МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ –
МСХА имени К.А. ТИМИРЯЗЕВА

Н.Ж. Шкаруба, Ю.Г. Вергазова,
П.В. Голиницкий, У.Ю. Антонова

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

Москва 2021

УДК 53.08(075.8)
ББК 30.10-1я73
Ш 66

Рецензент:
док. техн. наук, профессор
А.Г. Пастухов

Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г. и др.
Ш 66 Общая теория измерений: Учебное пособие / Н.Ж. Шкаруба, Ю.Г. Вергазова, П.В. Голиницкий, У.Ю. Антонова. – М.: Издательство «Спутник +», 2021. – 167 с.

ISBN 978-5-9973-6029-0

Учебное пособие включает в себя основные сведения в области метрологии: описание физических величин, средств измерений, методов измерений, погрешностей измерений и способов их нормирования.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология» и 27.03.02 «Управление качеством».

УДК 53.08(075.8)
ББК 30.10-1я73

Отпечатано с готового оригинал-макета.

ISBN 978-5-9973-6029-0

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Выпускник, освоивший программу бакалавриата по направлению подготовки «Управление качеством» в соответствии Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 27.03.02 «Управление качеством» (уровень бакалавриата), утверждённого приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «9» февраля 2016 г. должен быть подготовлен к решению следующих профессиональных задач:

- метрологическое обеспечение проектирования, производства, эксплуатации технических изделий и систем;
- проведение контроля и проведение испытаний в процессе производства.

Для решения обозначенных в стандарте задач студентам необходимо приобрести знания, умения и навыки по различным дисциплинам метрологической направленности. Основной такой дисциплиной является «Общая теория измерений». Целью изучения дисциплины является освоение фундаментальных основ метрологии, развитие системного подхода к решению измерительных задач, подготовка к освоению прикладных дисциплин, посвященных метрологическому обеспечению производства.

В результате изучения дисциплины студент должен знать:

- принципы построения уравнений процессов измерений различных физических величин;
- международную систему единиц величин и основы теории размерностей;
- математические модели объектов измерений;
- порядок обработки различных видов измерений.

Предлагаемое учебное пособие адресовано в первую очередь бакалаврам учащимся по направлениям подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология» и 27.03.02 «Управление качеством», но также может быть использовано магистрами, аспирантами и широкому кругу специалистов, изучающих теорию и практику метрологии.

1. ФОРМАЛЬНО–ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЯ КАК ПРОЦЕССА ПОЗНАНИЯ

1.1. Основные понятия и определения теории измерений

Современное представление основных понятий используемых в теории измерений зафиксировано в последней редакции Международного словаря по метрологии (VIM3-2008). После введения данного документа в нашей стране был произведен пересмотр рекомендаций РМГ 29–99, содержащих основные требования и определения в области метрологии. С 1 января 2015 г. на территории Российской Федерации была введена новая версия рекомендаций РМГ 29–2013. Одной из задач актуализации РМГ 29 является гармонизация с международной терминологией, что направлено на обеспечение единого подхода к оценке качества результатов измерений, установление их метрологической прослеживаемости и, в конечном итоге, способствует взаимному признанию результатов измерений, калибровок, испытаний и выполнению международных обязательств стран СНГ.

Для определения основных понятий теории измерений рассмотрим сущность и состав научного процесса исследования. Научный процесс исследования содержит в себе следующие этапы:

1) научные наблюдения и сбор фактов (эмпирический уровень);

2) выдвижение гипотез (теоретический уровень);

3) постановка эксперимента (проверка гипотез на практике);

4) построение модели или научной теории (теоретический уровень).

Наблюдение – процесс получения первоначальной информации. В науке наблюдение существенным образом зависит от идеи, гипотезы (необходимо знать, зачем наблюдать, т.е. идея). Для научного наблюдения характерны требования: систематичность, контролируемость, тщательность.

Процедура измерения относится к третьему этапу исследования. Эксперимент – важнейший метод эмпирического исследования, который специально ставится так, чтобы можно было наблюдать процессы и явления в условиях меньше всего подверженных воздействию посторонних факторов.

Итак, измерение не является особым эмпирическим методом, а составляет необходимое дополнение любого серьезного научного наблюдения и эксперимента. Если измерительная процедура подтверждает правоту той или иной гипотезы несколько раз, то рождается новый научный факт, который может стать основой для разработки новой научной теории.

Научный факт содержит в себе пять компонентов:

1) концептуальный,

2) чувственно-образный,

3) методологический,

4) приборно-инструментальный,

5) знаково-языковой.

Концептуальный компонент отвечает за выбор идеи, концепции, гипотезы. Действительно, без первоначальной идеи исследование не может быть инициировано. Необходимо знать, что надо исследовать и для чего. Второй компонент научного факта содержит в себе предварительную оценку измерения. Исследователь должен предугадывать качественные характеристики исследуемого объекта, а иногда и его свойства в количественном выражении. Это необходимо для того, чтобы перейти к самой процедуре измерения, выбрав при этом метод и средства измерения с необходимым уровнем точности и чувствительности. Таким образом, становится понятным, что третий компонент установления научного факта – это выбор метода измерения, а четвертый – выбор средств измерений (приборов, инструментов). Пятый компонент осуществляет передачу, выражение и сохранение полученной информации (результата измерения) на выбранном заранее носителе информации.

Факторами, влияющими на результат измерения (а, значит, и на достоверность научного факта) являются, собственно, его структурные элементы:

1) измерительная задача;

2) принцип, метод и средство измерения;

3) объект измерения и его модель;

4) субъект измерения;

5) условия измерения;

6) результат и погрешность измерения.

Первым начальным элементом каждого измерения является его задача (цель). *Измерительная задача* – задача, заключающаяся в определении значения величины путем ее измерения с требуемой точностью в данных условиях измерений. Постановку задачи измерения осуществляет субъект измерения – человек. При постановке задача конкретизируется объект измерения, в нем выделяется измеряемая величина и определяется (задается) требуемая погрешность измерения, под которую выбирается метод и средство измерения (техническое средство или их комплекс).

Метод и средство измерения создаются на базе принципа измерения. *Принцип измерений* – явление материального мира, положенное в основу измерения. Например, применение эффекта Джозефсона для измерения электрического напряжения, применение эффекта Пельтье для измерения поглощенной энергии ионизирующих излучений, применение эффекта Доплера для измерения скорости, использование гравитационного притяжения при измерении массы взвешиванием.

Объектом измерения является материальный объект или явление, которые характеризуются одной или несколькими измеряемыми и влияющими величинами.

Величина – свойство материального объекта или явления, общее в качественном отношении для многих объектов или явлений, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них.

Например, свойство «прочность» в качественном отношении характеризует такие материалы, как сталь, дерево, ткань, стекло и многие другие, в то время как степень (количественное значение) прочности – величина для каждого из них совершенно разная.

Для установления различия, в количественном содержании отображаемого данной величиной свойства изучаемых объектов, введено понятие размера величины.

Размер величины – количественная определенность величины, присущая конкретному материальному объекту или явлению.

Род величины – качественная определенность величины.

Например, длина и диаметр детали – однородные величины, а длина и масса детали – неоднородные величины.

Однородные величины в рамках данной системы величин имеют одинаковую размерность величины. Однако величины одинаковой размерности не обязательно будут однородными.

Единица величины – величина фиксированного размера, которой присвоено числовое значение, равное единице, определяемая и принимаемая по соглашению для количественного выражения однородных с ней величин.

Между размером и значением величины есть принципиальная разница. Размер величины существует реально, независимо от того, знаем мы его или нет. Выразить размер величины можно при помощи любой из единиц данной величины, другими словами, при помощи числового значения.

Для числового значения характерно, что при применении другой единицы оно изменяется, тогда как физический размер величины остается неизменным.

Размеры разных единиц одной и той же величины различны. Так, размер килограмма отличается от размера фунта; размер метра – от размера фута и т. п.

Субъект измерения – человек, который принципиально не может представить себе объект целиком, во всем многообразии его свойств и связей. Вследствие данного обстоятельства взаимодействие объекта с субъектом возможно только на основе математической модели объекта. Математическая модель объекта измерения – это совокупность математических символов (образов) и отношений между ними, которая адекватно описывает интересующие субъекта свойства объекта измерения.

Модель объекта измерения строится до выполнения измерения в соответствии с решаемой задачей на основе априорной информации (информация, имеющаяся до измерения) об объекте и условиях измерения.

Измерение – процесс экспериментального получения одного или более значений величины, которые могут быть обоснованно приписаны величине.

Измерение подразумевает сравнение величин или включает счет объектов. Измерение предусматривает описание величины в соответствии с предполагаемым использованием результата измерения, методику измерений и средство измерений, функционирующее в соответствии с регламентированной методикой измерений и с учетом условий измерений.

Результат измерения величины – множество значений величины, приписываемых измеряемой величине вместе с любой другой доступной и существенной информацией.

Результат измерения может быть выражен следующим образом:

$$Q = q \cdot [Q], \tag{1.1}$$

где Q – действительное значение величины, найденное при измерении; q – числовое значение величины в принятых единицах, $[Q]$ – единица величины.

Пример. За единицу измерения напряжения электрического тока принят [1 В]. Тогда значение напряжения электрической сети $U = q \cdot [U] = 220$ [1В] = 220 В.

Здесь числовое значение $q = 220$. Но если за единицу напряжения принять [1 кВ], то $U = q \cdot [U] = 0{,}22$ [1кВ] = 220 В, т.е. числовое значение $q = 0{,}22$.

Уравнение (1.1.) называют *основным уравнением измерения*, показывающим, что числовое значение величины зависит от размера принятой единицы измерения.

Количественная оценка конкретной физической величины, выраженная в виде некоторого числа единиц данной величины, называется «*значением величины*». Отвлеченное число, входящее в «значение» величины, называется *числовым значением*.

Измерение напряжение в вольтах той или иной электрической цепи, проводится, например, путем сравнения положения указателя (стрелки) с единицей электрического напряжения, хранимой шкалой вольтметра. Найденное значение напряжения как некоторое число вольт представляет результат измерений.

Следует различать истинное и действительное значения величины. Нахождение истинного значения измеряемой величины является центральной проблемой метрологии. Истинное значение величины – значение величины, которое соответствует определению измеряемой величины.

Определение измеряемой величины включает принятие некоторой модели объекта измерения, в которой истинное значение представлено неким параметром. Всегда существует пороговое несоответствие модели и объекта измерения, которое является причиной дефинициальной неопределенности измеряемой величины.

Когда дефинициальная неопределенность, связанная с измеряемой величиной, считается пренебрежимо малой по сравнению с остальными составляющими неопределенности измерений, измеряемая величина может рассматриваться как имеющая «по сути единственное» истинное значение. Такой подход принят в GUM [3] и в связанных с ним документах, где слово «истинный» считается излишним.

В обычном представлении под истинным понимается некое детерминированное значение ФВ, отражающее свойство объекта, абсолютно адекватно. Однако измерение как процесс познания количественных определенностей материального мира не должно абстрагироваться от физической природы изучаемых свойств и обязано учитывать те качественные границы, внутри которых те или иные определения имеют смысл.

Рассмотрим пример измерения диаметра круглого диска. Казалось бы, что измерение диаметра диска можно проводить со все более и более высокой точностью, стоит лишь выбрать соответствующие по точности средства измерений. Но когда погрешность средства измерения станет порядка размеров молекулы, мы обнаружим, что наблюдается как бы размывание краев диска, обусловленное хаотическим движением молекул и за каким-то пределом точности само понятие диаметра диска потеряет свой первоначальный смысл, и дальнейшее повышение точности измерения бесполезно. Очевидно, что понятие «истинного» значения диаметра в этом случае приобретает совсем иной, вероятностный, смысл и можно лишь с определенной вероятностью установить интервал значений, в котором оно находится. Следовательно, приведенное в стандарте определение истинного значения может быть применено лишь для объектов макромира.

Поскольку истинное значение физической величины определить невозможно, в практике измерений оперируют понятием действительного значения. Действительное значение величины – значение величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

В дополнение можно привести еще несколько определений, иногда встречающихся в метрологической практике.

1.2. Основные постулаты теории измерений

Как и любая другая наука, теория измерений строится на основе ряда основополагающих постулатов, описывающих ее исходные аксиомы.

Первый постулат теории измерений**:**

в рамках принятой модели объекта исследования существует определенная физическая величина и ее истинное значение.

Если считать, что деталь представляет собой цилиндр (модель – цилиндр), то она имеет диаметр, который может быть измерен. Если же деталь нельзя считать цилиндрической, например, ее сечение представляет собой эллипс, то измерять ее диаметр бессмысленно, поскольку измеренное значение не несет полезной информации о детали. И, следовательно, в рамках новой модели диаметр не существует. Измеряемая величина существует лишь в рамках принятой модели, то есть имеет смысл только до тех пор, пока модель признается адекватной объекту. Так как при различных целях исследований данному объекту могут быть сопоставлены различные модели, то из первого постулата вытекает следствие:

для данной величины объекта измерения существует множество измеряемых величин (и соответственно их истинных значений).

Из первого постулата теории измерений следует, что измеряемому свойству объекта измерений должен соответствовать некоторый параметр его модели. Данная модель в течение времени, необходимого для измерения, должна позволять считать этот параметр неизменным. В противном случае измерения не могут быть проведены.

Указанный факт описывается вторым постулатом:

истинное значение измеряемой величины постоянно.

Выделив постоянный параметр модели, можно перейти к измерению соответствующей величины. Для переменной величины необходимо выделить или выбрать некоторый постоянный параметр и измерить его. В общем случае такой постоянный параметр вводится с помощью некоторого функционала. Примером таких постоянных параметров переменных во времени сигналов, вводимых посредством функционалов, являются средневыпрямленные или среднеквадратические значения. Данный аспект отражается в следствии:

для измерения переменной физической величины необходимо определить ее постоянный параметр – измеряемую величину.

При построении математической модели объекта измерения неизбежно приходится идеализировать те или иные его свойства.

Модель никогда не может полностью описывать все свойства объекта измерений. Она отражает с определенной степенью приближения некоторые из них, имеющие существенное значение для решения данной измерительной задачи. Модель строится до измерения на основе априорной информации об объекте и с учетом цели измерения.

Измеряемая величина определяется как параметр принятой модели, а его значение, которое можно было бы получить в результате абсолютно точного измерения, принимается в качестве истинного значения данной измеряемой величины. Эта неизбежная идеализация, принятая при построении модели объекта измерения, обусловливает неизбежное несоответствие между параметром модели и реальным свойством объекта, которое называется пороговым.

Принципиальный характер понятия «пороговое несоответствие» устанавливается третьим постулатом:

существует несоответствие измеряемой величины исследуемому свойству объекта (пороговое несоответствие измеряемой величины).

Пороговое несоответствие принципиально ограничивает достижимую точность измерений при принятом определении измеряемой физической величины.

Изменения и уточнения цели измерения, в том числе и такие, которые требуют повышения точности измерений, приводят к необходимости изменять или уточнять модель объекта измерений и переопределять понятие измеряемой величины. Основной причиной переопределения является то, что пороговое несоответствие ранее принятого определения не позволяет повысить точность измерения до уровня требуемой. Вновь введенный измеряемый параметр модели также может быть измерен лишь с погрешностью, которая в лучшем случае равна погрешности, обусловленной пороговым несоответствием. Поскольку принципиально невозможно построить абсолютно адекватную модель объекта измерения, то нельзя устранить пороговое несоответствие между измеряемой физической величиной и описывающим ее параметром модели объекта измерений.

Отсюда вытекает важное следствие:

истинное значение измеряемой величины отыскать невозможно.

Модель можно построить только при наличии априорной информации об объекте измерения. При этом, чем больше информации, тем более адекватной будет модель и соответственно точнее и правильнее будет выбран ее параметр, описывающий измеряемую физическую величину. Следовательно, увеличение априорной информации уменьшает пороговое несоответствие.

Данная ситуация отражается в следствии:

достижимая точность измерения определяется априорной информацией об объекте измерения.

Из этого следствия вытекает, что при отсутствии априорной информации измерение принципиально невозможно. В то же время максимально возможная априорная информация заключается в известной оценке измеряемой величины, точность которой равна требуемой. В этом случае необходимости в измерении нет.

2. ФИЗИЧЕСКИЕ ШКАЛЫ И НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ ОБРАЗОВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

2.1. Свойства физических объектов измерения

Объектом измерения является материальный объект или явление, которые характеризуются одной или несколькими измеряемыми и влияющими величинами. Объекты измерений обладают неограниченным число свойств, которые проявляются с бесконечным разнообразием. Н.Р. Кэмпбелл установил для всего разнообразия свойств физического объекта наличие трех наиболее общих проявлений в отношениях эквивалентности, порядка и аддитивности. Эти отношения описываются простейшими постулатами:

1. Отношение эквивалентности (порядка) – это отношение в котором данное свойство X у различных объектов A и B оказывается одинаковым или неодинаковым:

а) дихотомия (сходство и различие): либо $X(A) \approx X(B)$, либо $X(A) \neq X(B)$;

б) симметричности (симметричности отношения эквивалентности): если $X(A) \approx X(B)$,то $X(B) \approx X(A)$;

в) транзитивности по качеству (перехода отношения эквивалентности): если $X(A) \approx X(B)$ и $X(B) \approx X(C)$, то $X(A) \approx X(C)$.

2. Отношение порядка – это отношение, в котором данное свойство X у различных объектов оказывается больше или меньше:

а) антисимметричности: если $X(A) > X(B)$,то $X(B) < X(A)$;

б) транзитивности по интенсивности свойств (перехода отношения порядка): если $X(A) > X(B)$ и $X(B) > X(C)$, то $X(A) > X(C)$.

3. Отношение аддитивности – это отношение когда однородные свойства различных объектов могут суммироваться:

а) монотонность (однонаправленность аддитивности): если $X(A) = X(C)$ и $X(B) > 0$, то $X(A) + X(B) > X(C)$;

б) коммутативности (переместимость слагаемых): $X(B) + X(A)$, то $X(A) +$

$X(B)$;

в) дистрибутивность: $X(A) + X(B) = X(A + B)$;

г) ассоциативность: $[X(A) + X(B)] + X(C) = X(A) + [X(B) + X(C)]$.

В зависимости от проявления наиболее общих отношений эквивалентности, порядка и аддитивности различают три группы свойств.

Первая группа – свойства, которые проявляются только в отношении эквивалентности. Отношение эквивалентности – это отношение, в котором данное свойство у различных объектов оказывается одинаковым или неодинаковым.

Примером объектов, обладающих свойствами эквивалентности, могут служить, например, виды животных: заяц, медведь, лошадь и др. Каждая группа таких объектов отличается характерными свойствами, наименованиями и распознается по эквивалентности тем или иным способом.

Вторая группа – интенсивные физические величины, проявляющие себя в отношении эквивалентности и порядка. Отношение порядка – это отношение, в котором данное свойство у различных объектов проявляется больше или меньше. К величинам второй группы относятся, например, сила ветра (слабый, умеренный, сильный, шторм и т. д.), твердость, характеризуемая способностью исследуемого тела противостоять давлению на него другого тела.

Третья группа – экстенсивные физические величины, проявляющие себя в отношении эквивалентности, порядка и аддитивности. Отношение аддитивности это отношение, когда однородные свойства различных объектов могут суммироваться. К величинам третьей группы относится значительное число физических величин, например, длина, масса. Так, два тела массой каждое 0,5 кг, поставленные на одну из чашек равноплечих весов, уравновешиваются гирей массой 1 кг, помещенной на другую чашку.

2.2. Типы шкал и их основные характеристики

В практической деятельности необходимо проводить измерения различных величин, характеризующих свойства тел, веществ, явлений и процессов. Некоторые свойства как уже указывалось выше проявляются только качественно, другие – количественно. Разнообразные проявления (количественные или качественные) любого свойства образуют множества, отображения элементов которых на упорядоченное множество чисел или в общем случае условных знаков образуют *шкалы измерения этих свойств.* Термин «шкала» происходит от лат. *scala* – лестница. В метрологической практике термин «шкала» имеет, как минимум, два различных значения. Во-первых, шкалой называется отсчетное устройство аналогового средства измерений, в этом случае, обычно используется термин – *шкала средства измерений.* Во-вторых, шкалой называют порядок определения (оценки, измерения) и обозначения всевозможных проявлений конкретного свойства объектов измерений, в этом значении шкалу используют термин – шкала измерений.

Шкала величины – упорядоченная совокупность значений физической величины, служащая исходной основой для измерений данной величины

В соответствии с логической структурой проявления свойств различают пять основных типов шкал измерений.

Шкала наименований (шкала классификации). Такие шкалы используют для классификации эмпирических объектов, свойства которых проявляются только в отношении эквивалентности.

Примерами таких шкал является шкала классификации (оценки) цвета объектов по наименованиям (красный, оранжевый, желтый, зеленый и т.д.), опирающаяся на стандартизованные атласы цветов, систематизированные по сходству. В таких атласах, выполняющих роль своеобразных эталонов, цвета могут обозначаться условными номерами (координатами цветами). Измерения в шкале цветов выполняются путем сравнения при определенном освещении образцов цвета из атласа с цветом исследуемого объекта и установления эквивалентности их цветов.

Поскольку данные шкалы характеризуются только отношениями эквивалентности, то в них отсутствуют понятия «нуль», «больше» или «меньше» и «единицы измерения». Шкалы наименований, по существу, качественны; однако возможны некоторые статистические операции, например, можно найти модальный или наиболее многочисленный класс эквивалентности.

В бытовом плане шкалами наименований являются шкала фамилий (можно вместе с инициалами или именем и отчеством), шкала личных номеров в документах, адреса, номера экзаменационных билетов, номера ссылок на литературные источники. Видно, что такая шкала может состоять из любых знаков (числа, наименования, другие условные обозначения). Использование номеров не означает, что мы имеем дело с количественными оценками, напротив, любые цифры или числа такой шкалы – не более чем кодовые знаки. Всем понятно, что литературный источник 7 в списке литературы не лучше (толще, важнее, достовернее...) и не хуже, чем источник 8, хотя стоит перед ним. Они просто перечислены по алфавиту или в порядке упоминания в книге, статье. Если поименованное свойство не имеет такой характеристики как интенсивность (например, фамилия субъекта), все-таки можно хотя бы набирать статистику на каждый из идентифицируемых объектов (Ковалевых среди телефонных абонентов обычно больше, чем Гиацинтовых или Аллегровых).

Для того чтобы представить «шкалу наименований» в виде, приближенном к «лестнице» воспользуемся искусственным приемом ее построения в двухкоординатной системе, где по оси абсцисс будем отмечать рассматриваемые свойства, а по оси ординат – отображающие их символы (рис.2.1). Следует особо отметить, что последовательность свойств и расстояния между ними на шкале абсцисс не несут никакого масштабного содержания. То же следует сказать и относительно оси ординат – числа в номерах символов, равно как и алфавитная последовательность букв, никак не характеризуют интенсивность отображаемых на эту ось свойств. Дополнительным подтверждением служит отсутствие стрелок на осях построенной системы координат.

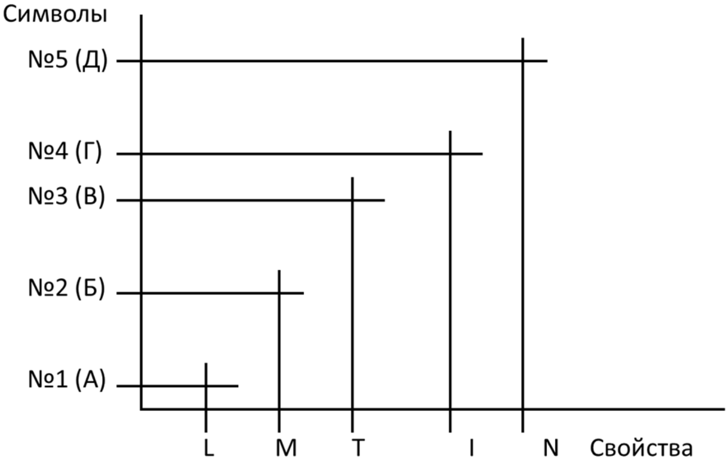


Рис. 2.1. **Условное отображение шкалы наименований**

Шкала порядка (шкала рангов). Этот тип шкалы используют для классификации эмпирических объектов, свойства которых проявляются в отношении эквивалентности и порядка, т.е. такие свойство в отношении который можно применять понятия «больше» или «меньше». В этих шкалах нуль может существует или нет, но принципиально нельзя ввести единицу измерения, так как для них не установлено отношение пропорциональности и соответственно нет возможности судить во сколько раз больше или меньше конкретные проявления свойства.

В отличие от шкалы наименований, шкала порядка устанавливает фиксированный порядок расположения объектов в соответствии с уровнем интенсивности рассматриваемого свойства. Шкалы порядка допускают монотонные преобразования.

Такие шкалы широко применяются при определении в ходе соревнований мест команд или спортсменов, рейтингов деятелей искусства или политиков (рис.2.2).

Всем учащимся известны балльные оценки знаний на экзаменах, которые тоже являются фиксированными ступенями шкалы порядка.

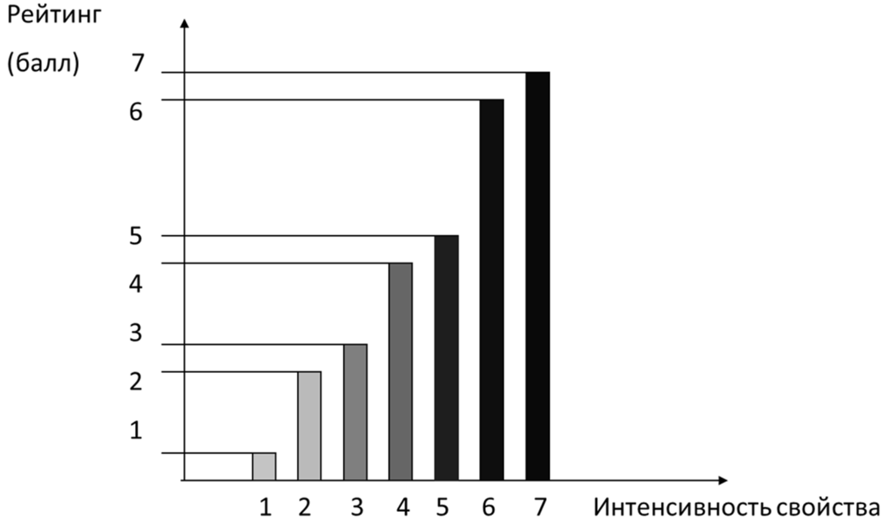


Рис. 2.2. **Условное отображение шкалы порядка**

Шкалы порядка иногда применяют и для «количественной» оценки физических величин. Пример такой шкалы – используемая в минералогии шкала твердости Мооса, приведенная в таблице 2.1. Минералы условно разделяются на десять групп, расположенных в порядке возрастания твердости – от первой до десятой. Коэффициент твердости определяется так: если какой-либо минерал царапает, например, кальцит (твердость 3) и не царапает флюорит (твердость 4), то его твердость можно обозначить коэффициентом 3,5 (или другим значением между 3 и 4). Внутри каждого из указанных интервалов могут быть построены участки той же шкалы с более мелкой градацией.

Таблица 2.1

Шкала твердости Мооса

Коэффициент твердости	Наименование минерала
1	Тальк
2	Гипс
3	Кальцит
4	Флюорит (плавиковый шпат)
5	Апатит
6	Ортоклаз (полевой шпат)
7	Кварц
8	Топаз
9	Корунд
10	Алмаз

Условная шкала «силы ветра» в баллах, предложенная английским адмиралом Фрэнсисом Бофортом в 1805 году, в соответствии с международным соглашением 1964 года рассматривается как шкала скорости ветра (таблица 2.2). На место условных баллов пришли аппаратурное измеряемые скорости в метрах в секунду или километрах в час.

Таблица 2.2

Оценка скорости ветра (в сопоставлении со шкалой Бофорта)

Балл	Наименование «силы ветра»	Словесная характеристика	Скорость ветра, м/сек
0	Штиль (безветрие)	Дым идет вертикально	0-0,2
1	Тихий ветер	Дым идет слегка наклонно	0,3-1,5
2	Легкий ветер	Ощущается лицом, шелестят листья	1,6-3,3
3	Слабый ветер	Развеваются флаги	3,4-5,4
4	Умеренный ветер	Поднимает пыль	5,5-7,9
5	Свежий ветер	Вызывает волны на воде	8,0-10,7
6	Сильный ветер	Свистит в вантах, гудят провода	10,8-13,8
7	Крепкий ветер	На волнах образуется пена	13,9-17,1
8	Очень крепкий ветер	Трудно идти против ветра	17,2-20,7
9	Шторм	Срывает черепицу	20,8-24,4
10	Сильный шторм	Вырывает деревья с корнем	24,5-28,4
11	Жестокий шторм	Большие разрушения	28,5-32,6
12	Ураган	Опустошительное действие	32,7 и более

Есть и иные современные интерпретации шкалы Бофорта, с отличными значениями скоростей и балльных интервалов, что подтверждает невозможность строгой трансформации ранговой шкалы в интервальную.

Очевидно, что совершенствование знаний о физической величине или повышение строгости ее определения сопровождается построением более мощной шкалы.

Шкала интервалов (шкала разностей). Эти шкалы являются дальнейшим развитием шкал порядка и применяются для объектов, свойства которых удовлетворяют отношениям эквивалентности и порядка. Отличаются от шкал порядка тем, что для описываемых ими свойств имеют смысл не только соотношения эквивалентности и порядка, но и суммирования интервалов (разностей) между различными количественными проявлениями свойств.

Шкалы интервалов состоят из одинаковых интервалов, имеют единицу измерения и произвольно выбранное начало – нулевую точку (рис. 2.3).

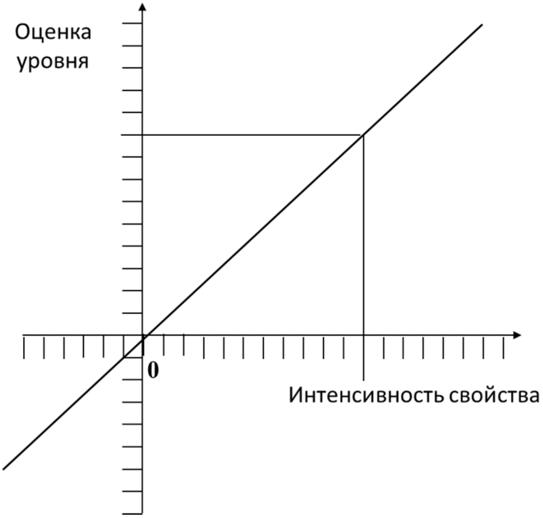


Рис. 2.3. **Условное отображение шкалы интервалов**

Характерный пример, шкала интервалов времени. На этой шкале определены действия сложения и вычитания интервалов, но складывать и вычитать значения бессмысленно. Действительно, по шкале времени интервалы можно суммировать или вычитать и сравнивать, во сколько раз один интервал больше другого, но складывать даты каких-либо событий бессмысленно.

Другой пример, шкалы температур по Цельсию, Фаренгейту, Реомюру.

В этих шкалах допустимы линейные преобразования, в них применимы процедуры для отыскания математического ожидания, стандартного отклонения, коэффициента ассиметрии и смещенных моментов.

Шкала отношений. К множеству количественных проявлений в этих шкалах применимы соотношения эквивалентности и порядка − операции вычитания и умножения, (шкалы отношений 1-го рода − пропорциональные шкалы), а во многих случаях и суммирования (шкалы отношений 2-го рода − аддитивные шкалы). В шкалах отношений существуют условные (принятые по соглашению) единицы и естественные нули (рис. 2.4).

Примерами шкал отношений являются шкалы массы (2-го рода), термодинамическая температурная шкала (1-го рода).

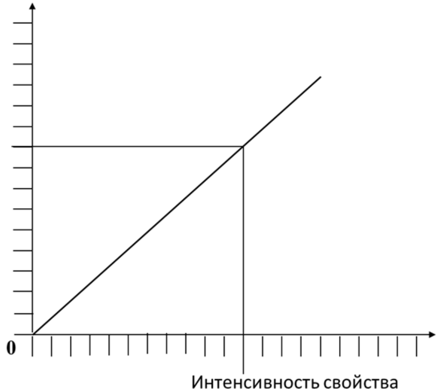


Рис. 2.4. **Условное отображение шкалы отношений**

Массы любых объектов можно суммировать, но суммировать температуры разных тел нет смысла, хотя можно судить о разности и, отношении их термодинамических температур. Шкалы отношений широко используются в физике и технике, в них допустимы все арифметические и статистические операции.

Примером *эволюции шкал* являются температурные шкалы. Создание шкал наименований базировалось на последовательном разделении понятий «температура» и «теплота», затем различении температуры как оценки степени нагретости тел и термодинамической температуры. Температура, которая когда-то оценивалась чисто топологически по шкале порядка (холодное-теплое-горячее), затем приобрела множество интервальных шкал с несовпадающими нулями и единицами (шкалы Реомюра, Фаренгейта, Цельсия), и, наконец, пришла к логически завершенной термодинамической шкале Кельвина с абсолютным нулем.

Под *абсолютными* понимают шкалы, обладают всеми признаками шкал отношений, но дополнительно в них существует естественное однозначное определение единицы измерений. Такие шкалы используются для измерений относительных величии (отношений одноименных величин: коэффициентов усиления, ослабления, КПД, коэффициентов отражений и поглощений, амплитудной модуляции и т.д.).

Шкалы наименований и порядка как не имеющие единиц измерения относят к *неметрическим*, а шкалы интервалов и отношений – *метрическими*. Абсолютные и метрические шкалы относятся к разряду линейных.

3. СИСТЕМА ЕДИНИЦ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

3.1. Понятие размерностей единиц физических величин

Множество физических величин представляет собой некоторую систему, в которой отдельные величины связаны между собой системой уравнений. Эти уравнения, называемые уравнениями между величинами, были установлены в результате исследования свойств объектов и их взаимосвязей только после их количественного выражения. С их помощью формулируются определения одних величин на языке других и устанавливаются способы измерения. Для каждой физической величины должна быть установлена единица измерения. Если бы все единицы измерения были установлены без учета взаимосвязи физических величин и независимо друг от друга, в уравнениях между величинами всегда были бы коэффициенты согласования величин, чрезвычайно усложняющие их применение.

Например, представим себе систему, в которой установлены следующие единицы: длины – метр; времени – секунда; массы – килограмм; силы – килограмм-сила, мощности – лошадиная сила. Известные нам уравнения между величинами имели бы следующий вид: ускорение $a = v/t$, сила $F = 0{,}102ma$, мощность $N = 0{,}013\ (3)\ FL/\mathrm{t}$ или $N = 0{,}00\ 136\ maL/t$.

Анализ взаимосвязей физических величин показал, что независимо друг от друга можно установить только несколько единиц физических величин, а остальные выразить через них. Легко можно доказать, что число независимых величин будет равно разности числа величин, входящих в систему, и числа независимых уравнений связи между величинами. Если между тремя величинами: длиной, временем, скоростью – есть только одно уравнение связи $v = L/t$, то независимыми можно установить две величины, а третью выразить через них.

Физические величины, единицы которых устанавливаются независимо от других величин в системе, называются *основными величинами*, а их единицы – *основными единицами*.

Все остальные величины и единицы определяются однозначно через основные и называются *производными*. Совокупность выбранных основных и производных единиц определяет систему единиц.

Математическое выражение, отображающее связь физической величины с основными величинами системы, в котором коэффициент пропорциональности принят равным единице, называется *размерностью* (*dimension*) физической величины. Размерности основных физических величин обозначают прописными буквами, например размерности длины, времени, массы, температуры записываются как $\dim(l) = L$; $\dim(t) = T$; $\dim(m) = \mathrm{M}$.

Размерности производных физических величин определяются произведением размерностей основных величин, взятых в степенях, соответствующих степеням в уравнениях между величинами в физике.

Например, скорость определяется как отношение $v = l/t$. Размерность скорости имеет вид $\dim(v) = \dim(l)/\dim(t) = LT\text{-}^{1}$.

Во всех случаях, когда размерность физической величины определяется из уравнения физики, включающего производные величины, содержащие одни и те же основные величины, выражение размерности упрощается таким образом, что каждая основная физическая величина входит в размерность только один раз с показателем степени, равным сумме показателей степеней этой величины.

Например, размерность давления будет иметь следующий вид:

$$\dim(p) = \frac{\dim(F)}{\dim(s)} = \frac{\dim(m)\dim(a)}{\dim(s)} = \frac{MLT^{-2}}{L^{2}} ML^{-1}T^{-2}.$$

Среди производных физических величин особое место занимают такие, для которых все показатели в формуле размерности обращаются в нуль. Эти величины называются *безразмерными* и остается такими в любой системе единиц. К таким величинам относятся, например, коэффициент полезного действия, число Рейнольдса, диэлектрическая проницаемость (относительная) и др.

Понятие размерности широко используется при проверке правильности сложных расчетных формул, выяснении зависимости междувеличинами (при анализе размерностей и в теории физического подобия).

3.2. Принципы построения системы единиц

Образование системы единиц базируется на объективных закономерных связях между физическими величинами и на произвольной, но разумной воле людей и их соглашениях, заключительным из которых является принятое на Генеральной конференции по мерам и весам.

При построении или введении новой системы единиц ученые руководствуются только одним единственным принципом – практической целесообразностью, т.е. удобством применения единиц в деятельности человека. В основу этого принципа положены следующие базовые критерии:

простота образования производных ФВ и их единиц, т.е. приравнивание к единице коэффициентов пропорциональности в уравнениях связи;

высокая точность материализации основных и производных единиц и передачи их размера нижестоящим эталонам;

неуничтожаемость эталонов основных единиц, т.е. возможность их воссоздания в случае утраты;

преемственность единиц, сохранение их размеров и наименований при введении новой системы единиц, что связано с исключением материальных и психологических затрат;

близость размеров основных и производных единиц к размерам ФВ, наиболее часто встречающихся в практике;

долговременность хранения основных и производных единиц и эталонами;

выбор в качестве основных минимального числа ФВ, отражающих наиболее общие свойства материи.

Приведенные критерии вступают в противоречие, поэтому путем соглашения выбирается наиболее выгодный для практики вариант.

Первой системой единиц, принятой в 1791 г. Национальным собранием Франции, была метрическая система мер. Для разработки этой системы мер Национальным собранием Франции в 1790 г. была создана комиссия, в состав которой входили выдающиеся ученые: Ж. Лагранж, П. Лаплас, Ж. Деламбер и др. Перед комиссией была поставлена задача – разработать систему мер, «основанных на неизменном прототипе, взятом из природы, с тем, чтобы ее могли принять все нации». Рекомендации комиссии были рассмотрены Национальным собранием, которое постановило принять за основную единицу длины метр, как десятимиллионную часть четверти дуги земного меридиана, проходящего через Париж (от этой единицы идет название системы – метрическая). В качестве единицы веса (в то время массу и вес не различали) была принята масса 1 $см^3$ чистой воды при температуре 4 °C (наибольшая плотность воды), названная граммом. Позже основной единицей массы стала кратная единица – килограмм. По данному определению килограмм является скорее производной единицей, чем основной, так как выражается с помощью единицы длины. В 1799 г. был изготовлен платиновый прототип метра в виде линейки шириной 25 см, толщиной около 4 мм с расстоянием между концами 1 м. В том же году был изготовлен платиновый прототип килограмма. Декретом Национального собрания Франции в декабре 1799 г. платиновые прототипы метра и килограмма были утверждены в качестве эталонов и переданы на хранение в национальный Архив Франции. Эти прототипы метра и килограмма стали называть «метр Архива», «килограмм Архива». В 1872 г. было принято решение считать килограмм равным массе килограмма Архива.

Значимость метрической системы глубоко оценил Д.И. Менделеев. По его инициативе Петербургская академия наук предложила учредить международную организацию, которая обеспечивала бы единообразие средств измерений в международном масштабе. Это предложение получило одобрение и в 1875 г. в Париже на Дипломатической метрологической конференции представвители 17 государств приняли метрическую конвенцию и учредили Международное бюро мер и весов, что явилось значительным событием для дальнейшего развития человечества. Конвенция положила конец неоправданному многообразию и непостоянству мер и весов, что мешало развитию промышленности и торговли.

В России в это время действовали сразу три системы мер: аршинная, дюймовая и метрическая, что сдерживало развитие стандартизации.

Декрет Совета Народных Комиссаров от 14 сентября 1918 г. ввел в России метрическую систему мер и весов.

С развитием науки и техники появилось много различных систем единиц, которые отличались друг от друга не только основными единицами, но и принципом построения.

В 1832 г. немецким ученым К. Ф. Гауссом было введено понятие о системе единиц физических величин как совокупности основных и производных единиц. В системе единиц, предложенной Гауссом, в качестве основных были приняты три единицы: единица длины – миллиметр, единица массы – миллиграмм, единица времени – секунда. Эта система единиц была названа абсолютной.

В 1881 г. Международным конгрессом электриков была принята система единиц физических величин СГС, в которой основными являлись единица длины – сантиметр, единица массы – грамм, единица времени – секунда. В качестве важнейших производных единиц в системе СГС принимались единица силы – дина и единица работы – эрг.

Для механических величин система СГС была простой и ясной. Сложнее обстояло дело с электрическими и магнитными величинами. Наибольшее распространение получили две ее разновидности: для электрических величин – СГСЕ и для магнитных – СГСМ.

В системе СГСЕ в качестве основной единицы добавлена безразмерная величина – диэлектрическая проницаемость вакуума $\varepsilon = 1$. В системе СГСМ в качестве основной единицы добавлена безразмерная величин – магнитная проницаемость вакуума $\mu = 1$. Системы СГС, СГСЕ и СГСМ в основном применялись в научных лабораториях, в практической жизни широкого распространения они не нашли.

Использование килограмма как единицы веса с конца XVIII столетия, а затем и единицы силы привело к тому, что была сформирована система единиц МКГСС с тремя основными единицами: метр – единица длины, килограмм-сила – единица силы, секунда – единица времени. Эта система широко использовалась в технике и механике, получив неофициальное название «технической» в отличие от «лабораторной» СГС системы.

Одним из недостатков системы МКГСС была ее несогласованность с единицами электрических и магнитных величин – для перехода к практическим электрическим и магнитным величинам требовался дополнительный переходный множитель.

Достаточно широкое распространение в мире, в том числе и в нашей стране, нашла предложенная еще в 1901 г. итальянским ученым Джорджи система единиц МКСА. Основными единицами этой системы являлись метр, килограмм, секунда, ампер (единица силы тока). Эта система приблизила мировое сообщество к переходу на исключительное применение единой метрической системы, и многие единицы физических величин системы МКСА перешли затем в Международную систему единиц. В качестве производных единиц в системе МКСА применялись: единица силы – ньютон, единица энергии – джоуль, единица мощности – ватт. Эта система широко использовалась в технике и механике, получив неофициальное название «технической» системы.

3.3. Международная система единиц физических величин

Наличие ряда систем единиц измерения физических величин и большое число внесистемных единиц, неудобства, возникающие на практике в связи с пересчетами при переходе от одной системы к другой, вызвали необходимость создания единой универсальной системы единиц, которая охватывала бы все отрасли науки и техники и была бы принята в международном масштабе.

В 1948 г. на IX Генеральной конференции по мерам и весам поступили предложения принять для международных сношений единую практическую систему единиц. В качестве основных единиц рекомендовались: метр, килограмм (единица массы), секунда и одна из электрических единиц.

Исходя из этих предложений, Международным комитетом мер и весов был произведен официальный опрос мнений научных, технических и педагогических кругов всех стран и на основе полученных ответов составлены рекомендации по установлению единой практической системы единиц измерений.

X Генеральная конференция (1954 г.) приняла в качестве основных единиц новой системы следующие: длина – метр; масса – килограмм; время – секунда; сила тока – ампер; температура термодинамическая – градус Кельвина, сила света – кандела.

После X Генеральной конференции Международный комитет мер и весов подготовил список производных единиц новой системы и предложил назвать ее Международной системой единиц.

В 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам окончательно приняла новую систему, присвоив ей наименование, Международная система единиц (System International) с сокращенным обозначением «SI», в русской транскрипции «СИ».

В нашей стране эта система была принята в 1961 г. и законодательно введена Госстандартом СССР. Стандарт «Международная система единиц» (ГОСТ 9867-61) устанавливал предпочтительное применение этой системы во всех областях науки, техники и в учебном процессе. С 1 января 1982 г. введен в действие ГОСТ 8.417-81 «ГСИ. Единицы физических величин», в соответствии с которым, в СССР осуществлен переход на Международную систему единиц SI.

Международная система единиц имеет ряд достоинств, важнейшими из которых являются:

универсальность, т.е. охват всех отраслей науки, техники, народного хозяйства;

унификация единиц для всех видов измерений (например, единицы энергии и работы имеют одно наименование – джоуль, вместо ранее используемых в других системах: килограмм-сила-метр, эрг, калория, электронвольт и др.; единица мощности – ватт вместо ранее используемых эрг в секунду, лошадиная сила, килограмм-сила-метр в секунду и др.; единица давления – паскаль вместо ранее используемых атмосфера, миллиметр ртутного столба, миллиметр водяного столба, бар, пьеза и др.);

практическое удобство применения основных и производных единиц (площадь – квадратный метр, объем – кубический метр, электрическое сопротивление – Ом и т.д.);

ясное и четкое разграничение единицы массы и силы (сила – ньютон, масса – килограмм);

упрощение записи уравнений и формул из-за отсутствия в них переводных коэффициентов, в частности принятие формы записи диэлектрической и магнитной постоянных с использованием множителей $(4\pi)^{-1}$ и $4\ \pi$;

когерентность, т.е. соотношение между дольными и кратными единицами в системе пропорционально десяти в целой степени (положительной или отрицательной);

образование производных единиц из основных без переходных коэффициентов, т.е. числовые переходные коэффициенты в определяющих уравнениях равны единице.

Основными единицами Международной системы единиц являются (табл. 3.1):

Единица длины – метр (м) – длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени 1/299 792 458 с;

Единица массы – килограмм (кг) – единица массы, равная массе международного прототипа килограмма;

Единица времени – секунда (с) – время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133;

Единица силы электрического тока – ампер (А) – сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н;

Единица термодинамической температуры – кельвин (К) – единица термодинамической температуры, равная 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды;

Единица силы свет – кандела (кд) – сила света в заданном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср;

Единица количества вещества – моль (моль) – количество вещества системы, содержащей столько же молекул (атомов, частиц), сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг.

Таблица 3.1

Основные единицы международной системы СИ

Наименование величины	Размерность	Единицы		
		Наименование	Обозначение	
			международное	русское
Основные единицы				
Длина	L	метр	m	м
Масса	M	килограмм	kg	кг
Время	T	секунда	s	с
Сила электрического поля	I	ампер	A	А
Термодинамическая температура	θ	кельвин	K	К
Количество вещества	N	моль	tol	моль
Сила света	J	кандела	cd	кд

Ранее, до решения в конце 1995 г. Генеральной конференции по мерам и весам, между перечнями основных и производных единиц СИ существовали, так называемые, дополнительные единицы СИ: единица плоского угла – радиан (рад) – угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу, единица плоского угла, 1 рад = 1 м / м = 1; единица телесного угла – стерадиан (ср) – телесный угол, вершина которого расположена в центре сферы и который вырезает на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу сферы.

Эти единицы имеют специфическое применение (для образования производных единиц, связанных с угловыми величинами) и, кроме того, являются безразмерными. Поэтому в СИ их выделяли в раздел «дополнительные единицы». На XX Генеральной конференции по мерам и весам указанный раздел был исключен, а единиц плоского и телесного углов были включены в число безразмерных производных единиц СИ.

Производные единицы СИ образуются от основных единиц, как уже отмечалось ранее, с помощью уравнений связи между ФВ. Такими уравнениями, как правило, являются уравнения, описывающие основные физические законы или основные соотношения между ФВ.

При установлении производных единиц следует:

выбрать ФВ, единицы, которых принимаются в качестве основных;

установить размер этих единиц;

выбрать определяющее уравнение, связывающее величины, измеряемые основными единицами, с величиной, для которой устанавливается производная единица. При этом символы всех величин, входящих в определяющее уравнение, должны рассматриваться не как сами величины, а как их именные числовые значения;

приравнять единице (или другому постоянному числу) коэффициент пропорциональности, входящий в определяющее уравнение. Это уравнение следует записывать в виде явной функциональной зависимости производной величины от основных.

Пример. Электрическое напряжение, электродвижущая сила (ЭДС), электрический потенциал.

Определяющее уравнение для электрического напряжения $U = P/I$, где P — мощность электрического тока, Вт. Единицей электрического напряжения является вольт (В, V) – электрическое напряжение, вызывающее в электрической цепи постоянный ток силой 1 А при мощности 1 Вт. Размерность электрического напряжения $\dim U = [P]/ [I] = L^2 MT^{-3}I^{-1}$.

Работа по перемещению электрического заряда Q из точки с нулевым потенциалом в данную точку поля образует электрический потенциал

$\dim \varphi = A/Q$.

Размерность электрического потенциала

$\dim \varphi = [A] / [Q] = L^2 MT^{-2}/ TI = L^2 MT^{-3}I^{-1}$.

Таким образом, электрический потенциал имеет одинаковую размерность с электрическим напряжением и измеряется в вольтах.

В том случае, когда в уравнении связи имеется численный коэффициент, при образовании производной единицы основные единицы этого уравнения входят с учетом этого коэффициента.

Например, в уравнении для кинетической энергии $E = m{\cdot}v^2/2$ (m – масса тела, кг; v – скорость движения этого тела, м/с), энергия в 1 кг · м^2/с^2 = 1 Дж развивается телом массой 2 кг, движущимся со скоростью 1 м/с.

Производные единицы электрических и магнитных величин определяются из формул, записанных в рационализированной форме. Это важно, так как позволяет исключить безразмерные коэффициенты 4π и $(4\pi)^{-1}$ из всех физических соотношений, в которых наличие этих коэффициентов неоправданно.

Например, в формуле для емкости плоского конденсатора: $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d,$ где ε и ε_0 – электрические постоянные среды и вакуума, соответственно; S – площадь конденсатора; d – расстояние между обкладками конденсатора. Между тем, неоправданно отсутствие этих коэффициентов в формулах, имеющих осевую и сферическую симметрии, например в законах Кулона $(F = q_1q_2/4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r)^2$ и

Ампера ($F = 2\mu\mu_0 I_1 I_2 / 4\pi\, r$)), в формулах для вычисления емкостей цилиндрического и сферического конденсаторов.

Некоторые производные единицы различных величин (механических, электрических, магнитных, тепловых, световых и ионизирующих излучений) приведены в таблице 3.2.

В системе СИ специальные наименования имеют 17 производных единиц: герц, ньютон, паскаль, джоуль, ватт, кулон, вольт, фарада, ом, беккерель, грей, вебер, сименс, тесла, генри, люмен, люкс. Правила написания производных единиц устанавливаются ГОСТ 8.417-81, в частности единицы, образованные от собственных имен, обозначаются начальной заглавной буквой. Из перечисленных названий производных единиц только люмен и люкс не образованы от имен собственных.

Единицы ФВ делятся на системные и внесистемные. Системная единица – единица ФВ, входящая в одну из принятых систем. Все основные, производные, кратные и дольные единицы являются системными. Внесистемная единица – это единица ФВ, не входящая ни в одну из принятых систем единиц.

Внесистемные единицы по отношению к единицам СИ разделяют на четыре вида:

допускаемые наравне с единицами СИ (например: единица массы – тонна; плоского угла – градус, минута, секунда; объема – литр и др.) (табл.3.3);

допускаемые к применению в специальных областях (например: астрономическая единица, парсек, световой год – единицы длины в астрономии; диоптрия – единица оптической силы в оптике; электрон-вольт – единица энергии в физике и т.д.);

временно допускаемые к применению наравне с единицами СИ (например: морская миля – в морской навигации; карат – единица массы в ювелирном деле и др.) Эти единицы должны изыматься из употребления в соответствии с международными соглашениями;

изъятые из употребления (например: миллиметр ртутного столба – единица давления; лошадиная сила – единица мощности и некоторые другие).

Таблица 3.2

Производные единицы СИ

Величина		Наименование	Обозначение	
наименование	размерность		русское	международное
1. Производные единицы пространства и времени				
Площадь	L^2	квадратный метр	$м^2$	m^2
Объем, вместимость	L^3	кубический метр	$м^3$	m^3
Скорость	$L\cdot T^{-1}$	метр в секунду	$м/с^{-1}$	m/s^{-1}
Ускорение	$L\cdot T^{-2}$	метр на секунду в квадрате	$м/с^{-2}$	m/s^{-2}
Частота	T^{-1}	герц	Гц	Hz
Частота вращения	T^{-1}	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$	s^{-1}
Угловая скорость	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с	rad/s
Угловое ускорение	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	$рад/с^2$	rad/s^2
2. Производные единицы механических величин				
Плотность	$L^{-3}\cdot M$	килограмм на кубический метр	$кг/м^{-3}$	kg/m^{-3}
Момент инерции	$L^2\cdot M$	килограмм-метр в квадрате	$кг\cdot м^2$	kg/m^2
Импульс	$L\cdot M\cdot T^{-1}$	килограмм-метр на секунду	кг·м/с	kg·m/s
Момент импульса	$L^2\cdot M\cdot T^{-1}$	килограмм-метр в квадрате на секунду	$кг\cdot м^2/с$	$kg\cdot m^2/s$
Сила, вес	$L\cdot M\cdot T^{-2}$	ньютон 1 Н = 1 $кг\cdot м/с^2$	Н	N
Момент силы	$L^2\cdot M\cdot T^{-2}$	ньютон-метр	Н·м	N·m
Импульс силы, количество движения	$L\cdot M\cdot T^{-1}$	ньютон-секунда	Н·с	N ·s
Давление, напряжение модуль упругости	$L^{-1}\cdot M\cdot T^{-2}$	паскаль 1 Па = 1 $Н/m^2$	Па	Pa
Поверхностное натяжение	$M\cdot T^{-2}$	ньютон на метр	Н/м	N/m
Работа, энергия	$L^2\cdot M\cdot T^{-2}$	джоуль 1 Дж = 1 Н·м	Дж	J
Мощность	$L^2\cdot M\cdot T^{-3}$	ватт 1 Вт = 1 Дж/с	Вт	W
Динамическая вязкость	$L^{-1}\cdot MT^{-1}$	паскаль-секунда	Па·с	Pa·s
Кинематическая вязкость	$L^2\cdot T^{-1}$	квадратный метр на секунду	$м^2/с$	m^2/s
Ударная вязкость	$M\cdot T^{-2}$	джоуль на квадратный метр	$Дж/м^2$	J/m^2

Окончание табл. 3.2

3. Производные единицы тепловых величин				
Количество теплоты, внутренняя энергия	$L^2 \cdot M \cdot T^{-2}$	джоуль	Дж	J
Удельное количество теплоты	$L^2 \cdot M \cdot T^{-2}$	джоуль на килограмм	Дж/кг	J/kg
Теплоемкость удельная	$L^2 \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К	J/К
Теплопроводность	$L \cdot M \cdot T^{-3} \theta^{-1}$	ватт на метр-кельвин	Вт/(м·К)	W/(m·K)
4. Производные единицы электрических магнитных величин				
Электрический заряд	$T \cdot I$	кулон 1 Кл = 1 А·с	Кл	C
Электрический потенциал, напряжение, ЭДС	$L^2 \cdot M \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}$	вольт 1 В = 1 Дж/Кл	В	V
Электрическая емкость	$L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^4 \cdot I^2$	фарад 1 Ф = 1 Кл/1В	Ф	F
Электрическое сопротивление	$L^2 \cdot M \cdot T^{-3} \cdot I^{-2}$	ом 1 Ом = 1 В / 1А	Ом	Ω
Удельное электрическое сопротивление	$L^3 \cdot M \cdot T^{-3} \cdot I^{-2}$	ом-метр	Ом·м	Ω·m
Электрическая проводимость	$L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^3 \cdot I^{-2}$	сименс 1 См = 1 А / 1 В	См	S
Магнитный поток	$L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}$	вебер 1 Вб = 1 В·с	Вб	W
Магнитная индукция	$M \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}$	тесла 1 Тл = 1 Н/(А·м)	Тл	T
Индуктивность	$L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot I^{-2}$	генри 1 Гн =1 Вб / 1 А	Гн	H
5. Произвольные величины световых величин и величин энергетической фотометрии				
Световой поток	J	люмен	лм	lm
Освещенность	$L^{-2} \cdot J$	люкс 1 лк = 1 лм/м^2	лк	lx
Светимость	$L^{-2} \cdot J$	люмен на квадратный метр	лм/м^2	lm/m^2
Яркость	$L^{-2} \cdot J$	кандела на квадратный метр	Кд/м^2	cd/m^2
Поток излучения	$L^2 \cdot M \cdot T^{-3}$	Ватт	Вт	W
Энергетическая освещенность	$M \cdot T^{-3}$	Ватт на квадратный метр	Вт/м^2	W/m^2
Энергетическая яркость	$M \cdot T^{-3}$	Ватт на стерадиан квадратный метр	Вт/(ср·м^2)	W/sr·m^2

Таблица 3.3

Внесистемные единицы, допускаемые наравне с единицами СИ

Наименование		Обозначение		Значение в единицах СИ
величины	единицы	русское	международное	
Площадь (земли)	гектар	Га	h_a	$1 \cdot 10^4 м^2$
Объем, вместимость	литр	Л	l	10^{-3} $м^3$
Плоский угол	градус	$\dots^{0}_{\,'}$	$\dots^{0}_{\,'}$	π/180 ряд
	минута	$\dots_{''}$	$\dots_{''}$	π/10800 рад
	секунда	$\dots$	$\dots$	π/648000 рад
Время	минута	мин	min	60 с
	час	ч	h	3600 с
	сутки	сут	d	86400 с
	неделя	нед	—	—
	месяц	мес	—	—
	год	год	—	—
Масса	тонна	Т	t	10^3 кг
Температура Цельсия	градус Цельсия	$^{\circ}C$	$^{\circ}C$	$t = T - 273{,}15^{\circ}$ По размеру $t = T$

Таблица 3.4

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка	Обозначение		Множитель	Приставка	Обозначение	
		русское	международное			русское	международное
10^{18}	экса	Э	E	10^{-1}	деци	д	d
10^{15}	пета	П	P	10^{-2}	санти	с	c
10^{12}	тетра	Т	T	10^{-3}	милли	м	m
10^{9}	гига	Г	G	10^{-6}	микро	мк	μ
10^{6}	мего	М	M	10^{-9}	нано	н	n
10^{3}	кило	к	K	10^{-12}	пико	п	p
10^{2}	гекто	г	H	10^{-15}	фермо	ф	f
10^{1}	дека	да	Da	10^{-18}	атто	а	a

Примечание. Наименование кратных и дольных единиц получается прибавлением приставок к наименованиям основных или производных единиц, например микрометр и т.п. Приставки пишутся слитно с основным наименованием. Использование двух приставок не допускается.

Различают кратные и дольные единицы ФВ. *Кратная единица* – это единица ФВ, в целое число раз превышающая системную или внесистемную единицу.

Дольная единица – единица ФВ, значение которой в целое число раз меньше системной или внесистемной единицы. Приставки для образования кратных и дольных единиц приведены в таблице 1.6.

Например**,** единица длины миллиметр равна 10^{-3} м, т.е. является дольной.

Например**,** единица длины километр равна 10^{3} м, т.е. кратна метру.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕРЕНИЙ

4.1. Классификация измерений

Обоснованная классификация любых объектов представляет собой их условное группирование по заданным признакам, осуществляемое с определенной целью. При различных целях одни и те же объекты могут быть классифицированы по-разному. Классификация не является самоцелью, она диктуется потребностями теории и практики. Целесообразность классификации измерений, т.е. подразделение этого понятия на группы, обуславливается удобством при разработке методик выполнения измерений и обработки результатов. Измерения могут быть классифицированы по ряду признаков (рис.4.1).

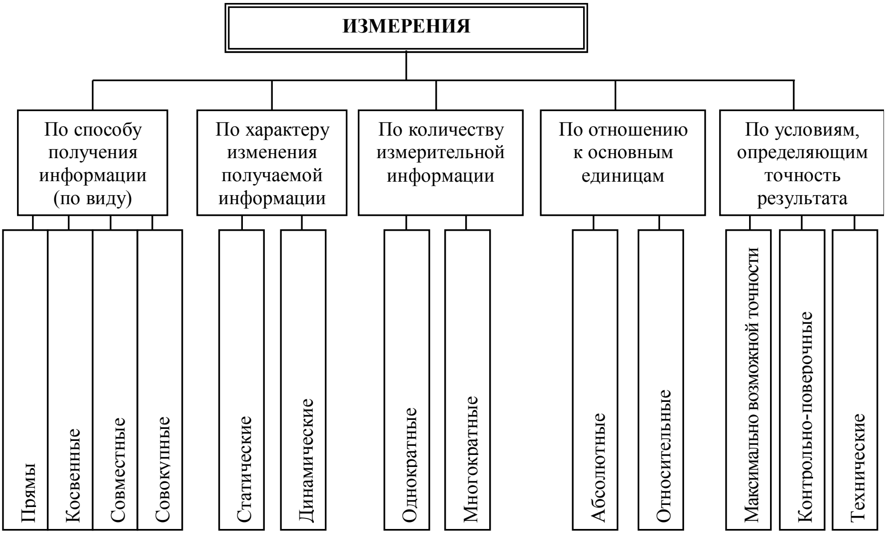


Рис. 4.1. **Классификация измерений**

Наибольшее распространение получила ***классификация по способу получения информации*** измерения. Целью такого деления является удобство выделения методологических погрешностей измерений, возникающих при определении результатов измерения. По этому признаку измерения делятся на следующие виды:

Прямые измерения, при которых искомое значение физической величины определяют непосредственно путем сравнения с мерой этой величины.

Прямые измерения можно выразить формулой

$$Q = X, \tag{4.1}$$

где Q – искомое значение измеряемой величины, X – значение, непосредственно получаемое из опытных данных.

При прямых измерениях экспериментальным операциям подвергают измеряемую величину, которую сравнивают с мерой непосредственно или же с помощью измерительных приборов, градуированных в требуемых единицах. Прямые измерения широко применяются в машиностроении, а также при контроле технологических процессов.

Например, измерение температуры термометром, длинны – линейкой, электрического напряжения – вольтметром.

Косвенные измерения, при которых искомое значение величины определяют на основании результатов прямых измерений других физических величин, связанных с искомой известной функциональной зависимостью.

Значение измеряемой величины находят путем вычисления по формуле

$$Q = F\,(x_1, x_2, \ldots, x_N), \tag{4.2}$$

где Q – искомое значение косвенно измеряемой величины; F – функциональная зависимость, которая заранее известна, $x_1, x_2, \ldots, x_N$ – значения величин, измеренных прямым способом.

Например, мощность электрической цепи постоянного тока в соответствии с формулой $P = I \cdot U$ (где I и U – электрические ток и напряжение) можно определить, проведя прямые измерения силы тока и напряжения.

Нахождение значения длины окружности через диаметр, мощности двигателя через крутящий момент и частоту вращения

Совокупные измерения, при которых проводятся одновременно измерения нескольких однородных величин с определением искомой величины путем решения системы уравнений. Число уравнений системы не должно быть меньше числа искомых величин.

Пример. Измерения значения взаимоиндуктивности между двумя катушками. Имеются катушки с индуктивностями L_1 и L_2. Для получения искомого результата сначала соединяют катушки так, чтобы их магнитные поля складывались, при этом общая индуктивность $L_{01} = L_1 + L_2 + 2M$, где M – взаимоиндуктивность между катушками. Затем катушки соединяются так, чтобы их магнитные поля вычитались. В этом случае общая индуктивность $L_{02} = L_1 + L_2 - 2M$. Значения L_{01} и L_{02} получают с помощью прямых измерений. Решение уравнений для L_{01} и L_{02} позволяет найти искомую однородную величину M, измеряемую в генри, $M = (L_{01} - L_{02})/4$.

Пример. Необходимо произвести калибровку разновеса, состоящего из гирь массой 1, 2, 2*, 5, 10 и 20 кг (звездочкой отмечена гиря, имеющая то же самое номинальное значение, но другое истинное). Калибровка состоит в определении массы каждой гири по одной образцовой гире, например по гире массой 1 кг. Для этого проведем измерения, меняя каждый раз комбинацию гирь (цифры показывают массу отдельных гирь, $1_{\text{обр}}$ – обозначает массу образцовой гири в 1 кг):

$1 = 1_{\text{обр}} + a$; $1 + 1_{\text{обр}} = 2 + b$; $2^* = 2 + c$; $1 + 2 + 2^* = 5 + \mathrm{d}$ и т.д.

Буквы a, b, c, d означают грузики, которые приходится прибавлять или отнимать от массы гири, указанной в правой части уравнения, для уравновешивания весов. Решив эту систему уравнений, можно определить значение массы каждой гири.

4. *Совместные измерения*, при которых проводятся измерения неоднородных физических величин с целью нахождения зависимости между ними.

Пример. Нахождение коэффициентов a и b при известной зависимости сопротивления терморезистора от температуры – $r_1 = r_0 + at + bt^2$, где r_1 и r_0 – значения сопротивления при данной t и $t = 20°$ С, соответственно; a и b – постоянные температурные коэффициенты с единицами Ом/°С и Ом/(°С)^2, соответственно. В данном случае приходится измерять неоднородные величины (единица сопротивления – Ом, единица температуры – °С).

Как при совокупных, так и при совместных измерениях искомые значения находятся путем решения уравнений. Поэтому эти измерения близки друг к другу. Различают их, только потому, что при совокупных измерениях одновременно измеряется несколько однородных физических величин, а при совместных – несколько неоднородных величин.

По характеру изменения получаемой информации в процессе измерений разделяются на следующие виды:

Статические измерения – это измерения, которые проводятся при практическом постоянстве измеряемой величины.

К статическим измерениям относятся измерения параметров, которые в процессе наблюдения не изменяются или рассматриваются как не изменяющиеся (размеры обработанной детали, индуктивность катушки, эклектическое напряжение и т.д.). Конечно, в ряде случаев идеальной неизменности измеряемой величины трудно достигнуть. В этих случаях пределы допускаемых отклонений, несущественных по отношению к номинальному значению измеряемой величины, оговариваются в технической документации.

Динамические измерения – это измерения в процессе которых измеряемая величина изменяется.

Прежде всего, динамический режим может возникать при измерении не изменяющейся величины непосредственно после включения средства измерений вследствие его инерционности. Через некоторое время наступает статический режим, при котором измерения могут рассматриваться как статические.

Кроме того, в современных технологических и других процессах за время измерений величины могут претерпевать те или иные изменения, и в этом случае измерения называются динамическими. К ним относятся измерения параметров периодических и апериодических сигналов, стохастических сигналов, изменение которых можно описать только вероятностными закономерностями. Характерны для «чистых» динамических измерений является то, что результат измерений изменяющейся во времени физической величины представляется совокупностью ее значений с указанием моментов времени, которым соответствуют эти значения. В других случаях результат динамического измерения может быть представлен некоторым усредненным числовым значением.

Из опыта известно, что при некоторых свойствах как измеряемой величины, так и средств измерений погрешность измерений будет разной при одних и тех же значениях измеряемой величины, но при разных скоростях ее изменений. Поэтому целью классификации измерений на статические и динамические целесообразно считать возможность принятия решений о том, нужно ли при конкретных измерениях учитывать скорость изменения величины или нет.

По количеству измерительной информации измерения делятся на следующие виды:

Однократные, при которых число измерений равняется числу измеряемых величин.

Если измеряется одна величина, то измерение проводится один раз. Следует иметь в виду, что руководствоваться одним опытом при измерениях той или иной величины не всегда оправдано. Весьма велика возможность грубой ошибки – промаха. Во многих случаях рекомендуется выполнить не менее двух – трех измерений. При этом результат измерения, т.е. значение физической величины, полученное при измерениях, есть среднее из двух, трех отсчетов.

Многократные, при которых число измерений превышает число измеряемых величин в n/m раз, где n – число измеряемых величин, m – число измерений каждой величины. Обычно для многократных измерений $n \geq 3$. Многократные измерения проводят с целью уменьшения влияния случайных составляющих погрешностей измерения.

По отношению к основным единицам измерения делятся на следующие виды:

Абсолютные, при которых результат измерения основывается на прямых измерениях одной или нескольких основных величин и (или) использовании физических констант.

Абсолютными по существу являются измерения производной величины в прямом соответствии с ее размерностью. Измерение основной величины может быть только абсолютным.

Пример. Определение длины в метрах, силы электрического тока в амперах, ускорения свободного падения в метрах на секунду в квадрате.

Измерение силы в соответствии с уравнением $F = m \cdot g$. Это измерение основано на измерении основной величины – массы (m) и использовании физической постоянной g (в точке измерения массы).

Относительные, при которых проводится измерение отношения величины к однородной величине, играющей роль единицы, или измерение величины по отношению к однородной величине, принимаемой за исходную.

Пример. Измерение относительной влажности воздуха, определяемой как отношение количества водяных паров в 1 м^3 воздуха к количеству водяных паров, которое насыщает 1 м^3 воздуха при данной температуре.

По условиям, определяющим точность результата, измерения делятся на:

Измерения максимально возможной точности, достижимой при существующем уровне техники.

К ним относятся в первую очередь эталонные измерения, связанные с максимально возможной точностью воспроизведения установленных единиц физических величин, и, кроме того, измерения физических констант, прежде всего универсальных (например, абсолютного значения ускорения свободного падения, гиромагнитного отношения протона и др.).

К этому же классу относятся и некоторые специальные измерения, требующие высокой точности.

Контрольно-поверочные измерения, погрешность которых с определенной вероятностью не должна превышать некоторого заданного значения.

К ним относятся измерения, выполняемые лабораториями государственного надзора за внедрением и соблюдением стандартов и состоянием измерительной техники, и заводскими измерительными лабораториями, которые гарантируют погрешность результата с определенной вероятностью, не превышающей некоторого, заранее заданного значения.

Технические измерения, в которых погрешность результата определяется характеристиками средств измерений.

Примерами технических измерений являются измерения, выполняемые в процессе производства на машиностроительных предприятиях, на щитах распределительных устройств электрических станций и др.

Кроме рассмотренных признаков классификации измерений для конкретных случаев при необходимости могут быть использованы и другие. **Например**, измерения можно подразделит в зависимости от места выполнения на лабораторные и промышленные; в зависимости от процедуры выполнения во времени – на непрерывные и периодические; по характеристике точности – равноточные и неравноточные и т.д.

4.2. Методы и принципы измерений

Метод измерений – прием или совокупность приемов сравнения измеряемой величины с ее единицей или соотнесения со шкалой в соответствии с реализованным принципом измерений. Описание методов измерений приведено в таблице 4.1.

Принцип (от латинского *principium* – начало, основа) *измерений* – это совокупность физических явлений, на которых основаны измерения.

Принципом измерения, например, является использование:

силы тяжести при измерении массы взвешиванием;

эффекта Доплера для измерения скорости;

термоэлектрического эффекта для измерений электрической мощности на сверхвысоких частотах (СВЧ);

поворота катушки с током в магнитном поле для измерения силы тока в электрической цепи и др.

Различают два базовых метода измерений: метод непосредственной оценки и метод сравнения с мерой. Для удобства изложения в дальнейшем используется классификация методов измерений, приведенная на рисунке 4.2. Различия между двумя методами измерений (непосредственной оценки и сравнения с мерой) заключаются в том, что метод непосредственной оценки реализуют с помощью приборов без дополнительного применения мер, а метод сравнения с мерой предусматривает обязательное использование овеществленной меры. Меры в явном виде воспроизводят с выбранной точностью физическую величину определенного (близкого к измеряемой) размера.

Таблица 4.1

Методы измерений (РМГ 29–2013)

Метод измерения	Определение
Непосредственной оценки	Метод измерений, в котором значение величины определяют непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора прямого действия
Сравнения с мерой	Метод измерений, в котором измеряемою величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой
Дифференциальный	Метод измерений, при котором измеряемая величина сравнивается с однородной величиной, имеющей известное значение, незначительно отличающееся от значения измеряемой величины, при котором измеряется разность между этими двумя величинами.
Дополнения	Метод сравнения с мерой, в котором измененяемую величину дополняют мерой этой же величины с таким расчетом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее заданному значению
Нулевой	Метод сравнения с мерой, в котором результирующий эффект воздействия на прибор сравнения доводят до нуля
Совпадений	Метод сравнения с мерой, в котором разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой, измеряют, используя совпадение отметок шкал или периодических сигналов
Замещения	Метод сравнения с мерой, в котором измеряемую величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой
Противопоставления	Метод сравнения с мерой, в котором измеряемая величина и величина, воспроизводимая мерой, одновременно воздействуют на прибор сравнения, с помощью которого устанавливается отношение между этими величинами

При использовании метода непосредственной оценки значение измеряемой физической величины определяют непосредственно по отсчетному устройству прибора прямого действия. Суть метода непосредственной оценки, как любого метода измерения состоит в сравнении измеряемой величины с мерой, принятой за единицу, но в этом случае мера «заложена» в измерительный прибор опосредованно. Прибор осуществляет преобразование входного сигнала измерительной информации, соответствующего всей измеряемой величине, после чего и происходит оценка ее значения. На рисунке 4.3. представлена обобщенная схема реализации метода непосредственной оценки.

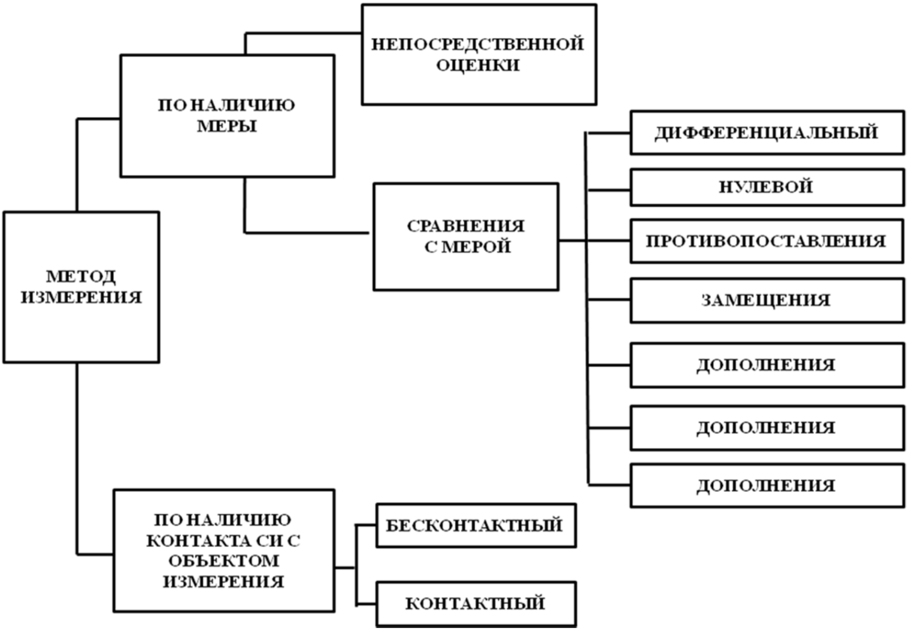


Рис. 4.2. **Классификация методов измерений**

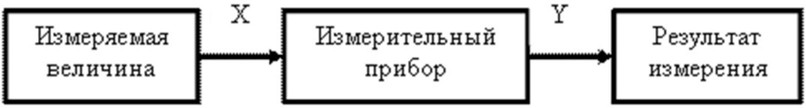


Рис.4.3. **Обобщенная схема реализации метода непосредственной оценки**

Для пояснения сущности приведенных определений обратимся к примерам реализации методов измерений.

Формальное выражение для описания метода непосредственной оценки может быть представлено в следующей форме:

$$X = Y, \tag{4.3}$$

где X – искомое значение измеряемой величины, Y – показания средства измерения.

Например, измерение напряжение осуществляют вольтметром, силы тока – амперметром, длины – миллиметровой линейкой и т.д.

Процесс измерения по методу непосредственной оценки характеризуется быстротой, что делает его незаменимым для практического использования. Однако точность измерения обычно оказывается невысокой из-за воздействия влияющих величин и необходимости градуировки шкал приборов.

В истории развития техники точных измерений нулевой метод является одним из первых. Этот метод характеризуется равенством воздействий, оказываемых измеряемой величиной и мерой, на прибор, используемый для сравнения этих величин. Если мера и измеряемая величина одновременно воздействуют на прибор сравнения, то измерения относится к методу противопоставления.

Рассмотрим обобщенную схему реализации нулевого метода противопоставления (рис. 4.4). Измеряемая величина X и мера X_0 воздействуют на два входа измерительного прибора сравнения. Результирующий эффект воздействия определяется разностью этих величин, т.е. $e = X - X_0$. Так как метод нулевой нужно изменяя величину, воспроизводимую мерой (это схематически указано на рисунке стрелкой), довести величину e до 0, это значение фиксируется нуль-индикаторном. Если $e = 0$, то $X = X_0$, т.е. значения искомой величины принимаем равным значению меры.

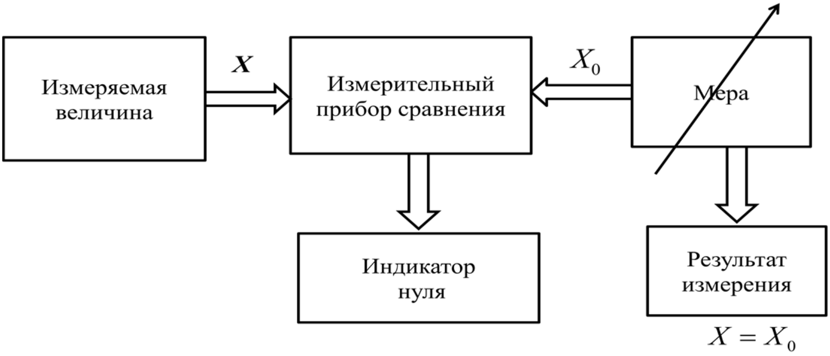


Рис.4.4. **Обобщенная схема реализации нулевого метода противопоставления**

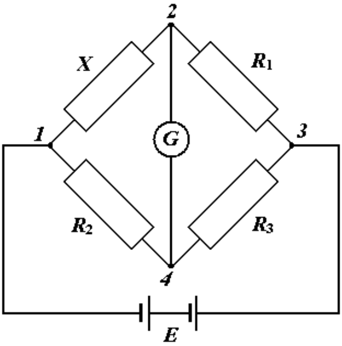


Рис.4.5. **Схема моста для измерения электрического сопротивления**

Типичный пример реализации нулевого метода – измерение сопротивления уравновешиваемым мостом постоянного тока. На рисунке 4.5 показана схема моста для измерения сопротивления *X*. Схема состоит из трех сопротивлений с известными значениями R_1; R_2; R_3, нулевого индикатора – гальванометра *G* и источника тока *E*. Изменяя одно из сопротивлений *R*, добиваются, чтобы указатель гальванометра не смещался с нуля. Это может быть только тогда, когда между точками *2 – 4* нет разности потенциалов, или иными словами, падение напряжения между точками – *2* равно падению напря-напряжения между точками *1 – 4*. Как следствие падения напряжения между точками *2 – 3* и *3 – 4* также равны между собой. На основании этих равенств получают формулу $X/R_2 = R_1/R_3$ или $X = (R_1 \cdot R_2)/R_3$.

Примером нулевого метода противопоставления может служить взвешивание груза X на равноплечих весах (рис. 4.6), когда масса груза определяется массой гирь, уравновешивающих воздействие груза на рычаг весов. Состояние равновесия определяется по положению указателя нуль–индикатора, который в этом случае должен находиться на нулевой отметке. Весы при таком измерении выполняют функцию компаратора.

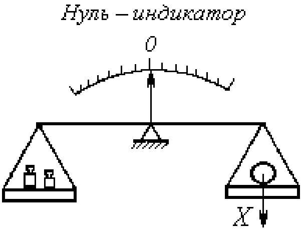


Рис.4.6. **Схемы измерения массы нулевыми методами противопоставления**

Если мера и измеряемая величина последовательно воздействуют на прибор сравнения, то измерения относится к методу замещения. Нулевой метод замещения применяется в тех случаях, когда производят точные измерения параметров. При таком методе исключается влияние изменений характеристик используемого средства измерений (в рассмотренном случае – изменение характеристик пружины) на результат измерения.

Рассмотрим обобщенную схему реализации нулевого метода замещения (рис. 4.7). Сначала на вход измерительного прибора подают измеряемую величину X и отмечают показания прибора (отсчет) Y_1. После этого вместо измеряемой величины на тот же самый вход (это очень существенно) прибора подают величину X_0, воспроизводимую мерой. В этом случае показание прибора становится равным Y_2. Изменяя величину, воспроизводимую мерой, добиваются равенства показаний, т.е. $Y_1 = Y_2$. Значение искомой величины принимаем равным значению меры $X = X_0$.

Рассмотрим реализацию нулевого метода замещения на примере измерения ЭДС (рис. 4.8). Сравнение измеряемой величины E_X и изменяемой известной E_0 происходит в режиме поочередного измерения. Если показания измерителя (например, вольтметра) при измерении величины E_X равны V_1, то, подключив известную E_0 и изменяя ее значение до достижения равенства результатов второго и первого измерений ($V_1 = V_2$), получим равенство $E_X = E_0$.

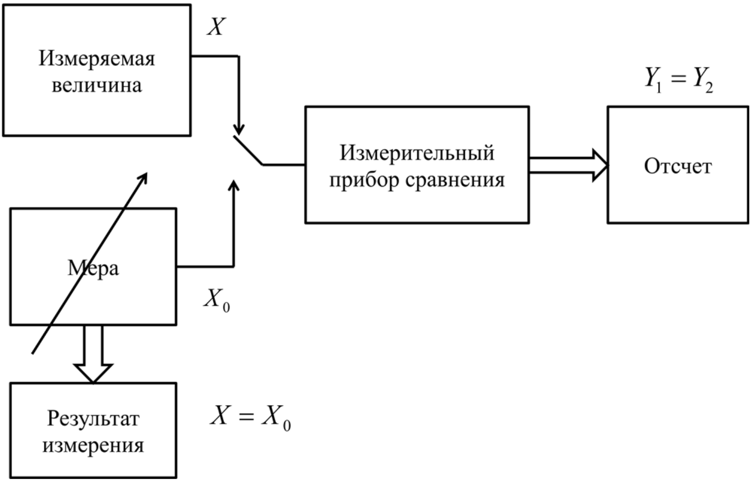


Рис. 4.7. **Обобщенная схема реализации нулевого метода замещения**

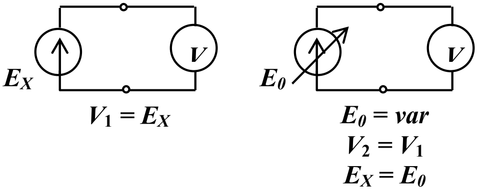


Рис.4.8. **Измерение ЭДС нулевым методом замещения**

На рисунке 4.9 показан пример реализации метода полного замещения для случая измерения массы груза. Здесь на пружинные весы устанавливают груз *X* и делают отметку *A* на шкале как результат его взвешивания. При этом показания пружинных весов принципиально можно и не считывать. Затем снимают груз и на чашку устанавливают набор гирь, который обеспечивает такую же деформацию пружины, как и груз *X*, о чем судят по установке стрелки против отметки *A*.

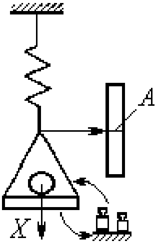


Рис. 4.9. **Схемы измерения массы нулевым методом замещения**

Нулевой метод используется для измерения самых разнообразных физических величин и, как правило, обеспечивает большую точность измерения, чем метод непосредственной оценки, за счет уменьшения влияния на результат измерения погрешностей средства измерений, которое в данном случае осуществляет только сравнение воздействий, создаваемых измеряемой величиной и мерой.

Недостатком нулевого метода является необходимость иметь большое число мер различных значений для составления сочетаний, воспроизводящих величины, равные измеряемым, т. е. необходимость воспроизводить любое значение известной физической величины без существенного понижения точности. Как правило, это связано с существенными трудностями.

Нулевой метод совпадения состоит в совпадении сигналов двух периодических процессов, характеристика одного их которых измеряется, а другого – используется в качестве меры. Более подробно этот метод будет рассмотрен чуть ниже.

Дифференциальный метод измерений характеризуется тем, что с помощью измерительного прибора методом непосредственной оценки измеряется разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой. Этот метод может быть использован, только в тех случаях, когда просто и точно реализуется операция вычитания величин (длины, перемещения, электрические напряжения), поэтому дифференциальный метод неприменим при измерении таких величин, как температура или твердость тел. Дифференциальный метод позволяет получить высокоточные результаты даже при использовании для измерения указанной разности относительно грубых средств измерений. Реализация дифференциального метода возможна только при условии наличия высокоточной меры, близкой по значению к измеряемой величине.

Если мера и измеряемая величина одновременно воздействуют на прибор сравнения, то измерения относится к методу противопоставления, если последовательно – замещения.

Рассмотрим обобщенную схему реализации дифференциального метода противопоставления (рис. 4.10). В этом методе измеряемая величина X и мера X_0 одновременно воздействуют на два входа прибора сравнения. Результирующий эффект воздействия определяется разностью этих величин, т.е. $e = X - X_0$, это значение снимается с отсчетного устройства прибора сравнения. Значение измеряемой величины определяют по формуле $X = X_0 + e$.

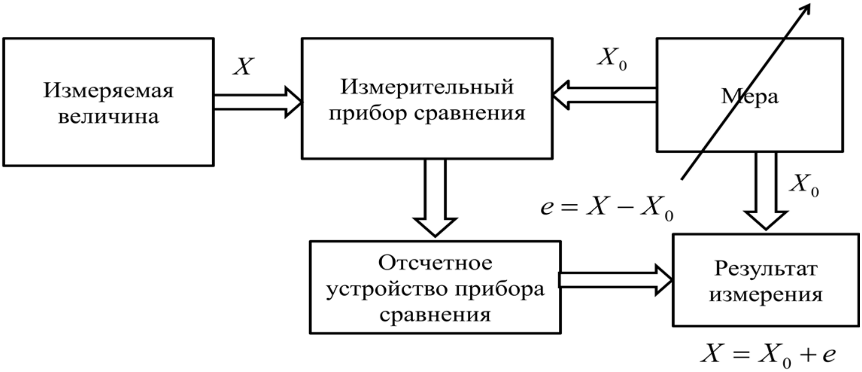


Рис. 4.10. **Обобщенная схема реализации дифференциального метода противопоставления**

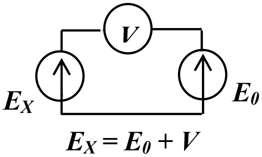


Рис.4.11. **Схема реализации дифференциального метода противопоставления**

В практике электрических измерений дифференциальный метод измерений можно пояснить на схеме, приведенной на рисунке 4.11. В дифференциальном методе противопоставления измеритель (например, вольтметр V) оценивает разность между измеряемой величиной ЭДС E_X и известной величиной, воспроизводимой мерой.

Примером метода неполного противопоставления может служить взвешивание на равноплечих весах, показанных на рисунке 4.12. Здесь действие груза X уравновешивается действием гири, служащей мерой, и силой упругой деформации пружины.

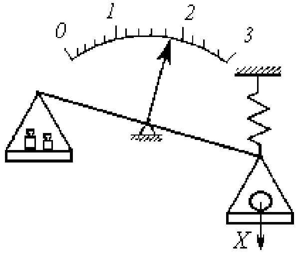


Рис. 4.12. **Схемы реализации измерений дифференциальным методом противопоставления**

В данном случае по величине деформации пружины, значение которой может быть отсчитано по шкале, измеряют разность воздействий груза и гири на пружину. Так определяют разность их масс. Величину массы груза определяют после взвешивания как сумму значения массы гири и показаний по шкале средства измерения.

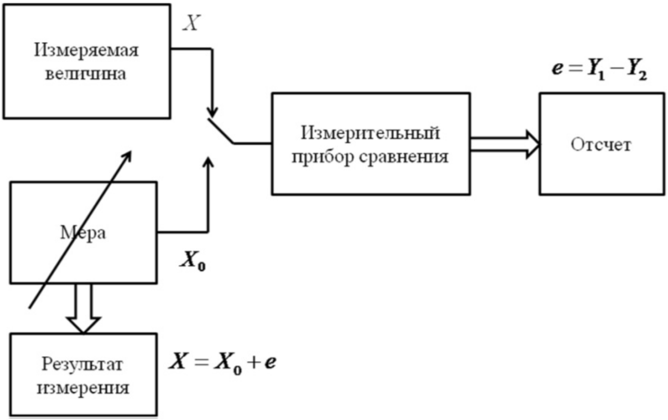


Рис. 4.13. **Обобщенная схема реализации дифференциального метода замещения**

Рассмотрим обобщенную схему реализации дифференциального метода замещения (рис. 4.14). Сначала на вход измерительного прибора подают измеряемую величину X и отмечают показания прибора Y_1, после этого вместо измеряемой величины на тот же самый вход прибора подают величину X_0, воспроизводимую мерой и отмечают показания прибора Y_2. Далее рассчитывают результирующий эффект воздействия на прибор сравнения как разность показаний прибора, т. е. $e = Y_1 - Y_2$. Значение измеряемой величины определяют по формуле $X = X_0 + e$.

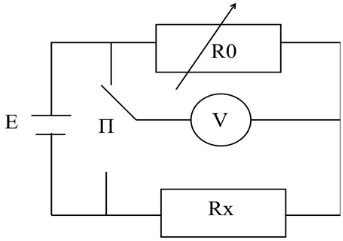


Рис. 4.14. **Схемы реализации измерений дифференциальным методом замещения**

На рисунке 4.14 приведена схема дифференциального метода замещения. Вольтметр *V* включается с помощью переключателя *П* в цепь с измеряемым сопротивлением $R_х$ или в цепь с регулируемым потенциометром (мерой) R_0. При достижении одинаковых показаний вольтметра ($R_х = R_0$) регистрируется искомое значение $R_х$.

Метод дополнения характеризуется тем, что измененяемую величину дополняют мерой этой же величины с таким расчетом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее заданному значению.

Например, груз *X* устанавливают на пружинные весы, если стрелка прибора не совпадает не с одной из отметок (рис. 4.15, а), то к грузу *X* дополняют гирями, с таким расчетом, чтобы стрелка точно совпала с делением на шкале прибора (рис.4.15, б). Массу груза определяют, как разницу между показанием прибора и массой гирь.

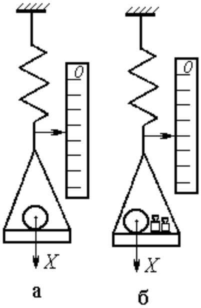


Рис. 4.15. **Схема измерения массы методом дополнения**

Сущность метода совпадений характеризуется использованием совпадения отметок шкал или периодических сигналов, если совпадение неполное, то метод относится к дифференциальному.

Принцип совпадения сигналов лежит также в основе методов измерений, в которых используются явления биений и интерференции, а также стробоскопический эффект.

В радиотехнике для сравнения двух близких по частоте колебаний используют явление, получившее название биений. Амплитуды двух высокочастотных колебаний при совпадении складываются, затем они перестают совпадать по фазе и через некоторое время оказываются в противофазе. Если амплитуды равны, их сумма становится равной нулю. Через такой же промежуток времени совпадают и складываются отрицательные амплитуды и т. д. Так образуются низкочастотные колебания, называемые биениями. Чем меньше разность сравниваемых частот, тем меньше частота биений. Так, при сложении частот 100 и 101 кГц частота биений будет равна 1 кГц. Такая частота легко воспринимается на слух. Если разность частот будет равна 10 Гц, то амплитуды будут совпадать через каждую десятую секунды. Колебания с такой частотой можно отмечать не только на экране осциллоскопа, но даже по стрелочному электроизмерительному прибору. Явление биений используется главным образом для установления равенства или разности двух частот. Изменяя одну из частот, наблюдают с помощью осциллоскопа частоту биений и приводят ее к нулю или, определяя частоту биений, находят разность между известной и неизвестной частотами.

В зависимости от наличия контакта измерительной поверхности средства измерений с поверхностью изделия различают *контактный* и *бесконтактный* методы измерения. Бесконтактный метод предпочтителен, так как отсутствует деформация от измерительных наконечников приборов (микроскопы, проекторы).

В зависимости от числа одновременно выявляемых размерных параметров методы и средства измерений подразделяют на *дифференцированные* и *комплексные*. Дифференцированный метод характеризуется тем, что каждый элемент изделия измеряют независимо от других элементов (например – измерение отдельно среднего, наружного и внутреннего диаметров резьбы). Комплексным методом определяют ряд параметров изделия одновременно (например – резьба болта контролируется резьбовым калибром).

5. СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

5.1. Классификация средств измерений

Для измерения физических величины применяют технические средства, которые называются средствами измерений.

Средство измерений представляет собой техническое устройство, предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики, воспроизводящее и (или) хранящее единицу физической величины.

Отличием средства измерений от других технических устройств является, главным образом, наличие меры и нормированных метрологических характеристик. Иногда делаются попытки необоснованно расширить применение понятия «средства измерений» на технические устройства, функционально предназначенные для использования результатов измерений физических величин в других конечных целях. Например, радиолокационная станция наряду с поиском и обнаружением цели измеряет дальность до нее, а также угловые координаты. Но эта станция не является средством измерений, поскольку средство измерений не предназначено для выполнения самостоятельных функций, отличных от измерений, а радиолокационная станция самостоятельно выполняет функции поиска и обнаружения целей. Для определения координат цели с требуемой точностью в станцию встроены измерительные узлы, очевидно, относящиеся к средствам измерений.

В метрологии средства измерений принято классифицировать по виду, принципу действия и метрологическому назначению.

Различают следующие виды средств измерений: меры, измерительные устройства; измерительные установки и измерительные системы (рис. 5.1).

Меры – это средства измерений, предназначенные для воспроизведения и (или) хранения физической величины одного или нескольких заданных размеров. К мерам относятся гири, концевые меры длины, нормальные элементы (меры ЭДС) и др. Меры, воспроизводящие физическую величину одного размера, называются однозначными. Меры, воспроизводящие физическую величину разных размеров, называются многозначными. Примером многозначной меры является миллиметровая линейка, воспроизводящая наряду с миллиметровыми также и сантиметровые размеры длины.

Применяются также меры в виде наборов и магазинов мер. Набор мер представляет собой комплект однородных мер разного размера, предназначенных для применения в различных сочетаниях (например, набор концевых мер длины). Магазин мер – набор мер, конструктивно объединенных в единое устройство, в котором предусмотрено ручное или автоматизированное соединение мер в необходимых комбинациях (например, магазин электрических сопротивлений).

Часто к однозначным мерам относят стандартные образцы и стандартные вещества. Стандартный образец материала или вещества представляют собой специально оформленное тело (пробу вещества) с установленными по результатам метрологической аттестации значениями физической величины, которая характеризует свойство или состав материала (вещества). Примером стандартного образца свойства является набор 10 эталонных тел – минералов для определения числа твердости по условной шкале Мооса. Каждый последующий минерал этой шкалы является более твердым, чем предыдущий. Использование образцов позволяет приближенно оценивать относительную твердость минералов (в отличие от описанных выше условных шкал твердости, позволяющих оценивать характеристики твердости металлов). Примером стандартного образца состава является образец чистого цинка, служащий для воспроизведения температуры 419,527 °С по температурной шкале МТШ-90.

Указанное на мере значение величины является номинальным значением меры. В специальном свидетельстве, придаваемом мере, указывается действительное значение, определенное при высокоточных измерениях с помощью соответствующего эталона. Разность между номинальным и действительным значениями называется погрешностью меры. Величина, обратная погрешности меры по знаку, представляет поправку к номинальному значению меры.

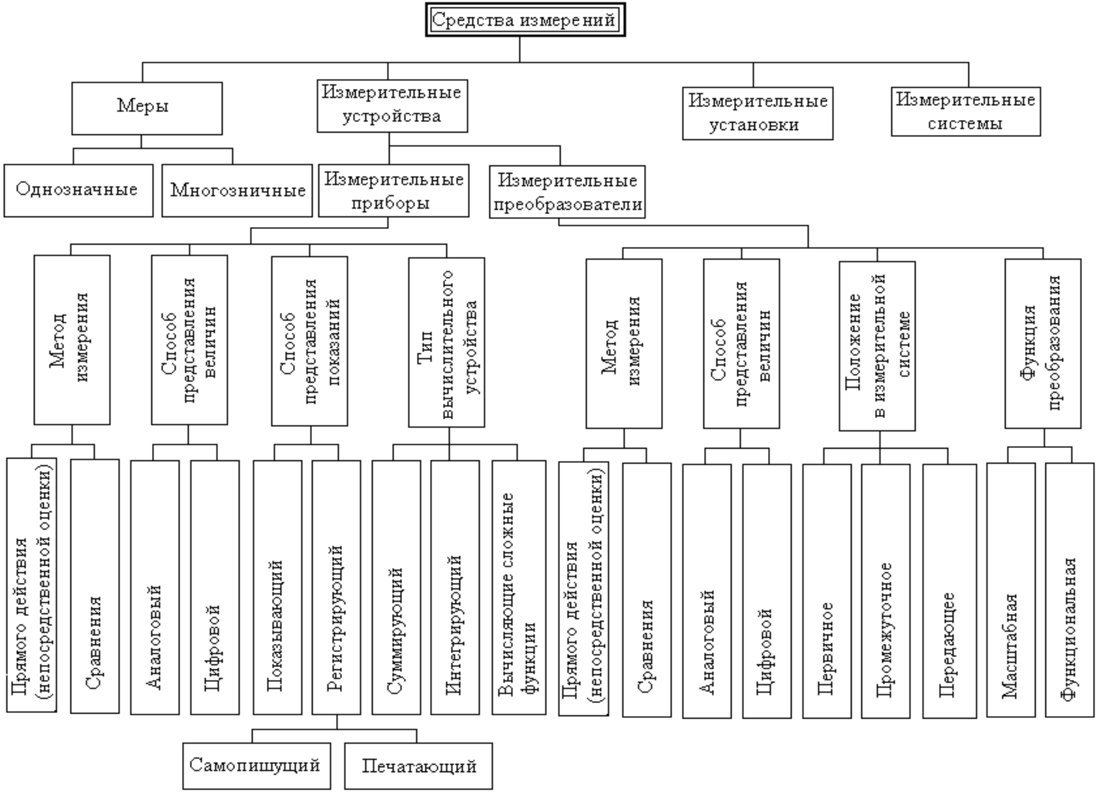


Рис. 5.1. **Классификация средств измерений**

Измерительные преобразователи – средства измерений, предназначенные для преобразования измеряемой величины в другую однородную или неоднородную величину с целью представления измеряемой величины в форме, удобной при обработке, хранении (например, в памяти ПК), дальнейших преобразованиях, передаче в показывающее устройство. Измерительные преобразователи не имеют устройств отображения измерительной информации, они или входят в состав измерительных приборов (установок), или применяются совместно с ними.

Измеряемая (преобразуемая) величина, поступающая на измерительный преобразователь, называется входной, преобразованная – выходной. Соотношение между входной и выходной величинами, представляемое формулой, графиком, таблицей, называется функцией преобразования измерительного преобразователя и является для него основной метрологической характеристикой.

Самым распространенным по количеству видов средств измерений являются первичные измерительные преобразователи, которые служат для непосредственного (первого) восприятия измеряемой величины, как правило, неэлектрической и преобразования ее в другую величину – электрическую. Первичные измерительные преобразователи иногда не изменяют рода физической величины, а служат лишь для изменения размера измеряемой величины (например, делители или усилители напряжения) или для ее трансформации (модуляции) в целях удобства дальнейших преобразований или индицирования. В этом случае первичные преобразователи встраиваются в измерительный прибор (устройство, систему). Часть первичного преобразователя, воспринимающая измерительный сигнал на его входе, называется чувствительным элементом или сенсором (например, термопара).

Первичный измерительный преобразователь, конструктивно оформленный как обособленное средство измерений (без отсчетного устройства) с нормированной функцией преобразования, называется датчиком. В подавляющем большинстве случаев датчик предназначен для преобразования неэлектрической физической величины в электрический ток, электрическое напряжение т.д. Часто неправомерно сенсоры называют датчиками.

Промежуточными (вторичными) измерительными преобразователями называются преобразователи, расположенные в измерительной цепи после первичного преобразователя и обычно по измеряемой (преобразуемой) физической величине однородные с ним. Другими словами, промежуточные преобразователи, как правило, не предназначены для изменения рода физической величины. Эти преобразователи иногда неоправданно относят к датчикам.

По характеру преобразования измерительные преобразователи разделяются на аналоговые, аналого-цифровые (АЦП), цифро-аналоговые (ЦАП). Допустимо рассматривать и цифровые преобразователи, служащие, например, для изменения формата цифрового сигнала. Указанные преобразователи почти всегда являются промежуточными.

Измерительные приборы – средства измерений, предназначенные для извлечения измерительной информации, преобразования ее для возможности отображения в том или ином виде.

Измерительные приборы представляют собой конструктивно объединенную совокупность первичных и промежуточных преобразователей (в ряде случаев при измерении активных сигналов измерительной информации – силы электрического тока, напряжения и др. – первичные преобразователи отсутствуют).

Особое место занимают измерительные приборы прямого действия, преобразующие измеряемую величину, как правило, без изменения ее рода и отображающие ее на показывающем устройстве, проградуированном в единицах этой величины (амперметры, вольтметры и др.).

Более точными являются приборы сравнения, предназначенные для сравнения измеряемых величин с величинами, значения которых известны. Сравнение осуществляется с помощью компенсационных цепей прибора (например, при измерении массы установкой эталонных гирь на равноплечных весах) или с помощью мостовых цепей.

Измерительные приборы подразделяются на аналоговые и цифровые. В соответствии с формулой (1.1) значение величины равно произведению ее числового значения на размер единицы измерения. Информация о числовом значении физической величины, называемая измерительной информацией, в процессе измерения передается с помощью тех или иных сигналов. В аналоговых приборах сигналы измерительной информации являются непрерывными функциями измеряемых физических величин. В аналоговых средствах измерений устанавливается прямая связь между значением измеряемой величины и значением сигнала физической величины. В простейшем аналоговом средстве измерений – ртутном термометре высота столбика ртути соответствует конкретному значению температуры. При этом очевидно, используется не само числовое значение, а аналоговая величина.

В цифровых измерительных приборах аналоговые сигналы измерительной информации дискретизируются и передаются для отображения в виде отдельных кратковременных импульсов, являющихся носителями измерительной информации. Отсчетные устройства цифровых приборов, как правило, отображают измеренное значение величины в цифровом виде. В некоторых случаях и первичные сигналы измерительной информации, поступающие на измерительный прибор, могут быть дискретными по времени (импульсными).

По способу записи измеряемой величины регистрирующие измерительные приборы делятся на самопишущие и печатающие. В самопишущих приборах запись показаний представляется в графическом виде (например, шлейфовый осциллограф), в печатающих – в числовой форме.

Измерительные установки и системы представляют собой совокупность функционально объединенных средств измерений (мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей) и вспомогательных устройств с целью измерений одной или нескольких физических величин объекта измерений (контроля).

В настоящее время большинство измерительных систем являются автоматизированными, реже автоматическими. Несмотря на различные наименования (АИС – автоматизированная измерительная система, ИИС – информационно-измерительная система, ИВК – измерительно-вычислительный комплекс) все они по существу обеспечивают автоматизацию процессов измерений, обработки и отображения результатов измерений, в том числе ввода измерительной информации в автоматизированные системы управления.

Измерительные принадлежности представляют собой вспомогательные устройства, служащие для обеспечения операций измерений, передачи измерительной информации на расстояние, обработки ее результатов и т. п. Очевидно, измерительные принадлежности, как и измерительные приборы, имеют нормированные метрологические характеристики. К измерительным принадлежностям относятся источники электрического питания средств измерений (имеются и эталонные источники питания), коммутаторы (в АИС), термостаты и др. Измерительные принадлежности могут вносить в результат измерений погрешности, которые обычно необходимо учитывать.

Кроме рассмотренной классификации средств измерений по виду существенной является классификация по принципу действия.

Принципом действия средства измерений называют физический принцип, положенный в основу построения средств измерения данного вида. Принцип действия обычно находит отражение в названии средства измерений, например: термоэлектрический термометр, деформационный манометр, электромагнитный расходомер и т.п.

По метрологическому назначению все средства измерений подразделяются на два вида.

Рабочие средства измерений, которые предназначены для измерений параметров и характеристик объектов контроля и измерений. К ним относятся технические устройства, технологические процессы, окружающая среда, расход веществ и материалов, показатели жизнедеятельности человека и др.

По условиям применения рабочие средства измерений могут быть:

лабораторными, используемыми при научных исследованиях, проектировании технических устройств, медицинских измерениях (обычно лабораторные средства измерений обладают наибольшей точностью, чувствительностью, стабильностью);

производственными, используемыми для обеспечения заданных характеристик технологических процессов, контроля готовой продукции при приемо-сдаточных испытаниях, ремонте технических устройств и др. (эти средства должны обладать, по сравнению с лабораторными, высокой стойкостью к ударно-вибрационным нагрузкам, воздействиям тепла, холода, повышенной влажности и др.);

полевыми, используемыми непосредственно при эксплуатации таких технических устройств, как самолеты, автомобили, речные и морские суда и др. К полевым обычно относят и встроенные средства измерений в объекты контроля и измерений, подверженные влиянию изменяющихся в широких пределах внешних воздействий.

Эталоны – средства измерений, относящиеся к высокоточным мерам (системам мер) и предназначенные для воспроизведения и хранения единицы величины (кратных или дольных значений единицы) с целью передачи ее размера другим средствам измерений.

До последнего времени между рабочими средствами измерений и государственными эталонами «располагалась» еще одна группа средств измерений — образцовые средства измерений, которые относились к средствам метрологического обеспечения. При этом образцовые средства измерений подразделялись на разряды от первого (наиболее высокой точности, т.е. уступающие по точности только эталонам) до второго, третьего и т.д. В настоящее время термин «образцовые средства измерений» меняется на термин «рабочие эталоны 1-го, 2-го и т.д. разряда».

5.2. Параметры и свойства средств измерений

Отсчетные устройства средств измерений. Результаты измерений, осуществленных измерительным прибором, регистрируются отсчетными устройствами. Отсчетные устройства подразделяются на шкальные, цифровые и регистрирующие.

Для шкальных отсчетных устройств принято использовать ряд понятий, сущность большинства из которых легко установить по рисунку 5.2.

Диапазон измерений (*рабочая часть шкалы*) – область значений измеряемой величины, для которой нормированы допускаемые погрешности средства измерений (для преобразователей – это диапазон преобразования).

Пределы измерений – наибольшее и наименьшее значение диапазона измерений. Для мер – это номинальное значение воспроизводимой величины.

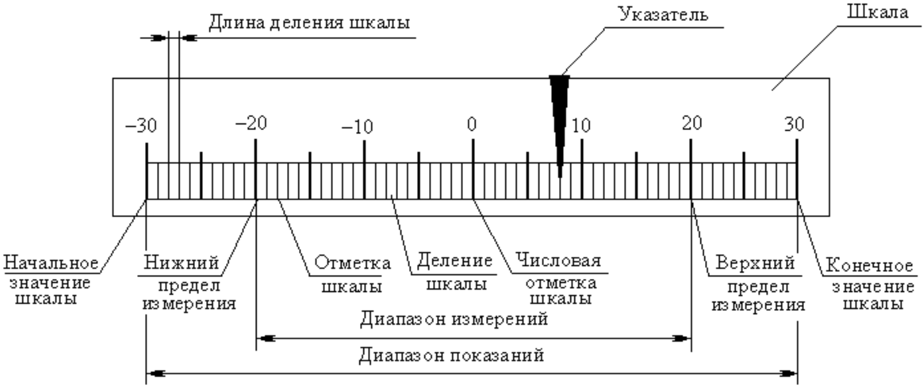


Рис. 5.2. **Схема отсчетного устройства средства измерения**

Когда нижний предел измерения равен нулю, диапазон измерения указывают в виде записи, например, 0 – 100 А, 0 – 100 Ом и т. п. В тех случаях, когда нижний предел измерения не равен нулю, тогда диапазон измерения обозначается так: 25 – 50 мм, 0 – 100 Ом и т. п.

Во многих измерительных приборах имеются специальные устройства, позволяющие изменить диапазон измерения иногда в очень широких пределах. В этих случаях следует говорить об общем диапазоне измерения, охватываемом измерительным прибором, и об отдельных диапазонах, которые часто называют неудачно «поддиапазоны». Например, общий диапазон измерения 0 – 100 делится на диапазоны 0 – 0,1; 0 – 1; 0 – 10; 0 – 100 или общий диапазон 0 – 5 делится на диапазоны 0 – 1; 1 – 2; 2 – 3; 3 – 4; 4 – 5.

Многодиапазонные приборы имеют свои преимущества и недостатки. Преимущества заключаются в том, что один многодиапазонный прибор заменяет несколько однодиапазонных. Он стоит дороже каждого однодиапазонного, но дешевле всех однодиапазонных приборов, которые он заменяет. Для хранения многодиапазонного прибора требуется гораздо меньше места, чем для группы однодиапазонных. К недостаткам многодиапазонных измерительных приборов следует отнести меньшую по сравнению с однодиапазонными надежность получения результата измерения вследствие наличия различных переключающих устройств, которые могут оказаться источником дополнительных погрешностей. Чем больше диапазонов измерения, тем сложнее ремонт приборов. Более трудоемкой оказывается и поверка таких измерительных приборов. Поверке должны подвергаться все диапазоны в обязательном порядке.

Диапазон показаний – область значений шкалы, ограниченная конечным и начальным значением шкалы.

Начальное (конечное) значение шкалы – минимальное (максимальное) значение измеряемой величины, указанное на шкале.

Для многих измерительных приборов, на шкале которых имеется отметка «0», нижний предел измерения в действительности не равен нулю. Точность измерения малых значений настолько снижается, что за нижний предел рабочей части шкалы приходится принимать некоторое значение, составляющее 20—30 %, верхнего предела.

Например, у шкалы на рис. 5.3, начальный участок сжат, потому производить отсчеты на нем неудобно. Тогда предел измерения по шкале составляет 50 ед., а диапазон – 10..50 ед.

Цена деления шкалы – разность значений, соответствующих двум соседним отметкам шкалы. Приборы с равномерной шкалой имеют постоянную цену деления, а с неравномерной – переменную. В этом случае нормируется минимальная цена деления.

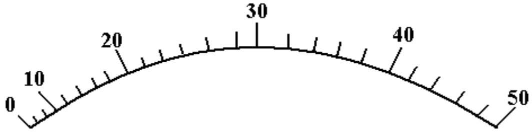


Рис. 5.3. **Неравномерная шкала СИ**

Отметка шкалы – знак на шкале, соответствующий некоторому значению измеряемой величины.

Деление шкалы – промежуток между двумя соседними отметками шкалы.

Длина (интервал) деления шкалы – расстояние между осями (или центрами) двух соседних отметок шкалы, измерено вдоль воображаемой линии, проходящей через середины самых коротких отметок шкалы

Статические характеристики средств измерения. Измерительную информацию, которую воспринимает и в дальнейшем преобразует средство измерения, несет в себе *входной сигнал X*, т.е. сигнал, поступающий на вход средства измерения. Например, давление в пневматической системе, подаваемое к манометру и измеряемое им, является входным сигналом манометра. Претерпев ряд преобразований, сигнал измерительной информации поступает на выход средства измерения. Этот сигнал называют *выходным сигналом.* Для рассматриваемого манометра выходным сигналом будет его показание, отсчитываемое по шкале.

В общем случае состояние (режим работы) средства измерения, при котором значения входного X и выходного Y сигналов не изменяются, называются статическими.

Статической характеристикой измерительного устройства называют функциональную зависимость выходного сигнала от входного в статическом режиме работы указанного устройства. Более точно статическую характеристику можно определить как зависимость информативного параметра выходного сигнала от информативного параметра его входного сигнала в статическом режиме. Статическая характеристика описывается в общем случае некоторым не линейным уравнением (уравнением преобразования):

$$Y = f(X). \tag{5.1}$$

Для измерительных преобразователей, а также измерительных приборов с неименованной шкалой или со шкалой, отградуированной в единицах, отличных от единиц измеряемой величины, статическую характеристику принято называть функцией преобразования. Для измерительных приборов иногда статическую характеристику называют характеристикой шкалы.

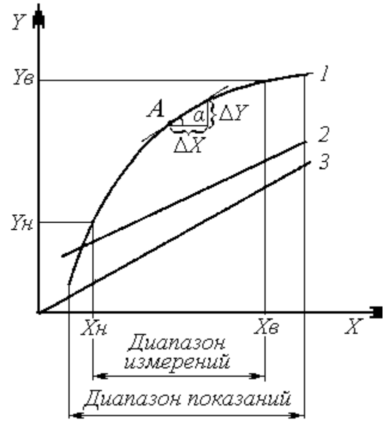


Рис. 5.4. **Статическая характеристика средства измерения**

Определение статической характеристики связано с выполнением градуировки, поэтому для всех средств измерений используют понятие *градуировочной характеристики*, под которым понимают зависимость между значениями величин на выходе и входе средства измерений, составленную в виде таблицы, графика или формулы.

На рисунке 5.4 показаны виды статических характеристик средств измерений. За исключением специальных случаев, основное требование, предъявляемое к статической характеристике средств измерений, сводится к получению линейной зависимости между выходной и входной величинами. На практике это требование реализуется в общем случае только с некоторой принятой заранее погрешностью.

На рисунке 5.4 на статической характеристике графически представлены упомянутые понятия диапазона показаний, диапазона измерений нижнего *Xн*, *Yн* и верхнего *Xв*, *Yв* пределов измерений.

Из формулировки диапазона измерения следует, что он определяется разностью значений верхнего и нижнего пределов измерений (*Xв* – *Xн*; *Yв* – *Yн*). Для количественной оценки влияния на выходной сигнал измерительного устройства входного сигнала в произвольной точке (рис. 5.4) статической характеристики служит предел отношения приращения ΔY выходного сигнала к приращению ΔX входного сигнала, когда последнее стремится к нулю, т. е. производная в выбранной точке

$$S = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta Y} = \frac{\partial Y}{\partial X}. \qquad (5.2)$$

Применительно к измерительным приборам этот параметр называют *чувствительностью* и определяют как отношение изменения сигнала на выходе измерительного прибора к вызывающему его изменению измеряемой величины. Графически она определяется тангенсом угла наклона к касательной (рис. 5.4), проведенной к выбранной точке *A* статической характеристики.

Если статическая характеристика измерительного прибора нелинейна (кривая *1* на рис. 5.4), то его чувствительность будет различной в разных точках характеристики, а шкала прибора – неравномерной. Приборы с линейной (прямая *2* на рис. 5.4) или пропорциональной (прямая *3* на рис. 5.4) статической характеристикой имею неизменную в любой точке шкалы чувствительность и равномерную шкалу.

Поскольку X и Y могут быть выражены в различных единицах, то величина S имеет размерность [мм/А], [мм/В], [градус/В] и т.д.

В научно-технической литературе используется понятие *порога чувствительности*, под которым понимают, то наименьшее значение входного сигнала, которое вызывает заметное изменение выходного сигнала.

Величину, обратную чувствительности, называют *постоянной прибора*.

Одним из важнейших условий получения корректных результатов измерений является учет взаимодействия измерительных устройств между собой и с объектом измерений.

При подключении измерительного устройства или преобразователя к объекту измерений последний потребляет некоторую энергию или мощность от объекта. Аналогичная ситуация имеет место при подключении измерительного прибора или преобразователя к выходу предыдущего по цепи измерения преобразователя. Это определяет необходимость учитывать свойства измерительных устройств отбирать или отдавать энергию через свои входные или выходные цепи.

В качестве характеристики указанного свойства принято использовать для измерительных устройств понятие *входного импеданса* (полного или кажущегося сопротивления), а для измерительных преобразователей – понятия *входного* и *выходного импедансом*. В настоящее время понятие входного и выходного импеданса широко используется для электрических измерительных устройств. При этом импеданс определяется как отношение напряжения к току, для определения этой характеристики используются специальные приборы.

5.3. Погрешности средств измерения

В результате воздействия большого числа различных факторов, возникающих в процессе изготовления и эксплуатации средств измерений, номинальные значения мер и показания приборов отличаются от истинных значений измеряемых ими величин. Эти отклонения характеризуют погрешности средств измерений.

От характера проявления при повторных применениях прибора погрешности СИ подразделяются на систематические и случайные.

Систематическая погрешность СИ – это составляющая общей погрешности, которая остается постоянной или закономерно изменяется при многократных измерениях одной и той же величины.

Случайной погрешностью СИ называют составляющую, изменяющуюся при повторных измерениях одной и той же величины случайны образом.

Присутствие погрешностей приводит к тому, что характеристики СИ (датчиков, приборов, каналов ИИС и ИВ К) оказываются неоднозначными. При экспериментальном их определении, т. е. градуировке СИ, получают лишь ряд точек. По этой полосе точек проводят на графике некоторую плавную среднюю кривую, которую и принимают за характеристику СИ.

Хотя некоторые экспериментальные точки от нее и отклоняются. Для наименования этих отклонений используется ряд терминов. Систематически наблюдающиеся отклонения от выбранной в качестве характеристики плавной кривой в общем случае называются *погрешностью адекватности* выбранной функциональной зависимости (прямой линии, параболы, экспоненты и т. д.) фактической характеристике СИ.

В связи с этим различают:

Номинальную (*или идеальную*) *функцию преобразования* – функция, которая приписана измерительному устройству данного типа и указана в его паспорте и используется при выполнении с его помощью измерений.

Реальную функция преобразования, которой обладает конкретный экземпляр измерительного устройства.

Если в качестве номинальной функции преобразования выбрана прямая, то погрешность ее адекватности называют *погрешностью линейности* СИ (рис.5.4,*д*).

Если погрешность адекватности меняет свой знак в зависимости от направления, предшествующего отсчету изменения входной величины, то такую погрешность прибора или преобразователя называют погрешностью от *гистерезиса* (от греч. *hysteresis* – запаздывание) или *вариацией* СИ (рис 5.4 *е*). Причинами гистерезиса являются: люфт и сухое трение в механических передающих элементах, гистерезисный эффект в ферромагнитных материалах, внутреннее трение в материалах пружин, явление упругого последействия в упругих чувствительных элементах, явление поляризации в электрических, пьезоэлектрических и электрохимических элементах и др. Существенным при этом является тот факт, что форма получаемой петли реальной функции преобразования зависит от предыстории, а именно от значения измеряемой величины, при котором после постепенного увеличения последней начинается ее уменьшение (на рис. 5.5,*е* это показано пунктирными линиями).

Значение вариации определяется по формуле

$$H = X_{\text{в}} - X_{\text{у}}, \tag{5.3}$$

где $X_в$, $X_у$ – значения измерений образцовыми СИ при возрастании и убывании величины X.

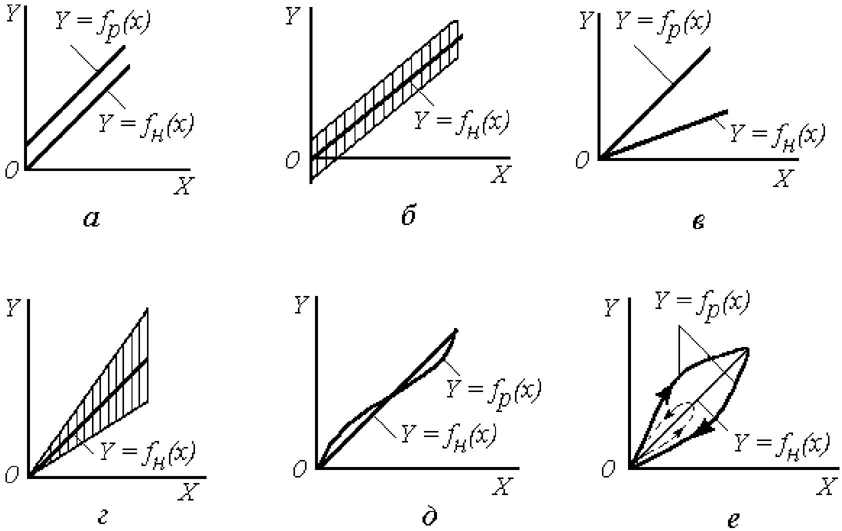


Рис. 5.5. **Реальные функции преобразования измерительных устройств**

В зависимости от внешних условий все погрешности СИ делятся на основные и дополнительные.

Основная погрешность – это погрешность СИ при нормальных условиях эксплуатации. (Нормальные условия: температур 293 К ± 5 К или 20°С ± 5 °С, относительная влажность воздуха 65 ± 15 % при 20 °С, напряжение в сети питания 220 В ± 10 % с частотой 50 Гц ± 1 %, атмосферное давление от 91,4 кПа до 104 кПа, отсутствие электрических и магнитных полей (наводок). В рабочих условиях, зачастую отличающихся от нормальных более широки диапазонном влияющих величин, при необходимости нормируется *дополнительная погрешность* СИ.

В общем виде, суммарная абсолютная погрешность СИ при валяющих факторах

$$\Delta_\Sigma = \Delta_0 + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}\ , \tag{5.4}$$

где Δ_0 – основная погрешность СИ; Δ_I – дополнительная погрешность, вызванная изменение *i*-го влияющего фактора.

Вследствие сложности разделения дополнительных и основных погрешностей поверку СИ выполняют только при нормальных условиях (т.е. дополнительные погрешности исключены).

В соответствии с ГОСТ 8.401-80 для пределов допускаемой основной (и дополнительной) погрешностей предусмотрены различные способы выражения в виде абсолютной, относительной и приведенной погрешности.

Абсолютная погрешность – разность между показанием X СИ и действительны значением $X_д$ измеряемой величины

$$\Delta = X - X_д. \tag{5.5}$$

В качестве $X_д$ выступает либо номинальное значение (например, меры), либо значение величины, измеренной более точны (не менее чем на порядок, в 10 раз) СИ.

Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой физической величины и может быть задана:

либо одним числом (линия 1 рис.5.6): $\Delta = \pm a$;

либо в виде линейной зависимости (линии 2 и 3): $\Delta = \pm bx$, $\Delta = \pm (a + bx)$;

в виде функции $\Delta = f(x)$ или графика, таблицы (таб.5.1).

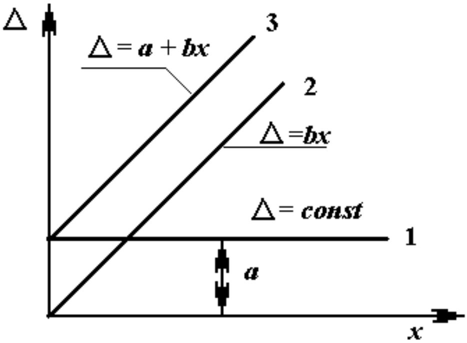


Рис. 5.6. **Формы выражения абсолютной погрешности**

Таблица 5.1

Пределы допускаемой абсолютной погрешности вольтметра М-366

Показания СИ, В	0	10	20	30	40	50	60	70	75
Погрешность Δ, В	–0,20	–0,10	0	0,10	0,20	0,35	0,45	0,55	0,70

Поскольку абсолютная погрешность выражается в абсолютных единицах физической величины, то это не дает возможность сравнивать СИ и измеряющие разные физические величины. Для этой цели можно использовать относительные погрешности δ как отношение абсолютной погрешности к действительному $X_д$ значению, выраженные в процентах

$$\delta = \pm\frac{\Delta}{X_д}\cdot 100\%. \tag{5.6}$$

Эта формула показывает, что для одного и того же СИ δ уменьшается с ростом $X_д$ приближается к $X_д \to 0$. То есть при измерении на начальном участке шкалы с начальной нулевой отметкой погрешности измерения могут быть сколь угодно велики. Поэтому в метрологии существует принцип запрета измерений на таких участках шкалы СИ.

Указание только абсолютной погрешности не позволяет сравнивать между собой по точности СИ с разным пределом измерений, а указание относительной погрешности также ограничено из-за непостоянства величины δ. Поэтому получило большое распространение нормирование приведенной погрешности как отношение Δ к нормируемому значению X_N.

$$\gamma = \pm\frac{\Delta}{X_N}\cdot 100\%. \tag{5.7}$$

Нормирующее значение измеряемой величины X_N выбирают в зависимости от вида и характера шкалы прибора. Стандарт 8.401-80 определяет для приборов с равномерной или степенной шкалой, если нулевая отметка находится на краю или вне шкалы, нормирующее значение X_N равным верхнему пределу диапазона измерений. Если же нулевая отметка находится посредине шкалы, то X_N равно протяженности диапазона измерений (например, для амперметра со шкалой от −20 А до +40 А значение $X_N = 40 - (-20) = 60$ А).

В зависимости от режима применения различают динамическую и статическую погрешности.

Статическая погрешность СИ – погрешность, возникающая при использовании прибора для измерения постоянной величины.

Динамическая погрешность СИ – погрешность, возникающая при использовании его для измерения переменной во времени величины.

В зависимости от влияния измеряемой величины принято различать мультипликативные и аддитивные погрешности.

Аддитивной (получаемой путем сложения), или погрешностью нуля называют погрешность, которая остается постоянной при всех значениях измеряемой величины (рис. 5.5, *а*).

На рисунке 5.5,*а* показано, что реальная функция преобразования $Y = f_P(X)$ несколько смещена относительно номинальной $Y = f_н(X)$, т.е. выходной сигнал измеритльного устройства при всех значениях измеряемой величины X будет больше (или меньше) на одну и ту же величину, чем он должен быть, в соответствии с номинальной функцией.

Если аддитивная погрешность является систематической, то обычно она устраняется корректированием нулевого значения выходного сигнала. Если аддитивная погрешность является случайной, то ее исключить нельзя, и образуется некоторая полоса ширина которой остается постоянной при всех значениях измеряемой величины (рис.5.5, *б*). Аддитивная погрешность вызвана обычно трением в опорах, контактными сопротивлениями, дрейфом нуля (когда сигнал равен нулю, а показания меняются), шумом (случайные колебания в выходном сигнале) и фоном (периодические колебания в выходном сигнале, часто возникающие из-за наличия электромагнитной или электростатической связи с общегородской сетью).

Мультипликативной (получаемой путем умножения), или погрешностью чувствительности называют погрешность, которая линейно возрастает (или убывает) с увеличением измеряемой величины.

Графически появление мультипликативной погрешности интерпретируется поворотом реальной функции преобразования относительно номинальной (рис. 5.5, *в*). Если эта погрешность случайная, то она представляется полосой (рис. 5.5, *г*). Причина возникновения мультипликативной погрешности обычно является изменение коэффициентов преобразования отдельных элементов и узлов СИ.

5.4. Нормирование погрешности средств измерений

Выбор вида нормирования погрешности зависит от характера ее изменения по диапазону измерения. Если СИ имеет только аддитивную составляющую (или мультипликативной можно пренебречь), то предел допускаемой абсолютной погрешности $\Delta = const$, а δ будет изменяться по гиперболе (рис.5.7,*а*). В этом случае удобнее нормировать абсолютную $\Delta = \pm\, a$ или приведенную погрешность $\gamma = \pm\, (a/x_N) = const$.

В СИ с преобладающей мультипликативной погрешностью удобнее нормировать предел допустимой относительной погрешности $\delta = \pm\, c = \mathrm{const}$ (рис. 5.7, *б*). Таким способом нормируют счетчики электроэнергии, мосты постоянного и переменного тока.

Для нормирования погрешностей с аддитивной и мультипликативной составляющими (рис.5.7,*в*) принята более сложная зависимость.

Действительно, пусть $\Delta = \pm\, (a + bx)$, тогда

$$\delta = \pm \frac{\Delta}{x} = \pm\left(b + \frac{a}{x}\right). \qquad (5.8)$$

Чтобы связать δ с конечны значением $x_к$ шкалы, к последнему уравнению прибавим и вычтем величину $a/x_к$ (здесь $x_к$ – больший по модулю из пределов измерений). Тогда

$$\delta = \pm\left(b + \frac{a}{x_k} - \frac{a}{x_k} + \frac{a}{x}\right). \qquad (5.9)$$

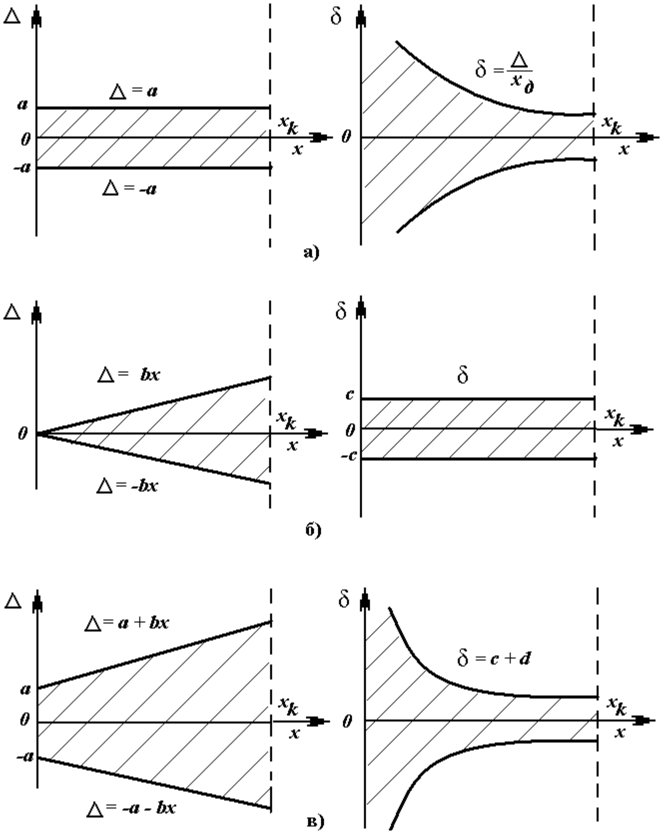


Рис. 5.7. **Нормирование погрешностей с аддитивной и мультипликативной составляющими**

Обозначим $c = \left(b + \frac{a}{x_k}\right) = const$ и $d = \frac{a}{x_k} = const$.

Отсюда

$$\delta = \pm\left(c - d + \frac{x_k}{x}\right) = \pm\left[c + d\left(\frac{x_k}{x} - 1\right)\right]. \qquad (5.10)$$

Из формулы следует, что минимальное значение $\delta_{\min}$ будет при $x = x_к$. Однако на практике имеют место и другие случаи получения δ. Поэтому вводят значение $\delta_{\min}$, соответствующее x_0, тогда

$$\delta = \pm\left[c + d\left(\frac{x_0}{x} - 1\right)\right] \cdot 100\% . \qquad (5.11)$$

Здесь значение δ возрастает как при убывании, так и при возрастании величины x относительно x_0.

Физически величина d есть погрешность в начале диапазона $\delta_н = d$, величина c – погрешность в конце диапазона $\delta_к = c$ измерения, т.е.

$$d = \delta_н = \frac{\Delta_0}{x_к};\ c = \delta_к = \delta_н + \delta_м;\ \delta_м = \frac{\Delta(x)}{x}, \qquad (5.12)$$

где Δ_0 – аддитивная составляющая погрешности; $x_к$ – предел измерения; $\delta_м$ – мультипликативная составляющая погрешности; $\Delta(x)$ – значение абсолютной погрешности, возрастающей прямо пропорционально текущему значению x измеряемой величины.

Формула (5.12) применяется для нормирования погрешностей высокоточных СИ – цифровых, многозначных мер сопротивления и т.п.

Классы точности средств измерений. Согласно ГОСТ 8.401–80, *класс точности* – это обобщенная характеристика средств измерений, определяемая пределами допускаемой основной и дополнительной погрешности, а также рядом других свойств, влияющих на точность осуществляемых с их помощью измерений.

Например, у показывающих электроизмерительных приборов класс точности помимо основной погрешности включает также вариацию показаний, а у мер электрических величин – величину нестабильности (процентное изменение значения меры в течение года).

Класс точности СИ уже включает систематическую и случайную погрешности. Однако он не является непосредственной характеристикой точности измерений, выполняемых с помощью этих СИ, поскольку точность измерения зависит и от метода измерения, взаимодействия СИ с объектом, условий измерения и т.д.

В частности, чтобы измерить величину с точностью до 1 %, недостаточно выбрать СИ с погрешностью 1 %. Выбранное СИ должно обладать гораздо меньшей погрешностью, так как нужно учесть как минимум еще погрешность метода.

Правда, в некоторых случаях возможна и противоположная ситуация, когда погрешность измерения меньше погрешности прибора (нулевые методы измерения).

Например, схема измерения построена так, что стрелка нуль-индикатора при разности измеряемых величин, равной 1 %, отклоняется полностью на 100 делений. Пусть погрешность нуль-индикатора равна одному делению. В этом случае возможен остаточный разбаланс также на одно деление, равный 1 % однопроцентной разности измеряемых величин. Тогда относительная погрешность измерения не превысит 0,01 %, т. е. составит одну сотую относительной погрешности нуль-индикатора. Однако рассмотренный случай можно отнести к исключениям из общего правила.

В связи с большим разнообразием как самих СИ, так и их МХ, ГОСТ 8.401-80 устанавливает несколько способов назначения классов точности. При этом в основу заложены следующие положения:

в качестве норм служат пределы допускаемых погрешностей, включающие систематические и случайные составляющие;

основная и все виды дополнительных погрешностей нормируются порознь.

Определяя класс точности, нормируют, прежде всего, пределы допускаемой основной погрешности. Пределы допускаемой дополнительной погрешности устанавливают в виде дольного (кратного) значения.

Классы точности присваивают СИ при их разработке по результатам государственных приемочных испытаний. Если СИ предназначены для измерения одной и той же физической величины, но в разных диапазонах, или для измерения разных физических величин, то этим СИ могут присваиваться разные классы точности как по диапазонам, так и по измеряемым физическим величинам.

В эксплуатации СИ должны соответствовать этим классам точности. Однако при наличии соответствующих эксплуатационных требований класс точности, присвоенный на производстве, в эксплуатации может понижаться.

Пределы допускаемых основной и относительной погрешностей выражают в форме абсолютной, относительной или приведенной погрешностей. Способ выражения погрешностей зависит от характера изменения погрешности по диапазону измерения, назначения и условий применения СИ.

Если погрешность результатов измерений в данной области измерений принято выражать в единицах измерений величины или делениях шкалы, то принимается форма абсолютных погрешностей (меры, магазины номинальных физических величин). Если границы абсолютных погрешностей в пределах диапазона измерений практически постоянны, то принимается форма приведенной погрешности, а если эти границы нельзя считать постоянными, то форма относительной погрешности.

Поэтому ГОСТ 8.401-80 в качестве основных устанавливает три вида классов точности СИ:

1. Для пределов допускаемой абсолютной погрешности в единицах измеряемой величины или делениях шкалы.

В этом случае классы точности СИ, обозначают прописными буквами латинского алфавита или римскими цифрами. При этом, чем дальше буква от начала алфавита, тем больше значения допускаемой абсолютной погрешности.

Например, СИ класса *С* более точен, чем СИ класса *М*, т. е. это число – условное обозначение и не определяет значение погрешности.

2. Для пределов допускаемой относительной погрешности. Класс точности таких приборов назначается двумя способами.

Если погрешность СИ имеет в основном мультипликативную составляющую, то пределы допускаемой основной относительной погрешности устанавливают по формуле

$$\delta = \pm\frac{\Delta}{x}\cdot 100\ \% = A\cdot 10^{n} = \pm q, \tag{5.13}$$

где A = 1; 1,5; (1,6); 2; 2,5; (3); 4; 5 и 6; значения 1,6 и 3 – допускаемые, но не рекомендуемые; n = 1; 0; –1; –2; ... .

Так обозначают классы точности мостов переменного тока, счетчиков электроэнергии, делителей напряжения, измерительных трансформаторов и др.

Если СИ имеют как мультипликативную, так и аддитивную составляющие, то класс точности обозначается двумя цифрами, соответствующими значениям c и d формулы:

$$\delta = \pm\left[c + d\left(\frac{x_0}{x} - 1\right)\right]. \tag{5.14}$$

Здесь c и d выражаются также через ряд (1.14). Причем, как правило, $c > d$.

Например, класс точности 0,02/0,01 означает, что c = 0,02, а d = 0,01, т. е. приведенное значение относительной погрешности к началу диапазона измерения $\delta_н$ = 0,02 %, а к концу – $\delta_к$ = 0,01 %.

3. Для пределов допускаемой приведенной погрешности в виде ряда чисел

$$\gamma = \pm\frac{\Delta}{x_N}\cdot 100\ \% = \pm\, A\cdot 10^n. \tag{5.15}$$

Условное обозначение класса точности в этом случае зависит от нормирующего значения x_N т. е. от шкалы СИ.

Если x_N представляется в единицах измеряемой величины, то класс точности обозначается числом, совпадающим с пределом допускаемой приведенной погрешности. Например, класс 1,5 означает, что γ = 1,5 %.

Если x_N – длина шкалы (например, у амперметров), то класс 1,5 означает, что γ = 1,5 % длины шкалы.

Обозначения классов точности средств измерений, которые используются при указании в нормативных документах, паспортах, технических условиях и на приборах приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2

Обозначения классов точности в документах и на приборах

Вид погрешности	Формула по тексту	Примеры пределов допускаемой погрешности	Обозначение класса точности		СИ, рекомендуемые к обозначению
			в НТД	на СИ	
Абсолютная	$\Delta = \pm a$ $\Delta = \pm (a + bx)$	$\Delta = \pm$ 0,2 A	Класс точности N или класс точности III	N III	Меры
Относительная	5.13	$\delta = \pm$ 1,0 %	Класс точности 1,0	①	Мосты, счетчики, делители, измерительные трансформаторы
	5.14	$\delta = \pm\left[0{,}02 + 0{,}01\left(\frac{x_0}{x} - 1\right)\right]$, %	Класс точности 0,02/0,01	0,02/0,01	Цифровые СИ, магазины емкостей (сопротивлений)
Приведенная	5.15	при $x_N = x_к$ γ = 1,5 %.	Класс точности 1,5	1,5	Аналоговые СИ; если x_N – в единицах величины
		x_N – длина шкалы или ее части, мм γ = 1,5%.	Класс точности 0,5	$\overset{0,5}{\vee}$	Омметры; если x_N определяется длинной шкалы или ее части

Пример. Отсчет по шкале прибора с пределами измерений 0 – 50 А и равномерной шкалой составил 25А. Пренебрегая другими видами погрешностей измерения, оценить пределы допускаемой абсолютной погрешности этого отсчета при использовании различных СИ класса точности: 0,02/0,01; 0,5 и ①

Решение.

1. Для СИ класс точности 0,02/0,01:

$$\delta = \frac{\Delta}{x} = \pm\left[c + d\left(\frac{x_k}{x} - 1\right)\right].$$

Так как x = 25 А; $x_к$ = 50 А; c = 0,02; d = 0,01 и δ – в %, то

$$\Delta = \pm\left[0{,}02 + 0{,}01\left(\frac{50}{25} - 1\right) \cdot 25 \cdot 0{,}01\right] = \pm 0{,}008\,\text{А}.$$

2. Для СИ класса точности ①:

$\delta = \pm\ \frac{\Delta}{x}$; Δ = ± 0,01 · 25 · 1,0 = ± 0,185 А.

3. Для СИ класса точности 0,5:

$\gamma = \pm\frac{\Delta}{x_N}$; здесь x_N = 50 А, тогда Δ = ± 0,01 · 50 · 0,5 = ± 0,25А.

6. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

Любой результат измерений содержит погрешность, как бы тщательно оно не проводилось. Для определения понятия «погрешность» необходимо пояснить различие между такими понятиями как истинное и действительное значение физической величины.

Истинное значение физической величины – это значение, идеальным образом отражающее свойство данного объекта, как в количественном, так и в качественном отношении. Оно не зависит от средств нашего познания и является той абсолютной истиной, к которой мы стремимся, пытаясь выразить ее в виде числовых значений. На практике это абстрактное понятие приходится заменять понятием «действительное значение».

Действительное значение физической величины – значение, найденное экспериментально и настолько приближающееся к истинному, что для данной цели оно может быть использовано вместо него. Результат измерения всегда отличается от истинного значения измеряемой величины и представляет ее приближенное значение.

Погрешность результата измерения (сокращенно – погрешность измерения) – это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Абсолютное значение погрешности (Δ) равно разности между результатом измерения X и истинным значением измеряемой величины Q

$$\Delta = X - Q. \qquad (6.1)$$

Количество факторов, влияющих на точность измерения, достаточно велико, и любая классификация погрешностей измерения (рис. 6.2), в известной мере, условна, так как различные погрешности в зависимости от условий измерительного процесса проявляются в различных группах.

По характеру изменения результатов при повторных измерениях погрешности разделяются на систематические, случайные и грубые погрешности (промахи).

Систематическая погрешность измерения – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины.

Случайная погрешность измерения – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

Кроме того, в процессе измерения могут появиться очень большие грубые погрешности.

Грубая погрешность (промах) измерений – погрешность измерений, существенно превышающая ожидаемую при данных условиях.

Систематические погрешности принято классифицировать в зависимости от причин их возникновения и по характеру их проявления при измерениях (рис. 6.1).

В зависимости от причин возникновения различают следующие систематические погрешности: инструментальная, методическая, субъективная, от влияющих внешних величин и погрешности в результате неправильной установки измерительного устройства.

Инструментальная погрешность – это составляющая погрешности измерения, зависящая от погрешностей применяемых средств измерений. Рассмотрим некоторые примеры погрешностей, присущие отдельным средствам измерений.

Равноплечие весы не могут быть идеально равноплечими. В весах для точного взвешивания всегда обнаруживается некоторая неравноплечесть, полностью устранить которую путем регулировки не удается.

Измерительным трансформаторам присущи погрешности коэффициента трансформации и так называемые угловые погрешности (погрешности угла сдвига фаз между первичными и вторичными токами или напряжениями). Причиной этих погрешностей являются потери энергии в материале сердечника трансформатора. Путем подбора материала, а также конструктивными приемами можно снизить эти погрешности, однако полностью устранить их не удается.

Рис. 6.1. **Классификация погрешности измерений**

6.1. Систематические погрешности

Инструментальная погрешность имеет несколько составляющих, наиболее важные из которых определяются несовершенством конструкции (или схемы), технологии изготовления средств измерений, постепенным их износом и старением материалов, из которых эти средства измерения изготовлены.

Инструментальные погрешности, присущие данной конструкции. Одним из характерных источников погрешностей рассматриваемого вида, присущих почти всем средствам измерений, которые имеют подвижные части, является некоторая свобода перемещения этих частей, помимо движения, соответствующего принципу действия устройства. В зависимости от конструкции узла, в котором возникает такая свобода перемещения, а также от традиций той или иной отрасли приборостроения говорят о наличие «люфта», «зазора», «мертвого», «свободного» или «холостого хода» и т. д.

Еще одной причиной инструментальных погрешностей является трение в сочленениях подвижных деталей приборов.

Так, в средствах измерений, в которых при измерении приходится вращать или перемещать отдельные детали (например, в микрометрах), большое трение затрудняет правильную установку вращаемой детали и может привести к возникновению чрезмерно большого или чрезмерно малого давления на измеряемый объект.

Инструментальные погрешности, являющиеся следствием несовершенства или неправильности технологии изготовления средств измерений (*технологические*). Всем средствам измерений, имеющим шкалу, в большей или меньшей степени присущи погрешности, возникшие в результате неточности нанесения отметок шкалы, так называемые погрешности градуировки. В тех случаях, когда деления шкалы строго равномерны, как, например, в устройствах для измерения длины, отметки на шкалы наносятся механически при помощи соответствующих приспособлений. Несовершенство конструкции, износ или неисправности этих приспособлений могут привести к тому, что некоторые или все отметки окажутся смещенными в ту или иную сторону. При этом в процессе измерения результаты всегда будут содержать одну и ту же погрешность.

Инструментальные погрешности, являющиеся следствием износа, старения или неисправности средств измерений. Износ и старение материалов могут быть причиной появления погрешностей, имеющих некоторые характерные особенности. Так, совершенно очевидно, что средства измерений изнашиваются непрерывно и постепенно в процессе эксплуатации со скоростью, зависящей от интенсивности эксплуатации. Следовательно, и погрешности, появляющиеся в результате износа, как правило, возрастают постепенно. Однако рост этот происходит настолько медленно, что в определенный отрезок времени мы можем принимать погрешности, явившиеся следствием износа, постоянными и даже пользоваться соответствующими поправками. Только тогда, когда эти погрешности достигнут установленного предела, дальнейшее применение данного средства измерений считается недопустимым.

Типичным примером в этом отношении являются гири. Их износ всегда идет в одном направлении – постепенно уменьшается их масса. Характер износа гирь заставляет изготовлять их с положительным запасом массы. Масса новой гири всегда больше номинальной в пределах, допускаемых для данного класса гирь.

Другим примером являются концевые меры длины – плитки. В процессе эксплуатации и при ремонтах их размер постепенно уменьшается. Плитками пользуются до тех пор, пока их размер ее достигнет установленного для них предела, после чего их или переводят в другой класс, или переаттестовывают, или, наконец, изымают из применения в качестве мер.

Несколько иначе обстоит дело со старением. Под старением понимают изменение каких-либо свойств материалов с течением времени, а иногда и в зависимости от условий применения или хранения.

Процесс старения может протекать различно. Старение может привести к потере каких-либо, свойств, имеющих значение для средства измерений, или к постепенной их стабилизации. Одним из характерных примеров старения второго вида является старение манганина. Манганин – это сплав меди, марганца, никеля и некоторых других компонентов, добавляемых иногда в небольших количествах. Обладая сравнительно большим удельным электрическим сопротивлением, манганин в то же время имеет незначительный температурный коэффициент сопротивления. Термоэлектродвижущая сила (ТЭДС), которая возникает в спае манганина с медью при его нагревании, относительно невелика. Благодаря этим качествам манганин широко применяется в электроприборостроении. Однако манганин имеет одно отрицательное свойство – с течением времени его сопротивление хотя и медленно, но изменяется. По истечении двух-трех лет процесс этот практически прекращается и сопротивление изделия из манганина стабилизируется.

Были разработаны приемы искусственного ускорения процесса старения манганина, стабилизации его свойств. Так как полной стабилизации все же достичь не удается, то для более точных приборов, в которых эта остаточная нестабильность влияет на показания, в первые годы эксплуатации проводят более частые поверки.

В особо ответственных случаях готовое изделие выдерживают годами без применения – до полной стабилизации его свойств, например, катушки сопротивления высшей точности. Во время выдержки ведутся периодически наблюдения за изменением их сопротивления.

Как видно из этих примеров, процесс старения носит обратный характер по отношению к процессу износа – с течением времени качество и надежность измерительного устройства улучшаются.

Манганин – не единственный пример старения материала в области измерительной техники. Так, в некоторых концевых мерах длины, изготовляемых из стали, также была обнаружена тенденция к изменению с течением времени их размеров, причем в сторону увеличения. Это явление назвали «ростом» плиток. Меры борьбы с этим явлением те же, что и в отношении манганина – искусственная стабилизация и более частая поверка до наступления надежной естественной стабилизации.

Неисправностей, которые являются или точнее могут являться причиной появления систематических погрешностей, множество. Часто неисправность измерительного устройства является следствием его перегрузки. Перегрузка – механическая, электрическая, тепловая или какая-либо иная – может вызвать устойчивое «остаточное» изменение в материале или в механизме средства измерений и явиться причиной появления или изменения систематической погрешности.

Неисправности, ведущие к появлению небольших систематических погрешностей, гораздо опаснее тех, которые вызывают большие погрешности. Большие систематические погрешности сравнительно быстро обнаруживаются «на глаз», например, по значительному несоответствию результатов измерения ожидаемым. Небольшие систематические погрешности, в два – четыре раза превышающие допускаемые, могут в течение более или менее длительного времени оставаться незамеченными. Такие незамеченные погрешности могут принести огромный вред, особенно при большом числе измерений.

Погрешности, возникающие в результате неправильной установки средств измерений. Правильность показаний ряда средств измерений зависит от положения их подвижных частей по отношению к неподвижным. К ним относятся все средства измерений, принцип действия которых в той или иной степени связан с механическим равновесием. Отклонение такого средства измерений от правильного положения, которое указывается в технической документации, может привести к прямому или косвенному искажению его показаний.

Погрешности, возникающие вследствие влияния внешних величин. Эти погрешности являются следствием неучтенных внешних влияний. Эти влияния не учитываются по разным причинам: вследствие недостаточного знания свойств применяемой аппаратуры, вследствие того, что источник влияющей величины неизвестен оператору. В других случаях недооцениваются силы воздействия известных влияющих величин. Это могут быть тепловые и воздушные потоки, магнитные и электрические поля, изменения атмосферного давления, слишком высокая влажность воздуха, вибрации, часто не ощущаемые человеком, и т. п. Помехи могут создаваться рентгеновскими аппаратами, ионизирующими излучениями и т. п.

Влияние окружающей температуры. Окружающая температура может исказить результаты измерения и особенно при неравномерном воздействии на измерительные устройства или на объект измерения. Источники направленного тепла (или холода) имеются почти повсюду: это печи, радиаторы центрального отопления или просто трубы с горячей водой, проходящие вблизи от места измерения; это окна – источник потока холодного воздуха зимой и теплого летом; расположенная рядом аппаратура, потребляющая значительную энергию, и т. п.

Влияние магнитных и электрических полей. Виды магнитных полей очень разнообразны – от постоянного магнитного поля Земли (нарушаемого магнитными бурями) до переменного магнитного поля, создаваемого близко расположенными электрическими установками и проводами. Влияние магнитного поля на показания измерительного устройства зависит как от принципа действия и конструкции его, так и от напряженности магнитного поля. Особенно часто остаются незамеченными магнитные поля, создаваемые скрытыми проводами, например, расположенными за стеной. Иногда не обращают внимания и на магнитные поля, создаваемые маломощными трансформаторами и реостатами цилиндрической формы. Создают магнитные поля и электроизмерительные приборы, которые могут оказывать взаимное влияние, а также влиять и на показания других измерительных приборов.

Магнитное поле может влиять на показания любого средства измерений, имеющего подвижные части из магнитного материала (сталь, никель). Это влияние может выразиться в намагничивании этих частей и отклонении их от нормального положения под действием постороннего магнитного поля, например, магнитного поля Земли.

Помехи возникают в результате влияния не только магнитных, но и электрических полей. При близком расположении отдельных частей цепи, приборов или проводов, выполняющих различные функции, между ними возникает электрическое поле, или, как чаще говорят, емкостная связь, которая также может исказить результаты измерений.

Вредное влияние магнитных и электрических полей на показания средств измерений возрастает с увеличением частоты переменного тока, создающего эти поля.

Влияние атмосферного давления и влажности воздуха. Атмосферное давление действует на характер протекания многих физических явлений, используемых в измерениях. Например, при более или менее точных измерениях температуры используются так называемые постоянные точки температурной шкалы. Для воспроизведения постоянных точек используют явления кипения и затвердевания (или плавления) ряда чистых химических элементов (кислорода, серы, серебра, золота) и соединений (воды). Известно, что в начале кипения, плавления или затвердевания вещество принимает определенную температуру, которая сохраняется постоянной до тех пор, пока вещество не перейдет в другую фазу (газообразную, жидкую или твердую). Эта температура находится в большой зависимости от атмосферного давления. Если точки затвердевания серы, серебра и других элементов не так уж часто используются в повседневной практике, то точкой плавления льда пользуются довольно часто. Но так как многие при этом не учитывают действительное атмосферное давление (а также ряд других влияющих факторов), использование явления таяния льда в качестве точки 0°С оказывается значительно менее точным, чем это предполагается.

Влажность окружающего воздуха может оказаться причиной появления дополнительных погрешностей, если ее значение выходит за пределы установленных границ. Это влияние в ряде случаев связано с гигроскопичностью материалов, изменяющих свои геометрические размеры, электрическое сопротивление или другие свойства.

Погрешность метода (***теоретическая погрешность***) ***измерения*** – составляющая погрешности измерений, происходящая от несовершенства метода измерений

Во многих методах измерения можно обнаружить теоретические погрешности, являющиеся следствием тех или иных допущений или упрощений, применения эмпирических формул и функциональных зависимостей. В некоторых случаях влияние таких допущений оказывается незначительным, т. е. намного меньше, чем допускаемые погрешности измерений; в других оно превышает эти погрешности. Рассмотрим несколько примеров погрешностей данного вида.

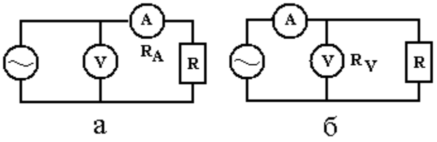


Рис.6.2. **Возникновение методической погрешности при различном подключении приборов:**
а – вольтметр – амперметр;
б – амперметр – вольтметр

Представим эксперимент по косвенному измерению мощности на активной нагрузке R методом амперметра и вольтметра (рис. 6.2, а). В результате простого перемножения показаний вольтметра U_v и амперметра I_A мы получаем не совсем то значение, которое следовало бы, поскольку в этом эксперименте возникает погрешность, определяемая не классами точности приборов, а другими их характеристиками (например, внутренними сопротивлениями) и методом их использования (например, схемой включения).

Вольтметр в этой схеме реагирует на сумму ($U_R + U_A$), т.е. на сумму падений напряжений на нагрузке R и на внутреннем сопротивлении амперметра R_A. Показания вольтметра U_v, вычисленное P и действительное $P_д$ значения мощности, соответственно, равны:

$$U_v = I_A(R_A + R);$$

$$P = U_v \cdot I_A;$$

$$P_д = I^2 \cdot R.$$

Таким образом, в данном случае причина ошибки в наличии конечного (хоть и малого, но не нулевого) внутреннего сопротивления амперметра R_A. Значение методической погрешности результата измерения мощности в абсолютном Δ виде в данном случае можно оценить следующим образом:

$$\Delta = P - P_д = I_A^2 \cdot R_A$$

Зная значение сопротивления амперметра $R_А$, можно, во-первых, оценить значение методической погрешности для данного случая, а во-вторых, можно скорректировать (исправить) результат вычисления мощности.

Пример. Пусть в схеме рис. 6.2, а использован амперметр с внутренним сопротивлением $R_А$ = 10 Ом. Получены показания вольтметра и амперметра: U_v = 250 В, I_A = 2 А. Вычисленная по этим показаниям мощность $P = U_v \cdot I_A$ = 500 Вт. Абсолютная методическая погрешность $\Delta = I_A^2 \cdot R_A = 4 \cdot 10 = 40$ Вт. В данном случае, при точном знании сопротивления $R_А$, знак и значение этой погрешности известны точно. Таким образом, эту составляющую в этом примере можно практически полностью скомпенсировать (простым уменьшением вычисленного результата P на значение $\Delta = 40$ Вт).

Пример. Гири обладают тем или иным объемом в зависимости от материала, из которого они изготовлены. Сила, с которой гиря давит на чашку весов, меньше ее истинного веса на вес вытесненного ею объема воздуха (по закону Архимеда). Возникающая при этом погрешность невелика, но при точных взвешиваниях с ней приходится считаться. При взвешивании предметов из материала, плотность которого равна плотности материала гирь, указанная погрешность не возникает.

Пример. Измерение влажности зерна и других сельскохозяйственных продуктов, а также ряда органических и неорганических материалов. Существует множество конструкций электрических и электронных влагомеров, в основу которых положены методы измерения электрического сопротивления, емкости или диэлектрической постоянной определенной пробы вещества. Эти параметры пробы действительно зависят от влажности вещества. Однако опыт эксплуатации и детальные исследования показали, что параметры пробы зависят также от состава и структуры вещества. Так, электрические влагомеры для зерна дают различные показания для зерна различных видов (пшеница, рожь и т. д.), для различных сортов одного и того же вида и даже для одного и того же сорта, но выращенного на различных землях. В данном случае причина погрешности измерений с помощью влагомеров заключается в том, что в основу их работы положен принцип упрощенной зависимости электрических параметров от влажности.

К погрешностям метода можно отнести также измерение объема тел, форма которых принимается геометрически правильной, путем измерения размеров в одном или в недостаточном числе мест, например, измерение объема помещения путем измерения длины, ширины и высоты только в трех направлениях. Для точного же определения объема следовало бы определить длину и ширину помещения по каждой стене, вверху и внизу, измерить высоту по углам и в середине и, наконец, углы между стенами. При точном измерении объема цилиндрических тел или резервуаров нельзя ограничиваться измерением диаметра и высоты только в одном месте. Эти два примера иллюстрируют возможность появления существенных погрешностей при необоснованном упрощении метода.

Субъективные систематические погрешности – эти погрешности, как правило, являются следствием индивидуальных свойств человека, обусловленных особенностями его организма или укоренившимися неправильными навыками выполнения измерений. К этой систематической погрешности относятся, например, погрешности отсчитывания, параллакса, реакции наблюдателя и т.п.

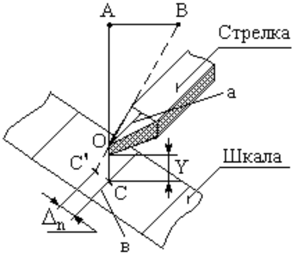


Рис. 6.3. **Влияние параллакса на точность отсчета**

Погрешность отсчитывания – составляющая погрешности измерения, происходящая от недостаточно точного отсчитывания показаний средства измерений.

Погрешность от параллакса – составляющая погрешности измерения, происходящая вследствие визирования стрелки, расположенной на некотором расстоянии (*Y*) от поверхности шкалы, в направлении, перпендикулярном поверхности шкалы (рис. 6.3).

При правильном положении глаза наблюдателя (точка *A*) штрихи *a* и *b,* так же, как и луч *AC*, должны лежать в одной плоскости. При смещении глаза наблюдателя в точку *B* появится погрешность в отсчете:

$$\Delta n = \frac{AB \cdot OC}{AO}. \tag{6.2}$$

Чем больше расстояние *OC* и *AB*, тем больше погрешность. Поэтому взгляд во время наблюдения должен быть направлен перпендикулярно к плоскости шкалы. При качественной оценке средств измерений в первую очередь оценивают все возможные погрешности, возникающие в процессе измерений, т.е. такую суммарную погрешность, в которой проявляются все категории погрешностей.

По характеру проявления систематические погрешности подразделяются на постоянные и переменные (рис. 6.1).

Постоянные систематические погрешности – погрешности, которые в течение всего времени измерений сохраняют свой знак и свое значение.

К постоянным погрешностям относятся погрешности большинства мер, например, гирь, концевых мер длины, катушек и магазинов сопротивления и т. П., а также погрешности градуировки шкал измерительных приборов, отношения плеч электроизмерительных мостов и ряд других, уже рассмотренных нами погрешностей.

Переменные погрешности при повторных измерениях могут принимать различные значения и в зависимости от характера измерения эти погрешности делят на прогрессивные, периодические и изменяющиеся по сложному закону.

Прогрессивные погрешности – погрешности, которые в процессе измерений возрастают или убывают.

Например, погрешности, возникающие вследствие износа контактирующих деталей средств измерения, постепенное падение напряжения источника тока, питающего измерительную цепь, и т. п.

Периодические погрешности – погрешности, значения которых являются периодической функцией времени или функцией перемещения указателя измерительного прибора. В качестве примера можно привести средства измерений с круговой шкалой, стрелка которых при измерении совершает несколько оборотов (секундомеры, индикаторы часового типа и т. д.). Периодическая погрешность в показаниях таких устройств возникает в тех случаях, когда ось вращения стрелки не совпадает с центром окружности шкалы.

Систематические погрешности могут изменяться также *по сложному закону* за счет совместного действия нескольких систематических погрешностей и быть выражены в виде кривой или в виде формулы.

Например, погрешность электрических счетчиков, зависимость которых от нагрузки выражается кривой (рис.6.4).

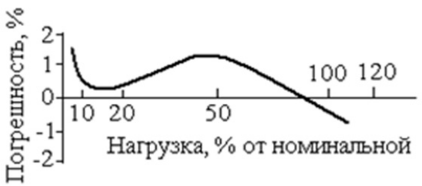


Рис.6.4. **Кривая погрешности счетчика в зависимости от потребляемой мощности**

Другой пример, такой погрешностью является погрешность меры длины, которая возникает при отклонении температуры, при которой выполняются измерения от нормальной температуры. Величина этой погрешности определяется по формуле

$$\Delta l_t = \left(\alpha \, \Delta t + \beta \, \Delta t^2\right) \cdot l_H \,, \qquad (6.3)$$

где Δl_t – погрешность меры длины, возникающая при изменении температуры на Δt, °С; l_H – длина меры при нормальной температуре; $\Delta t = t_H - t_И$ – отклонение температуры от нормальной; t_H – нормальная температура; $t_И$ – температура при применении меры длины; α и β – постоянные коэффициенты, определяемые опытным путем.

Обнаружение и исключение систематических погрешностей. Результаты наблюдений, полученные при наличии систематической погрешности, называются *неисправленными*. При проведении измерении стараются в максимальной степени исключить или учесть влияние систематических погрешностей. Для того чтобы исключить систематические погрешности при измерении, необходимо проанализировать всю совокупность опытных данных. Поскольку приемы измерения различных величин разнообразны, постольку различны и приемы исключения систематических погрешностей. Дать исчерпывающие правила для отыскания и исключения систематических погрешностей невозможно.

Наиболее распространенные способы исключения систематических погрешностей из результатов измерений следующие.

Устранение источников погрешностей до начала измерения. Этот способ исключения систематических погрешностей является наиболее рациональным, так как он полностью или частично освобождает от необходимости устранять погрешности в процессе измерения или вычислять результат с учетом поправок. Другими словами, устранение источников погрешностей существенно упрощает и ускоряет процесс измерения.

Под устранением источника погрешностей следует понимать, как непосредственное его удаление (например, удаление источника тепла), так и защиту измерительной аппаратуры и объекта измерения от влияния этих источников.

Источники инструментальных погрешностей, присущие данному экземпляру средства измерений, могут быть устранены до начала проведения измерений путем регулировки или ремонта, необходимость в которых устанавливается при поверке.

Источники погрешностей, возникающих в результате неправильной установки, во многих случаях можно устранить до начала измерений.

В целях предотвращения появления температурной погрешности, широко применяют так называемое термостатирование, т. е. обеспечение определенной температуры окружающей среды с теми или иными допускаемыми колебаниями. Термостатируют большие помещения (цеха, лаборатории), небольшие помещения (комнаты, камеры), средства измерений в целом или их отдельные части (катушки сопротивления, нормальные элементы, свободные концы термопар, кварцевые стабилизаторы частоты и т. п.).

При малых объемах применяют не только воздушное термостатирование, но и жидкостное, окружая измерительное устройство или измеряемый объект водой, маслом или другой жидкостью, которые существенно смягчают колебания температуры и облегчают поддержание ее на постоянном уровне.

Таковы в общих чертах пути устранения одного из наиболее опасных источников погрешностей – непостоянства температуры среды, окружающей измерительную аппаратуру и объект.

В настоящее время термостатирование во многих случаях заменяют кондиционированием воздуха. При кондиционировании обеспечивается поддержание на требуемом уровне не только температуры, но и других параметров окружающего воздуха и в первую очередь влажности.

Устранение влияния магнитных полей. Влияние магнитных полей далеко не всегда легко обнаружить. Различна также степень влияния полей на показания различных измерительных приборов. Рассмотрим те меры, которые предпринимаются для устранения влияния магнитных полей.

Напряженность магнитного поля Земли невелика, поэтому опасность заметного его воздействия возникает только для приборов, отличающихся повышенной чувствительностью. Единственным средством защиты приборов от влияния магнитного поля Земли является устройство замкнутых и непрерывных экранов из магнитомягких материалов. Магнитные силовые линии должны огибать экранируемое пространство, небольшие разрывы в магнитной цепи экрана (неточно пригнанные стыки его частей) заметно ухудшают эффект экранирования.

Следует иметь в виду, что экранирование не является полным и внешние магнитные поля все же могут влиять на экранированные измерительные устройства. В стандартах установлены различные категории защиты от влияния внешних магнитных полей.

Несколько легче осуществляется экранирование от электромагнитных полей высокой частоты. В этом случае оказывается возможным и наиболее целесообразным применение материалов, обладающих высокой электропроводностью. Эффект достигается за счет вихревых токов и создаваемых ими встречных электромагнитных полей. К тому же такой экран лучше защищает механизм от электрических полей.

Устранение вредных вибраций и сотрясений. Эти влияния устраняют путем амортизации средства измерений и его деталей.

Для амортизации используют различного рода поглотителе колебаний в зависимости от частоты этих колебаний и чувствительности средств измерений к этим влияниям, например, губчатую резину в сочетании с различного рода эластичными подвесами (струны, пружины) и т. п.

Устранение других видов вредных влияний. Влияние таких факторов, как изменение атмосферного давления, простыми средствами не устранимо. В тех случаях, когда соблюдение определенных требований является обязательным, приходится применять барокамеры с регулируемым давлением. Обычно в этих камерах можно одновременно регулировать влажность и температуру. Регулирование давления воздуха в помещениях при кондиционировании требует обязательной герметизации помещения, что существенно усложняет установку.

Исключение систематических погрешностей в процессе измерения является эффективным путем устранения ряда вредных влияний. При этом нет необходимости применять какие-либо специальные установки и приспособления. Как правило, это те или иные приемы измерений, позволяющие не только исключить погрешность, явившуюся следствием влияния, но и оценить его степень.

Исключению таким путем поддаются в основном инструментальные погрешности, погрешности от установки и погрешности от внешних влияний.

Некоторые постоянные погрешности субъективного характера можно исключить в процессе измерения только путем проведения повторных измерений несколькими лицами.

Характерным для рассматриваемых ниже способов устранения погрешностей в процессе измерения является необходимость проведения повторных измерений, поэтому они применимы в основном при измерениях стабильных параметров и явлений.

Способ замещения. Этот способ является одним из наиболее распространенных способов исключения погрешностей. Он заключается в том, что измеряемый объект заменяют известной мерой, находящейся при этом в тех же условиях, в каких находился он сам. Рассмотрим несколько наиболее типичных примеров применения способа замещения.

Точные взвешивания часто производят по способу Борда, заключающемуся в следующем. На одну чашку весов кладут взвешиваемую массу. Весы приводят в равновесие, накладывая на другую чашку какой-либо груз, который в процессе измерения не изменяется (негигроскопичный, неиспаряющийся и т. п.), например дробь. Когда равновесие достигнуто, взвешиваемую массу снимают и на ее место ставят гири до достижения равновесия. Суммарное значение массы гири, потребовавшейся для восстановления равновесия, соответствует значению взвешиваемой массы. Таким образом, достигается исключение из результата взвешивания погрешности, возникшей из-за неравноплечести весов.

Этот способ усовершенствовал Д. И. Менделеев. На чашку весов, предназначенную для взвешиваемой массы, устанавливают полный комплект гирь и уравновешивают весы произвольным грузом. Затем на чашку с гирями помещают взвешиваемую массу и снимают часть гирь для восстановления равновесия. Суммарное значение массы снятых гирь соответствует значению взвешиваемой массы.

Широко используется способ замещения при измерениях электрических параметров – сопротивления, емкости и индуктивности. Порядок проведения измерения в принципе тот же, что и при взвешивании. Объект, электрическое сопротивление, индуктивность или емкость которого требуется измерить, включают в ту или иную измерительную цепь. В большинстве случаев при этом пользуются нулевыми методами (мостовые, компенсационные и др.), при которых производится электрическое уравновешивание цепи.

После уравновешивания вместо измеряемого объекта, не изменяя схемы, включают меру переменного значения: магазин сопротивления, емкости, индуктивности; переменный конденсатор или индуктивность. Изменяя их значение, добиваются восстановления равновесия цепи. В этом случае способ замещения позволяет исключить остаточную неуравновешенность мостовых цепей, влияние на цепь магнитных и электрических полей, взаимные влияния отдельных элементов цепи, а также утечек и других паразитных явлений.

Приведенные примеры не исчерпывают возможности использования способа замещения для устранения ряда погрешностей, возникающих при измерениях.

Способ компенсации погрешности по знаку заключается в том, что измерения следует проводить таким образом, чтобы погрешность в результате измерений вошла один раз с одним знаком, другой раз – с противоположным. Погрешность исключается при вычислении среднего значения. В алгебраической форме это можно выразить следующим образом.

Пусть x_1 и x_2 – результаты двух измерений; Δ – систематическая погрешность, природа которой известна, но неизвестно ее значение; $x_д$ – значение измеряемой величины, свободное от данной погрешности.

Тогда $x_1 = x_д + \Delta$; $x_2 = x_д - \Delta$.

Среднее значение равно

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(x_д + \Delta) + (x_д - \Delta)}{2} = x_д. \tag{6.4}$$

Пример. Измерить ЭДС потенциометром постоянного тока, имеющим паразитную термоЭДС.

При выполнении одного измерения получаем ЭДС E_1. Затем меняем полярность измеряемой ЭДС и направление тока в потенциометре. Вновь проводим его уравновешивание – получаем значение E_2. Если термоЭДС дает погрешность ΔE и $E_1 = E_д + \Delta E$, то $E_2 = E_д - \Delta E$. Отсюда $E_д = (E_1+E_2)/2$. Следовательно, систематическая погрешность, обусловленная действием термоЭДС, устранена.

Пример. Если измерять расстояние между одноимёнными образующими профиля резьбы винта на универсальном микроскопе при наличии непараллельности оси резьбы линии измерения, то зависимость между углом перекоса и погрешностью измерений определяют равенствами:

при измерении по правым образующим профиля

$$dL_1 = L\left[\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)} - 1\right];$$

при измерении по левым образующим профиля

$$dL_2 = L\left[\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma\right)} - 1\right].$$

При этом погрешности будут иметь разные знаки. Если за результат измерений принять среднее арифметическое из измерений по правым и левым образующим $L = (L_1 + L_2)/2$, то погрешность $dL = (dL_1 + dL_2)/2$ практически равна нулю.

Пользуясь способами компенсации погрешности по знаку, можно исключить погрешности, вызванные явлениями гистерезисного характера (магнитный гистерезис в ферромагнитных материалах, механический гистерезис в упругих материалах и т. п.).

Способ противопоставления. Этот способ имеет большое сходство со способами компенсации погрешности по знаку. Он заключается в том, что измерения проводят два раза, причем так, чтобы причина, вызывающая погрешность, при первом измерении оказала противоположное действие на результат второго.

В качестве примера может служить взвешивание на равноплечих весах (способ, предложенный Гауссом для исключения погрешности вследствие остаточной неравноплечести).

При первом взвешивании массу x, помещенную на одну чашку весов, уравновешивают гирями с общей массой m_1, помещенными на другую чашку. Тогда

$$x = \frac{l_2}{l_1} \cdot m_1, \tag{6.5}$$

где l_2/l_1 – действительное отношение плеч.

Затем взвешиваемую массу перемещают на ту чашку, где находились гири, а гири – на ту, где находилась масса. Так как отношение плеч l_2/l_1 не точно равно единице, равновесие нарушится, и для уравновешивания массы x придется использовать гири с общей массой m_2:

$$x = \frac{l_2}{l_1} \cdot x. \tag{6.6}$$

Разделив равенство (6.5) на выражение (6.6), получим $x = \sqrt{m_1 \cdot m_2}$ или, если m_1 и m_2 лишь немногим отличаются друг от друга $x = (m_1 + m_2)/2$.

Основная область приложения способа противопоставления – исключение погрешностей при сравнении измеряемой величины с мерой примерно равного значения.

Способ противопоставления применяется, например, в равноплечих мостах для измерения параметров электрических цепей главным образом при измерении электрического сопротивления на постоянном токе.

Пример. Сопротивление X измеряют при помощи равноплечего моста, в котором каждое из плеч R_2 и R_3 (см. рис. 4.5) равно 1000 Ом. Равновесие моста было достигнуто тогда, когда $R_1' = 1000{,}4$ Ом. После перемены местами значений x и R_1 равновесие достигалось при $R_1'' = 1000{,}2$ Ом.

$$X = \frac{1000{,}4 + 1000{,}2}{2} = 1000{,}3 \text{ Ом.}$$

Действительное отношение плеч $\frac{R_3}{R_2} = 1 + \frac{1000{,}4 - 1000{,}2}{2 \cdot 1000{,}2} = 1{,}0001 \cdot$

В тех случаях, когда систематическая погрешность имеет характер прогрессивной погрешности, изменяющейся по линейному закону, например, пропорционально времени или длине, одним из приёмов её исключения является *способ симметричных наблюдений.*

Способ симметричных наблюдений заключается в том, что измерения производят последовательно через одинаковые интервалы времени. При обработке используют свойство результатов любых двух наблюдений, симметричных относительной средней точки итервала наблюдений. Это свойство состоит в том, что погрешности результатов любой пары симметричных наблюдений равно погрешности, соответствующей средней точке интервала. В этом случае средние арифметические каждой пары значений прогрессивной погрешности, симметричных относительно некоторого значения, равны между собой $(\Delta_1 + \Delta_6)/2 = (\Delta_2 + \Delta_5)/2 =(\Delta_3 + \Delta_4)/2$. Число измерений может быть и нечетным. Тогда $(\Delta_1 + \Delta_7)/2 = (\Delta_2 + \Delta_6)/2 = (\Delta_3 + \Delta_5)/2 = \Delta_4$.

Поэтому, если результаты измерения можно расположить так, чтобы сравнивались между собой средние арифметические значения симметрично расположенных измерений, то прогрессивная погрешность будет исключена.

Во многих случаях это достигается повторением наблюдений в обратном порядке. Приемом симметричных наблюдений рекомендуется пользоваться при точных измерениях во всех случаях, когда он применим. Этим путём можно исключить все возможные прогрессивные погрешности, не замеченные в силу своей малости или по каким-либо другим причинам вне поля зрения наблюдателя, по крайней мере, в такой степени, в какой допустимо предполагать их изменение пропорциональным времени или длине. Кроме того, этот приём позволяет убедиться в том, что во время работы не произошло изменений в самих приборах или во внешней обстановке, могущих оказать влияние на показания.

В случае периодической погрешностей действенным приёмом исключения является метод наблюдений чётное число раз через полупериоды, рекомендуемый С.Ф. Маликовым. Периодическая погрешность изменяется по закону

$$\Delta = A sin\frac{2\pi}{T}\varphi,$$

где T – период изменения погрешности; φ – независимая переменная, от которой зависит погрешность (время, угол поворота стрелки прибора и т. п.)

Пусть при $\varphi = \varphi_0$ значение погрешности

$$\Delta_0 = A sin\frac{2\pi}{T}\varphi_0.$$

Найдем значение этой погрешности для $\varphi = \varphi_0 + \tau$, где интервал τ такой, что

$$\Delta\tau = A sin\left(\frac{2\pi}{T}\varphi_0 + \pi\right) = -A sin\frac{2\pi}{T}\varphi_0 = -\Delta_0.$$

Определим значение интервала τ. По условию для интервала τ имеем

$$\frac{2\pi}{T}(\varphi_0 + \tau) = \frac{2\pi}{T}\varphi_0 + \pi,$$

откуда

$$\frac{2\pi}{T}\tau = \pi \text{ и } \tau = \frac{T}{2}.$$

В этом случае

$$\frac{\Delta_0 + \Delta_\tau}{2} = \frac{\Delta_0 - \Delta_0}{2} = 0.$$

Следовательно, периодическая погрешность исключается, если взять среднее из двух наблюдений, произведенных через одно за другим через интервал, равный полупериоду независимой переменной φ, определяющей значение периодической погрешности. То же будет и для нескольких пар подобного рода наблюдений.

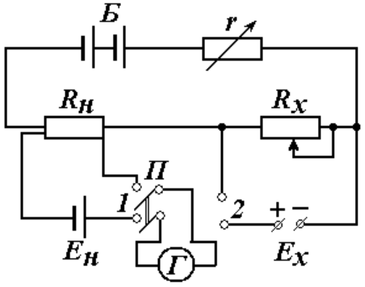


Рис. 6.5. **Принципиальная схема потенциометра постоянного тока**

Исключение прогрессивной погрешности в потенциометре постоянного тока от падения напряжения батареи *Б* (рис. 6.5).

Проводят три измерения. Сначала включим гальванометр *Г* в цепь ЭДС нормального элемента $E_П$ (переключатель *П* в положении *1*) и, регулируя сопротивление *r*, уравновесим $E_н$ падением напряжения на образцовом сопротивлении $R_Н$ от рабочего тока *I*. Вследствие постепенного уменьшения рабочего тока будет иметь место равенство

$$E_н/R_н = I + \tau_1.$$

Затем, переведя переключатель *П* в положение *2* и регулируя сопротивление R_x, измерим искомое сопротивление E_x:

$$E_x/R_x = I + \tau_2.$$

Потом повторяют первое измерение. За счет прогрессивной погрешности равновесие будет достигнуто при новых значениях рабочего тока и образцового сопротивления $R'_н$:

$$E_н/R'_н = I + \tau_3.$$

Принимая во внимание, что

$$(\tau_1 + \tau_3)/2 = \tau_2,$$

после соответствующих преобразований получим значение E_x без прогрессивной погрешности:

$$E_x = E_н/2R_x\cdot(1/\,R_н + E_н/R'_н).$$

Способом симметричных наблюдений рекомендуют пользоваться и тогда, когда возможность существования прогрессивной погрешности не очевидна. Ряд измерений, проведенных в указанном порядке в сочетании с тем или иным способом исключения постоянной погрешности, позволит выявить и исключить прогрессивную погрешность, если она имеется.

Способ введения поправок основан на знании систематической погрешности и закономерности ее изменения. В этом случае в результат измерения, содержащий систематические погрешности, или в показания прибора вносят поправки, равные этим погрешностям, но с обратным знаком. При этом необходимо помнить, что как сами источники, так и условия возникновения систематических погрешностей неизбежно в той или иной мере изменяются. Поэтому постоянство знаний всякой систематической погрешности при повторении измерений будет соблюдаться только до известного предела в той мере, в какой возможно, сохранить при этом неизменность всех фактов, определяющих погрешность. За этим пределом значения систематической погрешности будут иметь место различные отклонения, носящие случайный характер. Если систематическую погрешность исключить, например, введением поправки, то случайные отклонения значений погрешности от значений поправки останутся не исключенными. Это случайное по характеру различие значений систематической погрешности при повторении измерения, которое невозможно исключить, называют остаточным действием систематической погрешности.

Метод исключения систематической погрешности путем введения поправки в результат измерений применяют очень широко. Так, к линейным шкалам универсального микроскопа прилагается аттестат, в котором указаны значения и знак поправки для каждого деления шкалы. Внося в результат измерений поправку, взятую из аттестата, исключают из результата измерений систематическую погрешность шкалы.

Специальные статистические способы обнаружения систематических погрешностей. К ним относятся способ последовательных разностей, дисперсионный анализ, и др.

6.2. Случайные погрешности

При проведении повторных измерений одной и той же постоянной, не изменяющейся величины с одинаковой тщательностью и в одинаковых условиях некоторые результаты наблюдений будут отличаться друг от друга, а некоторые совпадать. Такие расхождения в результатах наблюдений говорят о наличии в них случайных погрешностей.

Каждая случайная погрешность возникает при одновременном воздействии многих источников. Каждый из этих источников сам по себе оказывает незаметное влияние на результат наблюдения, но суммарное воздействие всех источников может оказаться достаточно сильным.

Так как случайные погрешности не поддаются исключению из результатов измерений, то при рассмотрении их влияния на результат измерений задача сводится к изучению свойств совокупностей результатов отдельных наблюдений.

Природа и физическая сущность случайных и систематических составляющих погрешности измерений различна. Однако оценки неисключенных остатков систематических погрешностей и случайных погрешностей осуществляются на основе обработки статистического материала, представляющего собой совокупность результатов измерений.

Для изучения случайных погрешностей используются методы теории вероятностей и математической статистики. Эти методы применимы и для неисключенных систематических составляющих.

Распределение случайных величин. Рассматривая случайные погрешности как частный случай случайной величины, можно использовать соответствующий аппарат теории вероятностей.

В теории вероятности случайные величины разбиты на две группы: дискретные и непрерывные. *Дискретной* (прерывной) называют случайную величину, отдельные значения которой можно перенумеровать. Примерами дискретный случайный величин являются число изделия, отказавший в процессе испытаний, количество бракованных деталей в партии, оценка студента на экзамене и т.д. *Непрерывной* называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый промежуток. Примеры непрерывных случайных величин: погрешность измерений; время до отказа прибора; время опоздания студента на лекцию и т.д.)

Для характеристики частоты появления различных значений случайной величины X в теории вероятностей пользуются указанием закона распределения вероятностей различных значений этой величины. Общим законом распределения, присущим всем случайным величинам как дискретным, так и непрерывным, является функция распределения. *Интегральный закон или функция распределения случайной величины* X^* – это функция $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X < x\}$

$$F(x) = P\{X < x\}. \tag{6.7}$$

Функция распределения обладает следующими свойствами:

$0 \leq F(x) \leq 1$;

$F(x_1) \leq F(x_2)$ при $x_1 < x_2$, т.е. $F(x)$ – неубывающая функция;

$F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

$P\{x_1, < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$;

$F(x) = F(x-0)$, где $F(x-0) = \lim\limits_{y \to x-0} F(y)$, т.е. $F(x)$ – непрерывная слева функция.

Для дискретной случайной величины функция распределения является кусочно-постоянной функцией, принимающей на промежутке $(-\infty, x_1]$ значение 0, на промежутках $(x_i, x_i + 1]$, $1 \leq i < n$, – значение $p_1 + \ldots + p_i$ и на промежутке $(x_n, +\infty)$ – значение – 1. Более удобно закон распределения дискретной случайной величины задавать в виде ряда распределения. *Рядом распределения дискретной случайной величины X* называют таблицу (таб.6.1), состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной вели-

---

[*] Случайные величины обозначены заглавными буквами, а их возможное событие – соответствующими прописными.

чины, а в нижней – вероятности, того что случайная величина примет эти значения.

Таблица 6.1

Построение ряда распределения

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Для случайной величины с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения $F(x)$ можно найти *дифференциальный закон распределения* вероятностей, выражаемый как производная от $F(x)$, т. е. как $f(x) = F'(x)$. Эта зависимость называется кривой *плотности распределения вероятностей*. Она всегда неотрицательна и подчинена условию нормирования в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \tag{6.8}$$

т.е. площадь под кривой распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равна единице, что непосредственно следует из свойств интегральной функции распределения $F(x)$. Другими словами, вероятность появления случайной величины в указанном интервале является достоверным событием.

Размерность плотности вероятности случайной величины X выражается величиной X^{-1}.

Произведение $f(x)dx$ называется элементом вероятности, который равен вероятности того, что случайная величина X примет значения в интервале dx.

Зная кривую распределения $f(x)$, можно определить вероятность попадания результата наблюдения в любой заданный интервал x_1, x_2:

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\,. \tag{6.9}$$

Зная интегральную функцию распределения, вероятность попадания результата наблюдения X в указанный интервал определяют разностью значений функции распределения на границах этого интервала

$$P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1). \tag{6.10}$$

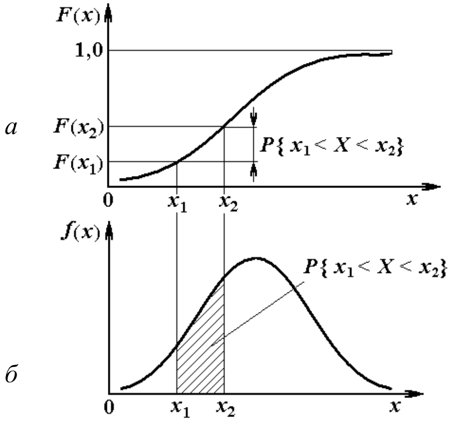


Рис. 6.6. **Вероятность попадания результата наблюдений в заданный интервал**
а – интегральная функция
б – дифференциальная функция

На рисунке 6.6 показаны способы графического определения вероятностей попадания результатов наблюдения в заданный интервал от x_1 до x_2 по интегральной функции распределения (рис. 6.6,*а*); по кривой распределения плотности вероятностей (рис. 6.6,*б*). В первом случае искомая вероятность определяется разностью значений ординат, соответствующих аргументам и x_2, а во втором случае – площадью под кривой распределения, ограниченной по оси x значениями x_1 и x_2.

Законы распределения непрерывных случайных величин.

Закон нормального распределения. Плотность вероятности или дифференциальная функция распределения случайной величины непрерывного типа, подчиняющейся закону нормального распределения, имеет следующий вид:

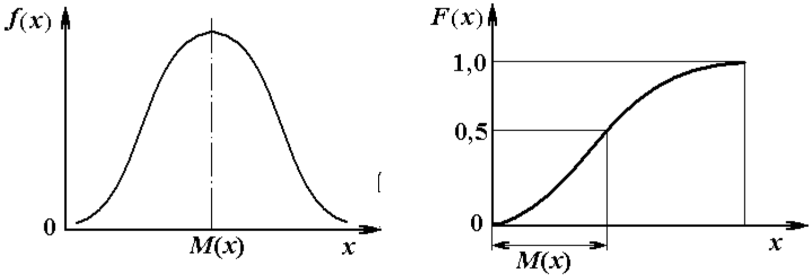
$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad (6.11)$$

где x – переменная случайная величина; $f(x)$ – плотность вероятности; σ – среднее квадратичное отклонение случайной величины x; m_x – математическое ожидание случайной величины x; e – основание натуральных логарифмов, e = 2,71818.

Интегральный закон нормального распределения выражается следующим уравнением:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx. \tag{6.12}$$

Графическое изображение интегральной и дифференциальной функции нормального распределения представлено на рисунках 6.7,*а* и 6.8,*б*.



а *б*

Рис. 6.7. **Нормальный закон распределения**
а – дифференциальная функция;
б – интегральная функция.

Если случайная величина имеет нормальное распределение и может принимать любые численные значения в пределах (–∞; +∞), то из (6.12) имеем

$$P(-\infty<x<+\infty)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx=1. \tag{6.13}$$

Вероятность $P(-\infty<x<+\infty)=1$ представляет собой площадь под дифференциальной кривой нормального распределения (рис.6.7, *а*).

Вероятность значений X в любом другом интервале (x_1; x_2) (рис.6.7, *б*) по формуле (6.13) для функции нормального распределения будет равна

$$P(x_1<X<x_2)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx. \tag{6.14}$$

Произведем замену переменной x на t путем подстановки

$$\frac{x_i-M(x)}{\sigma}=t_i. \tag{6.15}$$

Учитывая, что $x = t \cdot \sigma + m_x$; $dx = \sigma dt$, получим

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{6.16}$$

Новые пределы интегрирования t_1 и t_2 заменили пределы x_1 и x_2. Правую часть уравнения (6.16) можно представить в виде разности двух интегралов:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right]. \tag{6.17}$$

Интегралы, стоящие в квадратных скобках, не выражаются в элементарных функциях. Поэтому их вычисляют с помощью, так называемого, нормированного нормального распределения с дифференциальной функцией

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{6.18}$$

Интегральная функция этого распределения, определяется по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{6.19}$$

С помощью функции $\Phi(z)$ вероятность, определенную по формуле (6.17), находят как

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right). \tag{6.20}$$

Функция $\Phi(z)$ нечетная, т.е.

$$\Phi(-z) = -\Phi(z). \tag{6.21}$$

Для отрицательных значений z табличные данные берутся со знаком минус.

Закон нормального распределения находит большое применение в различных отраслях техники. Этому закону подчиняются многие непрерывные случайные величины, встречающиеся в технике, например, ошибки измерения, высота микронеровностей обработанной поверхности и многие другие. Широкое применение закона нормального распределения объясняется центральной предельной теоремой. Из этой теоремы следует, что если случайная величина X представляет сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин x_1, x_2, ..., x_n, влияние каждой из которых на всю сумму незначительно, то независимо от того, каким законам расселения подчиняются слагаемые x_1, x_2,

..., x_n, сама величина X иметь распределение вероятностей, близкое к нормальному, и тем точнее, чем больше число слагаемых.

Равномерное распределение. *Равномерным распределением* называют такое распределение случайной величины, когда она с одинаковой вероятностью может принимать любое значение в заданных пределах.

Плотность вероятности равномерного распределения имеет вид

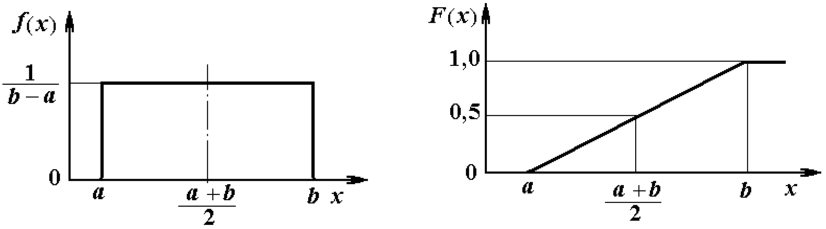
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a < x < b \\ 0 & \text{при } x \ge b \end{cases} \qquad (6.22)$$

где a и b – параметры закона, определяющие пределы измерения случайной величины X.

Интегральная функция $F(x)$ равномерного распределения выражается следующим уравнением для ($a \le x \le b$).

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le a \\ \int\limits_a^x \varphi(x)dx = \int\limits_a^x \dfrac{dx}{b-a} = \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x < b \\ 1 & \text{при } x \le b \end{cases} \qquad (6.23)$$

Графическое изображение интегральной и дифференциальной функции равномерного распределения представлено на рисунках 6.8,*а* и 6.8,*б*.



а *б*

Рис.6.8. **Равномерный закон распределения**
а – дифференциальная функция;
б – интегральная функция

Закону равномерного распределения подчиняются, в частности, погрешности от трения в опорах приборов, неисключенные остатки систематических погрешностей, погрешности дискретности в цифровых приборах, погрешности размеров в пределах одной группы сортировки при селективной сборке, погрешности параметров изделий, отобранных в более узких пределах, по сравнению с технологическим допуском, суммарная погрешность обработки, вызванная линейным изменением во времени доминирующего фактора (износ режущего инструмента, температурная деформация и т. д.), погрешности, возникающие за счет округления величин, полученных при измерении на приборах, и др.

Треугольный закон распределения (закон Симпсона).

Плотность вероятности этого закона имеет вид

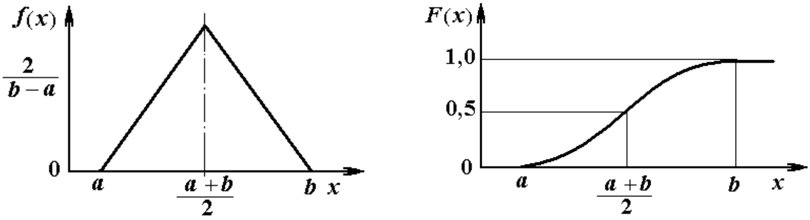
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le a \\ \dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2} & \text{при } a < x < \dfrac{b+a}{2} \\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2} & \text{при } \dfrac{b+a}{2} < x < \mathrm{b} \\ 0 & \text{при } x \ge b \end{cases} \qquad (6.24)$$

где a и b – параметры закона, определяющие пределы измерения случайной величины X.

Интегральная функция $F(x)$ треугольного распределения выражается следующим уравнением для ($a \le x \le b$)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le a \\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2} & \text{при } a < x < \dfrac{b+a}{2} \\ 1-\dfrac{2(b-x)2}{(b-a)^2} & \text{при } \dfrac{b+a}{2} < x < \mathrm{b} \\ 1 & \text{при } x \ge b \end{cases} \qquad (6.25)$$

Графическое изображение интегральной и дифференциальной функции треугольного распределения представлено на рисунках 6.8,*а* и 6.9,*б*.



а *б*

Рис.6.8. **Треугольный закон распределения:**
а – дифференциальная функция;
б – интегральная функция

По этому закону распределены, например, погрешности суммы (разности) двух равномерно распределенных величин. Если, например, отклонения размеров отверстия и вала распределены в пределах полей допусков равномерно, а допуски вала и отверстия примерно одинаковые, то зазоры в пределах допуска зазора будут распределены по закону Симпсона.

Арксинусоидальный закон распределения.

Плотность вероятности этого закона имеет вид

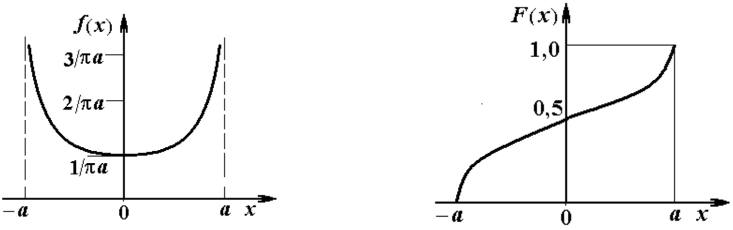
$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad (6.26)$$

где величина x определена для ($a \le x \le -a$); a – параметр распределения.

Интегральная функция $F(x)$ арксинусоидального распределения выражается следующим уравнением

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -a \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} arcsin\dfrac{x}{a} & \text{при } -a < x < a \\ 1 & \text{при } x \ge a \end{cases} \qquad (6.27)$$

Графическое изображение интегральной и дифференциальной функции арксинусоидального распределения представлено на рисунках 6.9,*а* и 6.9,*б*.



а *б*

Рис.6.9. **Арксинусоидальный закон распределения**
а – дифференциальная функция;
б – интегральная функция

По этому закону распределены погрешности электрических средств измерений как электрических, так и неэлектрических измеряемых величин, появляющихся от наводки на входе прибора или линии связи синусоидального напряжения силовых цепей с частотой 50 или 400 Гц. Кроме этого, в некоторых случаях, связанных с регулировкой средств измерений при поверочных (калибровочных) работах, когда стремятся обеспечить нахождение значений погрешности средств измерений в пределах установленных допусков, значительная часть приборов имеет погрешности с арксинусоидальным законом распределения.

Числовые характеристики случайных величин. Функция распределения является самым универсальным способом описания поведения случайных погрешностей. Однако для определения функций распределения необходимо проведение весьма длительных исследований и вычислений. В большинстве случаев бывает достаточно охарактеризовать случайные величины с помощью ограниченного числа специальных параметров, такими параметрами являются моменты.

Моментом ряда распределения (или просто моментом) относительно начального значения $x = a$ называется сумма произведений отклонений значений x_i от а в степени r на соответствующую частоту:

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - a)^r . \qquad (6.28)$$

Задавая показателю степени r различные значения ($r = 1, 2, 3$ и т.д.), получают моменты нулевого, первого, второго и т.д. порядка относительно начала a.

Различают начальные и центральные моменты r-го порядка. Если, $a = 0$, тот момент называется *начальным*. Тогда из формулы (6.28) получим выражение начального момента

$$\alpha_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i)^r . \qquad (6.29)$$

Для распределения непрерывных случайных величин начальный момент определяется по формуле

$$\alpha_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^{\ r} f(x) dx \ . \qquad (6.30)$$

Если, момент рассчитывается относительно центра распределения, $a = x_ц$, то такой момент называется *центральным*. Тогда из формулы (6.28) получим выражение центрального момента

$$\mu_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - x_ц)^r . \qquad (6.31)$$

Для распределения непрерывных случайных величин центральный момент определяется по формуле

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - x_ц)^r f(x) dx \ . \qquad (6.32)$$

Обычно для практических целей ограничиваются вычислением моментов не выше четвертого порядка.

Нулевой начальный момент равен единице. Он используется для задания условия нормирования плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^0 f(x)dx = 1. \qquad (6.33)$$

С помощью начального момента нулевого порядка вводится понятие медианы распределения. *Медианой* $Me(x)$ случайное величины X называют такое ее значение, для которого функция распределения равна 0,5, т.е. нахождение такой точки на оси x, слева и справа от которой вероятность появления различных значений случайной величины одинакова и равна 0,5.

Для непрерывной случайной величины медиана определяется из соотношения

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (6.34)$$

Геометрически медиана представляет собой абсциссу точки, которая делит площадь, ограниченную кривой распределения, пополам (рис. 6.10).

Для дискретной случайной величины x необходимо расположить ее значение в порядке возрастания и в качестве медианы принять такое срединное значение x между x_{m-1} и x_m, чтобы удовлетворить условие

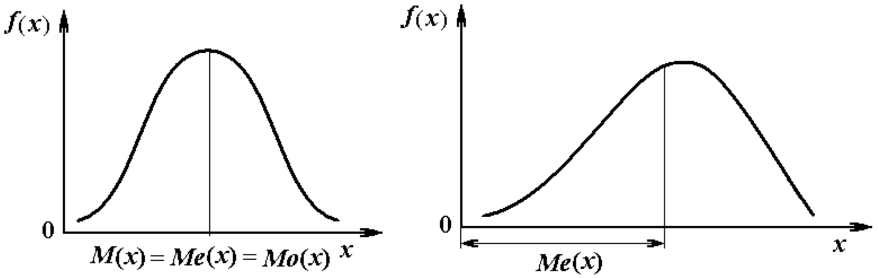
$$\sum_{i=1}^{m-1} p(x_i) = \sum_{i=m}^{n} p(x_i). \qquad (6.35)$$

Первый начальный момент – математическое ожидание случайной величины.

Математическим ожиданием $M(x)$ *дискретной случайной величины* X называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие вероятности:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i), \qquad (6.36)$$

где n – число возможных значений случайной величины.



а б

Рис. 6.10. **Одномодальное распределение вероятности случайной величины х**
а – симметричное распределение;
б – несимметричное распределение

Математическим ожиданием M(*x*) *непрерывной случайной величины X* называется определенный интеграл от произведения плотности вероятности $f(x)$ на x, взятый в пределах от $-\infty$до $+\infty$:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx . \tag{6.37}$$

Числовое значение измеряемой величины, соответствующее математическому ожиданию, принимают за оценку истинного значения измеряемой величины.

Для случайных величин медиана и математическое ожидание являются характеристиками центра распределения, наряду с которыми, для симметричных законов распределения используется еще одна характеристика – мода.

Модой Mo(*x*) называют значение случайной величины, имеющее у дискретной величины наибольшую вероятность, а у непрерывной – наибольшую плотность вероятности. Если кривая распределения имеет один максимум, то мода равна значению случайной величины, соответствующей этому максимуму. Такая кривая называется унимодальной (одномодальной) (рис. 6.10). Если кривая распределения имеет две или несколько случайных величин одинаковых максимумов, то она соответственно называется двухмодальной или многомодальной (рис.6.11). Те из них, у которых в средней части расположен не максимум, а минимум, называются *антимодальными.* Однако существуют распределения, у которых нет моды, например, равномерное.

Для симметричных законов распределения значение моды, медианы и математического ожидания совпадают (рис 6.10,*а*).

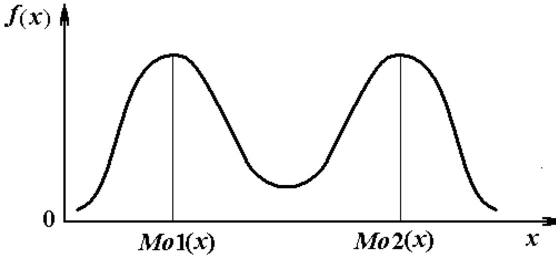


Рис. 6.11. **Двухмодальное распределение вероятности случайной величины x**

Начальные и центральные моменты случайной погрешности совпадают между собой и с центральными моментами результатов измерений, поскольку математическое ожидание случайной погрешности равно нулю.

Важным параметром распределения, его числовой характеристикой, является *центральный* ***момент второго порядка***, называемый *дисперсией*

$$\mu_2 = D(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_i - M(x))^2 f(x) dx . \tag{6.38}$$

Для дискретных величин

$$\mu_2 = D(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot (x_i - M(x))^2 . \tag{6.39}$$

Дисперсия является характеристикой рассеяния случайной величины относительно центра распределения – математического ожидания. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, и поэтому для более наглядной характеристики рассеяния используют среднее квадратическое отклонение (ско.), имеющее такую же размерность как случайная величина.

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)} . \tag{6.40}$$

Влияние среднего квадратичного значения на форму кривой нормального распределения изображено на рисунке 6.12.

Как видно из рисунка, с уменьшением σ кривая становится более вытянутой, а ветви ее сближаются; с увеличением σ, наоборот, кривая становится более приплюснутой, а ветви ее раздвигаются шире. Другими словами, чем меньше σ, тем больше вероятность появления малых погрешностей и меньше вероятность появления больших погрешностей, т.е. больше сходимость результатов наблюдений.

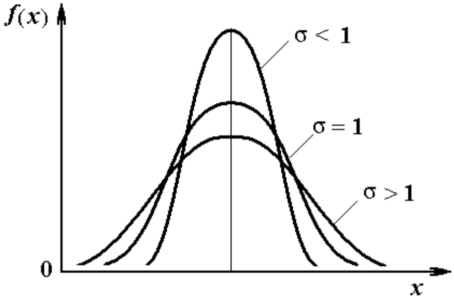


Рис 6.12. **Влияние среднего квадратичного значения на форму кривой нормального распределения**

С помощью среднеквадратического отклонения можно оценить вероятность того, что при однократном наблюдении случайная погрешность по абсолютной величине не превзойдет некоторой заранее заданной величины ε. Для этого рассмотрим формулу, известную как *неравенство Чебышева*:

$$P\{|\Delta| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2} \text{ или } P\{|\Delta| > \varepsilon\} < \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}. \quad (6.41)$$

Например. Полагая $\varepsilon = 3\sigma_x$, можно найти вероятность того, что результат однократного наблюдения отличается от истинного значения на величину, большую утроенного среднеквадратического отклонения, т. е. вероятность того, что случайная погрешность окажется больше $\varepsilon = 3\sigma_x$:

$$P\{|\Delta| > 3\sigma_x\} < \frac{\sigma_x^2}{(3\sigma_x)^2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$$

Вероятность того, что погрешность измерения не превысит $\varepsilon = 3\sigma_x$, составит соответственно

$$P\{|\Delta| < 3\sigma_x\} \geq 1 - \frac{\sigma_x^2}{(3\sigma_x)^2} = 1 - \frac{1}{9} = 0{,}89$$

Неравенство Чебышева дает только нижнюю границу для вероятности, меньше которой она не может быть ни при каком распределении. Обычно

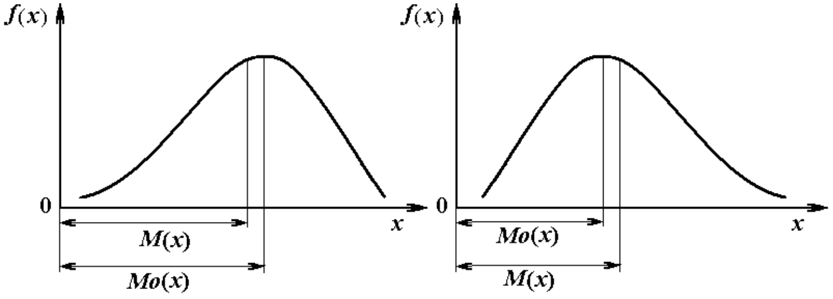
$P\{|\Delta| < 3\sigma_x\}$ значительно больше 0,89. Так, например, в случае нормального распределения погрешностей эта вероятность составляет 0,9973.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение являются наиболее часто применяемыми параметрами, поскольку они определяют наиболее важные черты распределения: положение центра распределения и степень его разбросанности. Для более подробного описания распределения используются моменты более высоких порядков.

Третий центральный момент μ_3 характеризует степень асимметрии кривой распределения относительно математического ожидания, но для удобства за характеристику асимметрии принимают безразмерную величину, называемую *коэффициентом асимметрии* γ_3:

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}. \tag{6.42}$$

При одномодальном распределении асимметрия положительна ($\gamma_3 > 0$), если мода $Mo(x)$ находится влево от среднего значения $M(x)$, и отрицательная ($\gamma_3 < 0$), если мода $Mo(x)$ находится вправо от среднего значения $M(x)$ (рис. 6.13). При симметричном распределении $\gamma_3 = 0$.



а *б*

Рис. 6.13. **Распределение плотности вероятности при различных значениях коэффициент асимметрии:**
а – асимметрия отрицательная $\gamma_3 < 0$;
б – асимметрия положительна $\gamma_3 > 0$

Четвертый центральный момент μ_4 определяет свойство остро- или плосковершинности кривой распределения.

Относительным значением четвертого центрального момента называют *эксцесс распределения*

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}. \qquad (6.43)$$

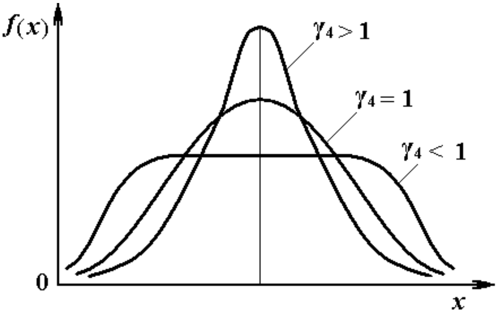


Рис. 6.14. **Влияние коэффициента эксцесса значения на форму кривой нормального распределения**

Значение эксцесса лежит в диапазоне –1 до +∞. Для нормального распределения он равен 3.

За характеристику остро- или плосковершинности кривой распределения принимают безразмерную величину γ_4, называемую *коэффициентом эксцесса*

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3. \qquad (6.44)$$

Значение коэффициента γ_4 лежит в диапазоне от –2 до +∞. Для нормального распределения он равен 0. При симметричном одномодальном распределении эксцесс положителен ($\gamma_4 > 0$), если кривая распределения островершинная, и отрицателен ($\gamma_4 < 0$), если кривая распределения плосковершинная (рис.1.42).

Для удобства часто используют *контрэксцесс*

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \qquad (6.45)$$

Значение контрэксцесса лежат в пределах от 0 до 1. Для нормального закона он равен 0,577.

Точечные оценки параметров распределения случайных величин. Рассмотренные выше функции распределения описывают поведение непрерывных случайных величин, т.е. величин, возможные значения которых неотделимы друг от друга и непрерывно заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал. На практике нахождение параметров функции распределения случайной величины производится по данным *выборки* – ряда значений x_i, принимаемых случайной величиной X в n независимых опытах. Используемая выборка должна быть *репрезентативной* (представительной), т.е. должна достаточно хорошо представлять пропорции генеральной совокупности.

Оценка $\hat{a}$ параметра a, найденная по данным выборки называется *точечной,* если она выражается одним числом. К точечным оценкам предъявляется ряд требований, определяющих их пригодность для описания самих параметров.

1. Оценка называется *состоятельной,* если при увеличении числа наблюдений она приближается (сходится по вероятности) к значению оцениваемого параметра.

2. Оценка называется *несмещенной,* если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру.

3. Оценка называется *эффективной,* если ее дисперсия меньше дисперсии любой другой оценки данного параметра.

На практике не всегда удается удовлетворить одновременно все три этих требования, однако выбору оценки должен предшествовать ее критический анализ со всех перечисленных точек зрения.

Любая точечная оценка, вычисленная на основании опытных данных, является их функцией и поэтому сама должна представлять собой случайную величину с распределением, зависящим от распределения исходной случайной величины, в том числе и от самого оцениваемого параметра, и от числа опытов n.

Наиболее распространенным методом получения оценок является метод наибольшего правдоподобия, теоретически обоснованный математиком Р.Фишером, который приводит к асимптотически несмещенным и эффективным оценкам с приближенно нормальным распределением. Среди других методов можно назвать методы моментов и наименьших квадратов.

Точечной оценкой математического ожидания результата измерений является *среднее арифметическое значение* измеряемой величины

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (6.46)$$

Среднее арифметическое результатов наблюдений получено на основании сложения случайных величин, и, следовательно, также является случайной величиной, для которой может быть вычислено математическое ожидание и дисперсия.

$$M\left(\overline{X}\right) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left(x_i\right) = \frac{nM(x)}{n} = M(x). \qquad (6.47)$$

Это значит, что среднее арифметическое является несмещенной оценкой истинного значения.

Значение дисперсии среднего значения можно определить следующим образом:

$$D\left(\overline{X}\right) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\left(x_i\right) = \frac{nD(x)}{n^2} = \frac{D(x)}{n}. \qquad (6.48)$$

Из выражения (6.48) следует, что точность результата измерения можно повысить при увеличении числа измерений. Дисперсия среднего арифметического из n наблюдений в n раз меньше дисперсии результата однократного наблюдения, или в терминах среднего квадратического отклонения:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \,, \qquad (6.49)$$

т.е. среднее квадратическое отклонение арифметического в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратического отклонения результата наблюдений.

По мере увеличения числа наблюдений $\sigma_{\overline{X}}$ стремится к нулю. Это означает, что среднее арифметическое ряда наблюдений сходится по вероятности к математическому ожиданию и является его состоятельной оценкой.

В качестве точечной оценки дисперсии случайной величины выбирают среднее значение квадрата отклонения случайной величины от среднего значения.

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 . \qquad (6.50)$$

Эта оценка является состоятельной, но смещенной, как математическое ожидание равно

$$M\left(\hat{\sigma}_x^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma_x^2. \tag{6.51}$$

Поэтому точечную *оценку дисперсии* принято определять как

$$S_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2, \tag{6.52}$$

Для точечной *оценки среднего квадратического отклонения* получим выражение

$$S_x=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}\,. \tag{6.53}$$

Эта оценка характеризует сходимость результатов отдельных наблюдений, т.е. степень их концентрации относительно среднего арифметического. В литературе величину σ_x называют средним квадратичным, или стандартным отклонением генеральной совокупности, а S_x – выборочным средним квадратичным отклонением.

Среднее арифметическое $\overline{X}$ имеет дисперсию, в n раз меньшую, чем дисперсия случайной погрешности (1.66). В связи с этим в качестве точечной *оценки дисперсии среднего арифметического* принимается выражение

$$S_{\overline{X}}^2=\frac{1}{n}S_x^2=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2. \tag{6.54}$$

Оценка среднего квадратического отклонения среднего арифметического описывается в следующем виде:

$$S_{\overline{X}}=\frac{S_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}\,. \tag{6.55}$$

В таблице 6.2 приведены формулы для определения оценок по n результатам измерений в отсутствие систематической погрешности.

С помощью полученных оценок $\overline{X}$ и $S_{\overline{X}}$ результат измерения может быть записан так:

$$Q=\overline{X}\,;\ S_{\overline{X}}=\ldots;\ n=\ldots,$$

что позволяет сделать выводы относительно точности измерения: число измерений n указывает на надежность определения $S_{\overline{X}}$ и, следовательно, S_x и на близость $\overline{X}$ к истинному значению Q.

Таблица 6.2

Формулы для вычисления точечных оценок результатов измерений

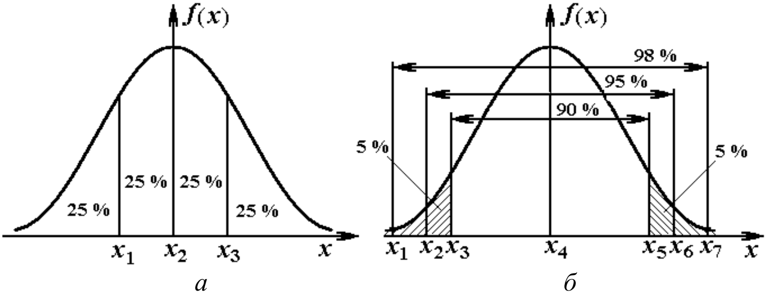
Параметр теоретического распределения	Точечная оценка ограниченного числа измерений
Математическое ожидание случайной величины $M(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$	Среднее арифметическое значение измеряемой величины $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ Оценки дисперсии среднего арифметического $S_{\overline{X}}^2 = \frac{1}{n} S_x^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2$ Оценка среднего квадратического отклонения среднего арифметического $S_{\overline{X}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}$
Дисперсия случайной величины $D(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_i - M(x))^2 f(x) dx$	Оценка дисперсии $S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2$
Среднее квадратическое отклонение случайной величины $\sigma = \sqrt{D(x)}$	Оценка среднего квадратического отклонения $S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}$

Например, запись $\overline{X}$ = 12,05 мм; $S_{\overline{X}} = 0{,}0001$ мм; n = 49 означает, что истинный размер Q 12,05 ± 0,0001; P = 68%. Кроме того, n = 36 говорит о том, каково было рассеяние результатов наблюдения при измерении: результаты однократных измерений с вероятностью 68% не выходили за пределы $S_{x1} = \frac{S_X}{\sqrt{n}} = 0{,}0001\sqrt{49} = 0{,}0007$ мм. Другой результат: $\overline{X}$ = 12,05 мм; $S_{\overline{X}}$ = 0,0001 мм; n = 16 – говорит о том, что измерение было проведено средством измерения, имеющим более высокую точность: $S_{x2} = \dfrac{S_x}{\sqrt{n}} = 0{,}0001\sqrt{16} = 0{,}0004$ мм. Результат на первый взгляд кажется одинаковым: истинный размер Q с вероятностью 68% лежит в пределах 0,7 мкм от размера 12,05 мм, И все-таки второй результат хуже, так как его оценка S_x определена менее надежно. Дело в том, что среднее квадратическое отклонение S_x будет получаться различным при повторном его определении с тем же значением n и дисперсия его зависит от числа n.

Оценка с помощью интервалов. Более полный и надежный способ оценивания измеренной ФВ заключается в определении интервала (а не только точечного значения), в котором с заданной степенью достоверности будет заключено значение оцениваемого параметра.

Доверительные границы (*погрешности измерения*) (в соответствии с РМГ 29–2013) это верхняя и нижняя границы интервала, внутри которого с заданной вероятностью находится значение погрешности измерений.

В метрологической практике используют главным образом *квантельные оценки* доверительного интервала. Площадь, заключенная под кривой плотности распределения (рис.6.13, *а*), согласно правилу нормирования, равна единице, т.е. отражает вероятность всех возможных событий. Эту площадь можно разделить на некоторые части вертикальными линиями. Абсциссы таких линий называют квантилями. Так, $x = x_1$ на рисунке 6.15,*а*, есть 25 %-я квантиль, так



а *б*

Рис. 6.15. **Квантильная оценка случайной величины** как площадь под кривой $f(x)$ слева от нее составляет 25 % всей площади, а справа – 75 %. Между x_1 и x_3, т.е. 25 %- и 75 %-й квантилями, которые принято называть сгибами (или квартилями) данного распределения заключено 50 % всех возможных значений случайной величины, а остальные 50 % лежат вне этого промежутка. Иначе говоря, *квантиль* — это значение случайной величины (погрешности) с заданной доверительной вероятностью P. Например, медиана ($x = x_2$) – это 50 %-ная квантиль, так как она делит площадь под кривой $f(x)$ на две равные части.

На рисунке 6.15,*б* $x = x_3$ есть 5 %-я квантиль, так как площадь под кривой $f(x)$ слева от нее составляет 5 % всей площади. Соответственно значения x_1, x_2, x_6 и x_7 на рисунке 6.15,*б* – это 1 %-, 2,5 %-, 97,5 %- и 99 %-я квантили. Их удобно обозначать соответственно как $x_{0,01}$, $x_{0,025}$, $x_{0,975}$ и $x_{0,99}$. Интервал значений х между $x_3 = x_{0,05}$ и $x_4 = x_{0,95}$ охватывает 90 % всех возможных значений случайной величины и называется интерквантильным промежутком с 90 %-й вероятностью. Его протяженность $d_{0.9} = x_{0,95} - x_{0,05}$. Интерквантильный промежуток $d_{0.95} = x_{0,975} - x_{0,0025}$ включает в себя 95 % всех возможных значений случайной величины и т.д.

На основании такого подхода вводится понятие *квантильных значений погрешности,* т.е. значений погрешности с заданной доверительной вероятностью P – границ интервала неопределенности $\pm\Delta_P = d_p/2$. На его протяженности встречается P % значений случайной величины (погрешности), а $q = (1 - P)$ % общего их числа остаются за пределами этого интервала. Следовательно, необходимо определить по заданной вероятности P границы интервала неопределенности $\pm\Delta_P$.

Определим *доверительный интервал для среднего арифметического* значения измеряемой величины. Предположим, что распределение результатов наблюдений нормально и известна дисперсия σ_x^2. Тогда, подставив в уравнение (6.17) $t_1 = - t_2 = t_p$, найдем вероятность P попадания результата наблюдений в интервал ($x_1 = M(x) - t_P\sigma$; $x_1 = M(x) + t_P\sigma$) (рис.6.6). Согласно формулам (6.20) и (6.21)

$$P\{M(x)-t_P\sigma_x < x \le M(x)+t_P\sigma_x\} = \Phi(t_P)-\Phi(-t_P) = 2\Phi(t_P)-1, \qquad (6.56)$$

но (см. рис. 6.6)

$$P\{M(x)-t_P\sigma_x < x \le M(x)+t_P\sigma_x\} = P\{x-t_P\sigma_x < M(x) \le x+t_P\sigma_x\}$$

и, если систематические погрешности исключены ($M(x) = Q$),

$$P\{x-t_P\sigma_x < Q \le x+t_P\sigma_x\} = 2\Phi(t_P)-1. \qquad (6.57)$$

Это означает, что истинное значение Q измеряемой величины с доверительной вероятностью $P = 2\Phi(t_P)-1$ находится между границами доверительного интервала $(x-t_P\sigma_x; x+t_P\sigma_x)$.

Половина длины доверительного интервала $t_P\sigma_x$ называется доверительной границей случайного отклонения результатов наблюдений, соответствующей доверительной вероятности P. Для определения доверительной границы (при выполнении перечисленных условий) задаются доверительной вероятностью, например, $P = 0{,}95$ или $P = 0{,}995$, и по формуле

$$\Phi(t_P) = \frac{1+P}{2} \qquad (6.58)$$

определяют соответствующее значение $\Phi(t_p)$ интегральной функции нормированного нормального распределения. Затем находят значение коэффициента t_P и вычисляют доверительное отклонение $t_P\sigma_x$.

Проведение многократных наблюдений позволяет значительно сократить доверительный интервал. Действительно, если результаты наблюдений X_i ($i = 1, 2, ..., n$) распределены нормально, то нормально распределено среднее арифметическое $\overline{X}$. Поэтому имеет место равенство

$$P\{\overline{X}-t_P\sigma_{\overline{X}} < Q \le \overline{X}+t_P\sigma_{\overline{X}}\} = P\left\{\overline{X}-\frac{t_P\sigma_x}{\sqrt{n}} < Q \le \overline{X}+\frac{t_P\sigma_x}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t_P)-1, \quad (6.59)$$

где t_p определяется по-прежнему формулой (1.60) по заданной доверительной вероятности P.

Полученный доверительный: интервал, построенный с помощью среднего арифметического результатов n независимых повторных наблюдений, в $\sqrt{n}$ раз короче интервала, вычисленного по результату одного наблюдения, хотя доверительная вероятность для них одинакова. Это говорит о том, что сходимость измерений растет пропорционально корню квадратному из числа наблюдений.

Итог измерения записывается в виде

$$Q = \overline{X} \pm \Delta_P \text{ при } P = \ldots\%,$$

где $\Delta_P = t_P \sigma_{\overline{X}}$.

Пример. Проведено 16 независимых измерений размера L, рассчитано значение $\overline{L} = 20{,}001$ мм. Среднее квадратическое отклонение результата однократного наблюдения определено ранее и равно σ_L = 0,0004 мм. Определить границы для истинного значения с доверительной вероятностью P = 0,9973. Распределения результатов измерений описывается нормальным распределением.

Определяем значение функции распределения $\Phi(z)$ для заданной доверительной вероятности по формуле (6.58)

$$\Phi(z = t_P) = \frac{1 + 0{,}9973}{2} = 0{,}99865\ .$$

По таблице находим, что $\Phi(z)$ = 0,99865 при z =3. Следовательно, $t_p = z$ = 3 и доверительная граница погрешности результатов измерения

$$\Delta_P = t_P \sigma_{\overline{X}} = 3\frac{\sigma_L}{\sqrt{16}} = 3 \cdot \frac{0{,}0004}{4} = 0{,}0003 \text{ мм.}$$

Результат измерения запишем в следующем виде:

$$L = (20{,}001 \pm 0{,}0003) \text{ мм; } P = 99{,}73\ \%.$$

Теперь рассмотрим случай, когда распределение результатов наблюдений нормально, но их дисперсия неизвестна. В этих условиях пользуются отношением

$$t = \frac{\overline{X} - M(x)}{S_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - Q}{S_{\overline{X}}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - Q}{S_x}, \qquad (6.60)$$

называемым дробью Стьюдента. Входящие в нее величины $\overline{X}$ и S_x вычисляют на основании опытных данных; они представляют собой точечные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения результатов наблюдений.

Плотность распределения этой дроби, впервые предсказанного В. С. Госсетом, писавшим под псевдонимом Стьюдент, и впоследствии доказанного Р. А. Фишером, который связал его с именем Стьюдента, выражается следующим уравнением:

$$S(t;k)=\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{2}\right)!}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \tag{6.61}$$

где $S(t;\ k)$ – плотность распределения Стьюдента. Величина k называется числом степеней свободы и равна $n - 1$.

Вероятность того, что дробь Стьюдента в результате выполненных наблюдений примет некоторое значение в интервале $(-t_P;\ +t_P)$, определяется по формуле

$$P\{-t_P < t \le +t_P\} = \int_{-t_P}^{+t_P} S(t;k)\,dt, \tag{6.62}$$

или, поскольку $S(t;k)$ является четной функцией аргумента t,

$$P\{-t_P < t \le +t_P\} = 2\int_{0}^{t_P} S(t;k)\,dt. \tag{6.63}$$

Подставив вместо дроби Стьюдента t ее выражение через $\overline{X}$, Q и $S_{\overline{X}}$, получим окончательно

$$P\left\{-t_P < \frac{\overline{X}-Q}{S_{\overline{X}}} \le +t_P\right\} = P\left\{\left|\overline{X}-Q\right| < t_P S_{\overline{X}}\right\} = 2\int_{0}^{t_P} S(t;k)\,dt. \tag{6.64}$$

Величины t_P вычисленные по формулам (6.64) и (6.67), были табулированы Р.А. Фишером для различных значений доверительной вероятности P в пределах от 0,10 – 0,99 при $k = n - 1 = 1, 2, \ldots, 30$.

Таким образом, с помощью распределения Стьюдента по формуле (6.64) могут быть определены с заданной доверительной вероятностью P доверительные границы для истинного значения измеряемой величины на основании ограниченного числа наблюдений. Эти границы определяются величиной $\Delta_P = t_P S_{\overline{X}}$, например $2S_{\overline{X}}$, $3S_{\overline{X}}$ и т.д. Итог измерения записывается в следующем виде:

$$Q = \overline{X} \pm \Delta_P \text{ при } P = \ldots\%. \qquad (6.65)$$

При $n < 30$ распределение Стьюдента переходит в нормальное, и для оценки интервалов можно пользоваться таблицами интеграла вероятности $\Phi(z)$.

Пример. В результате девятикратных наблюдений при измерении величины L получены следующие оценки параметров распределения результатов наблюдения: $\overline{L} = 20{,}001$ мм и $S_x = 0{,}0004$ мм. Известно, что результаты L_i распределены нормально. Определить предельную погрешность Δ_P на основании опытных данных с вероятностью $P = 95$ %.

$$\Delta_P = t_P S_{\overline{X}} = t_P \frac{S_x}{\sqrt{n}} = 2{,}306 \frac{0{,}0004}{\sqrt{9}} = 0{,}0003078 \text{ мм.}$$

Результат измерения запишем в следующем виде:

$$L = (20{,}001 \pm 0{,}00031) \text{ мм; } P = 95 \text{ \%.}$$

Сравним полученный результат измерения с результатом измерения, который будет получен в случае, если среднее квадратическое отклонение известно заранее и равно $\sigma_x = 0{,}004$ мм. В этом случае мы не будем пользоваться оценкой S_x и доверительная вероятность P определится функцией нормального распределения по значению t_P на основании зависимости (6.61).

Для $P = 0{,}95$ найдем $t_P = 2$, и предельная погрешность

$$\Delta_P = t_P \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = 2 \frac{0{,}0004}{\sqrt{9}} = 0{,}00027 \text{ мм,}$$

т. е. истинное значение измеряемой величины будет определено более точно с той же вероятностью:

$$L = (20{,}001 \pm 0{,}00027) \text{ мм; } P = 95 \text{ \%.}$$

Это объясняется тем, что оценка S_x не является точной, т. е. она может быть другой в следующей серии измерений, и, чтобы гарантировать нахождение истинного значения в доверительных границах с заданной вероятностью, необходимо расширить доверительные границы. Эти границы как раз и могут быть определены по распределению Стьюдента, по которому мы получили t_P = 2,306 для P = 0,95, тогда как для той же доверительной вероятности при известном значении среднего квадратического отклонения t_P = 2. Недостаток информации вследствие малого числа n при определении S_x компенсируется расширением интервала в этом примере на 15 %.

7. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

7.1. Прямые многократные измерения

Прямые многократные измерения делятся на равно- и неравноточные. *Равноточными* называются измерения, которые проводятся средствами измерений одинаковой точности по одной и той же методике при неизменных внешних условиях.

Задача обработки результатов многократных измерений заключается в нахождении оценки измеряемой величины и доверительного интервала, в котором находится ее истинное значение. Порядок обработки равноточных результатов измерений изложен в ГОСТ 8.207-76 «ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Общие положения».

Исходной информацией для обработки является ряд из n ($n > 4$) результатов измерений x_1, x_2, x_3, …, x_n, который называется *выборка*. Число n зависит как от требований к точности получаемого результата, так и от реальной возможности выполнять повторные измерения.

Последовательность обработки результатов прямых многократных измерений состоит из ряда этапов.

1. Определяются систематические погрешности, которые исключаются из полученных результатов измерений с помощью введения поправок.

2. Для исправленных результатов измерений вычисляют среднее арифметическое, приравнивая его к истинному значению измеряемой ФВ $\overline{X} = Q$.

3. Вычисляют оценку СКО результатов измерений S_x и оценку среднего квадратического отклонения среднего арифметического $S_{\overline{X}}$.

4. Проверяют результаты измерений на наличие грубых погрешностей и промахов. Если таковые обнаружены, их отбрасывают, и вычисления точечных оценок повторяют.

5. Подбирают закон распределения результатов измерений.

6. Вычисляют доверительные (интервальные) границы случайной погрешности $\overset{o}{\Delta}$ при заданной вероятности.

7. Определяют границы неисключенной систематической погрешности θ результата измерений. Обычно эта погрешность образуется из ряда составляющих: погрешности метода и средства измерения, субъективной погрешности и т.д. При суммировании эти составляющие рассматривают как случайные величины. При отсутствии информации о законе распределения неисключенных составляющих систематических погрешностей, их распределения принимают за равномерные, и границы неисключенной систематической погрешности результата измерения вычисляю по формуле

$$\theta = \begin{cases} k\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_i^2}\text{, если } k\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_i^2} < \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_i}\text{,} \\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_i}\text{, если } k\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_i^2} \ge \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_i}\text{,} \end{cases} \tag{7.1}$$

где θ_i – границы i-й элементарной случайной погрешности; k – поправочный коэффициент, зависящий от числа слагаемых m, их соотношения и доверительной вероятности. При Р < 0,99 он мало зависит от числа слагаемых и может быть представлен усредненными значениями, приведенными в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Зависимость коэффициент k от P и m

P	Значение k при m					Среднее значение
	2	3	4	5	∞	
0,90	0,97	0,96	0,95	0,95	0,95	0,95
0,95	1,10	1,12	1,12	1,12	1,13	1,1
0,99	1,27	1,37	1,41	1,42	1,49	1,4

В случае если составляющие неисключенной систематической пренебрежительно малы, границы неисключенной систематической погрешности принимаются равными пределам допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений.

8. Вычисляют доверительные границы суммарной погрешности результата измерения:

если $\theta \,/\, S(\bar{x}) < 0{,}8$, то границы погрешности результата измерения принимаются равными случайной погрешности, $\Delta = \overset{\circ}{\Delta}$;

если $\theta \,/\, S(\bar{x}) > 8$, то границы погрешности результата измерения принимаются равными систематической погрешности, $\Delta = \theta$;

если $0{,}8 \le \theta \,/ S(\bar{x}) \le 8$, то общую погрешность измерения определяют по формуле

$$\Delta = K \cdot S_\Sigma, \tag{7.2}$$

где K – коэффициент, зависящий от соотношения $\overset{\circ}{\Delta}$ и θ; S_Σ – оценка суммарного среднеквадратического результата измерений;

$$K = \frac{\overset{\circ}{\Delta} + \theta}{S(\bar{x}) + \sqrt{\theta^2/3}}; \tag{7.3}$$

$$S_\Sigma = \sqrt{\theta^2/3 + S^2(\bar{x})}. \tag{7.4}$$

9. Результат измерения записывают в виде

$$Q = \overline{X} \pm \Delta\,(P;\, n). \tag{7.5}$$

При отсутствии данных о видах функции распределения составляющий погрешности результата или при необходимости дальнейшей обработки результат измерения представляют в форме

$$Q = \overline{X}\,(S_{\overline{X}};\, n;\, \theta). \tag{7.6}$$

Пример. Цифровым измерителем иммитанса Е7-14 проводились прямые многократные измерения сопротивления магазина сопротивлений марки Р33, номинальное значение которого равно 0,1 Ом. Измерения проводились в диапазоне рабочих температур измерителя иммитанса. Получены следующие результаты измерения R_i: 145,44; 145,36; 145,43; 145,38; 145,44; 145,42; 145,41; 145,39; 145,40; 145,41; 145,45; 145,43; 145,46; 145,37; 145,48 мОм. Проведенные измерения характеризуются неисключенной систематической погрешностью, задаваемой пределом допускаемого значения:

основной погрешности измерения измерителя Е7 – 14. При этом для данного магазина сопротивлений добротность $Q = 0$;

дополнительной погрешности измерения в диапазоне рабочих температур. Он равен удвоенному допускаемому значению основной погрешности.

Для устранения влияния соединительных проводов и переходных сопротивлений контактов был проведен ряд измерений при нулевом значении магазина сопротивлений. Получены следующие результаты измерения R_{0i}: 45,30; 45,29; 45,28; 45,291 45,28; 45,29; 45,29; 45,28; 45,30; 45,30; 45,30; 45,30; 45,31; 45,32; 45,30 мОм.

Требуется провести обработку результатов измерений. Найти суммарную погрешность измерения сопротивлений.

Суммарная погрешность измерения сопротивления складывается из случайной и систематической погрешностей. Систематическая погрешность измерения сопротивления состоит из трех составляющих, обусловленных:

ненулевым значением сопротивления соединительных проводов и переходных контактов зажимов используемых средств измерений;

основной и дополнительной погрешностями измерителя иммитанса Е7-14.

Первая из них может быть оценена исходя из данных измерений нулевого сопротивления магазина. Полученный ряд данных характеризуется средним арифметическим значением и оценкой его СКО:

$$\overline{R_0} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} R_{0i} = 45{,}259\,\text{мОм};$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{1}{15\cdot(15-1)}\sum_{i=1}^{15}\left(R_{0i} - \overline{R_0}\right)^2} = 0{,}0029\ \text{мОм}\,\cdot$$

Сопротивление проводов постоянно присутствует в результатах измерений и по своей сути является систематической погрешностью, которая может быть исключена из результатов измерений путем введения поправки, равной –45,295 мОм.

Доверительный интервал погрешности измерения сопротивления проводов, равный

$$\Delta_{095}(\mathrm{R}_0) = t_p S_0 = 2{,}15 \cdot 0{,}0029 = 0{,}0062 \text{ мОм},$$

можно рассматривать двояко: как неисключенную систематическую погрешность и как составляющую случайной погрешности. В любом случае, как это будет видно далее, ее значение столь мало, что согласно критерию ничтожно малой погрешности, ею можно пренебречь.

После введения поправки получается исправленный ряд значений сопротивления R_{ui}: 100,145; 100,065; 100,135; 100,085; 100,145; 100,125; 100,115; 100,095; 100,105; 100,115; 100,155; 100,135; 100,165; 100,075; 100,185 мОм.

Составляющая систематической погрешности, обусловленная основной погрешностью измерителя иммитанса Е7-14, рассчитывается по формуле

$$\theta_{осн} = \overline{R_n} \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}$$

Здесь $\overline{R_n}$ – среднее арифметическое значений ряда неисправленных показаний измерителя иммитанса, равное 145,418 мОм. Следовательно, систематическая погрешность, обусловленная основной погрешностью Е7–14

$$\theta_{осн} = 0{,}145418 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} = 0{,}4454 \text{ Ом}$$

Систематическая погрешность, обусловленная дополнительной погрешностью средства измерений,

$$\theta_{доп} = 2 \cdot \theta_{осн};$$

$$\theta_{доп} = 2 \cdot 0{,}4454 = 0{,}8908 \text{ мОм}.$$

Суммарная систематическая погрешность

$$\theta = 1{,}10\sqrt{(0{,}4454)^2 + (0{,}8908)^2} = 1{,}10\sqrt{0{,}9919} = 1{,}0955 \text{ мОм}$$

Характеристики случайной составляющей находятся посредством статистической обработки исправленного ряда наблюдений. Среднее арифметическое значение сопротивления и его СКО, соответственно равны:

$$\overline{R} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} R_{ui} = 100{,}123 \text{ мОм}; \; S_{\overline{R}} = \sqrt{\frac{1}{15 \cdot (15-1)}\sum_{i=1}^{15}\left(R_{ui} - \overline{R}\right)^2} = 0{,}0088 \text{ мОм}.$$

Считая распределение результатов измерений R_i нормальным, по таблице 4 из приложения Б [13] находим коэффициент Стьюдента для числа измерений

n = 15 и 0,95. Он равен t_p=2,15. В этом случае доверительная граница случайной составляющей погрешности измерений

$$\Delta_{095}(\overline{R}) = t_p S_{\overline{R}} = 2{,}15 \cdot 0{,}0088 = 0{,}0189 \text{ мОм},$$

Случайные погрешности измерений исследуемого сопротивления и сопротивления подводящих проводов можно считать некоррелированными, так как измерения проводились в разное время. Поэтому суммарная случайная погрешность определится в соответствии со вторым уравнением:

$$\Delta_{0,95} = \sqrt{\Delta^2_{0,95}\left(\overline{R}\right) + \Delta^2_{0,95}\left(R_0\right)} = \sqrt{0{,}0189^2 + 0{,}0062^2} = 0{,}0199 \text{мОм}.$$

Из полученных данных видно, что систематическая погрешность значительно больше случайной, поэтому, согласно ГОСТ 8.0207 – 76, последнюю можно не учитывать.

Результат измерения запишется в виде

$$R = 100{,}1 \pm 1{,}1 \text{ мОм при } P = 0{,}95.$$

7.2. Косвенные многократные измерения

При косвенных измерениях значение искомой величины получают на основании известной зависимости, связывающей ее с другими величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

Методика обработки результатов косвенных измерений приведена в документе МИ 2083−90 «ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей».

В общем случае косвенно измеряемая величина представляет собой некоторую функцию

$$Z = F\left(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_m\right), \text{ где } j = 1, \ldots, m, \tag{7.7}$$

где x_1, x_2, …, x_j, …, x_m – значения, полученные при прямых измерениях, m – число измеряемых неизвестных величин.

Если величины x_1, x_2, …, x_m измерены n раз с погрешностью Δx_1, Δx_2, …, Δx_j, …, Δx_m, то искомая величина Z будет иметь погрешность, равную:

$$\Delta_Z = F\left(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_m\right) - F\left(x_1 + \Delta x_1,\, x_2 + \Delta x_2,\, ..., x_j + \Delta x_j,\, ...,\, x_m + \Delta x_m\right).$$

Разложив правую часть уравнения в ряд Тейлора и, ограничившись членами 1-го порядка, получим:

$$\Delta_Z = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \partial x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \partial x_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_J} \partial X_J + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m} \partial x_m . \tag{7.8}$$

Каждая из величин x_j измерена с некоторой погрешностью Δx_j. Полагая, что погрешности Δx_j малы, можно заменить ∂x_j на Δx_j:

$$\Delta_Z = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \Delta x_j . \tag{7.9}$$

Математическое ожидание $M(\Delta_Z)$ и дисперсия $\sigma^2(\Delta_Z)$ погрешности Δ_Z, если величины x_j измерены со случайными погрешностями Δ_j, имеющими нулевые математические ожидания $\mathrm{M}(x_j) = 0$ и дисперсии $\sigma^2_{x_j}$, принимая во внимание (7.9).

$$M(\Delta_Z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x} M(\Delta x_j) = 0 ; \tag{7.10}$$

$$\sigma^2(\Delta_Z) = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 \sigma^2_{x_j} + 2 \sum_{i,j=1}^{m} r_{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} , \tag{7.11}$$

где r_{ij} – коэффициенты корреляции погрешностей всех испытаний j и i, кроме $i = j$.

Если погрешности Δx_j некоррелированы (т.е. коэффициенты корреляции $r_{ij} = 0$), то согласно теореме о сложении дисперсий

$$\sigma^2(\Delta_Z) = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 \sigma^2_{xj} . \tag{7.12}$$

При ограниченном числе измерений ($n \neq \infty$) оценкой истинного значения физической величины Z, определяемой как функция случайных величин (аргументов), может служить ее значение $\overline{Z}$, полученное после выполнения вычислительных операций со средними арифметическими значениями $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_j, \ldots, \overline{x}_m$ аргументов в соответствии с этой функцией, т.е.

$$\overline{Z} = F(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \ldots,\ \overline{x}_j, \ldots,\ \overline{x}_m). \tag{7.13}$$

При этом в соотношениях (7.11) и (7.12) необходимо использовать оценки дисперсий $S^2_{\overline{X}j}$, т.е. формулу (7.12) можно записать в виде

$$S^2\left(\Delta_{\overline{Z}}\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2\cdot S^2_{\overline{x}j}\,. \tag{7.14}$$

Систематическая погрешность результата косвенного измерения определяется систематическими погрешностями результатов измерений аргументов. При измерениях последние стремятся исключить. Однако полностью это сделать не удается, всегда остаются неисключенные систематические погрешности, которые рассматриваются как реализации случайной величины, имеющей равномерное распределение.

Доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения θ_P в случае, если неисключенные систематические погрешности аргументов заданы границами θ_j, вычисляют по формуле

$$\theta_P=k\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2\theta_j^2}\,, \tag{7.15}$$

где k – поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью P и числом m составляющих θ_j. Его значения приведены в таблице 1.13.

Таблица 7.2

Значение коэффициента *k*

P	0,9	0,95	0,98	0,99
k	0,95	1,1	1,3	1,4

Доверительную границу случайной погрешности результата косвенного измерения вычисляют по формуле

$$\overset{0}{\Delta}_P=t_P S\left(\Delta_{\overline{Z}}\right). \tag{7.16}$$

В выражении (7.16) коэффициент Стьюдента t_P определяется по таблице 4 из приложения Б [13] для принятого или заданного значения доверительной вероятности и известного эффективного числа степеней свободы $k_{эф}$, которое определяется по формуле

$$k_{эф} = \frac{\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2 S_{\bar{x}j}^2\right]^2 - 2\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^4 S_{\bar{x}j}^4 \frac{1}{n_j+1}\right]}{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^4 S_{\bar{x}j}^4 \frac{1}{n_j+1}}, \tag{7.17}$$

где n_j – число наблюдений, выполненное при измерении j-го аргумента.

При большом числе измерений (более 25–30), выполненных при нахождении каждого из аргументов, доверительную границу случайной погрешности результата косвенного измерения можно определить по формуле

$$\overset{o}{\Delta}_P = Z_P S\left(\Delta_{\bar{Z}}\right), \tag{7.18}$$

где z_p – квантиль нормального распределения, соответствующий выбранной доверительной вероятности P.

Суммарная погрешность результата косвенного измерения оценивается на основе композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей. Формулы для ее расчета в зависимости от соотношения границ неисключенной систематической составляющей и СКО случайной составляющей погрешности приведены в таблице 7.3.

Таблица 7.3

Суммарная погрешность результата косвенных измерений

Значение θ_P / $s(\Delta_{\bar{Z}})$	Погрешность результата измерения Δ_P
$\theta_P / s(\Delta_{\bar{Z}}) < 0{,}8$	$\overset{o}{\Delta}_P$
$0{,}8 \le \theta_P / s(\Delta_{\bar{Z}}) \le 8$	$k_P\left[\overset{o}{\Delta}_P + \theta_P\right]$
$\theta_P / s(\Delta_{\bar{Z}}) > 8$	θ_P

Коэффициент k_P определяется по таблице 7.4.

Таблица 7.4

Зависимость k_P от отношения θ_P/ $s(\Delta_{\bar{Z}})$ при различной доверительной вероятности

θ_P/ $s(\Delta_{\bar{Z}})$	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8
$k_{0,95}$	0,81	0,77	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
$k_{0,99}$	0,87	0,85	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

Следует сделать еще одно замечание. При выводе соотношения (7.8) в разложении Тейлора были учтены только линейные члены ряда, поскольку члены начиная со второй производной содержат произведения погрешностей и, соответственно, являются малыми величинами более высокого порядка по сравнению с линейными членами. Однако такое приближение приводит к появлению смещения при оценке $\bar{Z}$ по формуле (7.19). Это смещение при отсутствии корреляции между погрешностями аргументов составляет

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}\right)\sigma_{\bar{x}_j}^2 = -q\,, \qquad (7.19)$$

Результат косвенного измерения при известных дисперсиях погрешностей измеряемых величин записывается в виде

$$Z = \bar{Z} + q \pm \Delta \text{ при } P = \ldots\%, \qquad (7.20)$$

Пример. Определение параметра $Z = f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ проводится с помощью прямых многократных измерений параметров x_1, x_2, x_3, для каждого из которых известны основные метрологические характеристики применяемых средств измерений – пределы измерений (ПИ) и класс точности (КТ).

Требуется:

провести обработку результатов измерений;

найти суммарную погрешность косвенного измерения параметра Z измерения с доверительной вероятностью $P = 95$ %.

Исходные данные

Измеряемый параметр		Пределы измерений	Класс точности	Вид функции
x_1	21,21; 21,22; 21,22; 21,23; 21,23	0 … 40	0,02	$Z = \frac{x_1 x_2}{x_3 x_4}$
x_2	10,12; 10,11; 10,10; 10,13; 10,11	±25	0,01	
x_3	12,05; 12,06; 12,06; 12,07; 12,08	±20	0,06	
x_4	6,02; 6,018; 6,019; 6,02; 6,021	0 … 20	0,03	

1. Определение оценки истинного значения искомого параметра. При ограниченном числе измерений ($n \neq \infty$) оценкой истинного значения физической величины Z, определяемой как функция случайных величин (аргументов), может служить ее значение $\overline{Z}$, полученное после выполнения вычислительных операций со средними арифметическими значениями $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_j, ..., \overline{x}_m$ аргументов в соответствии с этой функцией.

Средние арифметические значения параметров x_i определяем по формуле

$$\overline{x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,;$$

$$\overline{x_1} = \frac{21{,}21 + 21{,}22 + 21{,}22 + 21{,}23 + 21{,}23}{5} = 21{,}222\,;$$

$$\overline{x_2} = \frac{10{,}12 + 10{,}11 + 10{,}10 + 10{,}13 + 10{,}11}{5} = 10{,}114\,;$$

$$\overline{x_3} = \frac{12{,}05 + 12{,}06 + 12{,}06 + 12{,}07 + 12{,}08}{5} = 12{,}064\,;$$

$$\overline{x_4} = \frac{6{,}02 + 6{,}018 + 6{,}019 + 6{,}02 + 6{,}021}{5} = 6{,}0196\,.$$

Оценка истинного значения $\overline{Z}$ с учетом вида ее функции

$$\overline{Z}=\frac{21{,}222\cdot 10{,}114}{12{,}064\cdot 6{,}0196}=2{,}9556\cdot$$

2. Определение оценки среднеквадратического отклонения искомого параметра.

Оценку среднеквадратического отклонения результата измерения *j*-го аргумента определяем по формуле

$$S_{\overline{X_j}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\ ;$$

$$S_{\overline{X_1}}=\sqrt{\frac{1}{5\cdot(5-1)}\sum_{i=1}^{5}\left(X_{1_i}-21{,}222\right)^2}=0{,}00374\,;$$

$$S_{\overline{X_2}}=\sqrt{\frac{1}{5\cdot(5-1)}\sum_{i=1}^{5}\left(X_{2i}-10{,}114\right)^2}=0{,}0051;$$

$$S_{\overline{X_3}}=\sqrt{\frac{1}{5\cdot(5-1)}\sum_{i=1}^{5}\left(X_{3_i}-12{,}064\right)^2}=0{,}0051;$$

$$S_{\overline{X_4}}=\sqrt{\frac{1}{5\cdot(5-1)}\sum_{i=1}^{5}\left(X_{4_i}-6{,}0196\right)^2}=0{,}00051\,.$$

Вычислим частные производные и частные погрешности косвенных измерений по каждому параметру x_j

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}\right)S_{\overline{x_1}}=\frac{\overline{x_2}}{\overline{x_3}\,\overline{x_4}}S_{\overline{x_1}};$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_1}\right)S_{\overline{X_1}}=\frac{10{,}114}{12{,}064\cdot 6{,}0196}\cdot 0{,}00374=0{,}0005211;$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_2}\right)S_{\overline{X_2}}=\frac{\overline{X_1}}{\overline{X_3}\,\overline{X_4}}S_{\overline{X_2}};$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_2}\right)S_{\overline{X_2}}=\frac{21{,}222}{12{,}064\cdot 6{,}0196}\cdot 0{,}0051=0{,}00149$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_3}\right)S_{\overline{X_3}}=\frac{\overline{X_1}}{\overline{X_3}\,\overline{X_4}}S_{\overline{X_3}};$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_3}\right) S_{\overline{X_3}} = -\frac{21{,}222 \cdot 10{,}114}{12{,}064^2 \cdot 6{,}0196} \cdot 0{,}0051 = -0{,}001249\ ;$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_4}\right) S_{\overline{X_4}} = -\frac{\overline{X_1}\,\overline{X_2}}{\overline{X_3}\,\overline{X}_4^2} S_{\overline{X_4}}\ ;$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X_4}\right) S_{\overline{X_4}} = -\frac{21{,}222 \cdot 10{,}114}{12{,}064 \cdot 6{,}0196^2} \cdot 0{,}00051 = -0{,}0002504\ .$$

Таким образом, оценка СКО косвенного измерения параметра Z составляет

$$S_{\overline{Z}} = \sqrt{0{,}0005211^2 + 0{,}00149^2 + (-0{,}001249)^2 + (-0{,}0002504)^2} = 0{,}002029.$$

3. Определение доверительных границ случайной погрешности.

Доверительную границу случайной погрешности результата косвенного измерения вычисляем по формуле (7.16). Эффективное число степеней свободы определяем по формуле (7.17)

$$k_{эф} = \frac{1{,}667 \cdot 10^{-15} - 2{,}4465 \cdot 10^{-16}}{1{,}42235 \cdot 10^{-15}} = 5{,}81 \cdot$$

При таком числе степеней свободы для доверительной вероятности P = 95 % интерполяцией данных таблице 4 из приложения Б [13] находим $t_{0,95}$ = 2,44. Тогда доверительные границы случайной погрешности

$$\overset{0}{\Delta}_{0,95} = 2{,}44 \cdot 0{,}002029 = 0{,}00495.$$

4. Определение доверительных границ неисключенной систематической погрешности.

Доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения θ_P в случае, если неисключенные систематические погрешности аргументов заданы границами θ_j, вычисляем по формуле (7.15).

В нашем случае неисключенные систематические погрешности аргументов определяются границами основной погрешности средств измерений.

Так как класс точности всех трех средств измерений указан в виде приведенной погрешности, то в абсолютной форме погрешность средств измерений определяем по формуле

$$\Delta_i = \frac{\gamma_i x_N}{100},$$

где x_N – нормированное значение, выбираемое в зависимости от шкалы прибора; γ_i – приведенная погрешность измерения.

Для нашего случая

$$\Delta_1 = \frac{0{,}02 \cdot 40}{100} = 0{,}008;$$

$$\Delta_2 = \frac{0{,}01 \cdot 50}{100} = 0{,}005;$$

$$\Delta_3 = \frac{0{,}06 \cdot 40}{100} = 0{,}024;$$

$$\Delta_i = \frac{0{,}03 \cdot 20}{100} = 0{,}006.$$

Тогда по формуле (7.15) определим границы неисключенной систематические погрешности

$$\theta_{0,95} = 1{,}1\sqrt{0{,}019 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-5} + 0{,}085 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-5} + 0{,}059 \cdot 5{,}76 \cdot 10^{-4} + 0{,}236 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-5}} = 0{,}0075.$$

5. Определение доверительных границ суммарной погрешности результата косвенного измерения.

Суммарная погрешность результата косвенного измерения оценивается на основе композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей.

Так как отношение $\theta_P / S_{\bar{Z}}$ = 0,0075/0,002029 = 3,7, то суммарная погрешность результата косвенных измерений будем определять по формуле

$$\Delta = k_P \left[\overset{o}{\Delta}_P + \theta_P \right].$$

Для вероятности P = 95 % по таблице 7.3 $k_{0,95}$ = 0,75, тогда

$$\Delta = 0{,}75 \cdot (0{,}0495 + 0{,}0075) = 0{,}009346 .$$

6. Определение доверительных границ систематической погрешности результата косвенного измерения.

Систематическую погрешность, возникающую при косвенных измерениях, при отсутствии корреляции между погрешностями аргументов определяем по формуле (7.19).

В нашем случае

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x_j^2}\right)S_{\bar{x}_j}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x_3^2}\right)S_{\bar{x}_3}^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x_4^2}\right)S_{\bar{x}_4}^2\right],$$

поскольку вторые производные по остальным аргументам равны нулю. Тогда

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{Z}}{2\overline{X}_3^3}S_{\bar{x}_3}^2 + \frac{\overline{Z}}{2\bar{x}_4^3}S_{\bar{x}_4}^2\right);$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 12{,}064^3}\cdot 0{,}0051^2 + \frac{2{,}9556}{2\cdot 6{,}0196^3}\cdot 0{,}00051^2\right) = 2{,}746\cdot 10^{-7}\cdot$$

Полученная величина значительно меньше пяти единиц разряда, следующего за последней значащей цифрой погрешности результата. Если эту погрешность учесть путем введения в итог измерения соответствующей поправки, то она все равно пропадает при округлении. Поэтому принимаем θ = 0.

Результат косвенного измерения при оценках в виде погрешностей измеряемых величин записываем в виде (7.20)

$$Z = 2{,}9556 \pm 0{,}009346 \text{ при } P = 95\ \%,$$

после округления

$$Z = 2{,}956 \pm 9{,}0\cdot 10^{-3} \text{ при } P = 95\ \%.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Erokhin, M.N. Assessing the relative interchangeability in joints with preload / Erokhin M.N., Leonov O.A., Shkaruba N.Z., Kataev Y.V., Vergazova Y.G. //Russian Engineering Research. 2020. V. 40. № 6. P. 469-472.

2. Erokhin, M.N. Tightness and leakage in applying reinforced rubber sleeves to shafts // M.N., Erokhin, O.A. Leonov, Yu.V. Kataev., O.M. Melnikov // Russian Engineering Research. 2019. 39(6). P. 459-462.

3. Leonov O.A. Influence of tightening fitting accuracy for resource connection / Leonov O.A., Shkaruba N.Zh. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall., Krasnoyarsk, Russian Federation, 2021. P. 12022.

4. Leonov, O.A. A parametric failure model for the calculation of the fit tolerance of joints with clearance / Leonov O.A., Shkaruba N.Zh. // Journal of Friction and Wear. 2019. 40(4). P. 332-336.

5. Leonov, O.A. Determining the tolerances in fitting for joints with interference / Leonov O.A., Shkaruba N.Zh., Vergazova Yu.G. // Russian Engineering Research. 2019. 39(7). P. 544-547.

6. Leonov, O.A. Development of the management system for metrological assurance of measurements / Leonov O.A., Shkaruba N.Zh. / JOP Conference Series: Metrological Support of Innovative Technologies. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. Krasnoyarsk, Russia, 2020. P. 32010.

7. Leonov, O.A. Improving the selection methodology rational ways to restore parts when repairing machines / Leonov O.A., Shkaruba N.Zh., Vergazova Yu.G., Golinitskiy P.V. // Journal of Physics: Conference Series. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. Krasnoyarsk, Russian Federation, 2020. P. 42057.

8. Leonov, O.A. Influence of measurement error for the results of defection of parts hole-type Leonov O.A., Shkaruba N.Zh. Journal of Physics Conference Se-

ries. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. Krasnoyarsk, Russian Federation, 2020. P. 52054.

9. Leonov, O.A. Measurement risk management method at machine-building enterprises / Leonov O.A., Shkaruba N.Zh., Kataev Yu.V. // Journal of Physics: Conference Series. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. Krasnoyarsk, Russian Federation, 2020. P. 52060.

10. Leonov, O.A. Method for calculating savings from using a more accurate measuring instruments /Leonov O.A., Temasova G.N., Shkaruba N.Zh., Kataev Yu.V., Antonova U.Yu. // JOP Conference Series: Metrological Support of Innovative Technologies. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. Krasnoyarsk, Russia, 2020. P. 32022.

11. Leonov, O.A. Methodology for assessing external losses of repair enterprises of the agro-industrial complex when implementing a quality management system / Leonov O.A., Temasova G.N., Malykha E.F. // Journal of Physics: Conference Series. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. Krasnoyarsk, Russian Federation, 2020. P. 52059.

12. Leonov, O.A. Quality assessment of temperature measurements in incoming inspection of raw meat / Leonov O.A., Shkaruba N.Zh., Cherkasova E.I., Odintsova A.A. // JOP Conference Series: Metrological Support of Innovative Technologies. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. Krasnoyarsk, Russia, 2020. P. 32030.

13. Leonov, O.A. Quality Control in the Machining of Cylinder Liners at Repair Enterprises / O.A. Leonov, N.Z. Shkaruba, Y.G. Vergazova, P.V. Golinitskiy, U.Y. Antonova // Russian Engineering Research. 2020. 40(9). P. 726-731.

14. Leonov, O.A. Theoretical basis of selection of measurement measures in control of linear sizes / Leonov O.A., Shkaruba N.Zh. // Journal of Physics: Conference Series. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of

Scientific and Engineering Associations. Krasnoyarsk, Russian Federation, 2020. P. 52081.

15. Shkaruba, N. Theoretical foundations of the application of intergroup interchangeability of the «piston - cylinder liner» connections in the overhaul of engines / Shkaruba N., Leonov O., Temasova G., Golinitskiy P., Antonova U. // Journal of Physics: Conference Series. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. Krasnoyarsk, Russian Federation, 2020. P. 52065.

16. Белов, В. М. Задания и требования к выполнению курсовой работы по метрологии, стандартизации и квалиметрии: методические рекомендации / В. М. Белов, П. А. Карепин, В. В. Карпузов, А. А. Куликов. - Москва: МГАУ, 1997. - 40 с.

17. Белов, В. М. Курсовое проектирование по метрологии, стандартизации и квалиметрии: учебное пособие / В. М. Белов, А. А. Куликов, П. А. Карепин, В. В. Карпузов, О. А. Леонов. - Москва: МГАУ, 2000. - 136 с.

18. Белов, В. М. Метрология, стандартизация, квалиметрия. Стандартизация норм взаимозаменяемости: учебное пособие / В. М. Белов, А. А. Куликов, П. А. Карепин, В. В. Карпузов, О. А. Леонов. - Москва: МГАУ, 1999.- 140 с

19. Белов, В. М. Сборник задач по метрологии, стандартизации и сертификации: учебное пособие / В. М. Белов, А. А. Куликов, П. А. Карепин, В. В. Карпузов, О. А. Леонов. - Москва: МГАУ, 2001. - 140 с.

20. Белов, В.М. Метрология, стандартизация, квалиметрия. Метрология: учебное пособие / В. М. Белов, А. А. Куликов, П. А. Карепин, В. В. Карпузов, О. А. Леонов, Н. Е. Кисенков. - Москва: МГАУ, 1997. - 109 с.

21. Бондарева Г.И. Затраты на контроль при ремонте двигателей / Бондарева Г.И., Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Темасова Г.Н., Вергазова Ю.Г. // Сельский механизатор. 2021. № 3. С. 24-25.

22. Бондарева Г.И. Основы проектирования операций входного контроля на машиностроительных предприятиях: монография / Бондарева Г.И.,

Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Темасова Г.Н., Вергазова Ю.Г., Черкасова Э.И., Голиницкий П.В., Антонова У.Ю. - Москва, 2020.

23. Бондарева Г.И. Проектирование и анализа качества контрольных процессов на ремонтных предприятиях: монография / Бондарева Г.И., Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Темасова Г.Н., Вергазова Ю.Г., Черкасова Э.И., Голиницкий П.В., Антонова У.Ю. - Москва, 2020.

24. Бондарева, Г. И. Входной контроль и метрологическое обеспечение на предприятиях технического сервиса / О. А. Леонов, Г. И. Бондарева, Н. Ж. Шкаруба // Сельский механизатор. - 2017. - № 4. - С.36-38.

25. Бондарева, Г. И. Влияние погрешности средств измерений на потери при ремонте сельхозтехники / О. А. Леонов, Г. И. Бондарева, Н. Ж. Шкаруба // Механизация и электрификация сельского хозяйства. - 2007. - № 11. - С. 27-29

26. Бондарева, Г. И. Метрология: измерение давления в АПК: учебное пособие / Г. И. Бондарева, О. А. Леонов. - Москва, 2016. - 344 с. - 978-5- 9675-1508-8. ISBN: 9785967515088

27. Бондарева, Г. И. Метрология: измерение массы в АПК: учебное пособие / Г. И. Бондарева, О. А. Леонов. - Москва: Российский научноисследовательский институт информации и технико-экономических исследований по инженерно-техническому обеспечению агропромышленного комплекса, 2014. - 344 с. - 978-5-7367-1025-6. ISBN: 9785736710256

28. Бондарева, Г. И. Применение технико-экономических критериев при выборе средств измерений в ремонтном производстве / О. А. Леонов, Г. И. Бондарева, Н. Ж. Шкаруба // Экономика сельскохозяйственных и перерабатывающих предприятий. - 2008. - № 1. - С. 53-55.

29. Бондарева, Г.И. Оценка внешних потерь на предприятиях технического сервиса в АПК / Бондарева Г.И., Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Темасова Г.Н., Вергазова Ю.Г. // Сельский механизатор. 2020. № 9. С. 34-35.

30. Бондарева, Г.И. Построение современной системы качества на предприятиях технического сервиса / Бондарева Г.И., Леонов О.А. // Сельский механизатор. 2017. № 8. С. 34-35.

31. Бондарева, Г.И. Теоретические основы выбора рациональных способов восстановления деталей / Бондарева Г.И., Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г. // Сельский механизатор. 2019. № 5. С. 38-39.

32. Ерохин М.Н. Научные основы организации системы менеджмента качества на предприятиях тс в АПК: монография / Ерохин М.Н., Леонов О.А., Карпузов В.В., Шкаруба Н.Ж., Темасова Г.Н., Вергазова Ю.Г., Самордин А.Н. - Ставрополь, 2020.

33. Ерохин М.Н. Управление затратами на качество продукции и услуг предприятий ремонтного профиля: монография /Ерохин М.Н., Леонов О.А., Темасова Г.Н., Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г. - Ставрополь, 2020.

34. Ерохин, М.Н. Процентная взаимозаменяемость посадок с натягом / Ерохин М.Н., Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Катаев Ю.В., Вергазова Ю.Г. // Вестник машиностроения. 2020. № 3. С. 41-44.

35. Карпузов, В.В. Выбор средств измерений для входного контроля качества поршней в условиях ремонтного производства / Карпузов В.В., Шкаруба Н.Ж., Сапожников И.И., Антонова У.Ю. // Международный технико-экономический журнал. 2018. № 4. С. 83-89.

36. Леонов О.А., Организация и метрологическое обеспечение входного контроля на предприятиях технического сервиса / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г., Антонова У.Ю. - Иркутск, 2017. 122 с.

37. Леонов О. А. Оценка качества измерительных процессов при производстве полуфабрикатов мяса птиц / О. А. Леонов, Н. Ж. Шкаруба, А. А. Одинцова // Международный технико-экономический журнал. - 2019. - № 2. - С. 33-40.

38. Леонов О.А. Восстановление подшипников скольжения из цветных сплавов комбинированным методом: монография / Леонов О.А., Голиницкий П.В., Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г., Антонова У.Ю. - Ставрополь, 2020.

39. Леонов О.А. Методика оценки качества процессов предприятий технического сервиса / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Темасова Г.Н., Вергазова Ю.Г. //Компетентность. 2021. № 2. С. 32-38.

40. Леонов О.А. Метрология и технические измерения: учебное пособие / О. А. Леонов, Н. Ж. Шкаруба. - Москва: РГАУ-МСХА, 2015. - 239 с. - 978-5-9675-1317-6. ISBN: 9785967513176

41. Леонов О.А. Статистические методы и инструменты контроля качества: учебное пособие / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Темасова Г.Н. - Санкт-Петербург, 2021.

42. Леонов, О. А. Выбор универсальных средств измерений для контроля гильз цилиндров двигателя при селективной сборке/ О. А. Леонов, У. Ю. Антонова // Тракторы и сельхозмашины. - 2017. - № 6. - С. 52-57.

43. Леонов, О. А. Курсовое проектирование по метрологии, стандартизации и сертификации: учебное пособие / О.А. Леонов, Н.Ж. Шкаруба, Г.Н. Темасова. - Москва: МГАУ, 2011. - 120 с.

44. Леонов, О. А. Методика расчета экономии от использования более точного средства измерений при изготовлении и ремонте машин / О. А. Леонов, У. Ю. Антонова // Вестник ФГОУ ВПО МГАУ. - 2018. - № 4 (86). - С. 42-46.

45. Леонов, О. А. Методология оценки издержек на контроль при ремонте машин / О. А. Леонов, Г. Н. Темасова // Инновации в АПК: проблемы и перспективы. - 2019. - № 3 (23). - С. 37-43.

46. Леонов, О. А. Методы и средства измерений: учебное пособие / О. А. Леонов, Н. Ж. Шкаруба. - Москва: МГАУ, 2014. - 256 с.

47. Леонов, О. А. Метрологическое обеспечение контроля гильз цилиндров при ремонте дизелей / О. А. Леонов, Н. Ж. Шкаруба, Ю. Г. Вергазова, У. Ю. Антонова // Вестник Барановичского государственного университета. Серия: Технические науки. - 2018. - № 6. - С. 104-109

48. Леонов, О. А. Метрология и технические измерения: учебное пособие / О. А. Леонов, Н. Ж. Шкаруба. - Москва: РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, 2015. - 239 с.

49. Леонов, О. А. Метрология, стандартизация и сертификация: учебное пособие / О. А. Леонов, В. В. Карпузов, Н. Е. Кисенков, Н.Ж. Шкаруба. -

Москва: Издательство КолосС, 2009. - 568 с. - 978-5-9532-0632-7. ISBN: 9785953206327

50. Леонов, О. А. Общая теория измерений: учебное пособие / О. А. Леонов, Н. Ж. Шкаруба. - Москва: РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, 2017. - 160 с.

51. Леонов, О. А. Стандартизация: учебное пособие / О. А. Леонов, В. В. Карпузов, Г.Н. Темасова. - Москва: МГАУ, 2008. - 158 с.

52. Леонов, О. А. Статистические методы управления качеством: учебное пособие / О. А. Леонов, Г.Н. Темасова. - Санкт-Петербург: Изд-во Лань, 2019 - 144 с. - 978-5-8114-3666-8. ISBN: 9785811436668

53. Леонов, О. А. Технико-экономические основы метрологии, стандартизации и управления качеством: учебное пособие / О. А. Леонов, Г. Н. Темасова, Н. Ж. Шкаруба. - Москва: ФГОУ ВПО МГАУ, 2004. - 235 с.

54. Леонов, О. А. Управление качеством: учебное пособие / О. А. Леонов, Г.Н. Темасова, Ю. Г. Вергазова. - Санкт-Петербург: Изд-во Лань, 2018. - 180 с.

55. Леонов, О. А. Физические основы измерений: учебное пособие / О. А. Леонов, Н. Ж. Шкаруба, Ю. Г. Вергазова, У. Ю. Антонова. - Москва: Изд-во РГАУ-МСХА, 2018. - 162 с.

56. Леонов, О. А. Физические основы измерений: учебное пособие / О. А. Леонов, Н. Ж. Шкаруба, Ю. Г. Вергазова, У. Ю. Антонова. - Москва: Изд-во РГАУ-МСХА, 2018. - 162 с.

57. Леонов, О.А. Внедрение интегрированной системы менеджмента на предприятиях мелиоративного профиля / Леонов О.А., Карпузов В.В., Шкаруба Н.Ж. // Сельский механизатор. 2019. № 10. С. 18-19.

58. Леонов, О.А. Исследование затрат и потерь при контроле шеек коленчатого вала в условиях ремонтного производства / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. // Вестник Федерального Государственного образовательного учреждения ВПО "Московский Государственный Агроинженерный университет им. В.П. Горячкина". - 2013. - №2(58), с. 71-74.

59. Леонов, О.А. Методика выбора средств измерений для мелкосерийного машиностроительного и ремонтного производства АПК: методические рекомендации /Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. - Москва, 2018.

60. Леонов, О.А. Методика расчета эффективности функциониро вания системы менеджмента качества / Леонов О.А., Темасова Г.Н., Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г. // Компетентность. 2020. № 3. С. 26-31.

61. Леонов, О.А. Методология оценки издержек на контроль при ремонте машин / Леонов О.А., Темасова Г.Н. // Инновации в АПК: проблемы и перспективы. 2019. № 3 (23). С. 37-43.

62. Леонов, О.А. Методы и средства измерений: учебник / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Голиницкий П.В., Антонова У.Ю. - Москва, 2020.

63. Леонов, О.А. Методы и средства измерений: учебное пособие / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Голиницкий П.В., Антонова У.Ю. - Москва, 2018.

64. Леонов, О.А. Методы и средства измерений сил, деформаций, напряжений: учебное пособие / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. - Москва, 2009.

65. Леонов, О.А. Методы и средства измерений температуры: методические рекомендации / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. - Москва, 2008.

66. Леонов, О.А. Методы и средства измерений угловой скорости вращения / Леонов О.А., Темасова Г.Н. - Москва, 2009.

67. Леонов, О.А. Методы и средства измерений электрических и тепловых величин: учебное пособие / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. - Москва, 2015.

68. Леонов, О.А. Методы и средства контроля качества обработки гильз цилиндров на ремонтных машиностроительных предприятиях / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г., Голиницкий П.В., Антонова У.Ю. // Вестник машиностроения. 2020. № 6. С. 40-45.

69. Леонов, О.А. Метрологическое обеспечение и обработка результатов измерений электрических величин. методические рекомендации / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. - Москва, 2008.

70. Леонов, О.А. Метрологическое обеспечение контроля гильз цилиндров при ремонте дизелей / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г., Анто-

нова У.Ю. // Вестник Барановичского государственного университета. Серия: Технические науки. 2018. № 6. С. 104-109.

71. Леонов, О.А. Метрология: учебное пособие / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. - Москва, 2019.

72. Леонов, О.А. Модель параметрического отказа для расчета точностных параметров соединения с зазором / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. // Трение и износ. 2019. Т. 40. № 4. С. 424-430.

73. Леонов, О.А. Обеспечение качества ремонта унифицированных соединений сельскохозяйственной техники методами расчета точностных параметров: дис. … доктора техн. наук. - М.: ФГОУ ВПО МГАУ, 2004. - 324 с.

74. Леонов, О.А. Оценка качества измерительных процессов в ремонтном производстве / Леонов О.А., Бондарева Г.И., Шкаруба Н.Ж. // Вестник Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина». 2013. № 2 (58). С. 36-38.

75. Леонов, О.А. Оценка качества сельскохозяйственной техники технико-экономическим методом / Леонов О.А., Темасова Г.Н. // Вестник Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина». 2004. № 1 (6). С. 57-59.

76. Леонов, О.А. Построение системы управления метрологическим обеспечением измерений на ремонтных и машиностроительных предприятиях / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. // Международный технико-экономический журнал. 2018. № 6. С. 69-76.

77. Леонов, О.А. Разработка формы контрольного листка для оценки внутренних потерь при ремонте сельскохозяйственной техники / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Антонова У.Ю., Боголюбова Д.А. // Вестник Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина». 2019. № 1 (89). С. 45-48.

78. Леонов, О.А. Расчет допуска посадки по модели параметрического отказа соединения / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж.// Проблемы машиностроения и автоматизации. 2020. № 4. С. 14-20.

79. Леонов, О.А. Расчет допуска посадки с натягом по модели параметрического отказа / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г. // Вестник машиностроения. 2019. № 4. С. 23-26.

80. Леонов, О.А. Результаты экономической оптимизации выбора средств измерений при контроле качества технологических процессов в ремонтном производстве / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. // Вестник Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина». 2007. № 5 (25). С. 109- 112.

81. Леонов, О.А. Совершенствование методики проведения микрометража и дефектации шеек коленчатых валов /Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. // Вестник Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина». 2007. № 3-1 (23). С. 81- 85.

82. Леонов, О.А. Стандартизация: учебное пособие / Леонов О.А., Карпузов В.В., Темасова Г.Н. - Москва, 2015.

83. Леонов, О.А. Статистические методы управления качеством: учебник / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Темасова Г.Н. - Санкт-Петербург, 2019.

84. Леонов, О.А. Теория и практика оценки погрешностей средств измерений мощности и расхода топлива при ремонте двигателей внутреннего сгорания / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж. // Вестник Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина». 2004. № 1 (6). С. 95-97.

85. Леонов, О.А. Управление качеством: учебник / Леонов О.А., Темасова Г.Н., Вергазова Ю.Г. - Санкт-Петербург, 2019.

86. Леонов, О.А. Управление качеством производственных процессов и систем: учебное пособие / Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г., Голиницкий П.В. - Москва, 2018.

87. Леонов, О.А. Физические основы измерений: учебное пособие /Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г., Антонова У.Ю. - Москва, 2018.

88. Леонов, О.А. Экономика качества, стандартизации и сертификации: учебник / Леонов О.А., Темасова Г.Н., Шкаруба Н.Ж. - Москва, 2019.

89. Темасова, Г.Н. Методы оценки конкурентоспособности продукции / Темасова Г.Н. // Вестник Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина». 2005. № 5. С. 85.

90. Темасова, Г.Н. Организация системы контроля затрат на качество на предприятиях технического сервиса АПК: монография / Темасова Г.Н. - Москва, 2010.

91. Черкасова, Э. И. Анализ и синтез процессов обеспечения качества: учебное пособие / Э. И. Черкасова, П. В. Голиницкий, Ю. Г. Вергазова, У. Ю. Антонова. - Москва: Изд-во РГАУ-МСХА, 2018. - 174 с.

92. Шкаруба Н.Ж Совершенствование методики проведения микрометража и дефектации коленчатых валов // Вестник ФГОУ ВПО МГАУ.- 2007. - № 3. - С. 81-85.

93. Шкаруба Н.Ж. Влияние погрешностей измерения на результаты разбраковки при дефектации деталей машин / Шкаруба Н.Ж. // Тракторы и сельхозмашины. 2016. № 2. С. 41-43.

94. Шкаруба Н.Ж. Метрологическое обеспечение контроля гильз цилиндров при ремонте дизелей / Н. Ж. Шкаруба, Ю. Г. Вергазова, У. Ю. Антонова // Вестник Барановичского государственного университета. Серия: Технические науки. - 2018. - № 6. - С. 104-109.

95. Шкаруба Н.Ж. Метрология: учебное пособие / Н.Ж. Шкаруба. - Москва: ФГОУ ВПО МГАУ, 2007. - 162 с. ISBN: 9785867852108

96. Шкаруба Н.Ж. Результаты экономической оптимизации выбора средств измерений при контроле качества технологических процессов в ремонтном производстве / Н. Ж. Шкаруба // Вестник ФГОУ ВПО МГАУ. - 2007. - № 5 (25). - С. 109-112.

97. Шкаруба Н.Ж. Совершенствование QFD-анализа для оценки качества специальной техники: монография / Шкаруба Н.Ж., Леонов О.А., Темасова Г.Н., Вергазова Ю.Г., Черкасова Э.И., Голиницкий П.В., Антонова У.Ю. - Москва, 2020.

98. Шкаруба Н.Ж. Технико-экономические критерии выбора универсальных средств измерений при ремонте сельскохозяйственной техники: монография / Н. Ж. Шкаруба. - Москва: ФГОУ ВПО МГАУ, 2009. - 118 с. - 978-5-86785-244-3. ISBN: 9785867852443

99. Шкаруба, Н. Ж Расчет затрат на контроль технологических процессов ремонтного производства / Н. Ж. Шкаруба // Вестник ФГОУ ВПО МГАУ. - 2004. - № 5. - С. 75-77.

100. Шкаруба, Н. Ж. Обоснование допускаемой погрешности измерений при контроле отклонений формы и расположения поверхностей деталей / Шкаруба Н. Ж., Леонов О. А. // Вестник машиностроения. 2020. № 12. С. 42-45.

101. Шкаруба, Н.Ж. Аккредитация калибровочных и испытательных лабораторий: учебное пособие / Шкаруба Н.Ж. - Москва, 2020.

102. Шкаруба, Н.Ж. Анализ качества измерительных и контрольных процессов: учебное пособие / Шкаруба Н.Ж. - Москва, 2020.

103. Шкаруба, Н.Ж. Анализ основных элементов системы менеджмента измерений / Шкаруба Н.Ж., Левщанова Е.А. // Международный технико-экономический журнал. - 2014. - №5, с. 41-46.

104. Шкаруба, Н.Ж. Анализ системы технологии контроля качества ремонтного производства / Шкаруба Н.Ж., Вергазова Ю.Г., Рулько И.И. // Сельский механизатор. 2020. № 4. С. 38-39.

105. Шкаруба, Н.Ж. Место и роль метрологической службы в системе менеджмента измерений / Шкаруба Н.Ж., Левщанова Е.А. // Международный научный журнал. 2014. № 6. С. 56-61.

106. Шкаруба, Н.Ж. Метрологическое обеспечение производства: учебное пособие / Шкаруба Н.Ж. Москва, 2017.

107. Шкаруба, Н.Ж. Оценка сходимости и воспроизводимости измерительного процесса при дефектации диаметров шеек коленчатого вала / Шкаруба Н.Ж. // Вестник Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина». 2015. № 1 (65). С. 42-46.

108. Шкаруба, Н.Ж. Разработка комплексной методики выбора средств измерений линейных размеров при ремонте сельскохозяйственной техники: дис. … канд. техн. наук. - М.: ФГОУ ВПО МГАУ, 2006.

109. Шкаруба, Н.Ж. Разработка комплексной методики выбора средств измерений линейных размеров при ремонте сельскохозяйственной техники: автореферат дис. … канд. техн. наук. - М.: ФГОУ ВПО МГАУ, 2006.

110. Шкаруба, Н.Ж. Совершенствование метрологического обеспечения ремонтного производства агропромышленного комплекса: дис. … доктора техн. наук. - М.: Российский государственный аграрный университет-Московская сельскохозяйственная академия им. К.А. Тимирязева, 2019.

111. Шкаруба, Н.Ж. Совершенствование метрологического обеспечения ремонтного производства агропромышленного комплекса: автореферат дис. … доктора техн. наук. - М.: Российский государственный аграрный университет-Московская сельскохозяйственная академия им. К.А. Тимирязева, 2019.

112. Шкаруба, Н.Ж. Современные организационные подходы к метрологическому обеспечению ремонтного производства / Шкаруба Н.Ж. // Вестник Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина». 2013. № 3 (59). С. 41-44.

113. Шкаруба, Н.Ж. Теоретическая метрология / Шкаруба Н.Ж. - Москва, 2016.

114. Шкаруба, Н.Ж. Управление рисками измерительных процессов в ремонтном производстве / Шкаруба Н.Ж. // Международный технико-экономический журнал. 2018. № 6. С. 77-82.

115. Шкаруба Н.Ж. Эффективность метрологических работ: учебное пособие /Леонов О.А., Шкаруба Н.Ж., Темасова Г.Н., Вергазова Ю.Г. - Москва, 2020.

Учебное издание

Шкаруба Нина Жоровна,
Вергазова Юлия Геннадьевна,
Голиницкий Павел Вячеславович,
Антонова Ульяна Юрьевна

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

Издательство «Спутник +»
109428, Москва, Рязанский проспект, д. 8А.
Тел.: (495) 730-47-74, 778-45-60 (с 9.00 до 18.00)
http://www.sputnikplus.ru E-mail: print@sputnikplus.ru
Подписано в печать 18.08.2021. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 10,44. Тираж 500 экз. Заказ 309.
Отпечатано в ООО «Издательство «Спутник +»