

Иноземцев, А.И. Многомерные частно-интегральные уравнения Фредгольма в анизотропных пространствах Лебега: учебное

пособие **МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО**

ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ -

МСХА имени К.А. ТИМИРЯЗЕВА

А.И. Иноземцев

**МНОГОМЕРНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА**

Учебное пособие

Москва

РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева

2025

УДК 517.518

ББК

22.161.67

И 67

Рецензенты:

О.Л. Шеметкова

кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики высшей школы кибертехнологий, математики и статистики ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова»

Н.А. Коноплин

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики института мелиорации, водного хозяйства и строительства имени А.Н. Костякова ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева»

И Иноземцев, А.И. Многомерные частно-интегральные операторы в анизотропных пространствах Лебега: учебное пособие/ А.И. Иноземцев; Российский государственный аграрный университет-МСХА имени К.А. Тимирязева. — Москва: РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева, 2025. — 78 с. — Текст: электронный.

ISBN 978-5-9675-2061-7

DOI: 10.26897/978-5-9675-2061-7-78

Учебное пособие содержит основные понятия функционального анализа и включает в себя систематическое изложение теории частно-интегральных и линейных частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега и в пространствах непрерывных функций.

Учебное пособие адресовано бакалаврам по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии», научным работникам, аспирантам и студентам, экономических и технических направлений, интересующихся функциональным и математическим анализом.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института экономики и управления АПК РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, протокол № 1 от 30 августа 2024 г.

Inozemtsev, A.I. Multidimensional partial integral operators in anisotropic Lebesgue spaces: textbook/ A.I. Inozemtsev; Russian State Agrarian University-Moscow State Agricultural Academy named after K.A. Timiryazev. — Moscow: RSAU-MTAA named after K. A. Timiryazev, 2025. — 78 p. — Text: electronic.

The textbook contains the basic concepts of functional analysis and includes a systematic presentation of the theory of partial integral and linear partial integral operators in anisotropic Lebesgue spaces and in spaces of continuous functions.

The textbook is addressed to bachelors in the direction 09.03.02 "Information systems and technologies", researchers, postgraduates and students, economic and technical directions interested in the theory of functional and mathematical analysis.

© Иноземцев А.И., 2025

© ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени

К.А. Тимирязева, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА I. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА	7
1 Некоторые понятия теории множеств	7
2 Топологические пространства	11
3 Метрические пространства	14
4 Пространства с мерой. Интеграл Лебега	16
5 Линейные пространства	19
6 Нормированные пространства	21
7 Квазинормированные пространства	22
8 Гильбертовы пространства	23
9 Линейные отображения	25
ГЛАВА II. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА	28
10 Примеры функциональных пространств	28
11 Пространства Лебега	37
12 Анизотропные пространства Лебега	40
13 Квазинормированные пространства	47
ГЛАВА III. ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В АНИ- ЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА	53
14 Частно-интегральные операторы	53

15	Частно-интегральные операторы в пространствах Лебега	56
16	Достаточные условия ограниченности частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега	59
17	Достаточные условия ограниченности линейных частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега	63
 ГЛАВА IV. ЛИНЕЙНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ		 67
18	Достаточные условия действия	67
19	Алгебра частно-интегральных операторов	71
20	Операторы Вольтерра с многомерными частно-интегральными операторами в $C(D)$	74
 ЛИТЕРАТУРА		 76

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит основы теории частно-интегральных и линейных частно-интегральных операторов вида

$$K_{\alpha}u(x) = \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}(x, t_{\alpha}) u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha}) dt_{\alpha}, \quad (1)$$

$$K = \sum_{\alpha} K_{\alpha} \quad (2)$$

соответственно, в различных функциональных пространствах, к которым приводятся некоторые задачи математической физики.

Характерная особенность этого уравнения связана с интегрированием неизвестной функции $u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha})$ под знаком интеграла не по всем, а по части переменных. В (1) $x \in R_n$, α — мультииндекс, состоящий из элементов одного из 2^n подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Операторы (1) и (2) — не интегральные и не компактные даже в случае непрерывного ядра $k_{\alpha}(x, t_{\alpha})$. Поэтому уравнения, содержащие операторы (1) и (2) существенно отличаются от обычных интегральных уравнений. Интегральный оператор

$$Iu(x) = \int_D k(x, t) u(t) dt$$

с ядром $k(x, t)$ является частным случаем частно-интегрального оператора (1) при $\alpha = (1, 2, \dots, n)$, $(\bar{\alpha} = \emptyset)$ т.е.

$$K_{(1,2,\dots,n)}u(x) = \int_D k_{(1,2,\dots,n)}(x, t) u(t) dt,$$

где $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — свободные от интегрирования переменные, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ — переменные интегрирования. Линейные и нелинейные операторы и уравнения с

частными интегралами изучались в монографиях [7], [8], [10], [11], [17], в этих же книгах содержится и библиография работ по теории операторов и уравнений с частными интегралами.

В учебном пособии изучаются: критерии и достаточные условия действия операторов в пространстве функций. Установленные свойства операторов применяются к исследованию линейных интегральных уравнений с частными интегралами, в частности, к изучению интегрального оператора (1) .

Учебное пособие разделено на 20 параграфов, объединенных в четыре главы.

Глава 1 начинается с основ теории функционального анализа и функций действительного переменного. Приведены основные понятия, определения и теоремы. В главе 2 приведены примеры двух основных классов функциональных пространств: пространства Лебега и анизотропные пространства Лебега, а так же пространство непрерывных функций как подкласс пространства существенно ограниченных функций. Основное содержание третьей главы связано с исследованием частно-интегральных и линейных частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега. Глава 4 посвящена исследованию линейных частно-интегральных операторов в пространствах непрерывных функций $C(D)$.

Автор надеется, что данное учебное пособие будет полезным научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов, интересующимся функциональным и математическим анализом, интегральными уравнениями и их приложениями.

ГЛАВА I

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. Некоторые понятия теории множеств

Определение 1.1.1. Множеством называется любая совокупность объектов произвольной природы.

Множества бывают конечные $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, содержащие конечное число объектов ($a_i \in A, i = \overline{1, n}$) и бесконечные $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, количество объектов которых неограниченно ($b_j \in B, j = 1, 2, \dots$). Мощностью конечного множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, называется количество элементов этого множества $|A| = n$. Мощности бесконечных множеств сравниваются с мощностью наименьшего бесконечного множества $N = \{1, 2, \dots\}$, $|N| = \aleph_0$. Бесконечные множества могут быть счетными ($N, Z, Q, 2Z, \dots$) мощность которых равна $\aleph_0$ и несчетными ($I, R, C, \dots$) мощность которых называется континуум и равна $c = 2^{\aleph_0}$. Пустым множеством называется множество не содержащее ни одного элемента $\emptyset$, универсальным множеством называется такое множество, которое содержит все **исследуемые** объекты U .

Основными операциями, которые можно выполнять над множествами, являются:

1. объединение $\bigcup_{i=1}^n A_i = B$ — множество, содержащее все элементы множеств $A_i, i = \overline{1, n}$;

2. пересечение $\bigcap_{i=1}^n A_i = B$ — множество, состоящее из элементов, содержащихся во всех множествах $A_i, i = \overline{1, n}$;

3. разность $A \setminus B = C$ — множество, содержащее элементы мно-

жества A без элементов множества B ;

4. дополнением множества A называется множество $\bar{A}$ элементов $U \setminus A$ ($A \setminus B = A \cap \bar{B}$);

5. декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = B$ множество упорядоченных наборов n элементов по одному из каждого множества $B = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}$.

Определение 1.1.2. Отображением множества X на Y ($f: X \rightarrow Y$) называется любое соответствие элементам множества X элементов множества Y .

Множество X называется областью определения, а множество Y — областью значений отображения f . Образом отображения f называется множество $\text{Im}f = \{y = f(x) \mid x \in X\} = f(X) \subset Y$. Прообразом элемента $b \in B$ при отображении f называется множество $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Прообразом отображения f называется множество $f^{-1}(Y_0) = \bigcup_{y \in Y_0 \subset Y} f^{-1}(y)$.

Классификация отображений:

1. по способу отображения: инъективные, сюръективные и биективные (взаимно однозначные);
2. по типу отображаемых множеств: функция, функционал и оператор.

Определение 1.1.3. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется инъективным, если для всех $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Определение 1.1.4. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется сюръективным, если $\text{Im}f = Y$.

Определение 1.1.5. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется биективным, если оно инъективно и сюръективно.

Определение 1.1.6. Отображение $f : X \rightarrow Y$ числового множества X в числовое множество Y называется **функцией**.

Определение 1.1.7. Отображение $f : X \rightarrow Y$ множества элементов произвольной природы X в числовое множество Y называется **функционалом**.

Определение 1.1.8. Отображение $f : X \rightarrow Y$ множества элементов произвольной природы X в множество элементов произвольной природы Y называется **оператором**.

Любая функция является функционалом, любой функционал — оператором, т.е. понятие оператора более широкое.

На множестве A может быть определено некоторое отношение, представляющее собой совокупность ω упорядоченных пар (x, y) элементов из A , т.е. $x\omega y \Leftrightarrow (x, y) \in \omega$. Примеры отношений: $=, \leq, <, \subset, \subseteq, \equiv, \sim$.

Свойства отношений:

1. рефлексивность $a\omega a$;
2. антирефлексивность $\overline{a\omega a}$;
3. симметричность $a\omega b \Rightarrow b\omega a$;
4. антисимметричность $a\omega b \wedge b\omega a \Rightarrow a = b$;
5. асимметричность $a\omega b \Rightarrow \overline{b\omega a}$;
6. транзитивность $a\omega b \wedge b\omega c \Rightarrow a\omega c$;
7. связность $a \neq b \Rightarrow a\omega b \vee b\omega a$.

Виды отношений:

1. отношение эквивалентности (выполняются свойства: рефлексивность, симметричность, транзитивность);
2. отношение предпорядка (рефлексивность, транзитивность);
3. отношение частичного порядка (рефлексивность, транзитивность, антисимметричность);
4. отношение строгого порядка (антирефлексивность, транзитивность, антисимметричность);
5. отношение линейного порядка (связность, рефлексивность, антисимметричность).

Вещественный, комплексный и функциональный анализ использует различные виды множеств, но чаще используются расширенная область вещественных или комплексных чисел ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ с присоединенными символами $-\infty$, $+\infty$ или ∞ соответственно). Если A — некоторое подмножество частично упорядоченного множества M , то его мажорантой называется такой элемент $x \in M$, что $a \leq x$ для всех $a \in A$. Мажоранта x множества A называется его верхней гранью, если она является наименьшей из всех мажорант и обозначается $x = \sup A$. Если мажоранты не существует, то в качестве верхней грани A принимается $+\infty$. Нижней гранью A называется наибольшая из всех минорант (c такое, что $a \geq c$ для всех $a \in A$) и обозначается $c = \inf A$. Если миноранты множества не существует, то в качестве нижней грани A принимается $-\infty$. Причем $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$. Если A — бесконечное множество вещественных чисел, то через $\overline{\lim} A$ обозначается нижняя грань всех таких чисел b , что лишь конечное число чисел из A превосходит b , аналогично $\underline{\lim} A$ обозначается верхняя грань всех таких

чисел c , что лишь конечное число чисел из A меньше c . Элемент $x \in A$ называется максимальным, если из $x \leq y$ вытекает $y \leq x$. Каждое частично упорядоченное множество содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество (Хаусдорф). Если каждое линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества $(M; \leq)$ имеет мажоранту, то в M существует максимальный элемент (Цорн). Каждое множество может быть вполне упорядочено (Цермело).

§2. Топологические пространства

Определение 1.2.1. Топологическим пространством называется множество X в котором выделена система множеств S , которые называются открытыми, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\emptyset \subset S, X \subset S$;
2. если $A_i \subset S, i = 1, 2, \dots$, то $\bigcup_i A_i \subset S$ (т.е. объединение любого числа открытых множеств — есть открытое множество);
3. если $A_1, A_2 \subset S$, то $A_1 \cap A_2 \subset S$ (т.е. пересечение конечного числа открытых множеств — есть открытое множество).

Если множество A — открыто т.е. $A \subset S$, то $B = X \setminus A$ — замкнуто. Система замкнутых множеств T пространства, в котором введена топология S удовлетворяет условиям:

1. $\emptyset \subset T, X \subset T$;
2. если $B_i \subset T, i = 1, 2, \dots$, то $\bigcap_i B_i \subset T$ (т.е. пересечение любого числа замкнутых множеств — есть замкнутое множество);

3. если $B_1, B_2 \subset T$, то $B_1 \cup B_2 \subset B$ (т.е. объединение конечного числа замкнутых множеств — есть замкнутое множество).

Направление (некоторое бесконечное множество) элементов $\{x_i\}$ топологического пространства X сходится к $x \in X$ ($\lim_i x_i = x$) если любая окрестность точки x содержит бесконечное множество элементов направления $\{x_i\}$, x называется пределом направления $\{x_i\}$. Если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку направления $\{x_i\}$, то точка x называется предельной точкой направления. Если для любого направления $\{x_i\} \subset F$ сходящегося к x в топологическом пространстве X , предел $x \in F$, то F — замкнутое множество. Единственность предела направления в топологическом пространстве X обеспечивает его хаусдорфовость, т.е. для любых двух точек $x, y \in X$ существуют их окрестности U_x и U_y такие, что $U_x \cap U_y = \emptyset$. Вместо понятия **направления** в топологическом пространстве X можно использовать понятие **последовательности** если любая точка пространства X обладает счетной фундаментальной системой окрестностей.

Свойства топологических пространств:

1. множество, состоящее из единственной точки, замкнуто;
2. у любых двух несовпадающих точек x и y существует непересекающиеся окрестности;
3. для каждого замкнутого множества A и произвольной точки $x \notin A$ существуют непересекающиеся окрестности;
4. у любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют непересекающиеся окрестности.

Виды топологических пространств:

1. хаусдорфово, если выполняются свойства 1 и 2;
2. регулярное, если выполняются свойства 1 и 3;
3. нормальное, если выполняются свойства 1 и 4.

Если существует биективное отображение открытых множеств одного топологического пространства X в другое топологическое пространство Y , то эти пространства называются гомеоморфными. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества $E \subset X$, если существует такое открытое множество $A \subset X$, что $x \in A \subset E$. Любое множество топологического пространства X в котором точка x является внутренней, называется окрестностью этой точки A_x . Точка x топологического пространства X называется точкой прикосновения множества $E \subset X$, если для любой окрестности этой точки $A_x \cap E \neq \emptyset$. Если точка x — точка прикосновения множества $E \subset X$ и $|A_x \cap E| = \aleph_0$ или c , то x — предельная точка множества E . Множество всех точек прикосновения множества E называется его замыканием и обозначается $\bar{E}$.

Одним из важных свойств топологических пространств является свойство компактности.

Определение 1.2.2. Топологическое пространство X называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами $\bigcup_i A_i = X$ можно выбрать конечное подпокрытие $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$.

Топологическое пространство X является компактным, тогда и только тогда, когда каждое направление в X имеет предельную точку. Множество $K \subset X$ называется компактным, если из любой последовательности $\{x_n\}$ точек из $x_n \in K$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность. Если предел каждой из этой

последовательности принадлежит K , то множество K называется бикompактным или компактным в себе.

Свойства бикompактных пространств:

1. для того чтобы топологическое пространство было бикompактным, необходимо и достаточно, чтобы каждое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имело непустое пересечение;
2. замкнутое подмножество бикompактного пространства бикompактно;
3. образ бикompактного пространства при непрерывном отображении бикompактен;
4. бикompактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто;
5. непрерывное взаимно однозначное отображение бикompактного пространства в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом;
6. бикompактное хаусдорфово пространство нормально;
7. вещественная непрерывная функция, заданная на бикompактном пространстве, достигает своих верхней и нижней граней.

Одним из классов топологических пространств являются метрические пространства.

§3. Метрические пространства

Определение 1.3.1. Множество X называется метрическим пространством, если каждой паре элементов $x, y \in X$ поставле-

но в соответствие неотрицательное действительное число $\rho_X(x, y)$ (расстояние между элементами x и y) удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам метрики):

1. $\rho_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
2. $\rho_X(x, y) = \rho_X(y, x)$ (аксиома симметрии);
3. $\rho_X(x, y) \leq \rho_X(x, z) + \rho_X(z, y)$ (аксиома треугольника).

Шаром $B_r(x_0)$ (или замкнутым шаром $\bar{B}_r(x_0)$) с центром в точке x_0 и радиусом r называется множество точек $x \in X$ таких, что $\rho_X(x, x_0) < r$ ($\rho_X(x, x_0) \leq r$). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, тогда совокупность множеств $B_{1/n}(x)$ образует базис множества X . $\rho_X(x, y)$ — непрерывное отображение своих аргументов, т.е. $x_n \rightarrow x_0$ и $y_n \rightarrow y_0$ следует $\rho_X(x_n, y_n) \rightarrow \rho_X(x_0, y_0)$. Метрическое пространство — хаусдорфово, нормально.

Если топология некоторого пространства порождает метрика, то это пространство называется метризуемым. Не все топологические пространства метризуемы. Одна и та же топология может порождаться разными метриками.

Определение 1.3.2. Последовательность элементов $\{x_n\}$ метрического пространства X называется фундаментальной (или сходящейся в себе) если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_0(\varepsilon)$ такое, что для любых $n, m > N_0(\varepsilon)$ следует $\rho_X(x_n, x_m) < \varepsilon$.

В метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Метрическое пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$. Любая сходящаяся последовательность полного пространства является фундаментальной.

Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in D \subset X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \in D$ из $\rho_X(x, x_0) < \delta$ следует $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Отображение f называется непрерывным на D , если оно непрерывно в каждой точке этого множества. Два метрических пространства X и Y называются изометричными, если между их элементами существует биекция, сохраняющая расстояния. Пространство X называется сепарабельным, если в нем существует счетное плотное подмножество ($\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}[x]$ в $C[a, b]$ и др.). Не все метрические пространства сепарабельны. Компактное метрическое пространство полно и сепарабельно.

§4. Пространства с мерой. Интеграл Лебега

Определение 1.4.1. Алгеброй Σ множества T , называется множество его подмножеств удовлетворяющих условиям:

1. для любых $A, B \in \Sigma$ следует $A \cup B \in \Sigma$;
2. для любого $A \in \Sigma$ следует $\bar{A} = T \setminus A \in \Sigma$.

Из этих условий следует, что объединение и пересечение конечного числа подмножеств — снова подмножество T , причем $\emptyset \in \Sigma$, $T \in \Sigma$. Алгебра Σ называется σ -алгеброй, если из $A_n \in \Sigma$ ($n \in \mathbb{N}$), следует $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$, и как следствие $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Определение 1.4.2. Функция $\varphi: \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$ называется аддитивной функцией множества, если

$$\varphi \left(\bigcup_{n=1}^k A_n \right) = \sum_{n=1}^k \varphi(A_n),$$

и счетно-аддитивной, если

$$\varphi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Функция φ — неотрицательна, если для любого $A \in \Sigma$, следует $\varphi(A) \geq 0$. $\varphi(\emptyset) = 0$. Неотрицательная счетно-аддитивная функция множества μ , заданная на Σ называется мерой. Мера называется конечной, если $\mu(T) < \infty$; σ -конечной, если $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \Sigma$, $\mu(A_n) < \infty$; полной, если $A \subset B \in \Sigma$, $\mu(B) = 0$, тогда $A \in \Sigma$, $\mu(A) = 0$.

Множества из σ -алгебры Σ называются измеримыми. Вещественная функция $f(t)$ называется измеримой относительно Σ , если для любого числа $c \in \mathbb{R}$ измеримы множества $\{t \in T : f(t) > c\}$, $\{t \in T : f(t) < c\}$, $\{t \in T : f(t) \geq c\}$, $\{t \in T : f(t) \leq c\}$. Функция вида $y(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i}(t)$ называется измеримой конечнозначной функцией относительно Σ . Для любой измеримой функции $f(t)$ существует последовательность конечнозначных функций $\{f_n\}$ такая, что для любого $t \in T$, $f_n(t) \rightarrow f(t)$, $|f_n(t)| \leq |f(t)|$. Класс измеримых функций $f(t)$, которым сопоставляется некоторое конечное число (интеграл Радона) $\int_T f(t) d\varphi(t)$ называется классом суммируемых функций по функции φ . Отличие интеграла Радона от Лебега заключается в том, что в интеграле Радона (Лебега-Стилтьеса) интегрирование производится не по мере, а по произвольной счетно-аддитивной функции множества, которая может принимать и отрицательные значения. Некоторое свойство выполняется почти всюду, если оно выполняется всюду кроме, может быть, множества, мера которого равна нулю. Функции $f(t)$ и $g(t)$ эквивалентны, если они равны почти всюду.

ду, т.е. $\mu(\{t \in T: f(t) \neq g(t)\}) = 0$. Последовательность измеримых функций $f_n(t)$ почти всюду сходится к функции $f(t)$, если $\mu(\{t: f_n(t) \not\rightarrow f(t)\}) = 0$. Последовательность измеримых функций $f_n(t)$ сходится по мере μ к измеримой функции $f(t)$ на множестве $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$, если $\mu(\{t \in A: |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\}) = 0$, $n \rightarrow \infty$. Если последовательность сходится почти всюду, то она сходится и по мере, а если сходится по мере, то существует подпоследовательность, которая сходится почти всюду.

Пусть $y(t)$ — конечнозначная функция, тогда ее интегралом Лебега называется число

$$\int_T y(t) d\mu(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i}(t).$$

Интегралом Лебега измеримой неотрицательной функции $f(t)$ относительно меры μ называется число

$$\int_T f(t) d\mu(t) = \sup_{f_s(t)} \int_T f_s(t) d\mu(t),$$

где $\{f_s(t)\}$ — все конечнозначные функции, такие что $f_s(t) \leq f(t)$.

Если функция $f(t)$ произвольного знака, то ее можно представить

в виде $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$; (или $\int_T f(t) d\mu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n(t) d\mu(t)$, где

$\{f_n(t)\}$ — последовательность конечнозначных функций, сходящихся по мере к функции $f(t)$.) Интеграл Лебега можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_T f(t) d\mu(t) &= \sup_{A_i} \left(\sum_i \inf(f(A_i)) \mu(A_i) \right), \\ \int_T f(t) d\mu(t) &= \inf_{B_j} \left(\sum_j \sup(f(B_j)) \mu(B_j) \right), \end{aligned}$$

где $\{A_i\}_{i=1}^n \in T$ — всевозможные конечные разбиения множества T , B_j — всевозможные конечные покрытия множества T .

Пусть $A \subset (S, \Sigma_S, \nu)$, $B \subset (T, \Sigma_T, \mu)$, тогда произведением мер ν и μ называется мера λ такая, что $\lambda(A \times B) = \nu(A)\mu(B)$. Для суммируемой функции $f(s, t)$ относительно меры λ выполняется равенство

$$\int_{S \times T} f(s, t) d\lambda(s, t) = \int_S \int_T f(s, t) d\mu(t) d\nu(s) \quad (\text{теорема Фубини}).$$

§5. Линейные пространства

Линейным пространством над полем P называется множество элементов V удовлетворяющих основной группе алгебраических законов:

1. для любых $a \in V$ и $b \in V$, существует и единственный элемент $a + b \in V$ (замкнутость операции сложения);
2. для любых $a, b, c \in V$ выполняется $(a + b) + c = a + (b + c)$ (закон ассоциативности сложения);
3. для любого $a \in V$, существует (и единственный) элемент $0 \in V$, что $a + 0 = a$ (нейтральный элемент по операции сложения);
4. для любого $a \in V$, существует (и единственный) элемент $\tilde{a} \in V$, что $a + \tilde{a} = 0$ (обратный элемент);
5. для любых $a, b \in V$ выполняется $a + b = b + a$ (закон коммутативности сложения);
6. для любого $a \in V$ и любого $\lambda \in P$, существует и единственный элемент $\lambda a \in V$ (замкнутость операции умножения на число);
7. для любого $a \in V$ и любых $\lambda, \mu \in P$, выполняется равенство $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a = \mu(\lambda)a$ (ассоциативность умножения на число);

8. для любого $a \in V$ выполняется $1 \cdot a = a$;
9. для любого $a \in V$ и любых $\lambda, \mu \in P$, выполняется равенство $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);
10. для любого $\lambda \in P$ и любых $a, b \in V$, выполняется равенство $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Свойства 1)-6) называется аксиомами линейного пространства V , 8)-10) — свойства операций. Линейные пространства могут состоять из математических объектов различной природы (векторы, матрицы, полиномы, функции и т.д.).

Классификация линейных пространств:

1. по размерности пространства: конечномерные и бесконечномерные;
2. по числовому полю P над которым берется пространство V : вещественное $P = \mathbb{R}$ и комплексное $P = \mathbb{C}$.

Определение 1.5.1. Система элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in P$ не все равные нулю одновременно, такие что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$. Если же данное равенство выполняется только в случае нулевых коэффициентов, то элементы называются линейно независимыми.

Свойства линейной зависимости:

1. система $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из элементов системы линейно выражается через остальные элементы (т.е. является их линейной ком-

бинацией), т.е. существуют числа $\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n \in P$ что выполняется равенство $a_i = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{i-1} a_{i-1} + \beta_{i+1} a_{i+1} + \dots + \beta_n a_n$;

2. если система $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ содержит нулевой элемент или два одинаковых элемента, то система линейно зависима;
3. если некоторая подсистема системы элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ линейно зависима, то и вся система линейно зависима;
4. если вся система линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.

Максимально линейно независимой системой элементов, называется такая система добавление любого элемента к которой обращает ее в линейно зависимую систему. Базисом пространства V называется любая максимально линейно независимая система элементов, через которую можно линейно выразить любой другой элемент данного пространства. Размерностью пространства V ($\dim V$) называется количество элементов в базисе пространства.

§6. Нормированные пространства

Определение 1.6.1. Линейное пространство V называется нормированным, если каждому элементу $x \in V$ поставлено в соответствие действительное число $\|x\|$, которое называется нормой этого числа и удовлетворяет следующим условиям (аксиомам нормы):

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vartheta$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однородность);
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (аксиома треугольника).

Из определения сходимости последовательности в метрических пространствах следует определение сходимости последовательности в нормированных: последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 по норме, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$. Линейное нормированное пространство V называется банаховым пространством (или пространством Банаха, пространством типа В), если оно является полным в смысле сходимости по норме.

Из определения непрерывности отображения в метрических пространствах следует определение непрерывности в нормированных: пусть V_1 и V_2 — нормированные пространства. Отображение $f: V_1 \rightarrow V_2$ называется непрерывным в точке $x_0 \in D \subset V_1$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \in D$ из $\|x - x_0\|_{V_1} < \delta$ следует $\|f(x) - f(x_0)\|_{V_2} < \varepsilon$. Отображение f непрерывно в точке $x_0 \in D \subset V_1$, если для любой последовательности элементов $\{x_n\} \subset D$ сходящейся к x_0 по норме пространства V_1 , соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к элементу $f(x_0)$ по норме пространства V_2 , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Отображение f называется непрерывным на D , если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

§7. Квазинормированные пространства

Определение 1.7.1. Квазинормой на V , называется неотрицательный функционал $\|\cdot\|$, сопоставляющий каждому $x \in V$ число $\|x\| \geq 0$ такое, что

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vartheta$, ϑ — почти всюду нулевая функция;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq c(\|x\| + \|y\|)$.

Квазинорма $\| \cdot \|$ монотонна, если $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$. Квазинорма задает топологию на X с базисом окрестностей вида $\{x \in X : \|x\| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$. При $c = 1$ квазинорма является нормой, где метрика $d(x, y) = \|x - y\|$ определяет топологию.

§8. Гильбертовы пространства

Пусть V — некоторое линейное пространство и x, y — любые два его элемента, тогда скалярным произведением элементов x и y называется функционал $F : (x, y) \rightarrow (x, y) \in P$, где $P = \mathbb{R}$ (евклидово пространство) или $\mathbb{C}$ (унитарное пространство), удовлетворяющий условиям:

1. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2. $(x, y) = (y, x)$, $(x, y) = \overline{(y, x)}$ при $P = \mathbb{C}$;
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

Используя скалярное произведение, можно определить норму в пространстве $V : \|x\| = \sqrt{(x, x)}$, удовлетворяющая всем аксиомам нормы. Отдельно выделим одно из свойств скалярного произведения: неравенство Коши-Буняковского $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Определение 1.8.1. Гильбертовым пространством называется полное нормированное пространство H , норма которого порождена скалярным произведением.

Гильбертово пространство может быть вещественным или комплексным (в зависимости от выбора поля коэффициентов $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), конечно или бесконечно мерным (в зависимости от максимального числа линейно независимых элементов пространства).

Если $(x, y) = 0$ для ненулевых x и y , то эти элементы называются ортогональными $x \perp y$. Если H_1 и H_2 — подпространства гильбертова пространства H и для любых $x \in H_1, y \in H_2$ выполняется равенство $(x, y) = 0$, то подпространства H_1 и H_2 ортогональны $H_1 \perp H_2$. H_2 называется ортогональным дополнением H_1 , если $H_1 \perp H_2, H_1 \cup H_2 = H$.

Свойства ортогональности:

1. $0 \perp x$ для любого x ;
2. $x \perp x$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
3. $x \perp y_i, i = \overline{1, n}$, то $x \perp \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$;
4. $y_n \rightarrow y$ и $x \perp y_n \ (n = 1, 2, \dots)$, тогда $x \perp y$.

Обобщенная теорема Пифагора:

Пусть $x = \sum_i x_i$, где x_i — попарно ортогональные элементы (ортонормальная система элементов), а сумма может быть конечной или бесконечной, тогда $\|x\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ сходится тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2$ сходится.

Пусть пространство H сепарабельно, т.е. в нем существует счетный базис y_i , который ортогонализировать в базис x_i , все элементы которого попарно ортогональны. Пусть $\{x_i\}$ — ортонормальная система. Числа вида $a_i = (x, x_i), i = 1, 2, \dots$ называются коэффициентами Фурье, а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ называется рядом Фурье элемента x .

$s_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ — проекция элемента x на подпространство H_n . Имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \leq \|x\|^2,$$

в котором переходя к пределу $n \rightarrow \infty$ получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \leq \|x\|^2$$

(если имеет знак равенства, то получим равенство Парсеваля или x удовлетворяет условию замкнутости).

§9. Линейные отображения

Пусть X и Y — нормированные пространства.

Определение 1.9.1. Отображение (функция, функционал, оператор) $K : X \rightarrow Y$ называется линейным, если выполняются условия:

1. для любого $x \in X$ и $\lambda \in P$, $K(\lambda x) = \lambda K(x)$ (однородность);
2. для любых $x_1, x_2 \in X$, $K(x_1 + x_2) = K(x_1) + K(x_2)$ (аддитивность).

Эти условия можно заменить одним $K(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha K(x_1) + \beta K(x_2)$.

Частные случаи линейных операторов: $E(x) = 0$ — нулевое отображение, $I(x) = x$ — единичное отображение, $K(x) = \lambda x$ — отображение подобия.

Далее будем рассматривать линейные отображения на примерах линейных операторов.

Линейное оператор $K : X \rightarrow Y$ называется ограниченным, если для любого $x \in X$ существует постоянная C такая, что

$$\|K(x)\|_Y \leq C \|x\|_X.$$

Линейный оператор K непрерывен тогда и только тогда, когда он

ограничен. Число

$$C_0 = \sup_{\|x\|_X=1} \|K(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|K(x)\|_Y$$

называется нормой линейного оператора и обозначается $\|K\|$. Эта норма удовлетворяет всем аксиомам нормы в банаховом пространстве $B(X, Y)$ непрерывных линейных операторов. Ядром линейного оператора $K: X \rightarrow Y$ называется множество $\ker K = \{x \in X : K(x) = 0 \in Y\}$. Размерность ядра называется дефектом оператора. Коядром линейного оператора $K: X \rightarrow Y$, называется фактор-множество $\operatorname{coker} K = Y/(\operatorname{Im} K)$. Оператор называется нетеровым, если его образ замкнут и размерности ядра и коядра конечны, если размерности ядра и коядра конечны и совпадают, то оператор называется фредгольмовым.

Теорема Рисса. Для любого линейного функционала $f(x)$ в гильбертовом пространстве H , существует и единственный элемент $y \in H$ с нормой $\|y\| = \|f\|$ такой, что $f(x) = (x, y)$.

Теорема Хана-Банаха. Пусть $f(x)$ — линейный функционал, с областью определения $\operatorname{Dom}(f) \subset X$, и существует функционал $p(x) \geq 0$ такой, что $|f(x)| \leq p(x)$ при $x \in \operatorname{Dom}(f)$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ при $\lambda \geq 0$, $x, y \in X$. Тогда существует линейный функционал $F(x)$ $\operatorname{Dom}(F) = X$ такой, что $F(x) = f(x)$ при $x \in \operatorname{Dom}(f)$, $|F(x)| \leq p(x)$, $x \in X$.

$F(x)$ — продолжение функционала $f(x)$ на все пространство X , $f(x)$ — сужение функционала $F(x)$ на $\operatorname{Dom}(f)$.

Слабой производной (производной Гато) оператора $K: X \rightarrow Y$ в точке $x_0 \in \operatorname{Dom}(K)$ называется непрерывный линейный оператор $K'(x_0): X \rightarrow Y$ такой, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K(x_0 + \varepsilon x) - K(x_0)}{\varepsilon} = K'(x_0)x.$$

Сильной производной (производной Фреше) оператора $K : X \rightarrow Y$ в точке $x_0 \in \text{Dom}(K)$ называется линейный непрерывный оператор $K'(x_0) : X \rightarrow Y$ удовлетворяющий условию

$$K(x_0 + x) - K(x_0) = K'(x_0)x + \varepsilon(x),$$

где $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon(x)\|}{\|x\|} = 0$. Из дифференцируемости по Фреше оператора K в точке x_0 следует его дифференцируемость по Гато.

Пусть $K : R_n \rightarrow R_m$. Слабой производной отображения K по направлению вектора $e \in R_n$ называется оператор $\frac{\partial K(x)}{\partial e} = \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \frac{K(x + \varepsilon e) - K(x)}{\varepsilon}$. Если e — один из базисных векторов: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$, то производная по направлению e_j называют частной производной $\frac{\partial K(x)}{\partial x_j} = D_j K$.

ГЛАВА II

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§10. Примеры функциональных пространств

1. Пространство $E_n = \{x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство упорядоченных последовательностей чисел над $\mathbb{P}$ с нормой $\|x\| = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}^{1/2}$. Если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то E_n — n -мерное евклидово пространство, если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то E_n — n -мерное унитарное пространство, или n -мерное гильбертово пространство;
2. Пространство $\ell^n = \{x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство последовательностей, где $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ с нормой $\|x\| = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p}^{1/p}$;
3. Пространство $\ell^\infty = \{x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство последовательностей, где $n \in \mathbb{N}$ с нормой $\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|\}$;
4. Пространство $l_p = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$, где $1 \leq p < \infty$, с нормой $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^\infty |\alpha_i|^p}^{1/p}$;
5. Пространство $l_\infty = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup_i |\alpha_i|$;
6. Пространство $c = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых сходящихся последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup_i |\alpha_i|$;

7. Пространство $c_0 = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых сходящихся к нулю последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup_i |\alpha_i|$;
8. Пространство $bv = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = |\alpha_1| + \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \infty$;
9. Пространство $bv_0 = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых сходящихся к нулю последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \infty$;
10. Пространство $bs = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup_n \sum_{i=1}^n \alpha_i < \infty$;
11. Пространство $cs = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ сходится с нормой $\|x\| = \sup_n \sum_{i=1}^n \alpha_i < \infty$;
12. Пространство $B(X, \Sigma)$ равномерных пределов конечных линейных комбинаций характеристических функций множеств из Σ с нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, где X — некоторое множество, Σ — алгебра подмножеств X , f — скалярная функция, определенная на X ;
13. Пространство $B(X)$ состоит из ограниченных линейных скалярных функций, определенных на X с нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$;

14. Пространство $C(X)$ состоит из ограниченных непрерывных скалярных функций, определенных на X с нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Если достигается наибольшая грань, то $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$;
15. Пространство $ba(X, \Sigma)$ состоит из ограниченных аддитивных скалярных функций, определенных на X с нормой $\|\mu\| = v(\mu, X)$, где $v = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$ — полная вариация μ на X , E_i — попарно непересекающиеся множества из Σ , таких, что $E_i \subset X$;
16. Пространство $ca(X, \Sigma)$ состоит из счетно аддитивных скалярных функций, определенных на X с нормой $\|\mu\| = v(\mu, X)$. Σ — σ -алгебра подмножеств X ;
17. Пространство $rca(X)$ состоит из регулярных счетно аддитивных скалярных функций множества, определенных на σ -алгебре борелевских множеств из X с нормой $\|\mu\| = v(\mu, X)$;
18. Пространство $L_p(X, \Sigma, \mu) = L_p(X, \Sigma)$, $v(\mu)$ состоит из определенных на X μ -измеримых скалярных функций f с нормой $\|f\| = \left(\int |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p} < \infty$, где $1 \leq p < \infty$, μ — положительная мера;
19. Пространство $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ состоит из существенно ограниченных относительно μ скалярных функций f с нормой $\|f\| = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$;
20. Пространство $L_p(\rho) = L_p(D; \rho)$ — пространство измеримых на $D \subset \mathbb{R}_n$ функций $f(x)$ для которых $\|f\| = \left(\int_D \rho(x) |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p} < \infty$, где $1 \leq p < \infty$, $\rho(x)$ —

неотрицательная функция (вес). $L_p(\rho)$ — весовое пространство Лебега является банаховым пространством, т.к. $\|f\|_{L_p(\rho)} = \|\rho^{1/p}f\|_{L_p(D)}$. Аналог неравенства Гельдера: $\int_D |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L_p(\rho)} \cdot \|g\|_{L_q(\rho^{1-q})}$;

21. Пространство $H^\lambda = H^\lambda(D)$ содержит функции, удовлетворяющие на D условию Гельдера фиксированного порядка λ (показатель Гельдера): $|f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^\lambda$, $x_1, x_2 \in D$, A — константа. Норма в H^λ при $0 \leq \lambda \leq 1$ определяется равенством $\|f\| = \max_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x_1 \neq x_2 \in D} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\lambda}$, $H^0(D) = C(D)$, $H^1(D)$ — липшицевый класс, при $\lambda > 1$ $H^\lambda = \{f(x) = \text{const}\}$.

Глобальное условие Гельдера (для бесконечного D : $|f(x_1 - x_2)| \leq A \frac{|x_1 - x_2|^\lambda}{(1+|x_1|)^\lambda(1+|x_2|)^\lambda}$). В этом случае норма $\|f\| = \max_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x_1 \neq x_2 \in D} \frac{(1+|x_1|)^\lambda(1+|x_2|)^\lambda |f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\lambda}$. H^λ — не сепарабельное пространство;

22. Пространство функций $h^\lambda = h^\lambda(D) = \{f(x): \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{|x_1 - x_2|^\lambda} = 0\}$;

23. Пространство $H^\lambda(\rho) = H^\lambda(D; \rho)$ — весовое пространство Гельдера, содержит функции $f(x)$ такие, что $\rho(x)f(x) \in H^\lambda(D)$. Функции этого пространства представимы в виде $f(x) = \frac{f(x_0)}{\rho(x)}$, где $f(x_0) \in H^\lambda(D)$. Норма: $\|f\| = \|f_0\|_{H^\lambda}$. $H^\lambda(\rho)$ — не сепарабельное пространство;

24. Пространство $BV(E)$ состоит из всех определенных на E скалярных функций ограниченной вариации с нормой $\|f\| = |f(a+)| + v(f, E)$, где $E = [a, b]$ (или $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b)), $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$.

25. Пространство $NBV(E) \subset BV(E)$ состоит из всех определенных на E скалярных функций ограниченной вариации с нормой $\|f\| = v(f, E)$, для которых при любом $x_0 \in E$, $\lim_{x \rightarrow x_0 + \varepsilon} f(x) = f(x_0)$ и $f(a+) = 0$;
26. Пространство $AC(E) \subset BV(E)$ состоит из всех определенных и абсолютно непрерывных на E скалярных функций ограниченной вариации с нормой $\|f\| = |f(a+)| + v(f, E)$. Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ следует $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$, где (a_i, b_i) , $i = 1, 2, \dots$ — произвольные попарно непересекающиеся подинтервалы E . Класс $AC(E)$ совпадает с классом первообразных интегрируемых по Лебегу функций $f(x) \in AC(E) \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt$, $\int_a^b |\varphi(t)| dt < \infty$.
27. Класс $AC^n(E)$ состоит из непрерывно дифференцируемых на D функций $f(x)$ до порядка $n - 1$, причем $f^{(n-1)}(x) \in AC(E)$;
28. Пространство $C^n(E)$ содержит определенные на E скалярные функции, имеющие n ограниченных непрерывных производных с нормой $\|f\| = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in E} |f^{(i)}(x)|$, где E — замкнутый интервал, $n \in \mathbb{N}$. Если достигается наибольшая грань, то $\|f\| = \max_{x \in E} \sum_{i=1}^n |f^{(i)}(x)|$;
29. Пространство H^λ при $\lambda > 1 : \lambda = m + \sigma$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \sigma \leq 1$, $\|f\|_{H^\lambda} = \|f\|_{C^m} + \|f\|_{H^\sigma}$, где $f(x) \in C^m(D)$ и $f^{(m)}(x) \in H^\sigma(D)$;
30. Пространство $H^{\lambda, k} = H^{\lambda, k}(D)$ содержит функции $f(x)$

для которых $f(x) \in C^m(D)$ и $|f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)| \leq A|h|^\sigma \ln \frac{1}{|h|}^k$, $|h| < 1/2$, $k \in \mathbb{R}_+$, где $\lambda = m + \sigma$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \sigma \leq 1$, с нормой $\|f\|_{H^{\lambda,k}} = \|f\|_{C^m} + \sup_{x, x+h \in D, |h| < 1/2} \frac{|f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)|}{|h|^\sigma \ln \frac{1}{|h|}^k}$;

31. Пространство $H^{\lambda,k} \subset H^{\lambda,k}$ содержит функции $f(x)$, для которых $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)|}{|h|^\sigma \ln \frac{1}{|h|}^k} = 0$, $x+h, x \in D$, $0 < |h| < 1/2$;

32. Пространство $A(D)$ содержит ограниченные и непрерывные на замыкании открытого множества D комплексные функции, которые являются аналитическими с нормой $\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)|$;

33. Пространство AP — линейное пространство непрерывных почти периодических функций вещественного переменного с нормой $\|f\| = \sup_{-\infty < t < +\infty} |f(t)|$. Функция $f(t)$ называется почти периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $L > 0$, что каждый интервал вещественной оси длиной не меньше L содержит такую точку x , что $|f(t) - f(t+x)| < \varepsilon$ при $-\infty < t < \infty$.

34. Гильбертово пространство — линейное векторное пространство V над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, с функционалом $(\cdot, \cdot)$ определенным на $V \times V$, который удовлетворяет свойствам (см. главу I).

Пример в E_n : $(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i$,

Пример в l_2 : $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \bar{\beta}_i$,

Пример в $L_2(X, \Sigma, \mu)$: $(f, g) = \int_X f(x) \bar{g}(x) \mu(dx)$;

35. Пространство $TM(X, \Sigma, \mu)$ состоит из определенных на X вполне измеримых функций f , где μ — положительная мера.

Метрикой в $TM(X, \Sigma, \mu)$ является $\rho(f, g) = |f - g|$, где $|f| = \inf_{\alpha > 0} \{\alpha + \arctg \mu(S(|f| > \alpha))\}$, $S(|f| > \alpha) = \{s \in S : |f(s)| > \alpha\}$;

36. Пространство s состоит из числовых последовательностей $x = \{a_i\}$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, где $|x| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i|}{1+|a_i|}$;

37. Пространство $L_{p, loc}(D)$, где $p \geq 1$ содержит измеримые функции $f(x) \in L_p(K)$, где K — любой компакт в D .

38. Пространство Соболева $W_p^m(D) = \{f(x) \in L_p(D) \mid D^\alpha f \in L_p(D), |\alpha| \leq m\}$, где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ — длина мультииндекса α , $m \in \mathbb{N}$, $p \in [0, \infty]$, $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$.

$W_p^m(D)$ — пространство, образованное пополнением пространства $\{f(x) \in C^m(\Omega) \mid \|f\|_{m,p} < \infty\}$, по норме $\|f\|_{m,p} =$

$\left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$. Пространство $W_p^m(D)$ пол-

но при $1 \leq p \leq \infty$, рефлексивно при $1 < p < \infty$, сепара-

бельно при $1 \leq p < \infty$ и гильбертово при $p = 2$, причем $(u, v) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$.

39. Идеальные пространства

Пусть $M(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций на Ω , где (Ω, Σ, μ) — σ -конечная полная мера. Пространство M линейно, полуупорядоченно $x, y \in M$, $x \leq y$ если $x(t) \leq y(t)$ почти всюду на Ω . Для $x \in M$ считаем $|x| = |x(t)|$. M — полное пространство в

метрике

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} d\mu(t),$$

где $\Omega_n \in \Sigma$, $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$, $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ при $n \neq m$, $\mu(\Omega_n^c) = 0$.

Идеальным пространством (ИП) Ω называется линейное множество X в M такое, что из $x \in X$, $y \in M$, $|y| \leq |x|$ следует $y \in X$.

Носителем функции x называется множество $\text{supp } x = \{t \in \Omega: x(t) \neq 0\}$. Носитель пространства X — это наименьшее измеримое множество, вне которого все функции из X равны нулю. Носители определяются с точностью до множества нулевой меры.

Пусть Ω — носитель пространства X , обозначим $X(\Omega)$. ИП с монотонной квазинормой называется квазинормированным идеальным пространством (КНИП), причем $\|x\| = \| |x| \|$. Топология КНИП метризуема и при $c > 1$. Обычным образом вводятся понятия сходящейся последовательности, последовательности Коши, полноты. Полное КНИП называется квазибанаховым идеальным пространством КБИП.

40. Пространства Орлича

Классом Орлича называют множество

$$L_M^0 = \{x \in M(\Omega, \Sigma, \mu): \int_{\Omega} M(|x(\omega)|) d\mu < +\infty\}, \text{ где } M(u) \text{ — } N\text{-функция, т.е. она четна и удовлетворяет условиям}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{M(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty.$$

Дополнительная к N -функции $M(u)$ определяется равенством $M^*(u) = \sup\{uv - M(v): -\infty < v < +\infty\}$. $M^*(u)$ — N -

функция, причем $M^{**}(u) = M(u)$. Любая N -функция является возрастающей на $[0, \infty)$ и выполняется неравенство Юнга $|uv| \leq M(u) + M^*(v)$. N -функция удовлетворяет Δ_1 условию, если существуют такие постоянные $k > 0$ и $u_0 > 0$, что при $u, v \geq u_0$ выполняется неравенство $M(uv) \leq kM(u)M(v)$; и удовлетворяет Δ_2 условию, если $M(2u) \leq kM(u)$. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной мерой. Класс Орлича линейен, когда выполняется Δ_2 условие, при этом $L_\infty \subset L_M^0$. Для любой функции $x \in L_M^0$ имеет место интегральное неравенство Иенсена

$$M\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} x(\omega) d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} M(x(\omega)) d\mu.$$

Через $L_M = L_M(\Omega)$ обозначим множество классов эквивалентных функций $x \in M(\Omega, \Sigma, \mu)$, для каждой из которых найдется такое число $\lambda = \lambda(x) > 0$, что $\int_{\Omega} M\left(\frac{|x(\omega)|}{\lambda}\right) d\mu < \infty$. L_M — БИП относительно любой из эквивалентных норм: норма Орлича

$$\|x\|_O = \sup \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} M\left(\frac{|x(\omega)|}{\lambda}\right) d\mu < \infty \right\};$$

$$\|x\|_{L_M} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} M\left(\frac{|x(\omega)|}{\lambda}\right) d\mu < \infty \right\};$$

норма Люксембурга

$$\|x\|_L = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} M\left(\frac{|x(\omega)|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1 \right\},$$

причем $\|x\|_L \leq \|x\|_O \leq 2\|x\|_L$. L_M сепарабельно, если N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 условию. Для любой пары функций $u \in L_M$, $v \in L_{M^*}$ справедливо неравенство Гельдера

$$\int_{\Omega} u(\omega)v(\omega) d\mu \leq \|u\|_{L_M} \|v\|_{L_{M^*}}, \text{ т.е. } L_M \subset L_1.$$

кевича $M_\varphi = M_\varphi(\Omega) = \{x: \|x\|_{M_\varphi} = \sup_{D \subset \Omega} \frac{\varphi(\mu(D))}{\mu(D)} \int_D |x(\omega)| d\omega,$

где x измеримая на Ω Φ -функция (неубывающая, определенная на $(0, \infty)$ функция, удовлетворяющая условию $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\varphi(\lambda)} = 0$). Дополнительная для $\varphi \in \Phi$ определяется равенством $\varphi^*(\lambda) = \lambda/\varphi(\lambda) \in \Phi$.

42. Пространство Лоренца — двойственное к пространству Марцинкевича, состоящее из измеримых на Ω функций x с конечной нормой $\|x\|_{\Lambda_\varphi} = \sup\{|(x, y)| : \|y\|_{M_{\varphi^*}} \leq 1\}$. Λ_φ и M_{φ^*} — двойственные друг к другу совершенные БИП.

§11. Пространства Лебега

Пусть $p \in [1, \infty)$, $D = (a, b) \subset \mathbb{R}$, тогда множество $L_p = L_p(D)$ всех измеримых на D функций $f(x)$, для которых $\int_D |f(x)|^p dx < \infty$ является линейным нормированным пространством с нормой $\|f\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ (выполняются все аксиомы линейного пространства и аксиомы нормы).

В случае $p = \infty$, получим $\|f\|_{L_\infty(D)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$, где $\operatorname{ess\,sup} |f(x)| = \inf_N \sup_{x \in D \setminus S} |f(x)|$ — существенный супремум функции $|f(x)|$, где S — множество нулевой меры. Существенным супремумом $\operatorname{ess\,sup}$ или $\operatorname{vrai\,sup}$ функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется нижняя грань множества чисел a , что $f(x) \geq a$, $x \in D$ почти всюду, или $\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{a \in \mathbb{R}: \mu(\{x: f(x) > a\}) = 0\}$. Далее $1 \leq p \leq \infty$ две функции из $L_p(D)$ равны если они равны почти всюду.

Свойства пространства $L_p(D)$

1. неравенство Минковского

$$\|f + g\|_{L_p(D)} \leq \|f\|_{L_p(D)} + \|g\|_{L_p(D)},$$

неравенство треугольника в $L_p(D)$ (знак равенства возможен, если функции f и g линейно зависимы);

2. однородность $\|c \cdot f\|_{L_p(D)} = |c| \cdot \|f\|_{L_p(D)}$;

3. полнота пространства $L_p(D)$:

пусть $f_k \in L_p(D)$ и $\lim_{k,l \rightarrow \infty} \|f_k - f_l\|_{L_p(D)} = 0$, то существует функция $f_* \in L_p(D)$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f_*\|_{L_p(D)} = 0$;

4. неравенство Гельдера

$$\int_D |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L_p(D)} \cdot \|g(x)\|_{L_q(D)},$$

где $f(x) \in L_p(D)$, $g(x) \in L_q(D)$, p и q — сопряженные числа, т.е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (при $p = 0$, $q = \infty$ и наоборот).

Обобщенное неравенство Гельдера

$$\int_D \prod_{i=1}^m f_i(x) dx \leq \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L_{p_i}(D)},$$

где $f_i(x) \in L_{p_i}(D)$, $\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1$.

5. неравенства Кларксона: пусть $f_1, f_2 \in L_p(D)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тогда

1) если $1 < p \leq 2$,

$$\left\| \frac{f_1 + f_2}{2} \right\|_{L_p(D)}^q + \left\| \frac{f_1 - f_2}{2} \right\|_{L_p(D)}^q \leq \frac{1}{2} \|f_1\|_{L_p(D)}^p + \frac{1}{2} \|f_2\|_{L_p(D)}^p, \quad \frac{1}{p-1}$$

2) если $2 \leq p < \infty$,

$$\left\| \frac{f_1 + f_2}{2} \right\|_{L_p(D)}^p + \left\| \frac{f_1 - f_2}{2} \right\|_{L_p(D)}^p \leq \frac{1}{2} \|f_1\|_{L_p(D)}^p + \frac{1}{2} \|f_2\|_{L_p(D)}^p;$$

6. если $1 \leq p_1 < p_2$, то $L_{p_2}(D) \subset L_{p_1}(D)$ и

$$\|f\|_{L_{p_1}(D)} \leq C \cdot \|f\|_{L_{p_2}(D)}, \text{ где } C = (\mu(D))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}.$$

7. теорема Фубини (изменение порядка интегрирования):

пусть $D_1 = (a, b)$, $D_2 = (c, d)$, где $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$ и пусть $f(x, y)$ — измеримая на $D_1 \times D_2$ функция.

Если сходится хотя бы один из интегралов

$$\int_{D_1} dx \int_{D_2} f(x, y) dy, \quad \int_{D_2} dy \int_{D_1} f(x, y) dx, \quad \iint_{D_1 \times D_2} f(x, y) dx dy,$$

то они совпадают.

8. формула Дирихле (частный случай теоремы Фубини):

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

9. обобщенное неравенство Минковского:

$$\left(\int_{D_1} dx \int_{D_2} f(x, y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{D_2} dy \left(\int_{D_1} |f(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

10. непрерывность в целом:

пусть $f(x) \in L_p(D)$, $0 \leq p < \infty$, тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_D |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0.$$

11. класс $C^\infty(D)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в D функций плотен в $L^p(D)$, $0 \leq p < \infty$.

12. предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_D f(x, h) dx = \int_D \lim_{h \rightarrow 0} f(x, h) dx,$$

где существует суммируемая мажоранта $F(x)$ такая, что $|f(x, h)| \leq F(x) \in L^1(D)$;

13. последовательность $\{f_k\} \in L_p(D)$ слабо сходится к $f \in L_p(D)$, если $\int_D f_k \varphi dx = \int_D f \varphi dx$, для любых $\varphi \in L_q(D)$.

Важным подпространством пространства $L_\infty(D)$ является пространство $C(D)$ — пространство равномерно непрерывных на D функций с нормой $\|f\|_{C(D)} = \sup_{x \in D} |f(x)|$. Заметим, что равномерно непрерывная функция будет непрерывной, если D — компакт.

§12. Анизотропные пространства Лебега

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i \geq 1$. Рассмотрим множество измеримых функций $L_{\mathbf{p}}(D)$, где $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$, для которых существует и конечен интеграл

$$\int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \int_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1} dt_1 \dots dt_{n-1} dt_n, \quad \frac{p_1}{p_1} \dots \frac{p_{n-1}}{p_{n-1}} \frac{1}{p_n},$$

где D — параллелепипед в R_n , $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Множество $L_{\mathbf{p}}(D)$ ($1 \leq p \leq \infty$) удовлетворяет всем аксиомам нормы и является полным, т.е. является банаховым функциональным пространством с

нормой $L_{\mathbf{p}}(D) = \dots \dots \|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D_1)} \dots \dots =$

$$\int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \int_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1} dt_1 \dots dt_{n-1} dt_n \quad \frac{p_1}{p_1} \dots \frac{p_{n-1}}{p_{n-1}} \frac{1}{p_n}.$$

Заметим, что при равных компонентах вектора $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (p, p, \dots, p)$ анизотропное пространство обратится в пространство Лебега $L_{\mathbf{p}}(D) = L_p(D)$:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &= \left(\int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} |f(t)|^p dt_1 \dots dt_{n-1} dt_n \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} |f(t)|^p dt_1 \dots dt_{n-1} dt_n \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \int_D |f(t)|^p dt^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_p(D)}. \end{aligned}$$

Для любой измеримой функции $f(x)$ и любого $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \infty$, ($\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$, $\infty = (\infty, \infty, \dots, \infty)$) справедливо равенство

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \sup_{\|g\|_{L_{\mathbf{q}}(D)}=1} \int_D |f(x)g(x)| dx,$$

где $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ — сопряженный для $\mathbf{p}$ мультииндекс, т.е. $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Все рассмотренные ранее свойства пространства $L_p(D)$ справедливы и для анизотропного пространства Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$.

Порядок, в котором берутся нормы в анизотропном пространстве Лебега по отдельным переменным, является существенным так как даже в простейшем случае

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1} dt_1 dt_2^{\frac{p_2}{p_1}} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} |f(t)|^{p_2} dt_1 dt_2^{\frac{p_1}{p_2}},$$

а именно при $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1} dt_1 dt_2^{\frac{p_2}{p_1} \frac{1}{p_2}} \leq \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} |f(t)|^{p_2} dt_1 dt_2^{\frac{p_1}{p_2} \frac{1}{p_1}} \quad (12.1)$$

или при $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $\|f\|_{L_{(p_1, p_2)}(D_1 \times D_2)} \leq \|f\|_{L_{(p_2, p_1)}(D_2 \times D_1)}$.

Рассмотрим ранжирование некоторых компонентов мультииндекса $\mathbf{p}$ и соответствующих перестановок переменных интегрирования, допуская, что координаты аргумента функции неизменны, расположены в произвольном порядке, как и соответствующие этим переменным компоненты мультииндекса $\mathbf{p}$. (в этом принципиальное отличие от подхода Романовского, предполагающего перестановку координат аргумента функции.)

Пусть $D_i = (a_i, b_i) \in R_1$ и $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \in R_n$ — конечный параллелепипед в R_n и пусть мультииндекс $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ состоит из действительных чисел p_i , $1 < p_i < \infty$. Предположим, что $f = f(t) \in L_{\mathbf{p}}(D)$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_0 &= f \\ f_1 &= \int_{D_1} |f|^{p_1} dt_1^{\frac{1}{p_1}} = \int_{D_1} |f_0|^{p_1} dt_1^{\frac{1}{p_1}} \\ f_2 &= \int_{D_2} |f|^{p_2} dt_2^{\frac{1}{p_2}} = \int_{D_2} f_1^{p_2} dt_2^{\frac{1}{p_2}} \\ &\dots \\ f_i &= \int_{D_i} |f|^{p_i} dt_i^{\frac{1}{p_i}} = \int_{D_i} f_{i-1}^{p_i} dt_i^{\frac{1}{p_i}} \end{aligned}$$

Другими словами — любой из уровней полной нормы может определяться наибольшей степенью p_m в наборе чисел $(p_i, p_{i+1}, \dots, p_m)$ при этом исходная L_p -норма функции окажется не больше частично ранжированной нормы.

□ Для любого $m < n$ можем написать полную L_p -норму функции f в виде .

$$f_n = \left(\int_{D_n} \dots \int_{D_{m-1}} f_{m-2}^{p_{m-1}} dt_{m-1} \dots dt_m \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Отметим, что здесь наименьшее $m = 2$ при этом правая часть неравенства (12.2) будет иметь внутренним интегралом выражение

$$f_1 = \left(\int_{D_1} |f_0|^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\int_Q |f|^{p_1} dt \right)^{\frac{1}{p_1}},$$

являющееся первым уровнем полной нормы; но тогда неравенство (12.2) окажется равенством, которое заведомо справедливо и, поэтому, далее считаем, что $m > 2$.

По предположению $1 < p_{m-1} \leq p_m < \infty$. Воспользуемся неравенством (12.1) для соседних уровней $m - 1$ и m . В результате получим

$$\begin{aligned} & \left(\int_{D_n} \dots \int_{D_{m-1}} f_{m-2}^{p_{m-1}} dt_{m-1} \dots dt_m \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq \\ & \leq \left(\int_{D_{m-1}} f_{m-2}^{p_m} dt_m \dots dt_{m-1} \right)^{\frac{1}{p_{m-1}}} \end{aligned}$$

Тогда

$$f_n \leq \int_{D_n} \dots \int_{D_{m-1}} \int_{D_m} f_{m-2}^{p_m} dt_m dt_{m-1} \dots dt_n$$

Как видим, мы поменяли порядок интегрирования по переменным t_{m-1}, t_m в выражении полной нормы f_n . При этом интегрирование по t_m оказалось на уровень ниже т.е. на $(m - 1)$ -ом уровне. А т.к. $p_m = \max\{p_i, p_{i+1}, \dots, p_{m-1}, p_m\}$, то данный процесс последовательной попарной перестановки порядка интегрирования в выражении полной нормы f_n можно продолжить до любого уровня $i < m$, если только известно, что $p_i \leq p_m$. При этом интеграл по переменной t_m окажется на месте i -го интеграла (по переменной t_i):

$$f_n \leq \int_{D_n} \dots \int_{D_m} f_{i-1}^{p_m} dt_i \dots dt_n$$

Таким образом получено неравенство (12.2). ■

Теорема 1.12.1. (о полном ранжировании L_p -нормы) Пусть функция $f = f(t_1, t_2, \dots, t_n) \in L_p(D)$ и $D = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ — конечный параллелепипед в R_n . И пусть $\mathbf{p}^* = (p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_n})$ — мультииндекс, полученный ранжированием мультииндекса $\mathbf{p}$: $p_{\alpha_i} \geq p_{\alpha_{i+1}}$. Тогда

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int_{D_n} \dots \int_{D_1} |f|^{p_1} dt_1 \dots dt_{n-1} dt_n \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq$$

$$\leq \int_{D_{\alpha_n}} \int_{D_{\alpha_{n-1}}} \dots \int_{D_{\alpha_1}} |f|^{\rho_{\alpha_1}} dt_{\alpha_1} \dots dt_{\alpha_{n-1}} dt_{\alpha_n},$$

где $D^* = (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \times \dots \times (a_{\alpha_n}, b_{\alpha_n})$. Т.е.

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|f\|_{L_{\mathbf{p}^*}(D^*)}. \quad (12.3)$$

□ Пусть $\rho_{\alpha_1} = \max\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Тогда из леммы о частичном ранжировании $L_{\mathbf{p}}(D)$ -нормы вытекает неравенство (12.3), где интеграл по t_{α_1} оказывается первым уровнем $L_{\mathbf{p}}(D)$ -нормы функции f . Аналогичное действие производим с интегралами над первым уровнем f_{α_1} полной $L_{\mathbf{p}}(D)$ -нормы. Получим неравенство, где первые два уровня $L_{\mathbf{p}}(D)$ -нормы занимают интегралы по t_{α_1} и t_{α_2} . Продолжая это действие, в конечном итоге получим неравенство (12.3). ■

Неравенство Гельдера для ранжированной $L_{\mathbf{p}}(D)$ -нормы содержит

Теорема 1.12.2. Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i > 1$ и $\mathbf{q}$ сопряженный мультииндекс. И пусть $\varphi \in L_{\mathbf{p}}(D)$ и $\psi \in L_{\mathbf{q}}(D)$. Тогда

$$\int_D |\varphi(t) \psi(t)| dt \leq \|\varphi\|_{L_{\mathbf{p}^*}(D^*)} \|\psi\|_{L_{\mathbf{q}^*}(D^*)}, \quad (12.4)$$

где $\mathbf{p}^*$ — мультииндекс, ранжированный по невозрастанию, а $\mathbf{q}^*$ — мультииндекс, ранжированный по неубыванию.

□ Очевидно

$$\int_D |\varphi(t) \psi(t)| dt = \int_{D^*} |\varphi(t) \psi(t)| dt.$$

Здесь переменные интегрирования в правой части равенства расставлены в соответствии с ранжированием мультииндекса $\mathbf{p}$. Теперь неравенство (12.4) вытекает из неравенства Гельдера для анизотропных норм:

$$\int_{D^*} |\varphi(t) \psi(t)| dt \leq \|\varphi\|_{L_{\mathbf{p}^*}(D^*)} \|\psi\|_{L_{\mathbf{q}^*}(D^*)},$$

При этом, в связи с выполнением условия сопряжения параметров мультииндексов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и сопряжения мультииндексов $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$, получаем два неравенства

$$\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_{\alpha_i}} \geq 0, \quad \frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_{\alpha_i}} \leq 0,$$

из которых следует, что мультииндексы $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$ получены ранжированием мультииндексов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ в противоположных смыслах. ■

§13. Квазинормированные пространства

Пусть $M(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций на Ω , где (Ω, Σ, μ) — σ -конечная полная мера. Пространство M линейно, полуупорядоченно $x, y \in M$, $x \leq y$ если $x(t) \leq y(t)$ почти всюду на Ω . Для $x \in M$ считаем $|x| = |x(t)|$. M — полное пространство в метрике

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} d\mu(t),$$

где $\Omega_n \in \Sigma$, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ при $n \neq m$, $\mu(\Omega_n) < \infty$.

Идеальным пространством (ИП) Ω называется линейное множество X в M такое, что из $x \in X, y \in M, |y| \leq |x|$ следует $y \in X$.

Носителем функции x называется множество $\text{supp } x = \{t \in \Omega: x(t) \neq 0\}$. Носитель пространства X — это наименьшее изме-

римое множество, вне которого все функции из X равны нулю.

Носители определяются с точностью до множества нулевой меры.

Напомним, что квазинормой на V , называется неотрицательный функционал $\|\cdot\|$, сопоставляющий каждому $x \in V$ число $\|x\| \geq 0$ такое, что

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vartheta$, ϑ — почти всюду нулевая функция;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq c(\|x\| + \|y\|)$.

Квазинорма $\|\cdot\|$ монотонна, если $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$. Квазинорма задает топологию на X с базисом окрестностей вида $\{x \in X : \|x\| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$. При $c = 1$ квазинорма является нормой, где метрика $d(x, y) = \|x - y\|$ определяет топологию.

Пусть Ω — носитель пространства X , обозначим $X(\Omega)$. ИП с монотонной квазинормой называется квазинормированным идеальным пространством (КНИП), причем $\|x\| = \||x|\cdot\|$. Топология КНИП метризуема даже при $c > 1$. Обычным образом вводятся понятия сходящейся последовательности, последовательности Коши, полноты. Полное КНИП называется квазибанаховым идеальным пространством КБИП.

Свойства КНИП X

1. сходящаяся по квазинорме к $x \in X$ последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к x и по мере;
2. каждая последовательность Коши $\{x_n\} \subset X$ сходится по мере к функции $x \in M$, т.е. каждое КНИП X непрерывно вложено в пространство M , а каждое ограниченное по квазинорме

множество $E \subset X$ ограничено в линейном топологическом пространстве $\mathbf{M}$;

3. если последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к x по квазинорме, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, неотрицательная функция $r \in X$ и числовая последовательность $\{\varepsilon_k\} \downarrow 0$ такие, что $|x_{n_k} - x| < \varepsilon_k r$;
4. если $0 \leq x_n \uparrow$ — последовательность Коши в X , то $\{x_n\}$ сходится к $x \in X$ по квазинорме и существует $x = \sup x_n \in X$.

Квазинорма в КНИП X порядково непрерывна, если $0 \leq x_n \downarrow \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow 0$; монотонно полна, если $0 \leq x_n \uparrow$ и $\|x_n\| \leq a < \infty \Rightarrow \exists \sup x_n \in X$; порядково полунепрерывна, если $0 \leq x_n \uparrow x \in X \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Если квазинорма порядково непрерывна, то множество $\{y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{E_k} : E_k \in \Sigma, E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j), x_{E_k} \in X, k = 1, 2, \dots\}$ в КНИП X . Если квазинорма монотонно полна в КНИП X , то это КБИП X . Квазинорма порядково полунепрерывна в КНИП X тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $\{x_n\} \in X$, сходящейся по мере к $x \in X$, выполнено неравенство $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$. Единичный шар $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, где X — КНИП с монотонной порядково полунепрерывной квазинормой, замкнут в $\mathbf{M}$, т.е. если последовательность $\{x_n\} \subset B_X$ сходится по мере к $x \in X$, то $x \in B_X$. $L^p([0, 1])$ ($0 < p < 1$) — ненормируемое КБИП с порядково непрерывной, монотонной и порядково полунепрерывной квазинормой.

КНИП X называется почти совершенным если квазинорма порядково полунепрерывна; совершенное, если квазинорма монотонна и порядково полунепрерывна; правильно, если порядково непрерывна; вполне правильно, если порядково непрерывна и монотонна.

Квазинорма абсолютно непрерывна, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{\Omega_n} x\| = 0$ или $\lim_{\mu(D) \rightarrow 0} \|\chi_D x\| = 0$ ($\mu(\Omega) < \infty$, $D \subset \Omega$, $D \in \Sigma$), где $\{\Omega_n\}$ — убывающая последовательность измеримых множеств с пустым пересечением, χ_{Ω_n} — характеристическая функция множества $\Omega_n \subset \Omega$.

Множество

$E \subset X$ абсолютно ограничено, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} \|\chi_{\Omega_n} x\| = 0$ или $\lim_{\mu(D) \rightarrow 0} \sup_{x \in E} \|\chi_D x\| = 0$ ($\mu(\Omega) < \infty$, $D \subset \Omega$, $D \in \Sigma$), где $\{\Omega_n\}$ — убывающая последовательность измеримых множеств с пустым пересечением. В правильном КБИП $X = X(\Omega)$ сходимость $x_n \rightarrow x$ по квазинорме равносильна сходимости $x_n \rightarrow x$ по мере и абсолютной ограниченности множества $\{x_n\}$. Множество E в правильном КБИП X компактно тогда и только тогда, когда оно компактно по мере и абсолютно ограничено.

Пусть $X = X(\Omega)$ и $Y = Y(\Omega)$ — КБИП. $Y/X = \{c: \forall x \in X, cx \in Y, \|c\|_{Y/X} = \sup\{\|cx\|_Y: \|x\| \leq 1\}$, где c — измеримые на Ω функции. Y/X — КБИП. Двойственным к КИП $Z = Z(\Omega)$ пространством называется пространство $Z'(\Omega) =$

$$\|f\|_{Z'} = \sup_{\|z\|_Z \leq 1} |(f, z)| = \int_{\Omega} f(t)z(t) d\mu \quad : \quad \|z\|_Z \leq 1 < \infty.$$

Пусть $u_0(t) \in M(\Omega, \Sigma, \mu)$ — неотрицательная измеримая функция. Пространства $Eu_0 = \{x(t): \|x\|_{Eu_0} = \inf\{\lambda: |x| \leq \lambda u_0\} < \infty\}$, где $x(t)$ — измеримые на Ω функции, и $E'u_0 = \{x(t): \|x\|_{E'u_0} = \int_{\Omega} |x(t)|u_0(t) d\mu\}$ совершенные, двойственные друг к другу пространство, причем $E'u_0$ — правильное.

Операции пересечения и суммы КНИП определяются следующим образом:

$$1. X_1 \cap X_2 = \{x \in X_1 \cap X_2 : \|x\|_{X_1 \cap X_2} = \max\{\|x\|_{X_1}, \|x\|_{X_2}\} < \infty\};$$

$$2. X_1 + X_2 = \{x = x_1 + x_2, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 : \|x\|_{X_1 + X_2} = \inf\{\|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2}\} < \infty\}.$$

Пусть T и S — заданные множества с выделенными в них σ -алгебрами $\Sigma(T)$ и $\Sigma(S)$, на которых заданы полные σ -конечные и счетно-аддитивные меры μ и ν , $\mu \times \nu$ — произведение этих мер, определенное на произведении $\Sigma(T) \times \Sigma(S)$ σ -алгебр $\Sigma(T)$ и $\Sigma(S)$, $M(T \times S)$ — пространство измеримых на $T \times S$ функций. Пусть $X = X(T)$ и $Y = Y(S)$ — КНИП. Пространством со смешанными квазинормами называется пространство $Y[X]$ всех измеримых по совокупности переменных функций $x(t, s)$ на $T \times S$, удовлетворяющих условиям:

$$1. \text{ почти при всех } s \text{ функция } x(\cdot, s) \in X;$$

$$2. \|x(\cdot, s)\|_X \in Y.$$

В $Y[X]$ вводится квазинорма $\|x\|_{Y[X]} = \|\|x(\cdot, s)\|_X\|_Y$. $Y[X]$ — КНИП, т.к. квазинорма монотонна. Пусть $Y(X)$ — пространство ν измеримых вектор-функций $x(s)$ со значениями в X таких, что $x \rightarrow \|x(s)\|_X \in Y$. $\|x\|_{Y(X)} = \|x\|_{Y[X]}$, т.е. $Y(X)$ изометрически вкладывается в $Y[X]$ и совпадает при отождествлении элементов и если X, Y — порядково непрерывны.

Важнейшим примером пространства со смешанными квазинормами является пространство L_p , где $p = (p_1, p_2)$, $(0 < p_1, p_2 \leq \infty)$. Оно состоит из измеримых на $T \times S$ функций $x(t, s)$, для которых

конечна квазинорма $\|x\|_{L_p} = \| \|x(\cdot, s)\|_{L_{p_1}} \|_{L_{p_2}}$, где

$$\|z\|_{L_{p_i}} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |z(\omega)|^{p_i} d\omega \right)^{1/p_i}, & 0 < p_i < \infty \\ \text{ess sup } |z(\omega)|, & p_i = \infty. \end{cases}$$

При $p_1, p_2 \geq 1$ L_p — БИП. Этот случай более подробно рассмотрен в предыдущем параграфе, при $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ в многомерном пространстве, такие пространства называются анизотропными пространствами Лебега. Если хотя бы одно из чисел $p_i < 1$, то L_p — КНИП, топология в котором определяется метрикой

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|_{L_p}^{p_2}, & 0 < p_2 \leq 1, p_1 \geq p_2, \\ \|x - y\|_{L_p}^{p_1}, & 0 < p_2 \leq 1, 0 < p_1 < p_2, \\ \|x - y\|_{L_p}^{p_2}, & 0 < p_1 \leq 1, p_1 \geq p_2 > 0, \\ \|x - y\|_{L_p}^{p_1}, & 0 < p_1 \leq 1, p_1 < p_2. \end{cases}$$

В КНИП L_p квазинорма абсолютна непрерывна и обладает свойствами порядковой непрерывности и монотонности при $0 < p_1, p_2 < \infty$; и не абсолютно непрерывна, но обладает свойствами монотонности и порядковой полунепрерывности, если хотя бы одно $p_i = \infty$. L_p — КБИП т.к. квазинорма монотонна.

ГЛАВА III

ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

§14. Частно-интегральные операторы

Частные интегралы (далее примем обозначение ЧИ) в R_n будем изучать в следующем виде [1, 13, 14, 15]

$$(K^{(m)}u)(x) = \int_{D_\alpha^{(m)}} k_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha, \quad 1 \leq m < n,$$

где t_α переменные интегрирования частного интеграла, $x_{\bar{\alpha}}$ — $(n-m)$ мерный вектор, номера координат которого не совпадают с номерами переменных интегрирования t_α и

$$D_\alpha^{(m)} = D_{\alpha_1}^{(1)} \times \dots \times D_{\alpha_m}^{(1)} = (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \times \dots \times (a_{\alpha_m}, b_{\alpha_m})$$

— m -мерный параллелепипед с гранями параллельными координатным плоскостям.

Вначале рассмотрим самые простые способы определения многомерных линейных частно-интегральных операторов (далее примем сокращения — ЛЧИ-операторов). Начнем с двумерных. Такие операторы определены в [7], в виде суммы операторов

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + K_3,$$

действие каждого из них на функцию $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2)$ определено выражениями

$$K_0 : (K_0 u)(x) = k_0(x) u(x), \tag{14.1}$$

$$K_1 : (K_1 u)(x) = \int_{D_1} k_1(x, t_1) u(t_1, x_2) dt_1, \tag{14.2}$$

$$K_2 : (K_2 u)(x) = \int k_2(x, t_2) u(x_1, t_2) dt_2, \quad (14.3)$$

$$K_3 : (K_{1,2} u)(x) = \int \int_{D_{1,2}}^{D_2} k_{1,2}(x; t_1, t_2) u(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (14.4)$$

где функция $u = u(x)$ определена на прямоугольнике конечных размеров $D_{1,2} = D_1 \times D_2 = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, нижний индекс показывает порядок переменных интегрирования в частном интеграле (вообще говоря, такой порядок может быть различным).

Как видим, здесь оператор K_0 — оператор умножения на функцию (не интегральный, и не оператор с частными интегралами), K_1, K_2 — ЧИ-операторы, K_3 — интегральный оператор, но не ЧИ-оператор.

Теперь приведем пример трехмерного ЛЧИ-оператора. Также как в предыдущем случае в общем виде он представляет собой сумму оператора умножения на функцию, шесть ЧИ-операторов и интегрального оператора:

$$(Ku)(x) = (K_0 u)(x) + (K_1 u)(x) + (K_2 u)(x) + (K_3 u)(x) + \\ + (K_4 u)(x) + (K_5 u)(x) + (K_6 u)(x) + (K_7 u)(x), \quad (14.5)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$, а

$$K_0 : (K_0 u)(x) = k_0(x) u(x),$$

$$K_1 : (K_1 u)(x) = \int k_1(x; t_1) u(t_1, x_2, x_3) dt_1,$$

$$K_2 : (K_2 u)(x) = \int_{D_1}^{D_1^1} k_2(x; t_2) u(x_1, t_2, x_3) dt_2,$$

$$K_3 : (K_3 u)(x) = \int_{D_2}^{D_2^2} k_3(x; t_3) u(x_1, x_2, t_3) dt_3,$$

$$K_4 : (K_{1,2} u)(x) = \int \int_{D_{1,2}}^{D_3^3} k_{1,2}(x; t_1, t_2) u(t_1, t_2, x_3) dt_1 dt_2,$$

$$\begin{aligned}
K_5 : \quad (K_{1,3}u)(x) &= \iint k_{1,3}(x; t_1, t_3) u(t_1, x_2, t_3) dt_1 dt_3, \\
K_6 : \quad (K_{2,3}u)(x) &= \int\limits_{D_{1,\beta}}\int k_{2,3}(x; t_2, t_3) u(x_1, t_2, t_3) dt_2 dt_3, \\
K_7 : \quad (K_{1,2,3}u)(x) &= \int\limits_{D_{1,2,3}}\int\int k_{1,2,3}(x; t) u(t) dt_1 dt_2 dt_3.
\end{aligned}$$

Здесь интегрирование происходит по интервалам

(a_i, b_i) , $i = \{1, 2, 3\}$ и областям

$$D_{1,2,3} = D_1 \times D_2 \times D_3 = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3),$$

$$D_{1,2} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2), D_{1,3} = (a_1, b_1) \times (a_3, b_3), D_{2,3} = (a_2, b_2) \times (a_3, b_3).$$

При этом функция $u=u(x)$ определена на параллелепипеде $D_{1,2,3}^{(3)}$. Как видим, здесь оператор K_0 — не интегральный и не ЧИ, $K_1, K_2, K_3, K_{1,2}, K_{1,3}, K_{2,3}$ — ЧИ-операторы, $K_{1,2,3}$ — интегральный оператор.

В евклидовом пространстве R_n размерности $n > 3$ мы используем следующее определение частного интеграла:

$$(K_\alpha u)(x) = \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha, \quad (14.6)$$

где α — мультииндекс, который включает в себя некоторые m ($0 \leq m \leq n$) натуральных чисел из $1, 2, \dots, n$. $\bar{\alpha}$ — дополняющий до $1, 2, \dots, n$ мультииндекс. Одна из особенностей этого обозначения заключается в следующем. Подстрочечные индексы α и $\bar{\alpha}$ представляют собой наборы номеров переменных, расположенных в порядке возрастания, но в этих наборах возможны пропуски, например $(1, 3, 5, 6, 7, \dots)$. Но при этом координаты вектора $(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$ содержат номера переменных подряд и без пропусков. Например, если $\alpha = 2$, то $(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) = (x_1, t_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$.

ЛЧИ-оператор в R_n , $n > 3$ будет обозначен следующей суммой [16]

$$K = \sum_{\alpha} K_{\alpha}, \quad (14.7)$$

здесь количество слагаемых K_{α} при данном и фиксированном m равно числу сочетаний C_n^m , а размерность мультииндекса α меняется от 1 до числа m . Если размерность m равна n , то соответствующее $\alpha = (1, 2, \dots, n)$, а соответствующий этому индексу оператор представляет собой интегральный оператор

$$(K_{\alpha}u)(x) = (K_{1,2,\dots,n}u)(x) = \int_D k_{1,2,\dots,n}(x; t) u(t) dt.$$

Если размерность m равна 0, то соответствующее $\alpha = \emptyset$, а соответствующий этому индексу оператор представляет собой оператор умножения на функцию

$$(K_{\alpha}u)(x) = (K_0u)(x) = k_0(x) u(x).$$

§15. Частно-интегральные операторы в пространствах Лебега

Вначале ответим на вопрос, каким образом проявляется анизотропность функций при работе с ЧИ [1]. Приведем простой пример на основе частного интеграла по первой переменной в R_2

$$(K_1u)(x) = \int_{D_1} k_1(x; t_1) u(t_1, x_2) dt_1.$$

Применив неравенство Гельдера с показателями $p, q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, получим

$$|(K_1u)(x)| \leq \int_{D_1} |k_1(x; t_1)|^q dt_1^{1/q} \int_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p dt_1^{1/p}.$$

Отсюда

$$\|K_1 u\|_{L_p(D)} \leq \left(\int_D \int_{D_1} |k_1(x; t_1)|^q dt_1 \right)^{p/q} \int_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p dt_1 dx \quad . \quad (1/p)$$

Как видим, если бы функция u не зависела от x_2 (в этом случае это просто интегральный оператор), то мы получили бы нужный результат

$$\|K_1 u\|_{L_p(D)} \leq \|k_1\|_{L_q(D_1; L_p(D_{1,2}))} \|u\|_{L_p(D_1)},$$

в котором от ядра k_1 уже требуется принадлежность анизотропно-му классу Лебега $L_r(D_1, D_{1,2})$ при $r = (q, p)$.

Если же функция u все же зависит от x_2 , то необходимо вновь применить неравенство Гельдера. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|K_1 u\|_{L_p(D)} &= \left(\int_D \int_{D_1} k_1(x; t_1) u(t_1, x_2) dt_1 dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\int_D \int_{D_1} |k_1(x; t_1)|^q dt_1 \right)^{p/q} \int_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p dt_1 dx \quad . \quad (1/p) \end{aligned}$$

Здесь внешний интеграл берется по области $D = D_1 \times D_2$, а Функция u не зависит от x_1 , поэтому, предположив, что двойной интеграл равен повторному (что, вообще говоря, не умоляет общности рассуждений), мы получим

$$\|K_1 u\|_{L_p(D)} \leq \left(\int_{D_2} \int_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p dt_1 dx \right)^{1/p} \times$$

$$\times \int_{D_1} \int_{D_1} |k_1(x; t_1)|^q dt_1 dx_1^{p/q} dx_2^{1/p}.$$

Теперь к внешнему интегралу по D_2 применим неравенство Гельдера с теми же показателями $p, q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. В результате имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|K_1 u\|_{L_p(D)} &\leq \int_{D_2} \int_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p dt_1 dx_2^{p^2/p} \times \\ &\times \int_{D_2} \int_{D_1} \int_{D_1} |k_1(x; t_1)|^q dt_1 dx_1^{p/q} dx_2^{1/pq}. \end{aligned}$$

Определение анизотропной нормой в R_2 , $r = (r_1, r_2)$ следующее

$$\|f\|_{L_r}(\emptyset) = \int_{\emptyset} \int_{D_1} |f|^{r_1} dx_1^{r_2/r_1} dx_2^{1/r_2}.$$

Воспользуемся этим определением, тогда предыдущее неравенство примет вид

$$\|K_1 u\|_{L_p(D)} \leq \|k_1\|_{L_{(q,p,pq)}(D_1, D_1, D_2)} \|u\|_{L_{(p,p^2)}(D_1, D_2)}.$$

Как видим, чтобы действие такого частного интеграла оказалось ограниченным, надо потребовать от ядра K и функции u принадлежности классу функций с разными свойствами по переменным своего аргумента. Обе нормы справа этого неравенства оказались анизотропными.

Анализируя полученный результат, приходим к выводу о вполне естественном проявлении анизотропных свойств ядра частного интеграла и функции, к которой этот ЧИ применяется, даже если

рассматривать эту конструкцию ЧИ в обычных нормах пространства Лебега. Разумеется естественно предположить, что изучение конструкций частных интегралов в более общих классах Лебега (по сравнению с изотропными классами) является интересным и актуальным продолжением исследований интегральных уравнений с линейными интегральными операторами, содержащие частные интегралы.

В учебном пособии исследуются действия ЧИ и ЛЧИ вида (14.6) и (14.7) соответственно в нормах пространства L_p в R_2 , затем в R_3 . Полученные сведения позволяют сформулировать вид оценок общего плана для работы в R_n при любых $n \geq 2$.

§16. Достаточные условия ограниченности частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега

В работах А.С. Калитвина был введен критерий непрерывности действия ЧИ операторов в пространствах непрерывных функций. В качестве обобщения этого критерия в данной работе вводится **правило** которому удовлетворяет ядро k_α ЧИ оператора и функции u для которых соответствующий ЧИ-оператор ограничен в $L_p(D)$. Обозначим $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\mathbf{p}_\alpha = (p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \dots, p_{\alpha_m})$, $\mathbf{q}_\alpha = (q_{\alpha_1}, q_{\alpha_2}, \dots, q_{\alpha_m})$, $\frac{1}{p_{\alpha_i}} + \frac{1}{q_{\alpha_i}} = 1, i = 1, 2, \dots, m$.

Правило ограниченного действия ЧИ-оператора $K_\alpha^{(m)}$ в анизотропных пространствах Лебега $L_p(D)$ [1, 16].

1. Правило для функций $u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$:

- 1) по переменным интегрирования $t_\alpha = (t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_m})$ функция $u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$ должна иметь конечные $L_{\mathbf{p}_\alpha}$ -нормы $\mathbf{p}_\alpha =$

$$(p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_m});$$

- 2) по свободным от интегрирования переменным $x_{\bar{\alpha}}$ функция $u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha})$ должна иметь конечные $L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}}$ -нормы, $\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2 = (p_{\bar{\alpha}_1}^2, \dots, p_{\bar{\alpha}_{n-m}}^2)$.

2. Правило для ядер $k_{\alpha}(x_{\alpha}, x_{\bar{\alpha}}; t_{\alpha})$ ЧИ-операторов $K_{\alpha}^{(m)}$:

- 1) по переменным интегрирования t_{α} ядро k_{α} должно иметь конечные $L_{\mathbf{q}_{\alpha}}$ -нормы;
- 2) по переменным интегрирования x_{α} ядро $k_{\alpha}(x; t_{\alpha})$ должно иметь конечные $L_{\mathbf{p}_{\alpha}}$ -нормы;
- 3) по свободным от интегрирования переменным $x_{\bar{\alpha}} = (x_{\bar{\alpha}_1}, \dots, x_{\bar{\alpha}_{n-m}})$ ядро $k_{\alpha}(x; t_{\alpha})$ должно иметь конечные $L_{\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}}$ -нормы $\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}} = (p_{\bar{\alpha}_1} q_{\bar{\alpha}_1}, \dots, p_{\bar{\alpha}_{n-m}} q_{\bar{\alpha}_{n-m}})$.

Данные правила получаются с многократным применением неравенства Гельдера к функции $K_{\alpha}u$. Используя эти правила, получим неравенства в которых отражены достаточные условия ограниченности действия ЧИ анизотропных пространствах Лебега в R_n :

$$\|K_{\alpha}u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|k_{\alpha}\|_{L_{(\mathbf{q}_{\alpha}; \mathbf{p}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}})}^{D_{(\alpha; 1, 2, \dots, n)}^{(n+m)}}} \|u\|_{L_{(\mathbf{p}_{\alpha}; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}^{(D_{\alpha, \bar{\alpha}}^{(n)})}}.$$

Для частных случаев частно-интегральных операторов $K_0, K_{(1, 2, \dots, n)}$ получим:

$$\begin{aligned} \|K_0 u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &\leq \|k_0\|_{L_{(p_1 q_1, p_2 q_2, \dots, p_n q_n)}(D)} \|u\|_{L_{\mathbf{p}^2}(D)}, \\ \|K_{1, 2, \dots, n}^{(n)} u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &\leq \|k_{1, 2, \dots, n}\|_{L_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}(D \times D)} \|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}. \end{aligned}$$

В случае ЧИ-операторов, заданных в R_2 имеем [13]

$$\|(K_0 u)\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2})} \leq \|k_0\|_{L_{(p_1 q_1, p_2 q_2)}(D_{1,2})} \|u\|_{L_{(p_1^2, p_2^2)}(D_{1,2})},$$

$$\| (K_1^{(1)} u) \|_{L_p(D_{1,2})} \leq \| k_1 \|_{L_{(q_1, p_1, p_2 q_2)}(D_{1,1,2})} \| u \|_{L_{(p_1, p_2^2)}(D_{1,2})},$$

$$\| (K_2^{(1)} u) \|_{L_p(D_{1,2})} \leq \| k_2 \|_{L_{(q_2, p_1 q_1, p_2)}(D_{2,1,2})} \| u \|_{L_{(p_2, p_1^2)}(D_{2,1})},$$

$$\| K_{1,2}^{(2)} u \|_{L_p(D_{1,2})} \leq \| k_{1,2} \|_{L_{(q_1, q_2, p_1, p_2)}(D_{1,2,1,2})} \| u \|_{L_p(D_{1,2})}.$$

В случае ЧИ-операторов, заданных в R_3 : [14]

$$\| K_0 u \|_{L_p(D_{1,2,3})} \leq \| k_0 \|_{L_{(p_1 q_1, p_2 q_2, p_3 q_3)}(D_{1,2,3})} \| u \|_{L_{(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}(D_{1,2,3})},$$

$$\| K_1 u \|_{L_p(D_{1,2,3})} \leq \| k_1 \|_{L_{(q_1, p_1, p_2 q_2, p_3 q_3)}(D_{1,1,2,3})} \| u \|_{L_{(p_1^2, p_2^2, p_3)}(D_{1,2,3})},$$

$$\| K_2 u \|_{L_p(D_{1,2,3})} \leq \| k_2 \|_{L_{(q_2, p_1 q_1, p_2, p_3 q_3)}(D_{2,1,2,3})} \| u \|_{L_{(p_2^2, p_1^2, p_3)}(D_{2,1,3})},$$

$$\| K_3 u \|_{L_p(D_{1,2,3})} \leq \| k_3 \|_{L_{(q_3, p_1 q_1, p_2 q_2, p_3)}(D_{3,1,2,3})} \| u \|_{L_{(p_3^2, p_1^2, p_2)}(D_{3,1,2})},$$

$$\| K_{1,2} u \|_{L_p(D_{1,2,3})} \leq \| k_{1,2} \|_{L_{(q_1, q_2, p_1, p_2, p_3 q_3)}(D_{1,2,1,2,3})} \| u \|_{L_{(p_1^2, p_2^2, p_3)}(D_{1,2,3})},$$

$$\| K_{1,3} u \|_{L_p(D_{1,2,3})} \leq \| k_{1,3} \|_{L_{(q_1, q_3, p_1, p_2 q_2, p_3)}(D_{1,3,1,2,3})} \| u \|_{L_{(p_1^2, p_3^2, p_2)}(D_{1,3,2})},$$

$$\| K_{2,3} u \|_{L_p(D_{1,2,3})} \leq \| k_{2,3} \|_{L_{(q_2, q_3, p_1 q_1, p_2, p_3)}(D_{2,3,1,2,3})} \| u \|_{L_{(p_2^2, p_3^2, p_1)}(D_{2,3,1})},$$

$$\| K_{1,2,3} u \|_{L_p(D_{1,2,3})} \leq \| k_{1,2,3} \|_{L_{(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)}(D_{1,2,3,1,2,3})} \| u \|_{L_{(p_1^2, p_2^2, p_3)}(D_{1,2,3})}.$$

Можно привести описание метода построения анизотропных пространств функций и ядер для оценки нормы ЧИ-оператора $K_\alpha^{(m)}$ в общем случае [1]

$$\| K_\alpha^{(m)} \|_{L_p(D)} = \int_{D_\alpha^{(m)}} k_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha, \quad \begin{matrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{matrix}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq n$, $t_\alpha = (t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \dots, t_{\alpha_m})$ — переменные, по которым производится интегрирование, $x_{\bar{\alpha}}$ — переменные x_i вектора x с оставшимися индексами, причем переменные $(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$ расставлены в порядке возрастания индексов. Для вычисления нормы сначала необходимо

воспользоваться неравенством Гельдера для переменных t_α , т.е. m раз, получим

$$\begin{aligned}
& \|K_{\alpha}^{(m)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \\
& = \int \dots \int |k_{\alpha}(x; t_{\alpha})|^{q_{\alpha_1}} dt_{\alpha_1} \dots dt_{\alpha_m}^{q_{\alpha_m}} \times \\
& \int_{D_{\alpha_m}} \dots \int_{D_{\alpha_1}} |u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha})|^{p_{\alpha_1}} dt_{\alpha_1} \dots dt_{\alpha_m}^{p_{\alpha_m}}.
\end{aligned}$$

Обозначим внутренние множители функциями $\tilde{k}_\alpha(x)$ и $\tilde{u}(x_{\bar{\alpha}})$, соответственно, получим

$$\|K_\alpha^{(m)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \|\tilde{k}_\alpha(x)\tilde{u}(x_{\bar{\alpha}})\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}.$$

При вычислении нормы

$$\|K_{\alpha}^{(m)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int_{D_1} \dots \int_{D_n} |\tilde{k}_{\alpha}(x) \tilde{u}(x)|^{\frac{p_1}{p_1-1}} dx \dots \int_{D_n} |\tilde{k}_{\alpha}(x) \tilde{u}(x)|^{\frac{p_n}{p_n-1}} dx \right)^{\frac{1}{p_n}}$$

необходимо последовательно рассматривать интегрирование функций $\tilde{k}_\alpha(x)$ и $\tilde{u}(x_{\bar{\alpha}})$ по переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Функция $\tilde{u}(x_{\bar{\alpha}})$ зависит от переменных $x_{\bar{\alpha}}$ и не зависит от переменных x_α . Если очередное интегрирование производится по переменной $x_i \in x_{\bar{\alpha}}$, то будет применяться неравенство Гельдера, если $x_i \in x_\alpha$, то функция $\tilde{u}(x_{\bar{\alpha}})$ не интегрируется, а выносится за знак интеграла по переменной x_i . В первом случае происходит домножение в показателе подынтегрального выражения для функции $\tilde{k}_\alpha(x)$ на q_i , и в итоге получаем показатель $p_i q_i$, а для функции $\tilde{u}(x_{\bar{\alpha}})$ на p_i , и в итоге получаем показатель p_i^2 ; во втором случае домножения показателя подынтегрального выражения для функции $\tilde{k}_\alpha(x)$ на q_i не происходит, и

показатель остается равным p_i , а для функции $\tilde{u}(x_{\bar{\alpha}})$ домножения не происходит (показатель p_i умножается на $1/p_i$). В итоге получим

$$\|K_{\alpha}^{(m)}\|_{L_p(D)} \leq \|\tilde{k}_{\alpha}(x)\|_{L_{(p_{\alpha}, p_{\bar{\alpha}}q_{\bar{\alpha}})}(D)} \|\tilde{u}(x_{\bar{\alpha}})\|_{L_{p_{\bar{\alpha}}}^2(D_{\bar{\alpha}})}.$$

Возвращаемся к функциям $k_{\alpha}(x; t_{\alpha})$ и $u(x_{\bar{\alpha}}, t_{\alpha})$ с учетом показателей для переменных t_{α} получим

$$\|K_{\alpha}^{(m)}\|_{L_p(D)} \leq \|k_{\alpha}\|_{L_{(q_{\alpha}; p_{\alpha}, p_{\bar{\alpha}}q_{\bar{\alpha}})}(D_{\alpha} \times D)} \|u\|_{L_{(p_{\alpha}; p_{\bar{\alpha}}^2)}(D_{\alpha} \times D_{\bar{\alpha}})},$$

где показатели p_{α} , $p_{\bar{\alpha}}q_{\bar{\alpha}}$ расставлены по порядку возрастания мультииндексов, т.е. справедливы правила ограниченного действия.

§17. Достаточные условия ограниченности линейных частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега

Оценим норму ЛЧИ-оператора (14.7) в анизотропном пространстве Лебега $L_p(D)$. [1, 16] Из оценок норм операторов K_{α} , $K_{\alpha}^{(m)}$, $K_{1,2,\dots,n}^{(n)}$ вытекает, что функция u должна принадлежать одновременно разным лебеговым классам: $u \in L_{(p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2)} \cap \dots \cap L_{(p_{\alpha}, p_{\bar{\alpha}}^2)} \cap \dots \cap L_{(p_1, p_2, \dots, p_n)}$. Введем мультииндекс $\mathbf{r}$, который может принимать одно из значений $(p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2)$, $\dots$, $(p_{\alpha}, p_{\bar{\alpha}}^2)$, $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Обозначим через $L_{\mathbf{r}}(D)$ класс функций с конечной нормой

$$\|u\|_{\mathbf{r}} = \max_{\mathbf{r}} \|u\|_{L_{\mathbf{r}}(D_{\alpha} \times D_{\bar{\alpha}})}.$$

Теорема 1.17.1. Пусть $u \in L_{\mathbf{r}}(D)$, а ядра $k_{\alpha}(x; t_{\alpha})$ частно-интегральных операторов K_{α} принадлежат пространствам $L_{(q_{\alpha}; p_{\alpha}, p_{\bar{\alpha}}q_{\bar{\alpha}})}(D_{\alpha} \times D)$, и пусть $C_{\alpha} = \|k_{\alpha}\|_{L_{(q_{\alpha}; p_{\alpha}, p_{\bar{\alpha}}q_{\bar{\alpha}})}(D_{\alpha} \times D)}$,

тогда ЛЧИ-оператор K непрерывен как оператор из $L_r(D)$ в $L_p(D)$, причем

$$\|Ku\|_{L_p(D)} \leq A_1 \|u\|_r, \quad A_1 = \sum_{\alpha} C_{\alpha}.$$

□ Для ЛЧИ-оператора $Ku = K_0 u + \sum_{\alpha} K_{\alpha}^{(m)} u + K_{1,2,\dots,n}^{(n)} u$, воспользовавшись неравенством Минковского для суммы функций, получим

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{L_p(D)} &= \|K_0 u + \sum_{\alpha} K_{\alpha}^{(m)} u + K_{1,2,\dots,n}^{(n)} u\|_{L_p(D)} \leq \\ &\leq \|K_0 u\|_{L_p(D)} + \sum_{\alpha} \|K_{\alpha}^{(m)} u\|_{L_p(D)} + \|K_{1,2,\dots,n}^{(n)} u\|_{L_p(D)}. \end{aligned}$$

Обозначив $C_{\alpha} = \|k_{\alpha}\|_{L_{(q_{\alpha}; p_{\alpha}, p_{\bar{\alpha}} q_{\bar{\alpha}})}(D_{\alpha} \times D)}$, воспользуемся оценкой каждого слагаемого, полученного выше, имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{L_p(D)} &\leq \|k_0\|_{L_{p,q}(D_{1,2,\dots,n}^{(n)})} \|u\|_{L_{p^2}(D_{1,2,\dots,n}^{(n)})} + \\ &+ \sum_{\alpha} \|k_{\alpha}\|_{L_{(q_{\alpha}; p_{\bar{\alpha}}, p_{\bar{\alpha}} q_{\bar{\alpha}})}(D_{\alpha}^{(m)} \times D_{1,2,\dots,n}^{(n)})} \|u\|_{L_{(p_{\alpha}, p_{\bar{\alpha}}^2)}(D_{\alpha}^{(m)} \times D_{\bar{\alpha}}^{(n-m)})} + \\ &+ \|k_{1,2,\dots,n}\|_{L_{(q,p)}(D_{1,2,\dots,n}^{(n)} \times D_{1,2,\dots,n}^{(n)})} \|u\|_{L_p(D_{1,2,\dots,n}^{(n)})} \leq \sum_{\alpha} C_{\alpha} \|u\|_r = A_1 \|u\|_r. \end{aligned}$$

■

Следствие 1.17.1. Пусть

$$A_2 = C_0 + A \sum_{\alpha=0} C_{\alpha}, \quad \text{где } A = \max_{\alpha} \left\{ \prod_{i=1}^m [\mu(D_{\alpha_i})]^{\frac{1}{p_{\alpha_i}} - \frac{1}{2}} \right\},$$

тогда справедлива оценка

$$\|Ku\|_{L_p(D)} \leq A_2 \max_{\alpha} \|u\|_{L_{(p_{\alpha}^2; p_{\bar{\alpha}}^2)}(D_{\alpha} \times D_{\bar{\alpha}})}.$$

□ Воспользуемся неравенством (12.1) для анизотропных норм с мультииндексами $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ при $r_i \leq \rho_i$

$$\|f\|_{L_{\mathbf{r}}(D_{1,2,\dots,n})} \leq [\mu(D_{1,2,\dots,n})]^{\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}} \|f\|_{L_{\rho}(D_{1,2,\dots,n})}, \quad (17.1)$$

получим

$$\|u\|_{L_{(\mathbf{p}_{\alpha}; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}})}^{2,2}(D_{\alpha} \times D_{\bar{\alpha}})} \leq M_{\alpha} \|u\|_{L_{(\mathbf{p}_{\alpha}; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}})}^{2,2}(D_{\alpha} \times D_{\bar{\alpha}})},$$

где $M_{\alpha} = \prod_{i=1}^m [\mu(D_{\alpha_i})]^{\frac{1}{p_{\alpha_i}} - \frac{1}{p_{\bar{\alpha}_i}}}$. Пусть $A = \max_{\alpha} \{M_{\alpha}\}$ и $A_2 = C_0 + A \sum_{\alpha=0} C_{\alpha}$, тогда из теоремы 1.17.1 следует

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} &\leq \sum_{\alpha} C_{\alpha} \|u\|_{L_{(\mathbf{p}_{\alpha}; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}})}^{2,2}(D_{\alpha} \times D_{\bar{\alpha}})} \leq C_0 \|u\|_{L_{\mathbf{p}^2}(D)} + \\ &+ A \sum_{\alpha=0} C_{\alpha} \|u\|_{L_{(\mathbf{p}^2; \mathbf{p}^2)}^{2,2}(D_{\alpha} \times D_{\bar{\alpha}})} = A_2 \max_{\alpha} \|u\|_{L_{(\mathbf{p}_{\alpha}^2; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}^{2,2}(D_{\alpha} \times D_{\bar{\alpha}})}. \end{aligned}$$

То есть класс функций $L_{\mathbf{r}}(D)$ можно сузить до множества $\bigcup_{\alpha} L_{(\mathbf{p}_{\alpha}^2; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}^{2,2}(D_{\alpha} \times D_{\bar{\alpha}})$. ■

С использованием теоремы о ранжировании получим:

Следствие 1.17.2. Пусть $\mathbf{p}_{\theta} = (p_{\theta_1}, p_{\theta_2}, \dots, p_{\theta_n})$ — мультииндекс, такой, что $p_{\theta_1} \geq p_{\theta_2} \geq \dots \geq p_{\theta_n}$, тогда справедливо неравенство

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A_2 \|u\|_{L_{\mathbf{p}_{\theta}}^{2,2}(D_{\theta}^{(n)})}.$$

□ Воспользуемся теоремой о ранжировании анизотропной нормы Лебега и свойством 6 стр.24, получим

$$\max_{\alpha} \|u\|_{L_{(\mathbf{p}_{\alpha}^2; \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}^2)}^{2,2}(D_{\alpha} \times D_{\bar{\alpha}})} = \|u\|_{L_{\mathbf{p}_{\theta}^2}^{2,2}(D_{\theta}^{(n)})},$$

тогда из следствия 1.17.1 получим неравенство

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A_2 \|u\|_{L_{\mathbf{p}_{\theta}^2}^{2,2}(D_{\theta}^{(n)})}. \quad \blacksquare$$

Замечание 1.17.1. Если при любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется неравенство $p_i^2 \geq p_j$, то

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A_2 \|u\|_{L_{\mathbf{p}^2}(D_{1,2,\dots,n}^{(n)})}.$$

□ Для доказательства данного утверждения необходимо для каждой компоненты p_k мультииндекса $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ поочередно, начиная с первой проверять условия:

1. $p_k \in p_\alpha$, тогда, используя свойство 6, стр. 24, можно компоненту p_k заменить на p_k^2 , тогда $\|u\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}_\alpha^2)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})} \leq A \|u\|_{L_{(\tilde{\mathbf{p}}_\alpha; \mathbf{p}_\alpha^2)}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}$, где $\tilde{\mathbf{p}}_\alpha$ — то же самое, что и $\mathbf{p}_\alpha$ с k -ой компонентой, возведенной в квадрат;

2. $p_k \in p_{\bar{\alpha}}$, тогда p_k уже возведено в квадрат и $p_k^2 \geq p_i$ для любого $i = \{1, 2, \dots, n\}$. По теореме о ранжировании анизотропной нормы Лебега и неравенства (17.1), можно поменять порядок интегрирования так, что интегрирование в норме функции u по переменной x_k и показателем p_k^2 будет осуществляться на k -ом шаге.

В итоге, после поочередной проверки компонентов p_k мультииндекса $\mathbf{p}$, получим норму функции u в пространстве $L_{(p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2)}(D_{1,2,\dots,n})$.

Таким образом, справедливо неравенство

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A_2 \|u\|_{L_{(p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2)}(D_{1,2,\dots,n}^{(n)})}. \quad \blacksquare$$

ГЛАВА IV

ЛИНЕЙНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

§18. Достаточные условия действия

Пусть $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ — компакт, $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций с нормой $\|u\| = \max_{t \in D} |u(x)|$. $C(D)$ — банахово пространство.

Будем рассматривать свойства оператора (14.7) в $C(D)$ [2, 4, 5, 6]. Для этого оператора справедлив аналог теоремы Банаха о непрерывности интегрального оператора.

Через $S(D)$ обозначим пространство измеримых и почти всюду конечных функций на D , $S(D)$ является полным метрическим пространством, сходимость в котором совпадает со сходимостью по мере, причем $C(D) \subset S(D)$.

Теорема 1.18.1. [2] *Если оператор K действует в $C(D)$, то он непрерывен.*

□ Достаточно показать замкнутость оператора K . Пусть $(u_n) \subset C(D)$, $u_n \rightarrow u_0$ и $Ku_n \rightarrow y_0$. Покажем, что $Ku_0 = y_0$. Так как $u_n \rightarrow u_0$, то последовательность (u_n) ограничена в $C(D)$. Поэтому найдется такое число r , что $|u_n(t)| \leq \|u_n\| \leq r$. Тогда при почти всех $t \in D$ последовательность $u_n(t)$ сходится к $u_0(t)$, а сходящаяся при почти всех t к функции $k_\alpha(x, t_\alpha)u(x_\alpha, t_\alpha)$ последовательность функций $k_\alpha(x, t_\alpha)u_n(x_\alpha, t_\alpha)$ ограничена функцией $r |k_\alpha(x, t_\alpha)|$, которые интегрируемы на D_α соответственно в силу свойств интеграла Лебега. Из предельного перехода под знаком

интеграла (теорема Лебега), получаем сходимость последовательности $(K_\alpha u_n)(t)$ почти при всех t к функции $(K_\alpha u_0)(t)$.

Тогда последовательность функций $(Ku_n)(t)$ сходится к функции $(Ku_0)(t)$ в $S(D)$. По предположению $Ku_n \rightarrow y_0$. Так как $C(D) \subset S(D)$ и в метрическом пространстве $S(D)$ $Ku_n \rightarrow Ku_0$ и $Ku_n \rightarrow y_0$, то в силу единственности предела $Ku_0 = y_0$.

Таким образом, оператор K замкнут. По теореме Банаха о замкнутом графике он непрерывен. ■

Определение 1.18.1. Измеримые функции $k_\alpha(x, t_\alpha)$ принадлежат $C(L^1(D_\alpha))$, если

$$\int_{D_\alpha} \sup_D |k_\alpha(x, t_\alpha)| dt_\alpha = L_\alpha < \infty \quad (18.1)$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства

$$\|t - t^0\| < \delta \text{ вытекает} \quad \int_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha) - k_\alpha(x^0, t_\alpha)| dt_\alpha < \varepsilon. \quad (18.2)$$

Теорема 1.18.2. [2] Пусть функция $k_0(x)$ непрерывна на D , а ядра $k_\alpha(x, t_\alpha)$ из $C(L^1(D_\alpha))$. Тогда K является непрерывным линейным оператором на $C(D)$.

□ Покажем, что интегралы $\int_{D_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha$ существуют и конечны. Пусть $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольная непрерывная функция, тогда при каждом фиксированном значении m переменных она является функцией из $C(D)$ оставшихся $n - m$ переменных. Отсюда и условия теоремы вытекает, что при всех $x \in D$ функции $k_\alpha(x, t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$ суммируемы по t_α на D_α соответственно.

Следовательно, при всех $x \in D$, интегралы $\int_{D_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha$ конечны и определены.

Покажем, что оператор K действует в $C(D)$. Пусть $u \in C(D)$, покажем, что $Ku \in C(D)$. Непрерывность функции K_0u очевидна. Докажем непрерывность функции $K_\alpha u$. Так как функция u непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что из $\|t - t^0\| < \delta_1$ следует $|u(x) - u(x^0)| < \varepsilon$. Отсюда и условий принадлежности $C(L^1(D_\alpha))$ ядер $k_\alpha(x, t_\alpha)$ при $\|x - x^0\| < \delta_2$, где $\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\}$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{D_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha - \int_{D_\alpha} k_\alpha(x^0, t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}^0, t_\alpha) dt_\alpha \leq \\ & \leq \int_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha)| |u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) - u(x_{\bar{\alpha}}^0, t_\alpha)| dt_\alpha + \\ & + \int_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha) - k_\alpha(x^0, t_\alpha)| |u(x_{\bar{\alpha}}^0, t_\alpha)| dt_\alpha \leq \varepsilon \int_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha)| dt_\alpha + \\ & + \|u\| \int_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha) - k_\alpha(x_{\bar{\alpha}}^0, t_\alpha)| dt_\alpha \leq \varepsilon (L_\alpha + \|u\|). \end{aligned}$$

Так как ε — произвольное положительное число, то из последнего неравенства вытекает непрерывность функции $K_\alpha u$.

Таким образом, функция Ku непрерывна, т.е. $Ku \in C(D)$. Линеинность оператора K очевидна. Тогда по теореме 1.18.1 K — непрерывный оператор на $C(D)$. ■

Неравенство (18.2) выполняется, если $k_\alpha(x, t_\alpha)$ — непрерывные по совокупности переменных функции.

Теорема 1.18.3. [2] Пусть $\|k_\alpha(x, \cdot)\|_{L^{p_\alpha}} \leq A_\alpha < \infty$, где $x \in D$, $1 < p_{\alpha_i} < \infty$, A_α — некоторые постоянные. Если $\tau_{S_\alpha} = \varphi_{S_\alpha}(x)$ — конечное число поверхностей разрыва ядер $k_\alpha(x, t_\alpha)$, $\varphi_{S_\alpha}(x)$ —

набор непрерывных функций $\varphi_{S_\alpha}^j(x)$ таких, что $\tau_j = \varphi_{S_\alpha}^j(x)$, то ядра $k_\alpha(x, t_\alpha)$ принадлежат $C(L^1(D_\alpha))$.

Теоремы 1.18.1 – 1.18.2 содержат достаточные условия действия в пространстве $C(D)$ линейного оператора (14.7) с многомерными частными интегралами. При получении необходимых и достаточных условий действия оператора (14.7) в пространстве непрерывных функций существенную роль играет теорема Радона, согласно которой линейный непрерывный в пространстве $C(D)$ оператор A представим в виде многомерного интеграла Стильтьеса

$$(Ax)(t) = \int_D u(t) dg(x, t)$$

с интегрирующей функцией $g(x, t)$ слабо непрерывной по x и ограниченной вариации по t .

Пусть

$$g(x, t) = \sum_{\alpha \in D_\alpha} \int k_\alpha(x, \bar{t}_\alpha) d\bar{t}_\alpha \chi(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha), \quad (18.3)$$

$$\chi(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) = \begin{cases} 1, & \forall \alpha \ t_\alpha \geq x_\alpha > a_\alpha \text{ или } t_\alpha > x = a_\alpha, \\ 0, & \exists \alpha \ t_\alpha < x_\alpha \text{ или } t_\alpha = x_\alpha = a_\alpha. \end{cases}$$

Очевидно, $g(x, v_\alpha) = 0$, где v_α — вершины параллелепипеда $D = \bigcap_{i=1}^n [a_i, b_i]$, при $k = 2^n$, $v_{2^n} = b$

$$g(x, b) = \sum_{\alpha \in D_\alpha} \int k_\alpha(x, t_\alpha) dt_\alpha.$$

$$B(x) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}(x, t_{\alpha}) dt_{\alpha},$$

$$B_{\beta}(x) = \int_D u_{\beta} dg(x, t) = \sum_{\alpha} (-1)^{\dim D_{\alpha \xi i}} \int_{D_{\alpha \xi i}} g(x, t) du_{\beta}, \quad (18.4)$$

Пусть

$$\gamma(x) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(x, t_{\alpha})| dt_{\alpha}. \quad (18.5)$$

Теорема 1.18.4. [2] Для действия линейного оператора (14.7) в пространстве $C(D)$ необходимо и достаточно, чтобы функция (18.5) была ограничена, а функции (18.4) непрерывны при каждом фиксированном t . При выполнении этих условий оператор (14.7) непрерывен и его норма определяется равенством

$$\|K\| = \sup_D \gamma(x). \quad (18.6)$$

В случае $n = 2$ непрерывность действия и достаточные условия и критерий действия операторов с частными интегралами в $C(D)$ были рассмотрены в работах [7, 8, 9, 10, 11, 17].

§19. Алгебра частно-интегральных операторов

Для оператора (14.7) получен критерий ограниченного действия в пространстве $C(D)$, $D \subset R_n$ (см. [2, 4]). Этот критерий является обобщением критерия, полученного в работах [7, 8, 9, 10, 11, 17] в случае R_2 .

Теорема 1.19.1. Представление оператора с многомерными частно-интегральными операторами в виде (14.7) единственно.

Рассмотрим пространство $L(C)$ непрерывных линейных операторов, действующих в пространстве $C(D)$ непрерывных на D функций с обычными алгебраическими операциями и нормой, $L_n(C)$ — подпространство операторов вида (14.7). Достаточно полное описание входящих в подпространство $L_n(C)$ операторов дает критерий ограниченного действия.

Теорема 1.19.2. $L_n(C)$ является замкнутым подпространством пространства $L(C)$.

Пространство $L(C)$ с операцией композиции операторов является банаховой алгеброй.

Теорема 1.19.3. Подпространство $L_n(C)$ является подалгеброй алгебры операторов $L(C)$. При этом, если $K \in L_n(C)$, где

$$(Kx)(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} k_{j\alpha}(x, t_{\alpha}) u(x_{\bar{\alpha}, t_{\alpha}}) dt_{\alpha}, \quad (19.1)$$

то линейный оператор $K = K_{\beta} K_{\alpha}$ также является оператором с многомерными частными интегралами.

Подалгебра $L_n(C)$ не является идеалом алгебры $L(C)$. Для этого достаточно рассмотреть композиции операторов из $L_n(C)$ с оператором $A : u(x) \rightarrow u(x_0)$, который ставит в соответствие каждой непрерывной функции функцию-константу, равную значению этой функции в некоторой фиксированной точке.

Каждый из операторов $K \in L_n(C)$ является суммой 2^n операторов K_{α} : оператора K_0 умножения на некоторую функцию, $2^n - 2$ частично интегральных операторов $K_1, \dots, K_{(1,2,\dots,n-1)}$ и интегрального оператора $K_{(1,2,\dots,n)}$. Следующий пример показывает, что если K является непрерывным линейным оператором в пространстве $C(D)$, то каждое из его слагаемых может не являться таковым.

Пример 1.19.1. [10, 11, 17] Рассмотрим оператор K в случае $n = 2$, пусть он определен равенством

$$\begin{aligned}
 (Ku)(x_1, x_2) = & \begin{cases} u(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in V_1, \\ 2(2x_1 - 1)^{-1} \int_{0.5}^{x_1} u(t_1, x_2) dt_1, & (x_1, x_2) \in V_2, \\ 2(2x_2 - 1)^{-1} \int_{0.5}^{x_2} u(x_1, t_2) dt_2, & (x_1, x_2) \in V_3, \\ 4(2x_2 - 1)^{-1}(2x_1 - 1)^{-1} \int_{0.5}^{x_1} \int_{0.5}^{x_2} u(t_1, t_2) dt_2 dt_1, & (x_1, x_2) \in V_4, \end{cases}
 \end{aligned}$$

где $V_1 = [0, 0.5] \times [0, 0.5]$, $V_2 = (0.5, 1] \times [0, 0.5]$, $V_3 = [0, 0.5] \times (0.5, 1]$, $V_4 = (0.5, 1] \times (0.5, 1]$. K является оператором с многомерными частными интегралами (14.7), действующим в $C(D)$, с функциями

$$\begin{aligned}
 k_0(x_1, x_2) = & \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in V_1, \\ 0, & (x_1, x_2) \in V_2 \cup V_3 \cup V_4, \end{cases} \\
 k_1(x_1, x_2, t_1) = & \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \in V_1 \cup V_3 \cup V_4, \\ 2(2x_1 - 1)^{-1}, & 0.5 < t_1 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 0.5, \\ 0, & 0.5 \leq x_1 < t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 0.5, \end{cases} \\
 k_2(x_1, x_2, t_2) = & \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \in V_1 \cup V_2 \cup V_4, \\ 2(2x_2 - 1)^{-1}, & 0.5 < t_2 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_1 \leq 0.5, \\ 0, & 0.5 \leq x_2 < t_2 \leq 1, 0 \leq x_1 \leq 0.5, \end{cases} \\
 k_{1,2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0, & (x_1, x_2) \in V_1 \cup V_2 \cup V_3, \\
& , \\
& = \begin{cases} 4(2x_2 - 1)^{-1}(2x_1 - 1)^{-1}, & 0.5 < t_1 \leq x_1 \leq 1, \text{ и} \\ & 0.5 < t_2 \leq x_2 \leq 1, \end{cases} \\
& \equiv 0, & \text{в остальных случаях.}
\end{aligned}$$

Из действия в $C(D)$ оператора K с частными интегралами, следует его непрерывность. Очевидно, операторы $K_0, K_1, K_2, K_{1,2}$ не действуют в $C(D)$.

Пусть $L_{k_\alpha}(C)$ — совокупность действующих в пространстве $C(D)$ операторов K_α . Рассмотрим пространство операторов, составленное из прямых сумм $W = \sum_{\alpha} L_{k_\alpha}(C) = L_{k_0}(C) \oplus L_{k_1}(C) \oplus \dots \oplus L_{k_{(1,2,\dots,n)}}(C)$.

Теорема 1.19.4. *Пространство W является замкнутым подпространством пространства $L_n(C)$.*

§20. Операторы Вольтерра с многомерными частно-интегральными операторами в $C(D)$

Операторами Вольтерра с многомерными частными интегралами назовем операторы вида

$$(Kx)(t) = \sum_{\alpha=0}^j \int_{\Omega_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha, \quad (20.1)$$

где $\Omega_\alpha = \bigcup_{\alpha} [a_\alpha, t_\alpha]$, $a_\alpha \leq t_\alpha \leq b_\alpha$, $\Omega_\alpha \subset D_\alpha$, $k_\alpha(x, t_\alpha)$ — измеримые по совокупности переменных функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Оператор (20.1) является частным случаем оператора (14.7). При $\Omega_\alpha \subset D_\alpha$ оператор (20.1) получается из оператора

(14.7), если $k_0(x) \equiv 0$, а ядра

$$\bar{k}_\alpha(x, t_\alpha) = \begin{cases} k_\alpha(x, t_\alpha) & \text{при } t_\alpha \leq x_\alpha, \\ 0 & \text{при } t_\alpha > x_\alpha. \end{cases}$$

Будем использовать и другую форму записи оператора Вольтерра

$$(Kx)(t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \int_{\Omega_\alpha} k_\alpha(t, s_\alpha) x(s_\alpha) ds_\alpha. \quad (20.2)$$

Для оператора (20.1) при $\Omega_\alpha \subset D_\alpha$ получаются следующие равенства

$$B(x) = \sum_{\alpha} \int_{\Omega_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha) dt_\alpha, \\ B_\beta(x) = \int_{\Omega} u_\beta dg(x, t) = \sum_{\alpha} (-1)^{\dim \Omega_{\alpha \xi i}} \int_{\bar{\Omega}_{\alpha \xi i}} g(x, t) du_\beta, \quad (20.3)$$

$$\gamma(x) = \sum_{\alpha} \int_{\Omega_i} |k_\alpha(x, t_\alpha)| dt_\alpha. \quad (20.4)$$

Из теоремы 1.18.4 следует

Теорема 1.20.1. *Оператор Вольтерра (20.1) с $\Omega_\alpha \subset D_\alpha$ действует в пространстве $C(D)$ в том и только в том случае, когда при каждом фиксированном $a_\alpha \leq \xi_\alpha \leq b_\alpha$ функции (20.3) непрерывны, а функция (20.4) ограничена. При этом оператор (20.1) непрерывен и его норма определяется равенством*

$$\|K\| = \sup_D \gamma(x). \quad (20.5)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Иноземцев, А.И. Уравнения в частных интегралах в анизотропных пространствах Лебега. Диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — "Вещественный, комплексный и функциональный анализ", КФУ. — Казань, 2021, 102 с.
- [2] Иноземцев, А.И. Критерий определенности на $C(D)$ линейных операторов с многомерными частными интегралами / А.И. Иноземцев // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. — 2014. — №5 (176). — Вып. 34. — С. 17 – 26.
- [3] Иноземцев, А.И. Ранжированное неравенство Гельдера в анизотропных классах Лебега / А.И. Иноземцев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, №1, Январь – Март, – Воронеж: Издательской дом ВГУ. — 2020. — С. 61 – 66.
- [4] Калитвин, А.С. Оператор-функции с многомерными частными интегралами / А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. — 2014. — №25(196). — Вып. 37. — С. 19 – 29.
- [5] Калитвин, А.С. О нетеровости, фредгольмовости и обратимости линейных операторов и уравнений с многомерными частными интегралами / А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев // Научнотехнический вестник Поволжья. №5 2018 г. — Казань: Научно-технический вестник Поволжья, — 2018. — С. 17 — 21.

- [6] Калитвин, А.С. О нетеровости, фредгольмовости и обратимости двух классов линейных операторов и уравнений с многомерными частными интегралами / А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев // Научно-технический вестник Поволжья. №5 2018г. — Казань: Научно-технический вестник Поволжья, — 2018. — С. 22 — 24.
- [7] Калитвин, А.С. Линейные операторы с частными интегралами [Текст] / А.С. Калитвин. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.
- [8] Калитвин, А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами [Текст] / А.С. Калитвин. — Липецк: ЛГПУ, 2002. — 208 с.
- [9] Калитвин, А.С. Операторы и уравнения с частными интегралами и их приложения [Текст]: дисс. ... д. ф.-м. н. 01.01.02. / А.С. Калитвин. — Липецк, 2003. — 267 с.
- [10] Калитвин, А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра – Фредгольма с частными интегралами [Текст] / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. — Липецк: ЛГПУ, 2006. — 177 с.
- [11] Калитвин, А.С. Линейные уравнения с частными интегралами. С – теория [Текст] / А.С. Калитвин, Е.В. Фролова. — Липецк: ЛГПУ, 2004. — 195 с.
- [12] Kalitvin, A.S. About integral equations with multidimensional partial integrals / A.S. Kalitvin, A.I. Inozemtsev, V.A. Kalitvin // Journal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2020. — Vol. 249. — № 6. — P. 954 – 966.

- [13] Lyakhov, L.N. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two-dimensional Case / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev // *Jornal Of Mathematical Sciences*. — Springer. — 2020. — Vol. 247. — № 6. — P. 888 – 892.
- [14] Lyakhov, L.N. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. II: Multidimensional Case / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev // *Jornal Of Mathematical Sciences*. — Springer. — 2020. — Vol. 247. — № 6. — P. 893 – 899.
- [15] Lyakhov, L.N. About Fredgholm equations for partial integral in R_2 / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev, N.I. Trusova // *Jornal Of Mathematical Sciences*. — Springer. — 2020. — Vol. 251. — № 6. — P. 839 – 849.
- [16] Lyakhov, L.N. Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev // *Jornal Of Mathematical Sciences*. — Springer. — 2021. — Vol. 255. — № 6. — P. 715 – 725.
- [17] Appell, J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations [Text] / J.M. Appell, A.S. Kalit-vin, P.P. Zabrejko. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.p.

Учебное издание

Иноземцев Алексей Иванович

**МНОГОМЕРНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА**

Учебное пособие

Подписано для размещения в Электронно-библиотечной системе
высшего образования
РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева
127550, Москва, Тимирязевская ул., 44
Тел. 8 (499) 977-40-64