3. Ответ: 237,87 кПа

84. Вертикальный капилляр внутренним диаметром 1,8 мм опущен в керосин. Найдите массу керосина, поднявшегося в капилляре, если коэффициент поверхностного натяжения керосина 0,024 Н/м, а его плотность 0,8 г/см^3.

Ответ: $1{,}38 \cdot 10^{-5}$ кг

85. Из капиллярной трубки с радиусом канала 0,3 мм по капле вытекает жидкость. Масса 50 капель равна 0,701 г. Найдите коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Ответ: 0,073 Н/м

86. Вертикальная стеклянная трубка внутренним радиусом 0,4 мм помещена в ртуть, которая опускается в трубке на глубину 1,77 см. Найдите коэффициент поверхностного натяжения ртути, если ее плотность 13,6 г/см^3. Считать, что ртуть не смачивает стекло ($\theta = \pi$). Ответ: 0,472 Н/м

Теоретические вопросы

1. Статистический и термодинамический методы исследования. Состояние термодинамической системы. Термодинамические параметры. Температурные шкалы. Связь между термодинамической температурой и температурой по Международной практической шкале.
2. Термодинамический процесс. Термодинамическое равновесие. Идеальный газ – простейшая модель реальных газов.
3. Законы, описывающие поведение идеальных газов: Бойля – Мариотта, Гей-Люссака, Авогадро и Дальтона.
4. Параметры состояния газа. Уравнение состояния идеального газа в различных формах: для заданного числа молей, для заданной массы газа.
5. Параметры состояния газа. Уравнение состояние идеального газа в различных формах: для концентрации молекул, для заданного числа частиц. Число Лошмидта.
6. Параметры состояния газа. Уравнение состояние идеального газа в различных формах: для заданной массы газа, для плотности газа.
7. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.
8. Идеальный газ – простейшая модель реальных газов. Получите основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.
9. Функция распределения молекул по скоростям и ее график. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям. Наиболее вероятная скорость.
10. График распределения Максвелла. Наиболее вероятная скорость. Графики для одного газа при различных температурах.
11. Средняя квадратичная скорость и средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул. Абсолютная температура в молекулярно-кинетической теории идеального газа.
12. График распределения Максвелла. Наиболее вероятная скорость. Графики для газов с различной молярной массой при одинаковой температуре.
13. Вычисление средних значений с помощью распределения Максвелла по скоростям. Средняя арифметическая и средняя квадратичная скорости.
14. Функция распределения молекул по энергиям теплового движения.
15. Барометрическая формула для зависимости давления от высоты над поверхностью Земли.
16. Распределение Больцмана для внешнего потенциального поля (зависимость концентрации молекул газа от высоты над поверхностью Земли).
17. Зависимость плотности газа от высоты над поверхностью Земли.

18. Столкновения молекул газа: среднее число столкновений в единицу времени и средняя длина свободного пробега. Понятие эффективного диаметра молекул.
19. Получите формулу для среднего числа столкновений, испытываемых молекулой газа в единицу времени.
20. Получите формулу для средней длины свободного пробега молекулы газа.
21. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах: механизм теплопроводности при наличии градиента температуры. Закон Фурье. Формула для потока теплоты. Коэффициент теплопроводности, его размерность и зависимость для идеального газа от абсолютной температуры.
22. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах: механизм диффузии «меченых» частиц газа при наличии градиента их концентрации. Закон Фика. Формула для плотности потока массы. Коэффициент диффузии, его размерность и зависимость для идеального газа от давления и абсолютной температуры.
23. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах: механизм внутреннего трения (вязкости) газа при наличии градиента скорости направленного движения. Закон Ньютона. Формула для силы трения между слоями газа. Коэффициент вязкости, его размерность и зависимость для идеального газа от абсолютной температуры.
24. Внутренняя энергия – энергия хаотического (теплового) движения микрочастиц системы и энергия взаимодействия этих частиц. Число степеней свободы молекулы. Закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул.
25. Внутренняя энергия, отнесенная к 1 моль идеального газа. Внутренняя энергия для произвольной массы газа.
26. Внутренняя энергии и теплота. Первое начало термодинамики. «Вечный двигатель первого рода».
27. Работа газа при изменении его объема. Графическое выражение работы в координатах p (давление) и V (объем).
28. Удельная теплоемкость вещества. Единица удельной теплоемкости. Молярная теплоемкость. Единица молярной теплоемкости. Связь между удельной и молярной теплоемкостями.
29. Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме (C_V). Внутренняя энергия идеального газа. Выражение для внутренней энергии через теплоемкость при постоянном объеме и через число степеней свободы молекул.
30. Молярная теплоемкость при постоянном давлении (C_p). Теплоемкость идеального газа при постоянном объеме и при постоянном давлении – выражение через число степеней свободы. Уравнение Майера.

31. Теплоемкость для одно-, двух- и многоатомных жестких молекул. Зависимость теплоемкости от температуры.
32. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам. Первое начало термодинамики для изохорного и изобарного процессов в идеальном газе.
33. Получите формулу для связи молярных теплоемкостей при постоянном объеме и при постоянном давлении. Связь удельных теплоемкостей.
34. Первое начало термодинамики для изотермического процесса в идеальном газе. Получите выражение для работы в изотермическом процессе. Количество теплоты в изотермическом процессе.
35. Адиабатный процесс. Первое начало термодинамики для адиабатического процесса в идеальном газе. Получите уравнение для адиабатического процесса в переменных p (давление) и V (объем). Показатель адиабаты (γ), его выражение через теплоемкости и через число степеней свободы.
36. Первое начало термодинамики для адиабатического процесса в идеальном газе. Получите уравнение для адиабатического процесса в переменных T (абсолютная температура) и V (объем). Показатель адиабаты (γ), его выражение через теплоемкости и через число степеней свободы.
37. Первое начало термодинамики для адиабатического процесса в идеальном газе. Получите выражение для работы в адиабатическом процессе в зависимости от степени расширения (сжатия) газа. Показатель Пуассона (γ). График зависимости между параметрами состояния идеального газа при $\delta Q = 0$. Адиабата в координатах p, V.
38. Сравнение графиков адиабатического и изотермического процессов в переменных p (давление) и V (объем), пересекающихся в одной точке графика. Способы осуществления процессов, близких к адиабатическому и изотермическому.
39. Политропный процесс. Получите уравнение для политропного процесса в переменных p, V. Показатель политропы (n). График зависимости между параметрами состояния идеального газа при $C = \mathrm{const}$ (политропа в координатах p, V).
40. Обратимые и необратимые процессы. Круговой процесс (цикл). Работа идеального газа при прямом и обратном циклах. Выражение для первого начала термодинамики для кругового процесса. Термический коэффициент полезного действия (КПД) и его физический смысл.
41. Приведенное количество теплоты. Энтропия: дифференциальное определение энтропии. Изменение энтропии для обратимых и необратимых процессов. Неравенство Клаузиуса.
42. Изменение энтропии при равновесном переходе из состояния *1* в состояние *2*. Изменение энтропии в процессах идеального газа (получите выражение для вычисления разности энтропий двух состояний идеального газа в изохорном и изотермическом процессах).

43. Получите выражение для вычисления разности энтропий двух состояний идеального газа в изотермическом и изобарном процессах.
44. Энтропия как функция состояния. Изменение энтропии при нагревании и при фазовых превращениях (плавлении, испарении).
45. Энтропия при адиабатном обратимом процессе (изоэнтропийный процесс).
46. Энтропия как мера беспорядка системы. Статистический вес (термодинамическая вероятность), его связь с энтропией. Формула Больцмана (ее статическое толкование).
47. Представив цикл Карно на диаграмме p, V графически, укажите, какой площадью определяется: 1) работа, совершенная над газом; 2) работа, совершенная самим расширяющимся газом.
48. Второе начало термодинамики. Различные формулировки второго начала термодинамики (по Кельвину и по Клаузиусу). Невозможность создания вечного двигателя второго рода.
49. Третье начало термодинамики (теорема Нернста – Планка).
50. Тепловые двигатели и холодильные машины. Теорема Карно. Цикл Карно и его КПД.
51. Получите выражение для КПД цикла Карно. Реальные циклы.
52. Представьте графически цикл Карно в переменных T, S. Графически определите количество теплоты. КПД цикла Карно.
53. Реальные газы. Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия. График зависимости сил межмолекулярного взаимодействия от расстояния r между молекулами.
54. Реальные газы. Учет взаимодействия и собственного объема молекул. Внутреннее давление. Уравнение Ван-дер-Ваальса.
55. Изотермы Ван-дер-Ваальса и их сравнение с реальными изотермами в координатах p, V. Критическая изотерма. Критическая температура и ее значение. Критическая точка (критический объем и критическое давление). Метастабильные состояния.
56. Внутренняя энергия реального газа.
57. Свойства жидкостей. Поверхностная энергия. Поверхностное натяжение жидкостей. Коэффициент поверхностного натяжения.
58. Смачивание. Краевой угол. Полное смачивание. Полное несмачивание. Давление под искривленной поверхностью жидкости. Поверхностно-активные вещества (ПАВ).
59. Капиллярные явления. Формула для определения высоты капиллярного подъема жидкости в цилиндрической трубке. Значение капиллярных явлений в природе и технике.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Таблица производных, интегралов и некоторых тригонометрических формул

Функция	Производная	Функция	Производная	Функция	Производная
x^n	nx^{n-1}	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
e^{nx}	ne^{nx}	$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
a^x	$a^x \ln a$	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{vu'-v'u}{v^2}$	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{a}$			$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq 1$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln x$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$
$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$
$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$
$\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}dx = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \sqrt{\pi/2}, & n=1/2 \\ 1, & n=1 \\ 2, & n=2 \end{cases}$	$\int\limits_0^\infty x^n\, e^{-x^2}dx = \begin{cases} \sqrt{\pi/2}, & n=0 \\ 1/2, & n=1 \\ \sqrt{\pi/4}, & n=2 \\ 1/2, & n=3 \end{cases}$
$\int\limits_0^\infty \dfrac{x^n dx}{e^x-1} = \begin{cases} 2{,}31, & n=1/2 \\ \pi^2/6, & n=1 \\ 2{,}405, & n=2 \\ \pi^4/15, & n=3 \\ 24{,}9, & n=4 \end{cases}$	$\int\limits_0^\alpha \dfrac{x^3 dx}{e^x-1} = \begin{cases} 0{,}225, & \alpha=1 \\ 1{,}18, & \alpha=2 \\ 2{,}56, & \alpha=3 \\ 4{,}91, & \alpha=5 \\ 6{,}43, & \alpha=10 \end{cases}$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$	$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

2. Обозначения и названия некоторых единиц

№ n/n	Обозначение и название единицы	№ n/n	Обозначение и название единицы	№ n/n	Обозначение и название единицы
1.	А – ампер	14.	дин – дина	27.	Н – ньютон
2.	Å – ангстрем	15.	Дж – джоуль	28.	П – пуаз
3.	а. е. м. – атомная единица массы	16.	дптр – диоптрия	29.	Па – паскаль
4.	Б – бел	17.	К – кельвин	30.	рад – радиан
5.	б – барн	18.	кал – калория	31.	с – секунда
6.	Бк – беккерель	19.	кд – кандела	32.	См – сименс
7.	В – вольт	20.	Кл – кулон	33.	ср – стерадиан
8.	Вб – вебер	21.	л – литр	34.	Тл – тесла
9.	Вт – ватт	22.	лк – люкс	35.	Ф – фарад
10.	Гн – генри	23.	лм – люмен	36.	ч – час
11.	г – грамм	24.	м – метр	37.	Э – эрстед
12.	Гс – гаусс	25.	мин – минута	38.	эВ – электрон-вольт
13.	Гц – герц	26.	Мкс – максвелл	39.	

3. Десятичные приставки к названиям единиц

1.	Э – экса, 10^{18}	6.	к – кило, 10^{3}	11.	мк – микро, 10^{-6}
2.	П – пета, 10^{15}	7.	г – гекто, 10^{2}	12.	н – нано, 10^{-9}
3.	Т – тера, 10^{12}	8.	д – деци, 10^{-1}	13.	п – пико, 10^{-12}
4.	Г – гига, 10^{9}	9.	с – санти, 10^{-2}	14.	ф – фемто, 10^{-15}
5.	М – мега, 10^{6}	10.	м – милли, 10^{-3}	15.	а – атто, 10^{-18}

4. Единицы величин в СИ

№ n/n	Величина	Единица величины в СИ	№ n/n	Величина	Единица величины в СИ
1.	Длина	м	24.	Электрический заряд	Кл
2.	Время	с	25.	Потенциал	В
3.	Скорость	м/с	26.	Напряженность электрического поля	В/м
4.	Ускорение	м/с^2	27.	Электрическое смещение	Кл/м^2
5.	Частота колебаний	Гц	28.	Электрический момент диполя	Кл · м^2
6.	Круговая частота	с$^{-1}$	29.	Поляризованность	Кл/м^2
7.	Угловая скорость	рад/с	30.	Электрическая емкость	Ф
8.	Угловое ускорение	рад/с^2	31.	Сила тока	А
9.	Масса	кг	32.	Плотность тока	А/м^2
10.	Плотность	кг/м^3	33.	Электрическое сопротивление	Ом
11.	Сила	Н	34.	Удельное сопротивление	Ом · м
12.	Давление, напряжение	Па	35.	Электрическая проводимость	См
13.	Импульс	кг · м/с	36.	Магнитная индукция	Тл
14.	Момент силы	Н · м	37.	Магнитный поток	Вб
15.	Энергия, работа	Дж	38.	Напряженность магнитного поля	А/м
16.	Мощность	Вт	39.	Магнитный момент	А · м^2

Продолжение таблицы 4

17.	Плотность потока энергии	$Вт/м^2$	40.	Намагниченность	А/м
18.	Момент импульса	$кг \cdot м^2/с$	41.	Индуктивность	Гн
19.	Момент инерции	$кг \cdot м^2$	42.	Сила света	кд
20.	Вязкость	Па · с	43.	Световой поток	лм
21.	Температура	К	44.	Освещенность	лк
22.	Теплоемкость	Дж/К	45.	Светимость	$лм/м^2$
23.	Энтропия	Дж/К	46.	Яркость	$кд/м^2$

5. Некоторые внесистемные единицы

1.	1 сут = 86400 с	7.	1 мм рт. ст. = 133, 3 Па
2.	1 год = 365,25 сут = $3{,}16 \cdot 10^7$ с	8.	1 Å = 10^{-10} м
3.	1° = $1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад	9.	1 кал = 4,18 Дж
4.	$1' = 2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад; $1'' = 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад	10.	1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж = $1{,}6 \cdot 10^{-12}$ эрг
5.	1 атм = 1013 кПа = 760 мм рт. ст.	11.	1 а. е. м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг = 931,5 МэВ
6.	1 бар = 100 кПа (точно)	12.	1 Ки (кюри) = $3{,}70 \cdot 10^{10}$ Бк

6. Основные физические постоянные (округленные значения)

№ n/n	Физическая постоянная	Обозначение	Числовое значение
1.	Нормальное ускорение свободного падения	g	9,81 $м/с^2$
2.	Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $м^3/(кг \cdot с^2)$
3.	Скорость света в вакууме	c	$3 \cdot 10^8$ м/с
4.	Молярная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль · К)
5.	Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}022 \cdot 10^{23}$ $моль^{-1}$
6.	Постоянная Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
7.	Элементарный заряд	e	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
8.	Масса покоя электрона	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
9.	Масса покоя протона	m_p	$1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
10.	Масса покоя нейтрона	m_n	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
11.	Удельный заряд электрона	e/m_e	$1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
12.	Объем 1 моль идеального газа при н.у. (T_0 = 273,15 К, p_0 = 101325 Па)	V_0	$22{,}41 \cdot 10^{-3}$ $м^3/моль$
13.	Число Лошмидта	N_L	$2{,}68 \cdot 10^{25}$ $м^{-3}$
14.	Постоянная Планка	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
15.	Атомная единица массы	*а. е. м.*	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
16.	Энергия, соответствующая 1 а. е. м.		931,50 МэВ
17.	Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
18.	Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
19.	Первый боровский радиус	a_0	$5{,}28 \cdot 10^{-11}$ м
20.	Энергия покоя электрона	E_0	0,511 МэВ

7. Некоторые астрономические величины

№ n/n	Астрономическая величина	Числовое значение
1.	Радиус Земли (среднее значение)	$6{,}37\cdot10^{6}$ м
2.	Масса Земли	$5{,}98\cdot10^{24}$ кг
3.	Радиус Солнца (среднее значение)	$6{,}95\cdot10^{8}$ м
4.	Масса Солнца	$1{,}98\cdot10^{30}$ кг
5.	Радиус Луны (среднее значение)	$1{,}74\cdot10^{6}$ м
6.	Масса Луны	$7{,}33\cdot10^{22}$ кг
7.	Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49\cdot10^{11}$ м
8.	Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84\cdot10^{8}$ м
9.	Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин
10.	Радиус Марса (среднее значение)	$3{,}39\cdot10^{6}$ м
11.	Масса Марса	$6{,}42\cdot10^{23}$ кг
12.	Расстояние от центра Марса до центра Солнца	$2{,}28\cdot10^{11}$ м

8. Плотность некоторых жидкостей, 10^3 кг/м^3

№ n/n	Название жидкости	Плотность
1.	Вода (при температуре 4 °*C*)	1,00
2.	Глицерин	1,26
3.	Керосин	0,80
4.	Масло машинное	0,90
5.	Ртуть (при 0 °*C*)	13,596
6.	Спирт этиловый (при 20 °*C*)	0,789
7.	Спирт метиловый (при 20 °*C*)	0,793

9. Плотность газов (при нормальных условиях), кг/м^3

№ n/n	Название газа	Плотность
1.	Азот	1,25
2.	Аргон	1,28
3.	Водород	0,09
4.	Воздух	1,29
5.	Гелий	0,18
6.	Кислород	1,43
7.	Метан	0,72
8.	Углекислый газ	1,98
9.	Хлор	3,21

10. Плотность твердых тел, 10^3 кг/м^3

№ n/n	Название твердого тела	Плотность
1.	Алюминий	2,70
2.	Вольфрам	19,25
3.	Железо	7,87
4.	Кобальт	8,90
5.	Лёд (при температуре –20 °*C*)	0,92

Продолжение таблицы 10

6.	Медь	8,94
7.	Никель	8,90
8.	Нихром	8,40
9.	Фарфор	2,3 – 2,5
10.	Цинк	7,14

11. Эффективный диаметр молекулы газов, нм

№ n/n	Название газа	Эффективный диаметр
1.	Азот	0,31
2.	Аргон	0,35
3.	Водород	0,27
4.	Воздух	0,37
5.	Гелий	0,19
6.	Кислород	0,35
7.	Неон	0,24
8.	Углекислый газ	0,40
9.	Хлор	0,37
10.	Этан	0,54

12. Удельная теплота плавления, 10^3 Дж/кг

№ n/n	Название твердого тела	Удельная теплота плавления
1.	Алюминий	393
2.	Вольфрам	184
3.	Железо	270
4.	Золото	67
5.	Лёд	330
6.	Медь	213
7.	Натрий	113
8.	Олово	59
9.	Парафин	150
10.	Свинец	24,3

13. Удельная теплота парообразования, 10^3 Дж/кг

(при температуре кипения и нормальном атмосферном давлении)

№ n/n	Название жидкости	Удельная теплота парообразования
1.	Азот жидкий	201
2.	Бензин	230–310
3.	Вода	2260
4.	Водород жидкий	450
5.	Воздух	197
6.	Гелий жидкий	23
7.	Керосин	209–230
8.	Кислород жидкий	214
9.	Ртуть	293
10.	Спирт этиловый	906
11.	Эфир этиловый	356

14. Удельная теплоемкость, Дж/(кг · К)

(В таблице даны значения удельной теплоемкости некоторых распространенных металлов и сплавов при температуре 20 °*C* и удельные теплоемкости c_p распространенных жидкостей при температуре 10–25 °*C* и нормальном атмосферном давлении)

№ п/п	Название вещества	Удельная теплоемкость
1.	Алюминий	897
2.	Вода	4182
3.	Вольфрам	134
4.	Бензин	2090
5.	Глицерин $C_3H_5(OH)_3$	2430
6.	Керосин	2085–2220
7.	Лёд *при температуре 0 °C*	2150
8.	Масло трансформаторное	1680
9.	Масло хлопковое	1737
10.	Медь	383
11.	Нефть	2100
12.	Нихром	460
13.	Ртуть	139
14.	Свинец	128
15.	Серебро	235
16.	Спирт метиловый (метанол) CH_3OH	2470
17.	Спирт этиловый (этанол) C_2H_5OH	2470
18.	Сталь углеродистая	468
19.	Цинк	385
20.	Эфир этиловый $C_4H_{10}O$	2340

15. Постоянные Ван-дер-Ваальса

№ п/п	Газ	***a***, Н · м^4/моль^2	***b***, 10^{-5} м^3/моль
1.	Азот	0,1412	3,862
2.	Аммиак	0,42257	3,707
3.	Аргон	0,1363	3,221
4.	Вода (пары)	0,5541	3,041
5.	Водород	0,0245	2,665
6.	Воздух	1,3078	11,413
7.	Гелий	0,00346	2,361
8.	Кислород	0,1358	3,167
9.	Криптон	0,2354	3,978
10.	Неон	0,2088	1,697
11.	Окись азота	0,1438	2,886
12.	Окись углерода	0,1454	3,949
13.	Метан	0,2256	4,272
14.	Углекислый газ	0,3641	4,284
15.	Хлор	0,6497	5,624
16.	Этан	0,5427	6,419

16. Коэффициент поверхностного натяжения жидкостей, мН/м (при 20 °C)

№ n/n	Жидкость	Коэффициент поверхностного натяжения
1.	Вода	72,5
2.	Бензин	21
3.	Керосин	24
4.	Мыльный раствор	40
5.	Молоко	46
6.	Нефть	30
7.	Ртуть	472
8.	Спирт этиловый	22
9.	Эфир этиловый при 25 °C, газовая среда: воздух	17

17. Коэффициент теплопроводности χ некоторых веществ, Вт/(м · К)

№ n/n	Вещество	χ	№ n/n	Вещество	χ
1.	Алебастровые плиты	0,48	13.	Каучук натуральный	0,042
2.	Бетон на песке	0,72	14.	Керамзитобетон	0,2
3.	Бумага	0,14	15.	Кирпич пустотелый	0,44
4.	Вата хлопковая	0,055	16.	Кирпич силикатный	0,81
5.	Войлок шерстяной	0,045	17.	Латунь	110
6.	Воздух (p = 760 мм рт. ст., t = 0 °C)	0,0237	18.	Медь	380
7	Гипс строительный	0,35	19.	ПВХ	0,19
8.	Гранит, базальт	3,5	20.	Резина	0,15
9.	Древесина твердых пород	0,2	21.	Сталь	52
10.	Дюралюминий	160	22.	Стекло	1,15
11.	Железобетон	1,7	23.	Чугун	56
12.	Камень	1,4	24.	Эбонит	0,16

18. Динамическая вязкость η некоторых веществ при температуре 25 °C, 10^{-3} Па · с

№ n/n	Вещество	η	№ n/n	Вещество	η
1.	Анилин	3,847	9.	Глицерин при t = 20 °C	12100
2.	Ацетон	0,306	10.	Глицерин при t = 25 °C	934
3.	Бензол	0,604	11.	Глицерин при t = 100 °C	14,8
4.	Бром	0,944	12.	Нитробензол	1,863
5.	Вода при t = 0 °C	1,793	13.	Ртуть	1,526
6.	Вода при t = 20 °C	1,004	14.	Уксусная кислота	1,056
7.	Вода при t = 25 °C	0,890	15.	Фенол при t = 50 °C	3,437
8.	Вода при t = 100 °C	0,282	16.	Этанол	1,074

19. Коэффициент диффузии *D* газов и паров, см^2/с

№ n/n	Газы и (пары)	t, °C	D	№ n/n	Газы и (пары)	t, °C	D
1.	Аргон – гелий	15	0,70	9.	Кислород – азот	12,5	0,20
2.	Водород – азот	12,5	0,73	10.	Бензол – водород	0	0,29
3.	Водород – воздух	0	0,64	11.	Бензол – кислород	0	0,18
4.	Водород – кислород	0	0,69	12.	Спирт метиловый – водород	0	0,50
5.	Водород – кислород	14	0,77	13.	Спирт метиловый – воздух	0	0,13
6.	Воздух – водяной пар	0	0,22	14.	Спирт метиловый – кислород	0	0,18
7.	Воздух – водяной пар	15	0,26	15.	Спирт этиловый – водород	0	0,37
8.	Кислород – азот	0	0,18	16.	Спирт этиловый – воздух	0	0,10

20. Греческий алфавит

Α, α – альфа	Ι, ι – йота	Ρ, ρ – ро
Β, β – бета	Κ, κ – каппа	Σ, σ – сигма
Γ, γ – гамма	Λ, λ – ламбда	Τ, τ – тау
Δ, δ – дельта	Μ, μ – мю	Υ, υ – ипсилон
Ε, ε – эпсилон	Ν, ν – ню	Φ, φ – фи
Ζ, ζ – дзэта	Ξ, ξ – кси	Χ, χ – хи
Η, η – эта	Ο, ο – омикрон	Ψ, ψ – пси
Θ, θ, ϑ – тхэта	Π, π – пи	Ω, ω – омега

21. Латинский алфавит

A, a – a	J, j – йот/жи	S, s – эс
B, b – бэ	K, k – ка	T, t – тэ
C, c – це	L, l – эль	U, u – у
D, d – дэ	M, m – эм	V, v – вэ
E, e – э	N, n – эн	W, w – дубль-вэ
F, f – эф	O, o – о	X, x – икс
G, g – гэ/жэ	P, p – пэ	Y, y – игрек/ипсилон
H, h – ха/аш	Q, q – ку	Z, z – зед
I, i – и	R, r – эр	

22. Периодическая система химических элементов Д. И. Менделе

Г Р У П П Ы Э Л Е М Е Н Т О В							
I	II	III	IV	V	VI	VII	
1 H водород 1,0079							
3 Li литий 6,941	4 Be бериллий 9,01218	5 B бор 10,811	6 C углерод 12,011	7 N азот 14,0067	8 O кислород 15,9994	9 F фтор 18,9984	
11 Na натрий 22,98977	12 Mg магний 24,305	13 Al алюминий 26,98154	14 Si кремний 28,0855	15 P фосфор 30,97376	16 S сера 32,066	17 Cl хлор 35,453	
19 K калий 39,0983	20 Ca кальций 40,078	21 Sc скандий 44,95591	22 Ti титан 47,88	23 V ванадий 50,9415	24 Cr хром 51,9961	25 Mn марганец 54,9380	26 Fe желе 55,84
29 Cu медь 63,546	30 Zn цинк 65,39	31 Ga галлий 69,723	32 Ge германий 72,59	33 As мышьяк 74,9216	34 Se селен 78,96	35 Br бром 79,904	
37 Rb рубидий 85,4678	38 Sr стронций 87,62	39 Y иттрий 88,9059	40 Zr цирконий 91,224	41 Nb ниобий 92,9064	42 Mo молибден 95,94	43 Tc технеций 98,9062	44 Ru руте 101,0
47 Ag серебро 107,8682	48 Cd кадмий 112,41	49 In индий 114,82	50 Sn олово 118,710	51 Sb сурьма 121,75	52 Te теллур 127,60	53 I иод 126,9045	
55 Cs цезий 132,9054	56 Ba барий 137,33	57* La лантан 138,9055	72 Hf гафний 178,49	73 Ta тантал 180,9479	74 W вольфрам 183,85	75 Re рений 186,207	76 Os осми 190,2
79 Au золото 196,9665	80 Hg ртуть 200,59	81 Tl таллий 204,383	82 Pb свинец 207,2	83 Bi висмут 208,9804	84 Po полоний 208,9824	85 At астат 210,9871	
87 Fr франций 223,0197	88 Ra радий 226,0254	89** Ac актиний 227,0278	104 Rf резерфордий [261]	105 Db дубний [262]	106 Sg сиборгий [263]	107 Bh борий [264]	108 Hs хасс [265]

Библиографический список

1. Савельев, И. В. Курс общей физики : в 5 кн. : кн. 1 : Механика : учебное пособие / И. В. Савельев. – Москва : Астрель, 2006. – 336 с. – ISBN 5-271-01034-1.

2. Савельев, И. В. Курс общей физики : в 5 кн. : кн. 3 : Молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие / И. В. Савельев. – Москва : Астрель, 2007. – 208 с. – ISBN 5-271-01305-7.

3. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие / Т. И. Трофимова. – 15-е изд., стер. – Москва : Академия, 2012. – 560 с. – ISBN 978-5-7695-4565-8.

4. Хусаинов, Ш. Г. Основы механики и молекулярная физика : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : Изд-во РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева, 2020. – 146 с. – Текст электронный. – DOI: 10.34677/2020.006.

5. Хусаинов, Ш. Г. Курс физики: теория, вопросы и задачи : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : «Спутник +», 2021. –372 с. – ISBN 978-5-9973-5921-7.

6. Хусаинов, Ш. Г. Основы механики, молекулярной физики и термодинамики : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : «Спутник +», 2021. – 131 с. – ISBN 978-5-9973-5921-8.

7. Хусаинов, Ш. Г. Курс физики: теория, задачи и вопросы : учебное пособие / Ш. Г. Хусаинов. – Москва : Изд-во РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева, 2021. – 464 с. – Текст электронный. – ISBN 978-5-9675-1820-1.

8. Яворский, Б. М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. – 8-е изд., перераб. и испр. – Москва: Оникс, 2006. – 1056 с. – ISBN 5-488-00330-4.

Учебное издание

Хусаинов Шаукат Габдулхакович

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Часть I

Механика, молекулярная физика и термодинамика

Подписано для размещения в Электронно-библиотечной
системе РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева 01.04.2022 г.

Оригинал-макет подготовлен Издательством РГАУ-МСХА
127550, Москва, Тимирязевская ул., 44
Тел. 8 (499) 977-40-64