Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации

Российский государственный аграрный
университет – МСХА имени К.А. ТИМИРЯЗЕВА

А.В. Бабкина, О.С. Пучкова, В.В. Торопцев

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В АПК

Учебно-методическое пособие

Курск - 2024

УДК 621
ББК 32.81
Б12

Рецензент – доцент, кандидат технический наук, директор аграрного института ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» А.В. Столяров

Б12 Бабкина А.В.
Исследование операций и методы оптимизации в АПК: учебно-методическое пособие / А.В. Бабкина, О.С. Пучкова, В.В. Торопцев. – Курск: Изд-во ЗАО «Университетская книга», 2024. – 132 с.

ISBN 978-5-907916-51-7

Настоящее издание разработано для проведения занятий по курсам «Исследование операций и методы оптимизации», «Математические методы в инженерии перерабатывающих производств», «Методы оптимальных решений», «Методы принятия управленческих решений» для студентов направлений 09.03.03 «Прикладная информатика», 35.04.06 «Агроинженерия», 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент».

В пособии представлены примеры выполнения практических заданий по рассматриваемым темам дисциплин. Для выполнения заданий необходимы знания теоретического материала, который проверяется с помощью контрольных вопросов. Практическое освоение методов оптимальных решений осуществляется в форме выполнения заданий по индивидуальным вариантам. В пособии раскрываются возможности использования программных средств линейной оптимизации.

ISBN 978-5-907916-51-7 УДК 621
ББК 32.81

Содержание

Введение

Учебно-методическое пособие подготовлено в соответствии с Федеральным государственным общеобразовательным стандартом высшего образования направлений 09.03.03 «Прикладная информатика», 35.04.06 «Агроинженерия», 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», изучающих дисциплины «Исследование операций и методы оптимизации», «Математические методы в инженерии перерабатывающих производств», «Методы оптимальных решений», «Методы принятия управленческих решений».

Цель пособия – дать учебно-методические рекомендации по выполнению практических заданий по дисциплинам и наработка студентами практических навыков в решении задач.

В каждом разделе пособия приводятся теоретическая часть, примеры выполнения практических заданий, варианты индивидуальных заданий и контрольные вопросы для проверки знаний по изучаемому материалу.

Практические задания используются при изучении следующих тем:

- формы записи задач линейного программирования;
- графический метод решения задач линейного программирования;
- симплексный метод решения задач линейного программирования;
- основы теории двойственности;
- транспортная задача;
- задачи о назначениях;
- целочисленное программирование;
- дробно-линейное программирование;
- динамическое программирование;
- решение задач с помощью рекуррентных уравнений;
- элементы теории игр.

В конце пособия представлен список рекомендуемой литературы, которым могут воспользоваться студенты для более глубокого изучения тем.

Тема 1. Формы записи задач линейного программирования

Теоретическая часть

Задача (модель) линейного программирования состоит из **целевой функции, системы ограничений и условий неотрицательности переменных.**

Целевой функцией называется математическое выражение, для которого требуется найти экстремум, то есть максимальное или минимальное значение. Целевую функцию называют также функционалом, линеалом. Целевая функция математически записывает критерий оптимальности, который является критерием выбора и выражает цель решения.

Ограничение - это математическое выражение, связывающее переменные в виде равенств или неравенств. Ограничения математически формализуют условия, которые отражают взаимосвязи в задаче. Все ограничения образуют систему ограничений. Они бывают трех типов: равенства (=), неравенства типа «≤», неравенства типа «≥».

Задача линейного программирования характеризуется тем, что целевая функция является **линейной функцией** переменных, а область допустимых решений определяется системой **линейных** равенств или неравенств.

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j + C_0$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} a_{io}, \ i = 1 \div m \\ x_j \ge 0, \ j = 1 \div n \end{cases}$$

C_j – коэффициент целевой функции;
C_0 – свободный член целевой функции;
a_{ij} – коэффициенты при переменных в ограничениях, где индекс i - номер ограничения, индекс j- номер переменной;
m – количество ограничений в задаче;
n – количество переменных в задаче;

a_{i0} – свободные члены ограничений (индекс о - признак свободного члена).

Если условие задачи представлено в математической записи, содержащей целевую функцию, систему ограничений и условия неотрицательности переменных, причем ограничения записаны как в виде равенств, так и в виде неравенств, то такая запись называется исходной формой записи задачи линейного программирования.

Каноническая форма задачи линейного программирования характеризуется тем, что содержит целевую функцию, все ограничения равенства, все переменные неотрицательные.

Однородная форма записи задач линейного программирования содержит целевую функцию, все ограничения неравенства типа меньше или равно (≤), все переменные неотрицательные.

Алгоритм перехода от исходной формы к канонической форме

Чтобы от исходной формы перейти к канонической форме необходимо выполнить следующие преобразования:

1. Проверить, все ли переменные неотрицательные:

а) если в исходной форме есть произвольные переменные x_j, то их необходимо заменить разностью двух неотрицательных переменных во всех ограничениях и целевой функции:

$x_j = x_j' - x_j''$, где $x_j' \ge 0$, $x_j'' \ge 0$

Все переменные становятся неотрицательными. Переход к пункту 2.

б) если в исходной форме все переменные неотрицательные ($x_j \ge 0$, $j = 1 \div n$), то переход от исходной формы к канонической форме начать с пункта 2.

2. Ограничения равенства с неотрицательными переменными оставить без изменений.

3. В левую часть каждого ограничения неравенства ввести одну новую неотрицательную дополнительную переменную x_{n+i}, где n - число основных переменных, i = 1, 2, 3, ...

а) в ограничения типа меньше или равно дополнительные переменные ввести с коэффициентом "+1";

б) в ограничения типа больше или равно дополнительные переменные ввести с коэффициентом "-1".

Ограничения-неравенства заменить ограничениями-равенствами.

4. В целевую функцию дополнительные переменные ввести с нулевыми коэффициентами (+0).

Примечание: дополнительные переменные называют также выравнивающими или балансовыми переменными.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой задача линейного программирования?
2. Дайте определение целевой функции.
3. Что представляют собой ограничения задачи?
4. Какая форма записи задачи линейного программирования называется исходной?
5. Какая форма записи задачи линейного программирования называется канонической?
6. Какая форма записи задачи линейного программирования называется однородной?
7. Какая переменная называется дополнительной?
8. Как вводится дополнительная переменная в ограничения типа «≤»?
9. Как вводится дополнительная переменная в ограничения типа «≥»?
10. Как вводится дополнительная переменная в ограничения типа «=»?
11. Как вводятся дополнительные переменные в целевую функцию?
12. Все ли переменные в исходной форме неотрицательные?
13. Все ли переменные в канонической форме неотрицательные?
14. Какие преобразования необходимо выполнить, если в исходной форме есть произвольные по знаку переменные?

Практическая часть
Пример выполнения задания

Задача. Суточный рацион коровы должен содержать не менее 14,2 кг кормовых единиц и 1650 г переваримого протеина. Указанные питательные вещества содержат 3 вида корма. Концентратов в рационе должно быть не более 3,6 кг. Информация о видах кормов представлена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Содержание питательных веществ и себестоимость кормов

Показатель	Зерно озимого ячменя	Силос	Зеленый корм люцерны
Содержится в 1 кг корма: -кормовых единиц, кг	1,2	0,2	0,2
-переваримого протеина, г	80	18	35
Себестоимость 1 кг корма, ден. ед.	11	2	2,1

Найти оптимальное сочетание кормов, обеспечивающее минимум себестоимости рациона.

Введем обозначения.

<u>Переменные:</u>

x_1 – количество зерна озимого ячменя в рационе, кг;

x_2 – количество силоса в рационе, кг;

x_3 – количество зелёного корма в рационе, кг;

<u>Целевая функция:</u> Z, ден.ед. – минимум себестоимости рациона.

Составим **исходную форму** задачи.

<u>Ограничения:</u>

Первое ограничение соответствует условию по содержание кормовых единиц в рационе коровы.

В 1 кг зерна озимого ячменя содержится 1,2 кг кормовых единиц, а всё количество данного вида корма (x_1) будет содержаться $1{,}2 \cdot x_1$ кг кормовых единиц. Аналогичные рассуждения по силосу и зелёному корму люцерны: в 1 кг силоса содержится 0,2 кг кормовых единиц, в количестве силоса, равном x_2, будет содержаться $0{,}2 \cdot x_2$ кг кормовых единиц, в 1кг зелёного корма люцерны содержится 0,2 кг кормовых единиц, в количестве, равном x_3, – $0{,}2 \cdot x_3$ кг кормовых единиц. Всего в рационе должно содержаться не менее 14,2 кг кормовых единиц, поэтому ограничение имеет вид:

1. Баланс кормовых единиц, кг корм. ед.

$1{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 \geq 14{,}2$

Единицы измерения левой и правой частей неравенства свидетельствуют о том, что ограничение записано правильно.

$[\frac{\text{кг корм. ед.}}{\text{кг}} \cdot \text{кг}] = [\text{кг корм. ед.}]$

2. Второе ограничение отражает условие по содержанию переваримого протеина.

Рассуждения по записи второго ограничения совпадают с рассуждениями по записи первого ограничения.

2. Баланс переваримого протеина, г ПП

$80x_1 + 18x_2 + 35x_3 \geq 1650$

$[\frac{\text{г ПП}}{\text{кг}} \cdot \text{кг}] = [\text{г ПП}]$

Третье ограничение отражает условие о том, что концентрированных кормов в рационе должно быть не более 3,6 кг.

Из представленных кормов к концентратам относится только зерно озимого ячменя, поэтому ограничение должно быть записано следующим образом:

3. Баланс концентратов в рационе, кг

$x_1 \leq 3,6$

Проверим единицы измерения левой и правой частей ограничения. Содержание корма в рационе измеряется в килограммах, поэтому левая часть неравенства – это килограммы. Ограничение на содержание концентрированных кормов в рационе (3,6) задано в килограммах. Следовательно, по единицам измерения левая и правая части ограничений совпадают, и ограничение записано верно.

[кг] = [кг]

4. Условия неотрицательности переменных: $x_j \geq 0, j = 1 \div 3$.

Запись **целевой функции** – минимум себестоимости рациона, ден. ед.

Себестоимость всего рациона рассчитывается как произведение себестоимости 1 кг корма на количество соответствующего корма в рационе.

$\min Z = 11x_1 + 2x_2 + 2,1x_3$

$[\frac{\text{ден.ед.}}{\text{кг}} \cdot \text{кг}] = [\text{ден. ед.}]$

Получили следующую запись условий задачи в **исходной форме**:

$\min Z = 11x_1 + 2x_2 + 2,1x_3$

$$\begin{cases} 1,2x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 \geq 14,2 \\ 80x_1 + 18x_2 + 35x_3 \geq 1650 \\ x_1 \leq 3,6 \\ x_j \geq 0, j = 1 \div 3 \end{cases}$$

<u>Перейдём к **канонической форме** записи задачи.</u>

В исходной форме все переменные неотрицательные, ограничений равенств нет, поэтому вводим неотрицательные дополнительные переменные и заменяем ограничения - неравенства на ограничения - равенства.

Первое ограничение - неравенство типа меньше либо равно (≥), поэтому вводим с коэффициентом "-1" дополнительную переменную x_4, так как основных переменных в задаче три (n = 3). Получаем

$1,2x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 - x_4 = 14,2$,

где x_4 означает содержание кормовых единиц в рационе сверх заданной нижней границы (сверх 14,2), кг корм. ед.

Второе ограничение - неравенство типа " ≥ ", поэтому введем с коэффициентом "-1" новую дополнительную переменную x_5, получаем

$80x_1 + 18x_2 + 35x_3 - x_5 = 1650$,

где x_5 означает содержание переваримого протеина в рационе сверх заданной нижней границы (сверх 1650), г ПП.

Третье ограничение - неравенство типа " ≤ ", поэтому вводим новую дополнительную переменную x_6 с коэффициентом "+1".

$x_1 + x_6 = 3,6$

x_6 – недоиспользованное количество зерна озимого ячменя в рационе до верхней границы (до 3,6), кг.

Условие неотрицательности переменных: $x_j \geq 0, j = 1 \div 6$.

Так как дополнительные переменные показывают лишь степень выполнения того или иного условия задачи, не являются основными переменными задачи, то они не влияют на значение целевой функции, поэтому в целевую функцию они вводятся с нулевыми коэффициентами.

Получаем, $\min Z = 11x_1 + 2x_2 + 2,1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

Канонической формой задачи является следующая запись:

$\min Z = 11x_1 + 2x_2 + 2,1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

$$\begin{cases} 1,2x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 - x_4 = 14,2 \\ 80x_1 + 18x_2 + 35x_3 - x_5 = 1650 \\ x_1 + x_6 = 3,6 \\ x_j \geq 0, j = 1 \div 6 \end{cases}$$

Индивидуальные задания

Задача 1

Определить оптимальное сочетание посевов двух культур (овощей и картофеля), чтобы получить максимум прибыли, если площадь пашни не превышает 200 га, объем минеральных удобрений – не более 1100 ц, площадь овощей – не более 25 га. Картофеля следует произвести не менее 20000 ц при урожайности 120 ц/га. Нормы внесения удобрений (ц/га): овощи – 10; картофель – 5. Прибыль (д. ед./га): овощи – 100, картофель – 60.

Задача 2

Организация располагает следующими ресурсами: пашня – 1300 га, минеральные удобрения – 1100 ц д.в., трудовые ресурсы – 42000 чел.-ч. Выращиваются озимая пшеница, рожь и гречиха, информация по которым представлена в табл.1.2.

Таблица 1.2

Урожайность, затраты ресурсов и цены реализации продукции

Наименование показателей	Название культур		
	озимая пшеница	рожь	гречиха
Урожайность, ц/га	27,0	23,0	15,0
Затраты труда, чел.-ч/га	32,2	28,5	35,0
Затраты удобрений, ц д.в./га	0,8	0,6	1,0
Себестоимость, ден.ед./ц	6,0	7,0	12,0
Цена реализации, ден.ед./ц	11,6	10,2	23,0

Найти оптимальные площади посевов культур, обеспечивающие максимум прибыли.

Задача 3

Организация располагает следующими ресурсами: пашня – 1000 га, трудовые ресурсы – 90000 чел.-ч. Выращиваются озимая пшеница, рожь и картофель, информация по которым представлена в табл.1.3.

Таблица 1.3

Урожайность, затраты ресурсов и цены реализации продукции

Наименование показателей	Название культур		
	озимая пшеница	рожь	картофель
Урожайность, ц/га	30,0	23,0	150,0
Затраты труда, чел.-ч/га	32,2	28,5	200,0
Себестоимость, ден.ед./ц	6,0	6,5	5,0
Цена реализации, ден.ед./ц	8,6	8,0	7,5

Объем производства зерна должен составлять не менее 1500 т.

Найти оптимальные площади посевов культур, обеспечивающие максимум прибыли.

Задача 4

Организация располагает следующими ресурсами: пашня – 1200 га, трудовые ресурсы – 100000 чел.-ч. Выращиваются озимая пшеница, рожь и картофель, информация по которым представлена в табл.1.4.

Таблица 1.4

Урожайность, затраты ресурсов и цены реализации продукции

Наименование показателей	Название культур		
	озимая пшеница	рожь	картофель
Урожайность, ц/га	25,0	20,0	180,0
Затраты труда, чел.-ч/га	30,2	26,5	220,0
Себестоимость, ден.ед./ц	7,0	8,0	5,5
Цена реализации, ден.ед./ц	8,6	8,7	7,5

Объем производства зерна должен составлять не менее 20000 ц. Удельный вес посевов ржи в общей площади зерновых культур не менее 20%.

Найти оптимальные площади посевов культур, обеспечивающие максимум прибыли.

Задача 5

Организация располагает следующими ресурсами: пашня – 1200 га, минеральные удобрения – 800 ц д.в., трудовые ресурсы –

50000 чел.-ч. Выращиваются озимая пшеница, овес и ячмень, информация по которым представлена в табл.1.5.

Таблица 1.5

Урожайность, затраты ресурсов и цены реализации продукции

Наименование показателей	Название культур		
	Озимая пшеница	овес	ячмень
Урожайность, ц/га	30,0	18,0	20,0
Трудоемкость, чел.-ч/ц	1,5	1,5	1,2
Затраты удобрений, ц д.в./га	0,7	0,5	0,6
Себестоимость, ден.ед./ц	7,0	7,5	7,2
Цена реализации, ден.ед./ц	9,6	9,0	8,8

Удельный вес посевов яровых зерновых культур (овес и ячмень) в общей площади зерновых культур должен составлять не менее 30%.

Найти оптимальные площади посевов культур, обеспечивающие максимум прибыли.

Задача 6

В сельскохозяйственной организации площадь орошаемой пашни составляет 250 га, неорошаемой – 400 га. Объем трудовых ресурсов – 340000 чел.-ч. Организация выращивает овощи: морковь и свеклу.

Таблица 1.6

Норма затрат ресурсов и урожайность культур

Наименование показателей	Морковь		Свекла	
	на поливе	без полива	на поливе	без полива
Урожайность, ц/га	390	335	360	320
Затраты труда, чел.-ч/га	550	500	530	490
Норма полива, тыс. м3/га	1,2	-	2,2	-
Коэффициент товарности продукции	0,92	0,92	0,95	0,95
Прибыль от реализации, ден.ед./ц	20,0	19,0	18,7	16,2

Ресурс воды составляет 320000м^3. Объем реализации свеклы – не менее 1000 т.

Найти оптимальные площади посевов овощных культур, обеспечивающие получение максимума прибыли от реализации.

Задача 7

В сельскохозяйственной организации выращиваются культуры, продукция которых идет на корм животным. Потребность животноводства в энергетических кормовых единицах составляет 3900 тыс. ЭКЕ, переваримом протеине – 3800 ц. Площадь пашни – 1100 га. Концентрированные корма (зерно) должны составлять 30-40% от потребности в ЭКЕ.

Таблица 1.7

Выход питательных элементов с 1 га и затраты денежных средств

Наименование показателей	Название культур			
	ячмень	овес	кукуруза на зеленый корм	многолетние травы на сено
Выход ЭКЕ с га, тыс. ЭКЕ	3,46	2,49	5,67	3,24
Выход переваримого протеина с га, ц	3,25	2,05	3,52	3,56
Затраты материально-денежных средств, тыс.руб./га	31,0	25,0	18,2	12,6

Найти оптимальные площади культур, обеспечивающие минимум материально-денежных затрат.

Задача 8

Предприятие имеет четыре подразделения, в которых планирует организовать выпуск не менее 200 единиц однородных новых изделий в сутки.

Для освоения этого нового вида изделия выделены капитальные вложения в размере 18000 ден. ед. Освоение нового вида изделия требует затрат трудовых ресурсов и капитальных вложений, которые представлены в табл.1.8. Предприятие располагает трудовыми ресурсами в количестве 455 чел.-ч.

Таблица 1.8

Затраты труда и денежных средств на производство продукции

Наименование показателей	Подразделения предприятия			
	1	2	3	4
Трудовые ресурсы, чел.-ч/шт.	2,2	2,5	2,4	2,7
Удельные капитальные вложения на ед. изделия, ден. ед.	120	90	40	80
Себестоимость производст-ва единицы изделия, ден. ед.	80	85	90	93

Найти такой вариант распределения объемов выпуска продукции по подразделениям, при котором общая себестоимость производства была бы минимальной.

Задача 9

Сельскохозяйственная организация имеет 2600 га пашни, 800 га пастбищ, 230000 чел.-ч трудовых ресурсов, специализируется на производстве зерна и продукции животноводства (молоко и мясо КРС). Животноводство обеспечено кормами собственного производства.

Таблица 1.9

Удельные показатели на единицу вида деятельности

Наименование показателей	Озимая пшеница, га	Яровая пшеница, га	Коровы, гол.	Молодняк КРС, гол.
Затраты пашни, га	1	1	1,8	1,2
Затраты пастбищ, га	-	-	0,7	0,4
Затраты трудовых ресурсов, чел.-ч	18	16	200	95
Выход продукции (зерна, молока, мя-са), ц	30	25	45	2,2
Чистый доход, ден. ед.	3000	2400	4000	1500

Объем производства товарного зерна озимой пшеницы составляет не менее 900 т, яровой пшеницы - не менее 400 т, молока - не менее 4100 т, мяса КРС – не менее 89 т.

Найти оптимальные площади товарных культур и поголовье животных, обеспечивающие максимум чистого дохода.

Задача 10

Сельскохозяйственная организация имеет два производственных подразделения, в которых выращивается озимая пшеница, ячмень и сахарная свекла. Наличие и затраты ресурсов в разрезе подразделений представлены в табл. 1.10.

Таблица 1.10

Наличие и затраты ресурсов по подразделениям

Наименование показателей	I подразделение	II подразделение
Площадь пашни, га	400	300
Объем трудовых ресурсов, чел.-ч	45000	30000
Затраты труда на 1 га культуры, чел.-ч: озимая пшеница	19	20
ячмень	18	16
сахарная свекла	370	350
Себестоимость производства и реализации, ден.ед./ц: озимая пшеница	500	400
ячмень	600	650
сахарная свекла	400	350
Выход товарной продукции с 1 га, ц озимая пшеница	35	40
ячмень	30	28
сахарная свекла	450	400

Цена реализации озимой пшеницы составляет 900 ден. ед./ц, ячменя - 700 ден. ед./ц, сахарной свеклы - 1000 ден. ед./ц. Объем реализации озимой пшеницы должен составлять в целом по организации не менее 9500 ц, ячменя - 8000 ц, сахарной свеклы – 70000 ц. Определить оптимальные площади культур по подразделениям, обеспечивающие получение максимума прибыли.

Задача 11

Сельскохозяйственная организация имеет 600 га пашни. Возделываются культуры: овес, озимая пшеница, картофель. Посевная площадь озимой пшеницы должна составлять не более ½ от площади всех зерновых. Зерна необходимо произвести не менее 4500 ц.

Таблица 1.11

Урожайность культур и цены реализации продукции

Культура	Урожайность, ц/га	Цена реализации, ден. ед./ц
Овес	20,0	9
Озимая пшеница	25,0	12
Картофель	150,0	5

Найти оптимальное сочетание посевов сельскохозяйственных культур, обеспечивающее максимум производства валовой продукции в стоимостном выражении (в ценах реализации).

Задача 12

Возделываются три культуры: овес, кукуруза на силос, многолетние травы на сено, информация по которым представлена в табл. 1.12.

Сельскохозяйственная организация располагает следующими ресурсами: площадь пашни – 600 га, трудовые ресурсы – 3000 чел.-дн. Посевная площадь овса не должна превышать 200 га. Соотношение посевных площадей кукурузы на силос и многолетних трав следующее: площадь под кукурузой не более ½ от общей площади пашни под этими культурами.

Таблица 1.12

Эффективность возделывания кормовых культур

Культура	Выход кормов с 1 га, ц к.ед.	Затраты труда на 1 га, чел.-дн.
Овес	25,0	3,0
Кукуруза на силос	24,0	2,0
Многолетние травы на сено	16,0	2,0

Найти оптимальное сочетание посевов этих культур для производства наибольшего количества кормов.

Задача 13

Организация располагает следующими ресурсами: пашня – 1000 га, минеральные удобрения – 850 ц д.в. Возделываются картофель (его площадь не более 250 га), ячмень, горох, информация по которым представлена в табл.1.13.

Таблица 1.13

Урожайность, затраты ресурсов и цены реализации продукции

Наименование показателей	Название культур		
	картофель	ячмень	горох
Урожайность, ц/га	100,0	20,0	15,0
Затраты удобрений, ц д.в./га	3,0	1,0	2,0
Цена реализации, ден.ед./ц	6,0	9,0	20,0

Найти оптимальные площади посевов культур, обеспечивающие максимум производства валовой продукции в стоимостном выражении.

Задача 14

В сельскохозяйственной организации кормовая свекла и кукуруза на силос могут возделываться без орошения и с поливом. Площадь орошаемой пашни – 200 га, площадь богарных (неполивных) земель – 600 га. Ресурсы труда – 12000 чел.-дн., ресурсы воды – 1500000 м^3.

Таблица 1.14

Норма затрат ресурсов и урожайность культур

Наименование показателей	Кормовая свекла		Кукуруза на силос	
	на поливе	без полива	на поливе	без полива
Затраты труда, чел.-дн./га	50	40	30	20
Норма полива, тыс. м^3/га	1	-	2	-
Выход кормов с 1 га, ц к.ед.	50	30	60	22

Найти оптимальные площади посевов культур, обеспечивающие получение максимума производства кормов.

Задача 15

Организация располагает следующими ресурсами: пашня – 2000 га, трудовые ресурсы – 80000 чел.-ч. Выращиваются озимая пшеница, рожь и ячмень, информация по которым представлена в табл.1.15.

Площадь посева озимой пшеницы должна составлять не менее 40 га, площадь ржи – не менее 300 га и не более 450 га.

Таблица 1.15

Нормы затрат ресурсов и урожайность культур

Наименование показателей	Название культур		
	озимая пшеница	рожь	ячмень
Урожайность, ц/га	24,0	27,0	32,0
Трудоемкость, чел.-ч/га	30,6	36,0	39,2
Уровень товарности продукции, %	82,0	85,0	85,0
Гарантированный объем реализации продукции, ц	20000,0	9000,0	13600,0
Прибыль, руб./ц	200,0	300,0	400,0

Определить оптимальную структуру посевов данных культур, чтобы общая прибыль в хозяйстве была максимальной.

Задача 16

В хозяйстве возделываются многолетние и однолетние травы на зеленый корм и сено, информация по которым представлена в табл. 1.16. Площадь пашни составляет 400 га, трудовые ресурсы – 2000 чел.-дн. Площадь многолетних трав на зеленый корм должна составлять не более 100 га.

Таблица 1.16

Эффективность возделывания кормовых культур

Культура	Выход кормов с 1 га, ц к.ед.	Затраты труда на 1 га, чел.-дн.
Многолетние травы:		
на зеленый корм	30,0	2,0
на сено	25,0	3,0
Однолетние травы:		
на зеленый корм	25,0	4,0
на сено	20,0	5,0

Определить оптимальное соотношение посевов трав, обеспечивающее максимум производства кормов со всей площади.

Задача 17

Сельскохозяйственная организация имеет 700 га пашни. Возделываются культуры: овес, озимая пшеница, картофель. Посевная площадь озимых зерновых должна составлять не более 1/3 от площади всех зерновых, посевная площадь картофеля – не более 200 га.

Таблица 1.17

Урожайность культур и цены реализации продукции

Культура	Урожайность, ц/га	Цена реализации, ден. ед./ц
Овес	23,0	11
Озимая пшеница	25,0	14
Картофель	170,0	9

Найти оптимальное сочетание посевов сельскохозяйственных культур, обеспечивающее максимум производства валовой продукции в стоимостном выражении (в ценах реализации).

Задача 18

Сельскохозяйственная организация занимается производством зерна, сахарной свеклы на корм и мяса свиней. На корм используется 60% валового сбора зерна и весь сбор сахарной свекды.

Таблица 1.18

Наличие ресурсов и их затрат на производство 1 ц продукции

Наименование показателей	Зерно	Свекла	Привес свиней	Объем ресурсов
Затраты пашни, га	0,05	0,005		5000
Затраты трудовых ресурсов, чел.-ч	0,08	0,8	16	800000
Выход кормов, ц к.ед.	1,2	0,26	-	-
Затраты корма, ц к.ед.	-	-	5	-
Прибыль от реализации, ден.ед.	5	3	60	

Найти оптимальное сочетание производства зерна, сахарной свеклы на корм и мяса свиней, обеспечивающее максимум прибыли.

Задача 19

Организация располагает следующими ресурсами: пашня – 500 га, трудовые ресурсы – 6000 чел.-дн., материально-денежные средства – 100000 ден.ед. Выращиваются пшеница, ячмень и корнеплоды, информация по которым представлена в табл.1.19.

Таблица 1.19

Урожайность, затраты ресурсов и цены реализации продукции

Наименование показателей	Название культур		
	пшеница	ячмень	корнеплоды
Урожайность, ц/га	20,0	24,0	300,0
Затраты труда, чел.-дн./га	4,0	4,0	8,0
Материально-денежные средства, ден.ед/га	100,0	50,0	150,0
Выход продукции, ден.ед/га	20,0	25,0	30,0

Зерновых должно быть произведено не менее 3000 ц. Ресурсы могут быть недоиспользованы.

Найти оптимальное соотношение посевов сельскохозяйственных культур, обеспечивающее максимум валовой продукции в стоимостном выражении.

Задача 20

В сельскохозяйственной организации для производства кукурузы и гороха на зерно выделено 1200 га пашни, 6000 чел.-дн. рудовых ресурсов и 2500 тракторо-смен.

Таблица 1.20

Затраты ресурсов и цены реализации продукции

Наименование показателей	Название культур	
	кукуруза	горох
Затраты пашни, га/ц	0,025	0,05
Трудовые ресурсы, чел.-дн./ц	0,16	0,074
Трудовые ресурсы механизаторов, тракторо-смен/ц	0,064	0,037
Цена реализации, ден.ед./ц	5,5	10,0

Определить оптимальное сочетание посевов зерновых культур, обеспечивающее максимум валовой продукции в стоимостном выражении.

Тема 2. Графический метод решения задач линейного программирования

Теоретическая часть

Геометрический смысл неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le a_{i0}$

Заменим неравенство равенством $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = a_{i0}$ – это уравнение прямой, проходящей через две точки. Если $a_{i0} \ne 0$, то

x_1	0	a_{i0}/a_{i1}
x_2	a_{i0}/a_{i2}	0

На координатной оси OX_1 откладываем точку $(a_{i0}/a_{i1}, 0)$, на оси OX_2 откладываем точку $(a_{i0}/a_{i2}, 0)$ и соединяем эти точки прямой, которая называется граничной (рис. 2.1).

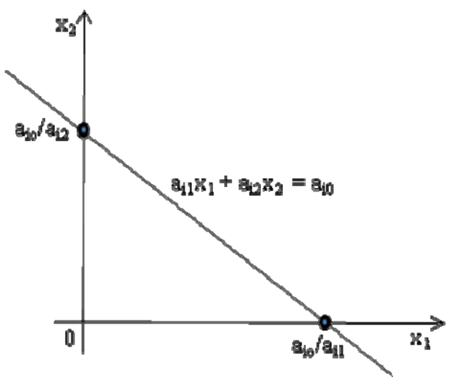

Рис. 2.1. **Граничная прямая**

Если $a_{i0} \ne 0$, то граничная прямая не проходит через начало координат. Подставляем координаты точки (0,0) в неравенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le a_{i0}$ и проверяем: верное ли неравенство. Если $a_{i1} * 0 + a_{i2} * 0 < a_{i0}$, т.е. $0 < a_{i0}$, то неравенство верное и полуплоскость с началом координат является искомой (рис. 2.2).

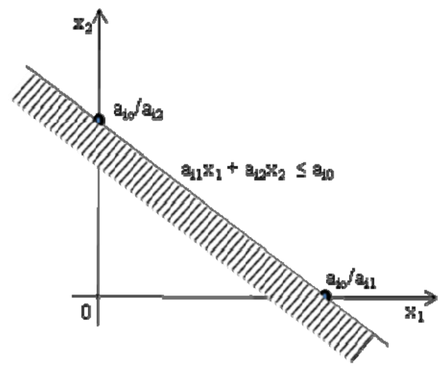

Рис. 2.2. **Искомая полуплоскость**

Область допустимых решений (ОДР)

Областью допустимых решений является пересечение полуплоскостей системы ограничений и условий неотрицательности.

Условия неотрицательности переменных:

а) $x_1 \ge 0$; $x_1 = 0$ – ось OX_2; $x_1 \ge 0$ – полуплоскость справа от оси OX_2.

б) $x_2 \ge 0$; $x_2 = 0$ – ось OX_1; $x_2 \ge 0$ – полуплоскость сверху от оси OX_1.

Пересечением условий неотрицательности переменных $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ является первой четвертью координатной плоскости (рис. 2.3).

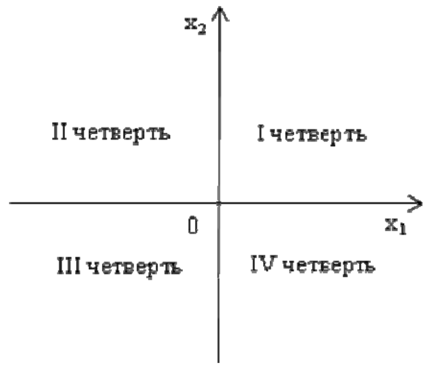

Рис. 2.3. **Четверти координатной плоскости**

Линия уровня

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ – линия уровня – прямая. Линий уровня бесчисленное множество, все они параллельны между собой.

Пусть $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = const$

Если $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = L_1$, тогда

x_1	0	$(L_1 - c_0)/c_1$
x_2	$(L_1 - c_0)/c_2$	0

Если $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = L_2$, тогда

x_1	0	$(L_2 - c_0)/c_1$
x_2	$(L_2 - c_0)/c_2$	0

Если $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = L_k$, тогда

x_1	0	$(L_k - c_0)/c_1$
x_2	$(L_k - c_0)/c_2$	0

Построим линии уровня на плоскости координат (рис. 2.4).

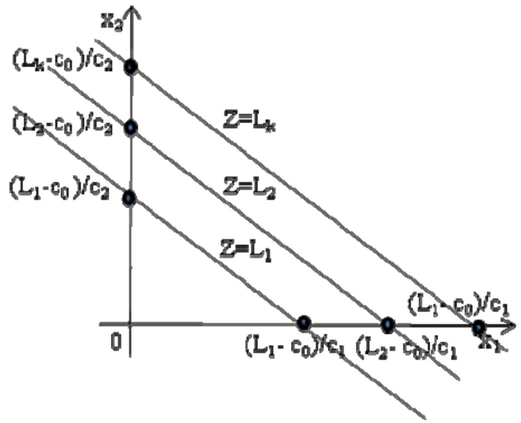

Рис. 2.4. **Линии уровня**

Вектор – градиент

Вектор-градиент ($\overline{gradZ}$) – это частные производные Z по x_1 и x_2.

$$\overline{gradZ} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x_1}; \frac{\partial z}{\partial x_2} \right\}$$

Допустим, что $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$, тогда $\overline{gradZ} = \{ c_1; c_2 \}$. Строим точку ($c_1$, c_2) и соединяем начало координат с этой точкой. Получаем истинную длину вектора-градиента. Направление вектора-градиента от начала системы координат к точке (c_1, c_2) (рис. 2.5).

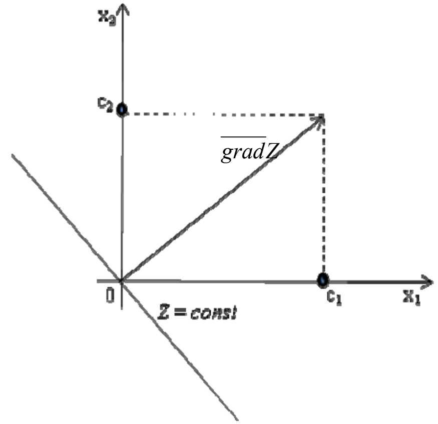

Рис. 2.5. **Вектор-градиент**

Вектор-градиент показывает направление максимизации целевой функции.

Вектор-градиент и линии уровня всегда взаимно перпендикулярны.

Оптимальное решение

Оптимальное решение – это совокупность n переменных (X_1, X_2,…, X_n), удовлетворяющих системе ограничений задачи, условиям неотрицательности переменных, при которой достигается максимум или минимум целевой функции.

Оптимальное решение может быть альтернативным. Альтернативные решения – это допустимые решения, имеющие разное значение переменных, но равное значение целевой функции.

Оптимальное решение получают при перемещении линии уровня в направлении вектора-градиента (максимум целевой функции) до последнего соприкосновения с областью допустимых решений в точке или на отрезке, и против направления при решении задачи на минимум целевой функции.

Возможные варианты графического решения для двух переменных

I. Область допустимых решений – ограниченная выпуклая непустая – выпуклый многоугольник:

а) оптимальное решение – точка (рис. 2.6);

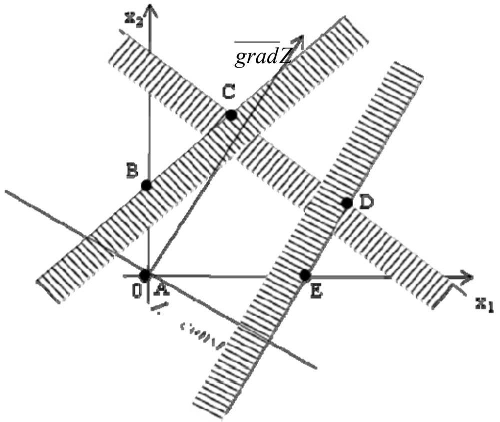

Рис. 2.6. **ОДР – многоугольник ABCDE, оптимальное решение в точке С**

б) оптимальное решение – отрезок (альтернативный оптимум) (рис. 2.7).

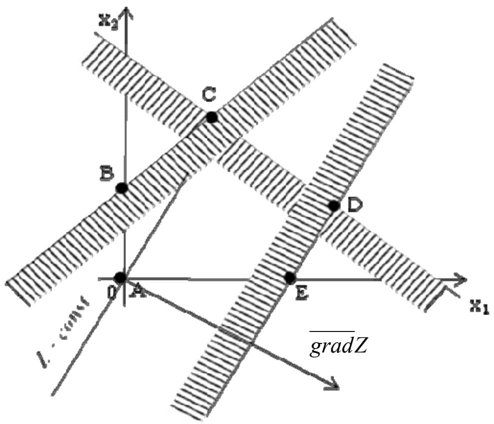

Рис. 2.7. **ОДР – многоугольник ABCDE, оптимальное решение на отрезке [DE]**

II. Область допустимых решений – неограниченная непустая выпуклая область с конечным числом вершин:

а) оптимальное решение – точка (рис. 2.8);

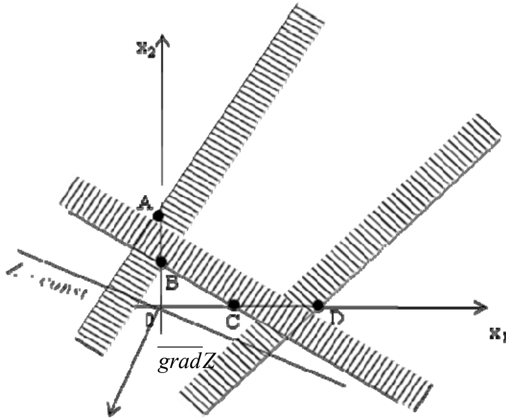

Рис. 2.8. **ОДР – неограниченная выпуклая с конечным числом вершин, оптимальное решение в точке С**

б) оптимальное решение – отрезок (рис. 2.9);

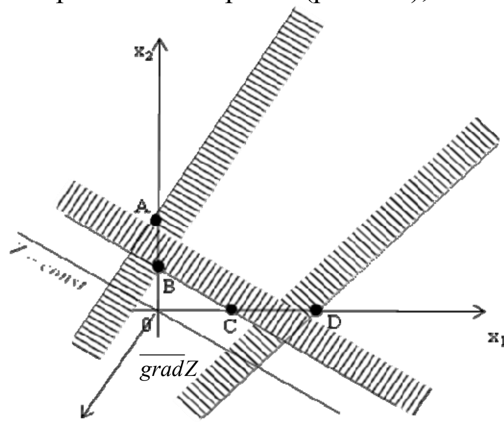

Рис. 2.9. **ОДР – неограниченная выпуклая с конечным числом вершин, оптимальное решение на отрезке [BC]**

в) оптимального решения нет – целевая функция не ограничена (рис. 2.10).

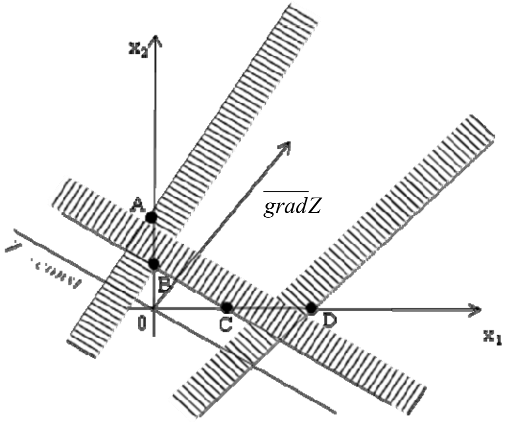

Рис. 2.10. **ОДР – неограниченная выпуклая с конечным числом вершин, оптимального решения нет, max Z → +∞**

III. Область допустимых решений – точка (рис. 2.11).

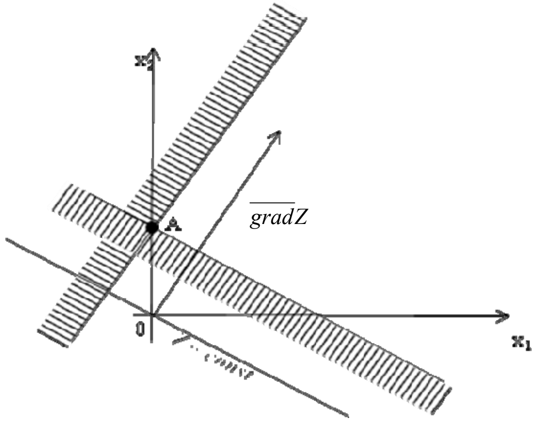

Рис. 2.11. **ОДВ и оптимальное решение в точке А**

IV. Область допустимых решений – пустое множество (рис. 2.12).

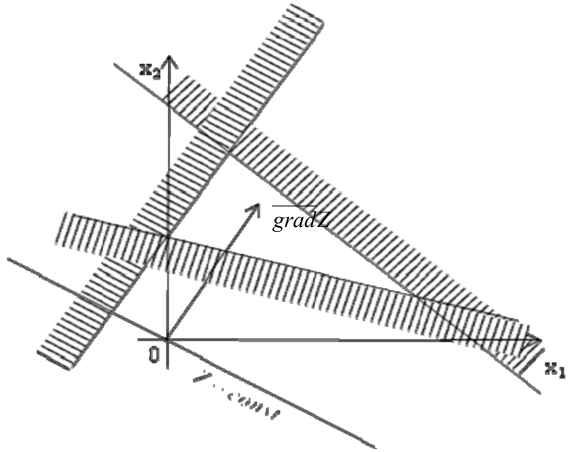

Рис. 2.12. **ОДР – пустое множество**

Контрольные вопросы

1. Какое решение называется оптимальным?
2. Какое решение называется альтернативным?
3. Какое решение называется допустимым?
4. Что показывает вектор-градиент?
5. Как расположены вектор-градиент и линии уровня?
6. Сколько линий уровня можно построить в одной задаче?
7. Как расположены линии уровня в одной задаче?
8. Может ли быть точка X (4; -3) допустимым решением задачи линейного программирования?
9. Может ли быть точка X (-10; -7) допустимым решением задачи линейного программирования?
10. Может ли быть точка X (5; 8) допустимым решением задачи линейного программирования?
11. Может ли быть точка X (4; -3) допустимым решением задачи линейного программирования?
12. Может ли быть точка X (-8; 2) допустимым решением задачи линейного программирования?
13. Найти вектор-градиент, если max $Z = 5x_1 - 8x_2 + 12$.
14. Как найти координаты точки на пересечении двух прямых?

Практическая часть
Пример выполнения задания

Задача. Организация для производства двух видов продукции использует четыре вида производственных ресурсов: A, B, C, D. Информация о видах ресурсов представлена в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

Наличие, стоимость и расход ресурсов на единицу продукции

Вид ресурса	Расход ресурсов на единицу вида продукции, ед. веса		Всего ресурсов, ед. веса
	1	2	
A	1	1	6
B	2,5	4	20
C	1	2,5	10
D	1	-	5
Стоимость единицы вида продукции, ден.ед.	2	5	-

Ресурсы могут быть недоиспользованы. Найти такое соотношение производства этих видов продукции, которое обеспечит максимальный объем продукции в стоимостном выражении.

Введем обозначения.

Переменные:

x_1, ед. – количество продукции первого вида.

x_2, ед. – количество продукции второго вида.

Целевая функция:

Z, ден.ед. – максимальный объем продукции.

Составим <u>исходную форму</u> задачи.

Ограничения:

1. Баланс ресурсов вида A, ед.

$x_1 + x_2 \leq 6$

[ед.] = [ед.]

2. Баланс ресурсов вида B, ед. веса

$2{,}5\, x_1 + 4\, x_2 \leq 20$

$$\left[\frac{ед.\ веса}{ед.} * ед.\right] = [ед.\ веса]$$

3. Баланс ресурсов вида C, ед. веса

$x_1 + 2{,}5\, x_2 \leq 10$

$$\left[\frac{ед.\ веса}{ед.} * ед.\right] = [ед.\ веса]$$

4. Баланс ресурсов вида D, ед. веса

$x_1 \leq 5$

$$\left[\frac{ед.\ веса}{ед.} * ед.\right] = [ед.\ веса]$$

5. Условия неотрицательности переменных.

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Целевая функция: max Z = $2x_1 + 5x_2$

$$[ден.ед.] = \left[\frac{ден.ед.}{ед.} * ед.\right]$$

На плоскости координат строим граничные прямые и определяем полуплоскости, соответствующие ограничениям задачи.

1. $x_1 + x_2 \leq 6$; $x_1 + x_2 = 6$

x_1	0	6
x_2	6	0

Точка (0,0) $\in$ полуплоскости ($1*0+1*0 \leq 6$; $0 < 6$ – верное неравенство).

2. $2{,}5\, x_1 + 4\, x_2 \leq 20$, $2{,}5\, x_1 + 4\, x_2 = 20$

x_1	0	8
x_2	5	0

Точка (0,0) $\in$ полуплоскости ($2{,}5\cdot 0+4\cdot 0\leq 20$; $0 < 20$ – верное неравенство).

3. $x_1 + 2{,}5\, x_2 \leq 10$, $x_1 + 2{,}5\, x_2 = 10$

x_1	0	10
x_2	4	0

Точка (0,0) $\in$ полуплоскости ($1\cdot 0+2{,}5\cdot 0\leq 10$; $0<10$ – верное неравенство).

4. $x_1 \leq 5$, $x_1 = 5$ – граничная прямая, параллельная оси OX_2, проходящая через точку (5, 0); полуплоскость слева от граничной прямой, так как начало координат принадлежит полуплоскости.

5. Условия неотрицательности переменных.

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ – I четверть плоскости координат.

6. Пересечение полуплоскостей – пятиугольник ABCDE – область допустимых решений (ОДР) (рис. 2.13).

7. Линия уровня.

max Z = $2\, x_1 + 5\, x_2$ – прямая уровня.

Пусть Z = const, например, Z = 0, тогда $2x_1 + 5x_2 = 0$

x_1	0	5
x_2	0	-2

8. Вектор-градиент $\overline{gradZ} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x_1}; \frac{\partial z}{\partial x_2}\right\}$

$\overline{gradZ} = \{2,5\}$. Начало координат – начало вектора-градиента, точка (2,5) – конец вектора-градиента. Вектор-градиент показывает направление перемещения линии уровня в направлении максимизации целевой функции.

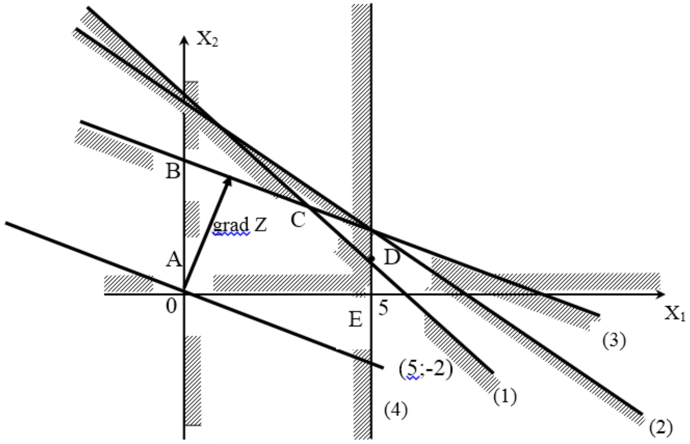

Рис. 2.13. **Графическое решение задачи**

9. Оптимальное решение.

Оптимальное решение получаем, перемещая линию уровня в направлении вектора-градиента до последнего соприкосновения с областью допустимых решений. У нас получается отрезок прямой (3). [BC] –оптимальное альтернативное решение. Координаты точки B(0;4); координаты точки C$\left(3\frac{1}{3};2\frac{2}{3}\right)$ получаем из решения системы уравнений:

$x_1 + x_2 = 6$ и $x_1 + 2{,}5x_2 = 10$

Экстремальное значение целевой функции: Z(B) = 2·0+5·4=20 (ден.ед.)

$$Z(C) = 2\cdot 3\frac{1}{3} + 5\cdot 2\frac{2}{3} = 20 \text{ (ден.ед.)}$$

Ответ: Область допустимых решений - ограниченная выпуклая – многоугольник ABCDE. Оптимальное решение достигается на отрезке [BC].

Первое решение – B(0,4).

Переменные:

$x_1 = 0$ ед. – количество продукции первого вида.

$x_2 = 4$ ед. – количество продукции второго вида.

Целевая функция:

maxZ = 20 ден.ед. – максимальный объем продукции.

Второе решение – C$\left(3\frac{1}{3};2\frac{2}{3}\right)$.

Переменные:

$x_1 = \left(3\frac{1}{3}\right)$ ед. – количество продукции первого вида.

$x_2 = \left(2\frac{2}{3}\right)$ ед. – количество продукции второго вида.

Целевая функция:

maxZ = 20 ден.ед. – максимальный объем продукции.

Индивидуальные задания

Решить графическим методом задачи линейного программирования на максимальное и минимальное значения целевой функции.

1. $Z = x_1 - 2x_2$; $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**2.** $Z = -x_1 + x_2$; $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 1 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
3. $Z = 4x_1 + x_2$; $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 16 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**4.** $Z = 2x_1 + x_2$; $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

5. $Z = 3x_1 + 8x_2$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**6.** $Z = 2x_1 + x_2$ $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 12 \\ x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$
7. $Z = x_1 + 3x_2$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**8.** $Z = 2x_1 + 3x_2$ $\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
9. $Z = x_1 + 14x_2 - 18$ $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \ge 30 \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -9 \\ -7x_1 + 3x_2 \ge -21 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**10.** $Z = x_1 + 12x_2$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ -x_1 + 2x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
11. $Z = -x_1 + x_2$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 \le 1 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**12.** $Z = x_1 + x_2$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \le 9 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
13. $Z = 3x_1 + x_2$ $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 8 \\ x_1 \le 5 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**14.** $Z = 2x_1 - 3x_2$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -2x_1 + 6x_2 \le 6 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
15. $Z = 2x_1 + 3x_2$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**16.** $Z = x_1 + 2x_2$ $\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

17. $Z = 2x_1 - 4x_2$ $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**18.** $Z = x_1 + x_2 + 2$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 3 \\ 3x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
19. $Z = 2x_1 - x_2$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 11 \\ 3x_1 - x_2 \ge 10 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**20.** $Z = -x_1 - x_2$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 1 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$

Тема 3. Симплексный метод решения задач линейного программирования

Теоретическая часть

<u>Алгоритм симплексного метода в полных таблицах при решении задач на максимум целевой функции</u>

Задачи симплексным методом решаются в симплексных таблицах, основной частью которых являются таблицы Гаусса.

1. Перейти от **исходной формы** задачи линейного программирования к **канонической** и записать **исходное опорное решение** в полную симплексную таблицу.

2. **В первую строку** симплексной таблицы записать коэффициенты целевой функции при всех переменных, причем свободный член целевой функции записать с противоположным знаком. **В первый столбец** записать коэффициенты целевой функции при базисных переменных. **Во второй столбец** записать базисные переменные, а **во вторую строку** – все переменные задачи, причем свободный член перенести в начало таблицы и обозначить a_{i0}.

3. Подсчитать **оценки** по формуле оценок: $\Delta_j = \sum_{i \in баз} c_i a_{ij} - c_j$, $j = 1 \div n$, и записать в последнюю строку таблицы.

№ табл.	c_j	$-c_0$	c_1	c_2	…	c_i	…	c_m	c_{m+1}	…	c_{j^*}	…	c_n	$k\sum c_j$	co
c_i	П / Б	a_{i0}	x_1	x_2	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_{j^*}	…	x_n	$k\sum$	$\frac{a_{i0}}{a_{ij^*}}$
c_1	x_1	a_{10}	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1j^*}	…	a_{1n}	$\sum 1$	$\frac{a_{10}}{a_{1j^*}}$
c_2	x_2	a_{20}	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2j^*}	…	a_{2n}	$\sum 2$	$\frac{a_{20}}{a_{2j^*}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…	…	…	…
c_i	x_i	a_{i^*0}	0	0	…	1	…	0	a_{im+1}	…	$a_{i^*j^*}$	…	a_{i^*n}	$\sum i^*$	$\frac{a_{i^*0}}{a_{i^*j^*}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…	…	…	…

№ табл.	c_j	$-c_0$	c_1	c_2	…	c_i	…	c_m	c_{m+1}	…	c_{j^*}	…	c_n	$k\sum c_j$	co
c_m	x_m	a_{m0}	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mj^*}	…	a_{mn}	$\sum m$	$\frac{a_{m0}}{a_{mj^*}}$
	Δ_j	$Z=\Delta_0$	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_{j^*}	…	Δ_n	$\sum \Delta_j$	

4. **Проверить решение на оптимальность** по признаку оптимальности: решение задачи на максимум целевой функции оптимально, если все оценки при переменных неотрицательные. Если критерий **выполняется**, то переход **к п. 14**, если **нет**, то переход **к п. 5**.

5. Выбрать **разрешающий столбец** по минимальной отрицательной оценке и обозначить j^*. Если наименьших отрицательных оценок несколько, то условимся выбирать разрешающий столбец по наименьшему номеру столбца с наименьшей отрицательной оценкой.

6. Если в разрешающем столбце есть хотя бы один положительный элемент, то перейти к п. 7, если нет, то целевая функция не ограничена.

7. Вычислить **симплексные отношения**, то есть отношения неотрицательных свободных членов к строго положительным элементам разрешающего столбца и записать в последний столбец.

8. По наименьшему симплексному отношению найти **разрешающую строку** и обозначить i^*. Если минимальных симплексных отношений несколько, то условимся выбирать разрешающую строку с меньшим номером среди минимальных симплексных отношений.

9. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки найти разрешающий элемент, который обозначается $a_{i^* j^*}$.

10. Пересчитать таблицу по правилу **преобразования Жордана-Гаусса**:

а) разрешающую строку делят на разрешающий элемент

$$a_{i^* j}^{нов.} = \frac{a_{ij^*}}{a_{i^* j^*}}$$

б) в разрешающем столбце элемент, стоящий на месте разрешающего равен единице, остальные элементы – нули

$$a_{ij^*}^{нов.} = 0 \quad (i \neq i^*); \quad a_{i^*j^*}^{нов.} = 1$$

в) все остальные элементы таблицы, включая контрольную сумму и строку оценок, подсчитывают по правилу прямоугольника или по формуле:

$$a_{ij}^{нов} = a_{ij} - \frac{a_{i^*j} \cdot a_{ij^*}}{a_{i^*j^*}} = \frac{a_{ij} \cdot a_{i^*j^*} - a_{i^*j} \cdot a_{ij^*}}{a_{i^*j^*}}$$

11. В разрешающей строке в столбец базисных переменных записать переменную разрешающего столбца, а в столбец коэффициентов целевой функции при базисных переменных записать коэффициент целевой функции разрешающего столбца.

12. **Контроль вычислений** осуществляется двумя способами:

а) по контрольным суммам, которые подсчитываются по общим правилам преобразований и непосредственно;

б) по оценкам, которые подсчитываются по формулам оценок (п.3) и по общим правилам преобразований.

13. Перейти к пункту 4.

14. Записать оптимальное решение и значение целевой функции.

Примечание 1. Необходимо следить, чтобы свободные члены были неотрицательными. Если свободный член отрицательный, то разрешающая строка выбрана не по минимальному симплексному отношению.

Примечание 2. Симплексное отношение может быть равным нулю, а разрешающий элемент не может быть равным нулю, так как в симплексных таблицах он всегда положительный.

Особенности решения задач линейного программирования симплексным методом

1. **Признак оптимального решения** на максимум целевой функции: решение оптимально, если все оценки при переменных неотрицательные.

2. **Признак единственного оптимального решения** в симплексных таблицах: оптимальное решение единственное, если все оценки при свободных переменных не равны нулю.

3. **Признак альтернативного оптимального решения** в симплексных таблицах: оптимальное решение альтернативное, если хотя бы одна оценка свободной переменной равна нулю.

4. **Признак неограниченности целевой функции**: задача имеет неограниченную целевую функцию, если в разрешающем столбце нет ни одного строго положительного коэффициента (в ограничениях).

5. **Признак вырожденного опорного решения** в симплексной таблице: опорное решение в симплексной таблице вырожденное, если хотя бы одна базисная переменная равна нулю, записанному в столбце свободных членов.

6. **Признак несовместности системы ограничений** в симплексной таблице: система не совместна, если в какой-либо строке свободный член положительный, а все коэффициенты при переменных неположительные (все переменные в канонической форме неотрицательные). Или система не совместна, если коэффициенты при переменных в каком-либо ограничении равны нулю, а свободный член не равен нулю (больше нуля).

7. Чтобы решить задачу **на минимум,** необходимо целевую функцию умножить на (-1) и воспользоваться алгоритмом решения задачи на максимум целевой функции. После получения оптимального решения значение целевой функции из симплексной таблицы умножить на (-1).

Контрольные вопросы

1. Какие переменные называются базисными?
2. Какие переменные называются свободными?
3. Как рассчитывается симплексное отношение?
4. Какая строка называется выделенной?
5. Как рассчитываются оценки в симплексной таблице?
6. Как находят разрешающий столбец в симплексной таблице?
7. Как находят разрешающую строку в симплексной таблице?
8. Как рассчитываются элементы в разрешающей строке?
9. Чему равны элементы разрешающего столбца?
10. Всегда ли однозначно определяется разрешающая строка?
11. Всегда ли однозначно определяется разрешающий столбец?
12. Как определить единственное или альтернативное оптимальное решение?

13. Как определить вырожденное или оптимальное решение?
14. Как определить неограниченность целевой функции?
15. Для чего используется процедура «Поиск решения»?
16. Какие отчеты формируются для отражения результатов оптимизации при использовании процедуры «Поиск решения»?
17. Каков экономический смысл теневых цен (двойственных оценок)?
18. Как оформляются исходные данные в процедуре «Поиск решений»?
19. Какие параметры необходимо указать в процедуре «Поиск решения» для решения задач линейного программирования?
20. В каком отчете показаны «теневые цены»?

Практическая часть
Пример выполнения задания

В качестве примера рассмотрим решение задачи, приведённой в теме 1. Исходная форма данной задачи выглядит следующим образом:

$$\min Z = 11x_1 + 2x_2 + 2{,}1x_3$$

$$\begin{cases} 1{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 \geq 14{,}2 \\ 80x_1 + 18x_2 + 35x_3 \geq 1650 \\ x_1 \leq 3{,}6 \\ x_j \geq 0,\ j = 1 \div 3 \end{cases}$$

Решим условную задачу в приложении «*Поиск решения*» и проанализируем двойственные оценки (теневые цены):

1. Необходимо оформить исходные данные на листе 1:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ограничения	x_1	x_2	x_3	Формулы	Тип ограничения	Константа
2	1. Баланс кормовых единиц, кг корм. ед.	1,2	0,2	0,2	=СУММПРОИЗВ(B2:D2;$B$6:$D$6)	≥	14,2
3	2. Баланс переваримого протеина, г ПП	80	18	35	=СУММПРОИЗВ(B3:D3;$B$6:$D$6)	≥	1650
4	3. Баланс концентратов в рационе, кг	1			=СУММПРОИЗВ(B4:D4;$B$6:$D$6)	≤	3,6
5	Целевая функция	11	2	2,1	=СУММПРОИЗВ(B5:D5;$B$6:$D$6)		
6	Значения по решению						
7							

Рис. 3.1. **Исходные данные**

2. Вызываем *Данные – Поиск решения*.

- в поле *Оптимизировать целевую функцию* указываем ячейку E5;
- выбираем флажок *До*: Минимум;
- в поле *Изменяя ячейки переменных* указываем ячейки, соответствующие значению переменных по решению (B6:D6);
- в поле *В соответствии с ограничениями:* добавляем ограничения условной задачи.

Описываем условия неотрицательности ставя галочку-флажок в *Сделать переменные без ограничений неотрицательными.*

В поле *Выберите метод решения:* указываем метод **Поиск решения линейных задач симплекс-методом.**

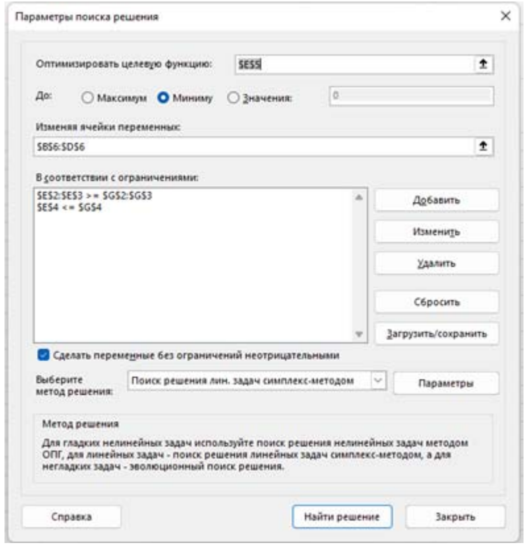

Рис. 3.2. **Поиск решения**

3. Нажимаем кнопку *Параметры* и при необходимости делаем настройку (рис. 2.3):

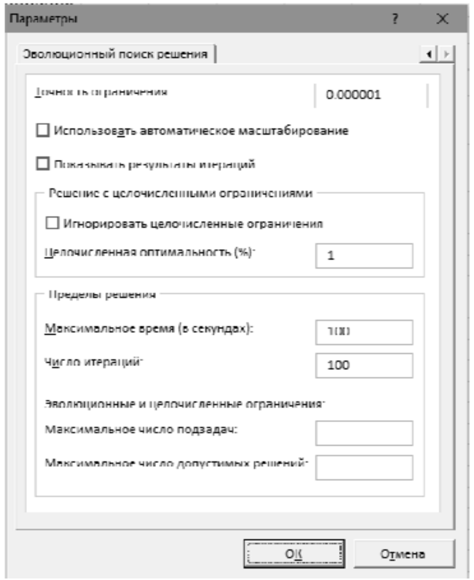

Рис. 3.3. **Параметры процедуры «Поиск решения»**

4. В диалоговом окне *Поиск решения* нажимаем кнопку *Найти решение* и сохранить отчет по *Устойчивости*.

5. Проанализируем теневые цены на листе «*Отчет по устойчивости*» (рис. 3.4).

6.

Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 12.04.2024 12:14:22

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$6	Значения по решению x1	3,6	0	11	0,835294118	1E+30
$C$6	Значения по решению x2	21,58823529	0	2	0,1	0,109230769
$D$6	Значения по решению x3	27,81176471	0	2,1	0,507142857	0,1

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$E$2	1. Баланс кормовых единиц, кг корм. ед. Формулы	14,2	9,470588235	14,2	5,253333333	2,097142857
$E$3	2. Баланс переваримого протеина, г ПП Формулы	1650	0,005882353	1650	367	472,8
$E$4	3. Баланс концентратов в рационе, кг Формулы	3,6	-0,835294118	3,6	2,823076923	3,6

Рис. 3.4. **Отчет по устойчивости**

Теневая цена показывает, насколько изменится значение целевой функции при изменении объема ограничения на единицу.

В данном случае, если количество кормовых единиц в рационе коровы увеличить на 1 кг корм. ед., себестоимость рациона возрастет на 9,5 ден. ед. А, например, увеличение в рационе переваримого протеина на 1 г практически не приведёт к изменению целевой функции, размер двойственной оценки близок к нулю (0,006). Если увеличить верхнюю границу содержания в рационе коровы концентрированных кормов на 1 кг, то себестоимость уменьшится на 0,8 ден. ед.

На *Листе 1* в строке 6 (значения по решению) выводятся значения соответствующих переменных (рис. 3.5.).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ограничения	x_1	x_2	x_3	Формулы	Тип ограни-чения	Константа
2	1. Баланс кормовых единиц, кг корм. ед.	1,2	0,2	0,2	14,2	≥	14,2
3	2. Баланс переваримого протеина, г ПП	80	18	35	1650	≥	1650
4	3. Баланс концентратов в рационе, кг	1			3,6	≤	3,6
5	Целевая функция	11	2	2,1	**141,2**		
6	Значения по решению	**3,6**	**21,6**	**27,8**			

Рис. 3.5. **Результаты решения**

Анализируя полученное решение, можно сделать вывод о том, что питательные вещества вошли в рацион по нижним границам, количество концентратов по решению равно верхней границе. Минимальная себестоимость рациона коровы составила 141,2 ден. ед.

Индивидуальные задания

Решить задачи по индивидуальным вариантам, представленным в главе 1, в приложении *«Поиск решения»,* проанализировать полученное решение и теневые цены.

Тема 4. Основы теории двойственности

Теоретическая часть

Каждой задаче линейного программирования можно записать другую задачу, которая будет двойственной к первой. Причем записанная двойственная задача обладает свойствами полезными для теоретического и экономического анализа.

Правило записи двойственных задач.

Прежде чем записать двойственную задачу необходимо прямую задачу записать в исходной форме так, чтобы целевая функция стремилась к поиску максимума, а ограничения типа больше или равно (≥) умножить на (-1) (обе части неравенства) и получить ограничение типа ≤.

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{20} \\ ... \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ln}x_n = a_{l0} \\ a_{(l+1)1}x_1 + a_{(l+1)2}x_2 + ... + a_{(l+1)n}x_n \le a_{(l+1)0} \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le a_{m0} \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; ...x_k \ge 0 \quad (k \le n) \end{cases}$$

$$\max Z = c_0 + c_1x_1 + ... + c_nx_n$$

Двойственная задача в этом случае записывается по следующим правилам:

1. Каждому ограничению прямой задачи ставится в соответствие переменная двойственной задачи, которая обозначается Y_i:

(Y_1, Y_2, …., Y_m – переменные двойственной задачи).

2. Поиск максимума целевой функции заменяется поиском минимума; коэффициентами целевой функции двойственной задачи являются свободные члены ограничений прямой задачи. Свободный член целевой функции прямой задачи C_0 без изменения переносится в целевую функцию прямой задачи:

min $T = a_{10}Y_1 + a_{20}Y_2 + … + a_{m0}Y_m + C_0$ – целевая функция двойственной задачи.

3. Ограничения двойственной задачи записываются по столбцам переменных прямой задачи. Свободными членами ограничений двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции прямой задачи. Если на переменную прямой задачи, соответствующую столбцу задано условие неотрицательности, то ограничение двойственной задачи имеет тип «≥», если условие неотрицательности не задано, то ограничение имеет тип «=»:

$$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + … + a_{m1}Y_m \ge C_1$$

$$a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + … + a_{m2}Y_m \ge C_2$$

……………………………………..

$$a_{1k}Y_1 + a_{2k}Y_2 + … + a_{mk}Y_m \ge C_k$$

$$a_{1,k+1}Y_1 + a_{2,k+1}Y_2 + … + a_{m,k+1}Y_m = C_{k+1}$$

$$a_{1n}Y_1 + a_{2n}Y_2 + … + a_{mn}Y_m = C_n$$

- система ограничений двойственной задачи.

4. Если в прямой задаче ограничение имеет вид равенства, то на соответствующую этому ограничению переменную в двойственной задаче не накладывается условие неотрицательности. Если же ограничение имеет вид неравенства (≤), то соответствующая переменная в двойственной задаче неотрицательна: $Y_1, Y_{2,…,} Y_l$ – произвольные переменные; $Y_{l+1} \ge 0$, $Y_{l+2} \ge 0, …, Y_m \ge 0$.

Принято прямую задачу называть X-задачей, а двойственную к ней Y-задачей.

Свойства двойственных задач.

Основные теоремы двойственности

Теорема 1. Достаточный признак оптимальности.

Если $\bar{X}_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ есть допустимое решение X-задачи, а $\bar{Y}_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$ есть допустимое решение Y-задачи и при этом $Z(\bar{X}_0) = T(\bar{Y}_0)$, то $\bar{X}_0$ есть оптимальное решение X-задачи, а $\bar{Y}_0$ есть оптимальное решение Y –задачи.

Равенство целевых функций прямой и двойственной задач есть достаточное условие оптимальности двух допустимых решений симметричных двойственных задач.

Теорема 2. Основная теорема двойственности.

а) Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то вторая также имеет оптимальное решение с тем же значением целевой функции.

б) Если одна из задач не имеет оптимального решения из-за неограниченности целевой функции ($Z \to \infty$ или $T \to \infty$), то система ограничений второй задачи несовместна (ОДР – пустое множество).

Теорема 3. Условия дополняющей нежесткости.

Пусть $\bar{X}^*(X_1^*, X_2^*,\ldots, X_n^*)$ есть оптимальное решение X-задачи, а $\bar{Y}^*(Y_1^*, Y_2^*,\ldots, Y_m^*)$ есть оптимальное решение Y-задачи. В этом случае должны выполняться условия дополняющей нежесткости:

если i-е ограничение X-задачи с оптимальным решением $\bar{X}^*$ обращается в строгое равенство, то соответствующая переменная Y-задачи будет строго положительна ($y_i > 0$); если i-е ограничение X-задачи выполняется как строгое неравенство, то соответствующая переменная Y-задачи будет равна нулю ($y_i = 0$) и наоборот (формулируется аналогично).

Запись оптимального решения двойственной задачи по оптимальному решению прямой задачи.

1. Значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают.
2. Оценки дополнительных переменных прямой задачи совпадают со значениями основных переменных двойственной задачи, введенных в соответствующие ограничения прямой задачи.
3. Значения дополнительных переменных двойственной задачи равны оценкам основных переменных прямой задачи.

Анализ оптимального решения с помощью двойственных оценок ограничений.

Основные переменные двойственной задачи являются двойственными оценками ограничений прямой задачи (теневыми ценами). С помощью теневых цен анализ оптимального решения осуществляется следующим образом:

1. Если тип ограничения в прямой задаче $\le$, а значение двойственной оценки:

а) нулевое, то оценка показывает, что ограничение выполняется как неравенство. Уменьшение свободного члена ограничения на величину, не превышающую значение дополнительной переменной, не повлияет на значение целевой функции;

б) ненулевое, то оценка показывает, что ограничение выполняется как равенство. Увеличение свободного члена ограничения на единицу приведет к улучшению целевой функции на величину двойственной оценки.

2. Если тип ограничения в прямой задаче $\ge$, а значение двойственной оценки:

а) нулевое, то оценка показывает, что ограничение выполняется как неравенство. Увеличение свободного члена ограничения на величину, не превышающую значение дополнительной переменной, не повлияет на значение целевой функции;

б) ненулевое, то оценка показывает, что ограничение выполняется как равенство. Увеличение свободного члена ограничения на единицу приведет к ухудшению целевой функции на величину двойственной оценки.

Двойственная оценка измеряется в единицах измерения целевой функции в расчете на единицу измерения ограничения.

Контрольные вопросы

1. Чему равняется значение целевой функции двойственной задачи?
2. Что является свободными членами ограничений двойственной задачи?
3. Что является коэффициентами целевой функции двойственной задачи?
4. Как записать решение двойственной задачи из решения прямой задачи?
5. Каков экономический смысл двойственных оценок?
6. Что представляют собой коэффициенты замещения?
7. Что показывают положительные коэффициенты замещения?
8. Что показывают отрицательные коэффициенты замещения?
9. Что такое косвенный эффект?
10. Что представляет собой чистый эффект?

Практическая часть
Пример выполнения задания

Каждой прямой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие двойственную. Рассмотрим экономический смысл двойственной задачи к задаче, приведённой в теме 1. Прямая задача выглядит следующим образом:

$\min Z = 11x_1 + 2x_2 + 2{,}1x_3$

$$\begin{cases} 1{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 \geq 14{,}2 \\ 80x_1 + 18x_2 + 35x_3 \geq 1650 \\ x_1 \leq 3{,}6 \\ x_j \geq 0,\ j = 1 \div 3 \end{cases}$$

Преобразуем прямую задачу к виду, готовому для записи двойственной задачи, согласно правилам, описанным в теоретической части:

$\max Z = -11x_1 - 2x_2 - 2{,}1x_3$

$$\begin{cases} -1{,}2x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}2x_3 \leq -14{,}2 \\ -80x_1 - 18x_2 - 35x_3 \leq -1650 \\ x_1 \leq 3{,}6 \\ x_j \geq 0,\ j = 1 \div 3 \end{cases}$$

1. Вводим переменные двойственной задачи: y_1, y_2, y_3 – условные цены соответствующих ресурсов.

2. Записываем целевую функцию двойственной задачи:

найти $\min T = -14{,}2y_1 - 1650y_2 + 3{,}6y_3$

3. Записываем систему ограничений двойственной задачи:

$-1{,}2y_1 - 80y_2 + y_3 \geq -11$

$-0{,}2y_1 - 18y_2 + 0y_3 \geq -2$

$-0{,}2y_1 - 35y_2 + 0y_3 \geq -2{,}1$

4. Вводим условия неотрицательности для переменных двойственной задачи:

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$

Таким образом, необходимо определить оптимальный план $Y^*(y_1, y_2, y_3)$ при условиях:

$$\begin{cases} -1{,}2y_1 - 80y_2 + y_3 \geq -11 \\ -0{,}2y_1 - 18y_2 \geq -2 \\ -0{,}2y_1 - 35y_2 \geq -2{,}1 \\ y_i \geq 0,\ i = 1 \div 3 \end{cases}$$

$\min T = -14{,}2y_1 - 1650y_2 + 3{,}6y_3$

Ограничения задачи отражают условия получения запланированной цены (чтобы получить плановую цену, необходимо затратить соответствующее количество кормов), а целевая функция - минимальную стоимость используемых питательных веществ.

Решим Y-задачу в MS Excel «Поиск решения». Результаты решения представлены на рисунке 4.1.

Ограничения	y_1	y_2	y_3	Формула	Тип ограничения	Свободный член
ограничение №1	-1,2	-80,0	1,0	-11,0	≥	-11,0
ограничение №2	-0,2	-18,0		-2,0	≥	-2,0
ограничение №3	-0,2	-35,0		-2,1	≥	-2,1
Целевая функция	-14,2	-1650,0	3,6	**-141,18**		
Значения переменных	**9,47**	**0,01**	**0,84**			

Рис. 4.1. **Результаты решения двойственной задачи в MS Excel «Поиск решения»**

Как видно по результатам решения, значения целевых функций прямой и двойственных задач равны, значения основных переменных двойственной задачи равны двойственным оценкам ограничений прямой задачи (рис. 3.4). Анализ теневых цен представлен в предыдущей теме.

Индивидуальные задания

Составить двойственную задачу к прямой задаче по индивидуальным вариантам, представленным в главе 1, и решить в приложении *«Поиск решения»,* проанализировать полученное решение и теневые цены.

Тема 5. Транспортная задача

Теоретическая часть

1. Постановка задачи и математическая формализация условий при решении на максимум целевой функции

Транспортная задача – одна из распространенных задач линейного программирования. Она позволяет определить оптимальный план перевозок груза. Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы и при решении некоторых экономических задач, не имеющих ничего общего с транспортировкой груза. Рассмотрим задачу по размещению производства сельскохозяйственных культур по участкам.

В общем виде задачу можно представить следующим образом: необходимо обеспечить посев m культур, производящих однородную продукцию, в количестве $a_1, a_2,\ldots, a_m$ га по n участкам, которые имеют площадь соответственно $b_1, b_2,\ldots, b_n$. Известна урожайность культур с каждого участка (C_{ij}). Найти оптимальный план посева культур, который обеспечивал бы максимальный валовой сбор продукции. При этом план посева культур должен быть выполнен и площади всех участков использованы.

Пусть X_{ij} –площадь i-ой культуры, возделываемой на j-ом участке.

Первая группа ограничений – план посева культур должен быть выполнен:

$$X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} = a_1$$

$$X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} = a_2$$

……………………………………..

$$X_{m1} + X_{m2} + \ldots + X_{mn} = a_m$$

Вторая группа ограничений – площади участков должны быть полностью засеяны:

$$X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{m1} = b_1$$

$$X_{12} + X_{22} + \ldots + X_{m2} = b_2$$

……………………………………..

$$X_{1n} + X_{2n} + \ldots + X_{mn} = b_m$$

$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1 \div m; \; j = 1 \div n$

Целевая функция:

$$\max Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \ldots + C_{1n}X_{1n} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + \ldots + C_{2n}X_{2n} + \ldots + C_{mn}X_{mn}$$

В общем виде математическая постановка задачи выглядит следующим образом:

найти $\max Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, ..., m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, ..., n);$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, ..., m; j = 1, ..., n).$$

Для записи задачи будем использовать распределительную таблицу транспортной модели (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Вид распределительной таблицы

№ таблицы	Участки	B_1	…	B_i	…	B_n
Культуры	ПУ / ПК	b_1	…	b_j	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Для решения задачи необходимо, чтобы общая величина планируемых площадей культур (**ПК**) равнялась сумме площадей участков (**ПУ**), т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, Такая задача называется **закрытой (сбалансированной)**.

<u>Теорема о существовании решения транспортной задачи.</u>

Любая транспортная задача закрытого типа имеет опорное и оптимальное решение.

Количество базисных переменных (занятых клеток) равно (m+n -1), т.к. ранг матрицы (r = m+n -1) равен сумме числа культур и участков без единицы.

2. Алгоритм решения задачи по типу транспортной на максимум целевой функции

Решение задачи основано на принципе последовательного улучшения опорных решений, который применяется в методе потенциалов.

2.1. Метод потенциалов

1. Условия закрытой задачи записываем в распределительную таблицу.

2. В распределительной таблице находим исходное опорное решение, полученное любым методом (п. 4.2.2).

3. Подсчитываем значение целевой функции для найденного опорного решения: $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

4. Вычисляем потенциалы для базисных (занятых) клеток по формуле: $c_{ij} = u_i + v_j$, *где* $u_1 = 0$.

5. Подсчитываем оценки свободных клеток по формуле:

$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

6. Признак оптимального решения на <u>максимум</u> целевой функции: если все оценки свободных клеток (переменных) неположительные, переходим к **пункту 8**. Если есть положительные оценки, то переход к **пункту 7**.

7. Выполняем **преобразования однократного замещения** – переход к новому опорному решению в новой таблице:

а) определяется переменная, которая **войдет в базис**. Для этого выбирается клетка с наибольшей положительной оценкой. Для нее строится **цикл.** Если имеются несколько клеток с равными максимальными положительными значениями оценок Δ_{ij}, то цикл строится для клетки с наибольшим коэффициентом целевой функции, т.е. с наибольшей урожайностью культур.

Циклом свободной клетки называется замкнутый набор клеток распределительной таблицы, соединенных отрезками прямых, удовлетворяющих следующим условиям:

- цикл начинается в свободной клетке;
- цикл содержит **одну** свободную клетку, а остальные вершины являются занятыми (базисными);
- число вершин четное.

В распределительной таблице цикл выделяется $\square$. Каждая свободная клетка распределительной таблицы, в которой записано опорное решение, имеет единственный цикл.

б) В цикле выбирается переменная, которая **выйдет из базиса**.

В свободную клетку цикла ставится знак (+), затем поочередно проставляют знаки (-) и (+). Среди вершин цикла со знаком (-) выбирают базисную переменную с минимальным значением. Обозначим выбранную переменную λ, т.е. $\lambda = \min\{x_{ij\text{ в отрицательных клетках цикла}}\}$.

Эта переменная **выйдет из базиса**, т.е. клетка станет свободной. Если имеются несколько равных значений базисных переменных в отрицательных клетках (вершинах) цикла с минимальным значением, равным λ, то условимся выбирать из них переменную с наименьшей урожайностью культур и делать ее свободной, а значения остальных базисных переменных в этих вершинах после перемещения λ станут равными нулю.

в) Строят новую распределительную таблицу, в которой λ перемещают по циклу, т.е. прибавляют к переменным, стоящим у вершин со знаком (+), и вычитают от переменных, стоящих у вершин со знаком (-). Все остальные переменные, не входящие в цикл, остаются неизменными.

г) Переход к пункту 3. Процесс вычислений продолжается до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

8. Для оптимального решения выписывают значения целевой функции и переменных: значение max Z и $\mathbf{X}^* = (x_{ij})$.

Проверяют оптимальное решение на единственность.

Оптимальное решение единственное, если все оценки свободных переменных не равны нулю.

Оптимальное решение альтернативное, если **хотя бы одна** оценка свободной переменной равна нулю. Чтобы найти альтернативное решение необходимо для свободной переменной с нулевым значением оценки построить цикл и выполнить преобразования в соответствии с пунктом 7 алгоритма.

<u>Примечание</u>. Оценки свободных клеток можно подсчитывать по формуле: $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$. В этом случае признаком оптимальности являются неотрицательные значения оценок свободных клеток (переменных). Для построения цикла выбирается клетка с наименьшей отрицательной оценкой.

2.2. Получение исходного опорного решения

<u>а) Метод северо-западного угла</u>

Для начала решения задачи необходимо иметь какой-то исходный опорный план. Приведем пример построения такого опорного плана, получивший название метод "северо-западного угла". При использовании этого приема значения коэффициентов целевой функции c_{ij}, а именно урожайность культур, не учитываются.

ПУ / ПК	b_1	b_2	b_3	…	b_n
a_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}
a_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}
…	…	…	…	…	…
a_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	…	x_{mn}

Начнем заполнение таблицы с клетки [1,1], расположенной вверху слева, то есть с "северо-западного угла". Вместо x_{11} впишем число $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Возможны два варианта:

1. $\min(a_1, b_1) = a_1$, то есть $a_1 < b_1$. Тогда, запланировав посев первой культуры в размере $\mathbf{a_1}$ га на первом участке, мы полностью выполняем план посева по данной культуре, и возделывание ее на других участках рассматриваться уже не будет. Таким образом, первая строка исключается (вычеркивается) из дальнейшего рассмотрения. Неиспользуемая площадь первого участка останется в размере $b_1 - a_1$. Клетка [1,1] таблицы объявляется базисной (занятой). Наша таблица примет вид:

ПУ / ПК	$b_1 - a_1$	b_2	b_3	…	b_n
$\cancel{a_1}$	a_1				
a_2					
a_3					
…					
a_m					

Оставшаяся незаполненной часть таблицы вновь по структуре та же, что и исходная таблица, только в ней **на одну строку меньше** (ее не рассматриваем).

2. $\min(a_1, b_1) = b_1$, то есть $b_1 < a_1$. Тогда запланировав посев первой культуры на первом участке в размере b_1 га, мы полностью используем площадь первого участка, и другие культуры на нем возделываться уже не могут. Таким образом, первый столбец исключается (вычеркивается) из дальнейшего рассмотрения. Для первой культуры еще необходимо предусмотреть посев в размере $a_1 - b_1$. Наша таблица примет вид:

ПУ / ПК	$\cancel{b_1}$	b_2	b_3	…	b_n
$a_1 - b_1$	b_1				
a_2					
a_3					
…					
a_m					

Оставшаяся незаполненной часть таблицы вновь по структуре та же, что и исходная таблица, только в ней **на один столбец меньше** (его не рассматриваем).

3. $a_1 = b_1$. В этом случае из дальнейшего рассмотрения строка или столбец исключаются (вычеркиваются) произвольно:

а) можно выбрать так, что дальше не рассматриваются клетки распределительной таблицы в столбце (случай 2):

ПУ / ПК	$\cancel{b_1}$	b_2	b_3	…	b_n
0	b_1				
a_2					
a_3					
…					
a_m					

б) можно выбрать так, что дальше не рассматриваются клетки распределительной таблицы в строке (случай 1):

ПУ / ПК	0	b_2	b_3	…	b_n
$\cancel{a_1}$	a_1				
a_2					
a_3					
…					
a_m					

Затем все можно повторить, продолжая заполнять оставшуюся часть таблицы, начиная с левого верхнего, "северо-западного" угла, пока не будут распределены все планируемые площади культур по участкам.

б) Метод наибольшего элемента

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы (матрицы) урожайностей (коэффициентов целевой функции) выбирают наибольшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i и b_j. Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую i-ой культуре, план посева которой выполняется, либо столбец, соответствующий j-ому участку, площадь которого полностью использована. Из оставшейся части таблицы

урожайностей снова выбирают наибольшую величину, и процесс распределения площадей культур по участкам продолжают до тех пор, пока план посева культур не будет выполнен, а площади участков полностью использованы.

Метод наибольшего элемента может быть применен к строке (**метод наибольшего элемента в строке**), к столбцу (**метод наибольшего элемента в столбце**) и к таблице (**метод наибольшего элемента в таблице**).

Метод наибольшего элемента в строке

Выполняем действия для первой строки распределительной таблицы, назовём её *i*-ой строкой:

1. В *i*-ой строке распределительной таблицы выбирается клетка с наибольшей урожайностью. Сравниваются планируемая площадь i-ой культуры a_i и площадь j-го участка b_j для этой клетки:

а) если $a_i > b_j$, то в клетку записывается $x_{ij} = b_j$, клетка объявляется базисной, рассчитывается для этой строки величина оставшейся площади посева культуры $a_i^{нов.} = a_i - b_j$, *j*-ый столбец исключается из рассмотрения таблицы. Далее переходим к пункту 1 для новой таблицы с исключённым столбцом;

б) если $a_i < b_j$, то в клетку записывается $x_{ij} = a_i$, клетка объявляется базисной, рассчитывается для *j*-ого столбца неиспользуемая еще площадь *j*-ого участка $b_j^{нов.} = b_j - a_i$, *i*-ая строка исключается из рассмотрения таблицы. Далее опять переходим к пункту 1, но уже для новой таблицы с исключённой строкой;

в) если $a_i = b_j$, то *столбец или строка* исключается произвольно. Например, в клетку $[i, j]$ записывается $x_{ij} = a_i$, клетка объявляется базисной, рассчитывается для этой строки $b_j^{нов.} = 0$, *i*-ая строка исключается из рассмотрения таблицы. Далее опять переходим к пункту 1, но уже для новой таблицы с исключённой строкой.

При заполнении последней клетки таблицы строка и столбец исключаются одновременно.

Примечание: если в рассматриваемой строке несколько клеток имеют наибольшую урожайность, то в первую очередь принято рассматривать клетку с наименьшим номером столбца.

Контрольные вопросы

1. Какая задача называется: закрытой, открытой?
2. Чему равно число базисных переменных закрытой задачи?
3. Как определить исходное опорное решение методом «северо-западного угла»?
4. Как определить исходное опорное решение методом наибольшего элемента в строке? в столбце? в матрице?
5. Как проверить найденное опорное решение задачи на оптимальность?
6. Раскройте метод потенциалов, используемый для нахождения оптимального решения рассматриваемой задачи.
7. Как осуществляется выбор переменной, выводимой из списка базисных переменных?
8. Как осуществляется выбор переменной, вводимой в список базисных переменных? Правила построения цикла.
9. Как выбирается клетка для построения цикла, если имеются несколько равных максимальных значений Δ_{ij}?
10. Как выбирается λ при решении на максимум целевой функции?
11. Какой признак альтернативного оптимума?
12. Как найти альтернативное решение?
13. Как выписать оптимальное решение из распределительной таблицы?

Практическая часть
Пример выполнения работы

Задача. Сельскохозяйственное предприятие планирует посеять 30 га пшеницы, 20 га ржи, 20 га овса. Поле зерновых в севообороте состоит из трех участков, имеющих площадь соответственно 25, 35, 10 га. Известна урожайность зерновых с каждого участка (табл. 4.2). Найти оптимальный план посева зерновых, который обеспечивал бы максимальный валовой сбор зерна.

Таблица 4.2

Урожайность зерновых культур по участкам, ц/га

Название культур	Участок		
	I	II	III
Пшеница	20	15	18
Рожь	16	18	22
Овес	22	17	23

В такой постановке задача может быть решена алгоритмом транспортной задачи. В качестве ресурсов (Р) здесь выступают площади участков, а потребностями (П) являются планируемые площади посевов зерновых культур.

1. Проверим, является ли данная задача закрытой.

25 + 35 + 10 = 70 – сумма ресурсов (сумма площадей трех участков);

30 + 20 + 20 = 70 – сумма потребностей (планируемая площадь зерновых культур).

Так как сумма ресурсов равняется сумме потребностей, то данная задача является закрытой.

2. Составляем распределительную таблицу и находим исходное опорное решение одним из методов. Например, методом максимального элемента в строке.

3. Получим исходное опорное решение:

Культура	Р / П	Участок		
		I	II	III
		25	35	10
Пшеница	30	20 **25**	15	18 **5**
Рожь	20	16	18 **15**	22 **5**
Овес	20	22	17 **20**	23

4. Проверяем найденное опорное решение на оптимальность. Для этого:

- определим потенциалы по формуле $u_i + v_j = c_{ij}$ – для занятых клеток, $u_1 = 0$;
- подсчитаем оценки свободных клеток по формуле:

$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$;

- при решении на максимум все оценки должны быть неположительные, тогда получено оптимальное решение.

5. Промежуточная таблица:

Культура	Р / П	Участок			u_i
		I	II	III	
		25	35	10	
Пшеница	30	20 **25**	15	18 **5**	0
Рожь	20	16	18 + **15**	22 – **5**	4
Овес	20	22	17 – **20**	23 +	3
v_j		20	14	18	

6. Новое опорное решение проверяем на оптимальность:

Δ_{12} = 15 – (14+0) = 1 Δ_{31} = 22 – (20+3) = - 1

Δ_{21} = 16 – (20+4) = - 8 Δ_{33} = 23 – (18+3) = 2

Так как есть положительные оценки, то оптимальный план еще не получен.

7. Выбирается переменная, которая войдет в базис. Выбираем клетку с наибольшей положительной оценкой. Это клетка [3,3]. Для нее строится цикл.

8. Выбирается переменная, которая выйдет из базиса.

Около свободной клетки цикла [3,3] ставится знак (+), затем поочередно проставляют знаки (-) и (+). Среди вершин со знаком (-) выбирают минимальное значение переменной (λ), т.е. λ равно минимальному значению из значений базисных переменных в отрицательных (четных) вершинах (клетках) цикла: λ= min{x_{ij}в клетках со знаком «-»}, λ= min{5; 20} = 5.Минимальное значение имеет переменная в клетке [2,3]. Эта переменная выйдет из базиса, т.е. клетка станет свободной. Если имеются несколько равных значений базисных переменных в отрицательных вершинах (клетках) цикла с минимальным значением, равным λ, то условимся выбирать из них переменную с меньшим коэффициентом целевой функции (например, с меньшей урожайностью культур) и делать ее свободной. Значения остальных базисных переменных в этих вершинах после перемещения станут равными нулю.

9. Строим новую распределительную таблицу, в которой λ прибавляем к переменным, стоящим у вершин со знаком (+), и вычитаем из переменных у вершин со знаком (-). Все остальные компоненты плана распределения площадей, не входящие в цикл, остаются неизменными.

Новое опорное решение:

Культура	Р / П	Участок			u_i
		I	II	III	
		25	35	10	
Пшеница	30	20 **25**	15 +	18 **5** –	0
Рожь	20	16	18 **20**	22	6
Овес	20	22	17 – **15**	23 + **5**	5
v_j		20	12	18	

10. Новое опорное решение проверяем на оптимальность:

Δ_{31} = 22 – (20+3) = - 1 Δ_{23} = 22 – (18+6) = -2

Δ_{33} = 23 – (18+3) = 2 Δ_{31} = 22 – (20+5) = -3

Так как не все оценки неположительные ($\leq$ 0), то оптимальное решение еще не получено. Клетка [1,2] имеет положительную оценку, следовательно, соответствующая переменная (x_{12}) войдет в базис. Для нее строится цикл (см. табл. в п.9).

11. Выбирается переменная, которая выйдет из базиса.

Около вершины свободной клетки цикла [1,2] ставится знак (+), затем поочередно проставляют знаки (-) и (+), λ= min{15; 5} = 5. Минимальное значение имеет переменная в клетке [1,3]. Эта переменная выйдет из базиса, т.е. клетка станет свободной. Строят новую распределительную таблицу, в которой λ прибавляют к переменным, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от переменных у вершин со знаком (-). Все остальные компоненты плана распределения площадей, не входящие в цикл, остаются неизменными.

Культура	Р / П	Участок I	Участок II	Участок III	u_i
		25	35	10	
Пшеница	30	20 **25**	15 **5**	18	0
Рожь	20	16	18 **20**	22	3
Овес	20	22	17 **10**	23 **10**	2
v_j		20	15	21	

12. Новое опорное решение проверяется на оптимальность:

$\Delta_{13} = 18 - (21+0) = -3$ $\Delta_{23} = 22 - (21+3) = -2$

$\Delta_{21} = 16 - (20+3) = -7$ $\Delta_{31} = 22 - (20+2) = 0$

Так как все оценки неположительные, то получено оптимальное решение.

Таким образом, площади пшеницы будут составлять 25 га на первом участке и 5 га на втором участке, ржи – 20 га на втором участке, овса – 10 га на втором участке и 10 га на третьем участке. Валовой сбор зерна составит:

max $Z = 20\cdot25 + 15\cdot5 + 18\cdot20 + 17\cdot10 + 23\cdot10 = 1335$ (ц).

Данная задача имеет альтернативное решение, т.к. оценка $\Delta_{31}=0$.

13. Найдем альтернативное решение. Построим для клетки [3,1] цикл:

Культура	Р / П	Участок I	Участок II	Участок III	u_i
		25	35	10	
Пшеница	30	20 – **25**	15 + **5**	18	0
Рожь	20	16	18 **20**	22	3
Овес	20	**22** +	17 – **10**	23 **10**	2
v_j		20	15	21	

$\lambda = \min\{25; 10\} = 10$.

14. После преобразований однократного замещения получаем второе оптимальное решение:

Культура	Р / П	Участок I	Участок II	Участок III
		25	35	10
Пшеница	30	20 **15**	15 **15**	18
Рожь	20	16	18 **20**	22
Овес	20	22 **10**	17	23 **10**

Получен второй вариант распределения площадей культур по участкам:

Культура	I участок	II участок	III участок
Пшеница	15 га	15 га	-
Рожь	-	20 га	-
Овес	10 га	-	10 га

Валовой сбор составит: max $Z = 20\cdot15 + 15\cdot15 + 18\cdot20 + 22\cdot10 + 23\cdot10 = 1335$ (ц).

Индивидуальные задания

В состав севооборота входят зерновые культуры, которые представлены пшеницей, ячменем, овсом. Поле зерновых состоит из участков. Планируется под культуры отвести определенные площади. Известна урожайность зерновых культур на каждом участке.

Составить оптимальный план посева зерновых культур так, чтобы обеспечить максимум валового сбора зерна.

Таблица 4.3

Варианты заданий

Номер варианта	Планируемые площади	Номера участков	Номер варианта	Планируемые площади	Номера участков
1	а	3,4,5	11	л	1,2,3,5
2	б	1,3,5	12	м	1,2,4,5
3	в	1,3,4,5	13	н	2,3,5,6
4	г	1,2,3	14	о	2,4,5
5	д	1,2,3	15	п	1,2,3
6	е	2,4,5,6	16	е	1,3,4
7	ж	1,2,4,6	17	в	2,4,5,7
8	з	2,3,5,6	18	г	2,6,7
9	и	2,4,5,6	19	ж	1,4,7
10	к	1,2,3,5,6	20	к	1,5,6,7

Таблица 4.4

Урожайность зерновых культур по участкам, ц/га

Название культур	Номера участков						
	1	2	3	4	5	6	7
Пшеница	22	20	25	19	17	30	28
Ячмень	16	18	21	24	19	27	23
Овес	30	20	25	22	23	19	21

Таблица 4.5

Планируемые площади зерновых культур, га

Название культур	Варианты														
	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	н	о	п
Пшеница	30	20	20	23	15	15	20	25	40	30	10	25	14	18	22
Ячмень	20	15	30	12	15	20	20	15	10	20	15	25	16	12	13
Овес	10	15	30	10	15	30	35	10	15	20	35	25	20	25	10

Таблица 4.6

Площади участков, га

Номера участков						
1	2	3	4	5	6	7
20	10	15	30	15	10	25

Тема 6. Задачи о назначениях

Теоретическая часть

Сформулируем задачу о назначениях в общем виде: имеется n кандидатов (работников) для выполнения n работ. Известны затраты каждого i-го кандидата ($i = 1 \div n$) на выполнение каждой j-ой работы ($j = 1 \div n$). Обозначим эти затраты через c_{ij}. Они задаются квадратной матрицей:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots\dots & & \dots\dots & & \dots\dots & \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots\dots & & \dots\dots & & \dots\dots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Требуется распределить кандидатов на работы (найти назначение) так, чтобы суммарные затраты на выполнение работ были бы минимальные. При этом учитываются условия, что каждый кандидат может быть назначен только на одну работу, и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом.

Пусть X_{ij} – переменная. Она может равняться 1, если i-й кандидат назначается на выполнение j-ой работы; равняться 0 в противном случае.

Условие, что каждый кандидат выполняет только одну работу, записывается: $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1, (i = 1 \div n)$.

Условие, что каждая работа может выполняться одним кандидатом, записывается: $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1, (j = 1 \div n)$.

Целевая функция задачи имеет вид: $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$.

В целевую функцию будут входить только те значения c_{ij} ($i = 1 \div n$, $j = 1 \div n$), для которых $X_{ij} = 1$. Это означает, что при определении значения целевой функции должны суммироваться только затраты по полученным оптимальным назначениям i-го кандидата на j-ую работу.

В качестве кандидатов могут выступать любые виды ресурсов, а в качестве работ – объекты, на которые эти ресурсы могут быть распределены. Задачи могут решаться не только на минимум целевой функции, но и на максимум.

Венгерский алгоритм решения задачи на минимум целевой функции

1. В каждой строке матрицы определяют минимальный элемент и вычитают его из всех элементов соответствующей строки. Цель данного шага – получение нулей в каждой строке.

2. В преобразованной матрице в каждом столбце определяют минимальный элемент и вычитают его из всех элементов соответствующего столбца. Цель данного шага – получение нулей в каждом столбце.

3. Проверка на оптимальность.

Если в каждой строке и каждом столбце преобразованной матрицы выбрать по одному нулевому элементу так, чтобы назначения не совпадали, то полученное решение будет считаться оптимальным (переход к пункту 7). Если решение не найдено, то переход к пункту 4.

4. Проводят минимальное число вертикальных и горизонтальных прямых через некоторые столбцы и строки так, чтобы все нули оказались вычеркнутыми.

5. Среди невычеркнутых элементов выбирают наименьший.

6. Этот элемент вычитают из каждого невычеркнутого и прибавляют к каждому элементу, стоящему на пересечении проведенных прямых. Остальные элементы остаются без изменения. Переходим к пункту 3.

7. Запись оптимального решения и определение значения целевой функции.

Примечание к пункту 3. При поиске оптимального назначения из матрицы выбирают строку, содержащую наименьшее число нулевых элементов. Отмечают ноль (можно обвести в квадратик) и вычеркивают из рассмотрения столбец, в котором он стоит, и строку. Аналогично проводят действия и с остальными строками. Назначения являются оптимальными, если число отмеченных нулей равно n.

Примечание. Если какой-либо ресурс не может быть назначен на какой-то объект, то соответствующий элемент матрицы затрат равен большому числу М.

Особенности решения задачи на максимум

При решении задачи на максимум целевой функции следует все элементы исходной матрицы (c_{ij}) умножить на «-1». Чтобы матрица не содержала отрицательных элементов надо сложить все элементы новой матрицы с достаточно большим положительным числом (например, с максимальным элементом исходной матрицы (c_{ij})). Затем задачу решают по описанному ранее алгоритму на минимум.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой задача о назначениях?
2. Какие условия учитываются в задаче?
3. Какие значения могут принимать переменные?
4. Как формулируется алгоритм венгерского метода решения задачи?
5. Каков признак оптимальности полученного решения?
6. Как определяется значение целевой функции?
7. В чем особенность решения задачи на максимум целевой функции?

Практическая часть

Пример выполнения задания

Задача. Агропромышленной организации для упаковки четырех видов продукции требуется четыре единицы специализированного оборудования. Производительность каждой единицы при упаковывании определенной продукции задана матрицей:

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 14 & 7 \\ 10 & 6 & 5 & 12 \\ 13 & 9 & 11 & 4 \\ 15 & 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Определить, как следует закрепить продукцию за оборудованием так, чтобы суммарная производительность была максимальной.

1. Умножаем каждый элемент матрицы на «-1»:

$$\begin{pmatrix} -8 & -11 & -14 & -7 \\ -10 & -6 & -5 & -12 \\ -13 & -9 & -11 & -4 \\ -15 & -11 & -7 & -9 \end{pmatrix}$$

2. Сложим элементы матрицы с максимальным элементом исходной матрицы (15):

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 8 \\ 5 & 9 & 10 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 11 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Находим минимальные элементы в строках и вычитаем их из каждого элемента соответствующей строки:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Находим минимальный элемент в столбцах и вычитаем их из каждого элемента соответствующего столбца:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Проверяем, можно ли найти оптимальное назначение. Полное назначение не получено, так как третий и четвертый вид продукции может упаковывать только первый станок, что противоречит условию.

6. Вычеркиваем первую строку и столбцы 1 и 2:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Определяем минимальный элемент из невычеркнутых: min $\{3, 7, 1, 2, 1, 8\} = 1$.

8. Вычитаем «1» из каждого невычеркнутого элемента матрицы и прибавляем к каждому элементу, стоящему на пересечении прямых, получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & \boxed{0} & 8 \\ 2 & 2 & 6 & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 9 \\ \boxed{0} & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Проверяем на оптимальность. Решение оптимальное и альтернативное:

$x_{13} = 1$; $x_{24} = 1$; $x_{32} = 1$; $x_{41} = 1$.

min $Z = 14 + 12 + 9 + 15 = 50$ и

$x_{13} = 1$; $x_{24} = 1$; $x_{31} = 1$; $x_{42} = 1$.

min $Z = 14 + 12 + 13 + 11 = 50$.

Остальные переменные равны нулю.

Индивидуальные задания

Задача 1. Сельскохозяйственной организации для предоставления в налоговый орган необходимо подготовить следующие документы:

1. Бухгалтерский баланс.
2. Отчет о финансовых результатах.
3. Отчет об изменениях капитала.
4. Отчет о движении денежных средств.
5. Отчет о средствах целевого финансирования.

Данными документами занимаются пять специалистов с определенными затратами времени.

Необходимо распределить специалистов так, чтобы время на подготовку документов было минимальным.

Варианты

1.

$$\begin{pmatrix} 19 & 24 & 17 & 7 & 12 \\ 22 & 14 & 23 & 25 & 21 \\ 13 & 8 & 11 & 18 & 16 \\ 14 & 13 & 22 & 16 & 20 \\ 12 & 16 & 9 & 11 & 20 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 18 & 16 & 17 & 14 & 13 \\ 16 & 17 & 15 & 13 & 12 \\ 17 & 15 & 17 & 14 & 17 \\ 14 & 14 & 15 & 15 & 13 \\ 16 & 16 & 13 & 17 & 21 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 24 & 20 & 17 & 18 & 26 \\ 25 & 27 & 18 & 26 & 29 \\ 24 & 13 & 20 & 16 & 15 \\ 16 & 21 & 28 & 23 & 11 \\ 19 & 15 & 12 & 17 & 22 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 22 & 15 & 19 & 24 & 26 \\ 30 & 14 & 28 & 29 & 27 \\ 15 & 16 & 13 & 14 & 22 \\ 28 & 29 & 31 & 12 & 14 \\ 19 & 14 & 13 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 23 & 28 & 14 & 24 & 21 \\ 17 & 23 & 24 & 7 & 12 \\ 16 & 17 & 13 & 22 & 19 \\ 8 & 12 & 16 & 11 & 19 \\ 10 & 13 & 12 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} 16 & 16 & 15 & 15 & 15 \\ 18 & 14 & 15 & 17 & 21 \\ 15 & 18 & 17 & 18 & 16 \\ 14 & 16 & 18 & 17 & 16 \\ 15 & 18 & 16 & 19 & 15 \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} 22 & 26 & 20 & 19 & 28 \\ 29 & 27 & 28 & 20 & 31 \\ 15 & 26 & 18 & 22 & 17 \\ 23 & 18 & 25 & 30 & 13 \\ 17 & 21 & 19 & 14 & 24 \end{pmatrix}$$

8.

$$\begin{pmatrix} 27 & 11 & 25 & 26 & 24 \\ 12 & 13 & 10 & 11 & 19 \\ 19 & 13 & 16 & 21 & 23 \\ 25 & 26 & 28 & 9 & 11 \\ 16 & 11 & 10 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

9.

$$\begin{pmatrix} 17 & 16 & 19 & 25 & 23 \\ 15 & 19 & 12 & 14 & 23 \\ 25 & 17 & 26 & 28 & 24 \\ 16 & 11 & 14 & 21 & 18 \\ 22 & 27 & 20 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

10.

$$\begin{pmatrix} 10 & 13 & 11 & 14 & 10 \\ 9 & 11 & 13 & 13 & 11 \\ 10 & 13 & 12 & 13 & 11 \\ 11 & 11 & 10 & 10 & 10 \\ 13 & 9 & 10 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

11.

$$\begin{pmatrix} 24 & 23 & 20 & 20 & 21 \\ 22 & 21 & 21 & 19 & 23 \\ 23 & 23 & 21 & 20 & 22 \\ 20 & 21 & 20 & 21 & 20 \\ 22 & 19 & 26 & 23 & 20 \end{pmatrix}$$

12.

$$\begin{pmatrix} 22 & 26 & 27 & 23 & 25 \\ 21 & 24 & 25 & 22 & 26 \\ 26 & 26 & 26 & 23 & 24 \\ 22 & 23 & 23 & 24 & 23 \\ 30 & 25 & 25 & 26 & 25 \end{pmatrix}$$

13.

$$\begin{pmatrix} 30 & 16 & 25 & 26 & 23 \\ 25 & 26 & 19 & 9 & 14 \\ 19 & 15 & 18 & 24 & 21 \\ 14 & 18 & 10 & 13 & 21 \\ 15 & 14 & 12 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

14.

$$\begin{pmatrix} 27 & 13 & 15 & 16 & 12 \\ 15 & 14 & 17 & 17 & 17 \\ 16 & 14 & 17 & 18 & 13 \\ 14 & 15 & 15 & 14 & 13 \\ 16 & 17 & 13 & 16 & 21 \end{pmatrix}$$

15.

$$\begin{pmatrix} 20 & 19 & 22 & 28 & 26 \\ 28 & 20 & 29 & 31 & 27 \\ 18 & 22 & 15 & 17 & 26 \\ 25 & 30 & 23 & 13 & 18 \\ 19 & 14 & 17 & 24 & 21 \end{pmatrix}$$

16.

$$\begin{pmatrix} 21 & 17 & 20 & 26 & 23 \\ 32 & 18 & 27 & 28 & 25 \\ 16 & 20 & 12 & 15 & 23 \\ 27 & 28 & 21 & 11 & 16 \\ 17 & 16 & 14 & 21 & 22 \end{pmatrix}$$

17.

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 11 & 14 & 11 \\ 10 & 8 & 13 & 12 & 12 \\ 14 & 13 & 12 & 13 & 10 \\ 12 & 9 & 10 & 10 & 8 \\ 13 & 17 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

18.

$$\begin{pmatrix} 19 & 18 & 18 & 14 & 16 \\ 17 & 20 & 17 & 15 & 14 \\ 16 & 16 & 14 & 15 & 18 \\ 18 & 19 & 16 & 19 & 20 \\ 16 & 18 & 20 & 23 & 19 \end{pmatrix}$$

19.

$$\begin{pmatrix} 16 & 17 & 12 & 2 & 14 \\ 9 & 5 & 14 & 6 & 12 \\ 3 & 18 & 7 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 10 & 17 & 13 \\ 11 & 17 & 15 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

20.

$$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 15 & 11 & 11 \\ 12 & 14 & 13 & 10 & 12 \\ 14 & 13 & 14 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 11 & 12 & 11 \\ 10 & 11 & 13 & 14 & 17 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Сельскохозяйственное предприятие специализируется на производстве пяти видов молочной продукции, каждый из которых может производиться на одной из пяти марок оборудования. Известен выход продукции в стоимостном выражении с каждой единицы оборудования, представленный матрицей.

Закрепить продукцию за марками оборудования так, чтобы валовый выход был максимальным.

Варианты

1.

$$\begin{pmatrix} 8 & 11 & 15 & 13 & 14 \\ 12 & 12 & 10 & 9 & 8 \\ 10 & 9 & 9 & 7 & 8 \\ 12 & 13 & 9 & 10 & 8 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 19 & 20 & 19 & 20 & 18 \\ 21 & 21 & 19 & 18 & 17 \\ 21 & 22 & 18 & 19 & 17 \\ 17 & 20 & 24 & 22 & 23 \\ 19 & 18 & 18 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 10 & 17 & 2 \\ 3 & 9 & 7 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 15 & 18 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 5 & 17 \\ 11 & 11 & 8 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 14 & 13 & 12 & 10 & 17 \\ 10 & 3 & 12 & 7 & 5 \\ 10 & 7 & 9 & 15 & 18 \\ 9 & 4 & 6 & 6 & 5 \\ 3 & 11 & 10 & 8 & 17 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 11 & 14 & 14 \\ 10 & 8 & 13 & 12 & 12 \\ 14 & 13 & 12 & 13 & 10 \\ 12 & 9 & 10 & 10 & 8 \\ 13 & 17 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} 19 & 24 & 17 & 7 & 12 \\ 22 & 14 & 23 & 25 & 21 \\ 13 & 8 & 11 & 18 & 16 \\ 14 & 13 & 22 & 16 & 20 \\ 12 & 16 & 9 & 11 & 20 \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} 13 & 15 & 12 & 18 & 14 \\ 12 & 16 & 14 & 16 & 17 \\ 17 & 14 & 18 & 17 & 16 \\ 13 & 12 & 16 & 14 & 14 \\ 21 & 18 & 17 & 16 & 14 \end{pmatrix}$$

8.

$$\begin{pmatrix} 24 & 20 & 17 & 18 & 26 \\ 25 & 27 & 18 & 26 & 29 \\ 24 & 13 & 20 & 16 & 15 \\ 16 & 21 & 28 & 23 & 11 \\ 19 & 15 & 12 & 17 & 22 \end{pmatrix}$$

9.

$$\begin{pmatrix} 11 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 9 & 10 & 5 & 9 & 7 \\ 10 & 9 & 10 & 7 & 11 \\ 7 & 7 & 6 & 5 & 9 \\ 9 & 7 & 14 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

10.

$$\begin{pmatrix} 10 & 17 & 3 & 12 & 2 \\ 7 & 5 & 16 & 14 & 6 \\ 15 & 18 & 7 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 5 & 10 & 17 \\ 8 & 17 & 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

11. $\begin{pmatrix} 19 & 18 & 18 & 14 & 16 \\ 17 & 20 & 17 & 15 & 14 \\ 16 & 16 & 14 & 15 & 18 \\ 18 & 19 & 16 & 19 & 20 \\ 16 & 18 & 20 & 23 & 19 \end{pmatrix}$	**12.** $\begin{pmatrix} 16 & 17 & 12 & 2 & 14 \\ 9 & 5 & 14 & 6 & 12 \\ 3 & 18 & 7 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 10 & 17 & 13 \\ 11 & 17 & 15 & 8 & 5 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 11 & 14 & 11 \\ 10 & 8 & 13 & 12 & 12 \\ 14 & 13 & 12 & 13 & 10 \\ 12 & 9 & 10 & 10 & 8 \\ 13 & 17 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$	**14.** $\begin{pmatrix} 21 & 17 & 20 & 26 & 23 \\ 32 & 18 & 27 & 28 & 25 \\ 16 & 20 & 12 & 15 & 23 \\ 27 & 28 & 21 & 11 & 16 \\ 17 & 16 & 14 & 21 & 22 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 22 & 26 & 27 & 23 & 25 \\ 21 & 24 & 25 & 22 & 26 \\ 26 & 26 & 26 & 23 & 24 \\ 22 & 23 & 23 & 24 & 23 \\ 30 & 25 & 25 & 26 & 25 \end{pmatrix}$	**16.** $\begin{pmatrix} 24 & 23 & 20 & 20 & 21 \\ 22 & 21 & 21 & 19 & 23 \\ 23 & 23 & 21 & 20 & 22 \\ 20 & 21 & 20 & 21 & 20 \\ 22 & 19 & 26 & 23 & 20 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} 16 & 16 & 15 & 15 & 15 \\ 18 & 14 & 15 & 17 & 21 \\ 15 & 18 & 17 & 18 & 16 \\ 14 & 16 & 18 & 17 & 16 \\ 15 & 18 & 16 & 19 & 15 \end{pmatrix}$	**18.** $\begin{pmatrix} 27 & 11 & 25 & 26 & 24 \\ 12 & 13 & 10 & 11 & 19 \\ 19 & 13 & 16 & 21 & 23 \\ 25 & 26 & 28 & 9 & 11 \\ 16 & 11 & 10 & 14 & 15 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 23 & 28 & 14 & 24 & 21 \\ 17 & 23 & 24 & 7 & 12 \\ 16 & 17 & 13 & 22 & 19 \\ 8 & 12 & 16 & 11 & 19 \\ 10 & 13 & 12 & 17 & 18 \end{pmatrix}$	**20.** $\begin{pmatrix} 22 & 15 & 19 & 24 & 26 \\ 30 & 14 & 28 & 29 & 27 \\ 15 & 16 & 13 & 14 & 22 \\ 28 & 29 & 31 & 12 & 14 \\ 19 & 14 & 13 & 17 & 18 \end{pmatrix}$

Тема 7. Целочисленное программирование

Теоретическая часть

Целочисленным программированием называется раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные накладывается условие целочисленности (то есть значения переменных должны быть целыми числами).

Огромное число экономических задач носят целочисленный характер, это связано, прежде всего, с физической неделимостью многих расчетов: нельзя построить 3,5 завода, купить 2,5 трактора, задействовать на работу 15,3 человека, построить 250,7 скотомест и т.д. В большинстве случаев практическую задачу решают обычным симплексным методом, а затем округляют до целых чисел. Это оправдано в том случае, если дробная часть составляет очень малую часть от целого. Но иногда такой подход может внести большие изменения. Например, довольно существенно выбрать покупку двух или трех тракторов, если в результате решения без условия целочисленности переменная приняла значение 2,5.

Математическая запись задачи целочисленного программирования выглядит следующим образом:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_{i0}, i = 1 \div m \\ x_j \ge 0, j = 1 \div m \\ x_j - \text{целые числа} \end{cases}$$

<u>Алгоритм метода Гомори для решения задач целочисленного программирования на максимум целевой функции</u>

1. Задача целочисленного программирования решается симплексным методом без условия целочисленности до получения оптимального решения.

2. Если полученное оптимальное решение имеет целое значение переменных, то оптимальное решение целочисленной задачи найдено. Если хотя бы одна переменная имеет дробное значение, то переходят к п.3

3. Вводится дополнительное ограничение.

Правила введения дополнительного ограничения:

- среди значений переменных выбирается переменная, имеющая наибольшую дробную часть (т.е. определяется строка симплексной таблицы, в которой находится свободный член с наибольшей дробной частью); если переменные имеют равные дробные части, то можно выбрать любую, но условимся выбирать с меньшим номером;
- из каждого коэффициента этой строки вычитается максимальное целое число, не превышающее этот коэффициент (особое внимание для отрицательных чисел). Полученные числа являются коэффициентами нового ограничения при соответствующих переменных и свободным членом;
- тип нового ограничения "≥";
- чтобы ввести дополнительное ограничение в симплексную таблицу, надо привести его к типу "=" (каноническая форма записи) и умножить на "-1";
- дополнительная переменная, вошедшая в это ограничение, входит в базис симплексной таблицы, а также в таблицу записываются все коэффициенты преобразованного ограничения.

4. Новая строка таблицы (введенное дополнительное ограничение) принимается за разрешающую строку.

5. Для этой строки подсчитываются двойственные симплексные отношения, т.е. отношения неотрицательных оценок (Δj) к строго отрицательным коэффициентам разрешающей строки. Если в разрешающей строке нет ни одного строго отрицательного элемента при переменных, то система ограничений не совместна в области целочисленных решений.

6. По наименьшему по абсолютной величине отношению (по наибольшему отрицательному отношению) выбирается разрешающий столбец.

7. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца определяется разрешающий элемент и выполняются преобразования однократного замещения (аналогично симплексному методу).

Далее алгоритм повторяется с пункта 2 до получения оптимального целочисленного решения.

Для решения задачи на минимум целевая функция умножается на "-1" и в дальнейшем используется алгоритм решения задачи на максимум. При записи оптимального решения значение целевой функции умножается на минус единицу, то есть переходим от максимума целевой функции к минимуму.

Контрольные вопросы

1. Чем вызвана необходимость наложения на переменные условия целочисленности?
2. Какой признак оптимального решения задач целочисленного программирования?
3. В чем суть метода Гомори?
4. Как выбирается строка в симплексной таблице, по элементам которой рассчитываются коэффициенты нового дополнительного ограничения?
5. Как занести новое ограничение в симплексную таблицу?
6. Как выбирается разрешающая строка?
7. Как выбирается разрешающий столбец?
8. Какие действия предполагают преобразования однократного замещения?

Практическая часть
Пример выполнения задания

Задача. Предприятие выпускает два вида продукции *А* и *В*, измеряемые в единицах. На изготовление единицы продукции *А* требуется затратить 2 кг сырья первого типа, 3 кг сырья второго типа, 5 кг сырья третьего типа.

На изготовление единицы продукции *В* требуется затратить 7 кг сырья первого типа, 3 кг сырья второго типа, 2 кг сырья третьего типа.

Производство обеспечено сырьем каждого типа в количестве 420 кг, 310 кг, 340 кг соответственно.

Рыночная цена единицы продукции *А* составляет 55 ден. ед., а единицы продукции *В* – 35 ден. ед.

Сколько единиц продукции *А* и *В* следует выпускать, чтобы выручка была максимальной.

<u>Переменные задачи:</u>

x_1 – количество продукции типа *А*, ед.

x_2 – количество продукции типа *B*, ед.

Система ограничений:

$2x_1+7x_2 \le 420$ – баланс сырья 1 типа (ед.)

$3x_1+3x_2 \le 310$ – баланс сырья 2 типа (ед.)

$5x_1+2x_2 \le 340$ – баланс сырья 3 типа (ед.)

Целевая функция:

max $Z = 55x_1+35x_2$ –максимум выручки, ден. ед.

Переходим к канонической форме:

$$\max Z = 55x_1 + 35x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 420 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_4 = 310 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 340 \\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div 5 \end{cases}$$

Дальнейший расчет будем вести в симплексных таблицах. Симплексная таблица с опорным решением:

№1	C_j	0	55	35	0	0	0	90
C_i	Б/П	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	∑
0	x_3	420	2	7	1	0	0	430
0	x_4	310	3	3	0	1	0	317
0	x_5	340	5	2	0	0	1	348

В третьей симплексной таблице получено оптимальное решение задачи:

№3	C_j	0	55	35	0	0	0	90
C_i	Б/П	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	∑
35	x_2	45,806	0	1	0,161	0	-0,065	46,903
0	x_4	23,548	0	0	-0,290	1	-0,484	23,774
55	x_1	49,677	1	0	-0,065	0	0,226	50,839
Z	Δ_j	4335,484	0	0	2,097	0	10,161	4347,742

Переменные x_1, x_2 и x_4 имеют дробные значения, т.е. условия целочисленности не выполняются. Так как дробная часть значения переменной x_2 наибольшая, следовательно, вводим ограничение на целочисленность переменной x_2.

Определим коэффициенты дополнительного ограничения:

a_{i0} = 45,806 – 45 = 0,806 (45 – максимальное целое число, не превышающее 45,806);

$a_{i1} = a_{i1} = a_{i2} = a_{i4} = 0$ (0-0=0; 1-1=0);

a_{i3} = 0,161 – 0 = 0,161;

a_{i5} =-0,065-(-1) = 0,935

Получим дополнительное ограничение: $0{,}161x_3+0{,}935x_5 \ge 0{,}806$

Приводим это ограничение к каноническому виду:

$0{,}161x_3 + 0{,}935x_5 – x_6 =0{,}806$;

умножаем на "-1": $-0{,}161x_3-0{,}935x_5 + x_6 = -0{,}806$ и заносим в последнюю симплексную таблицу.

№3(а)	C_j	0	55	35	0	0	0	0
C_i	Б/П	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
35	x_2	45,806	0	1	0,161	0	-0,065	0
0	x_4	23,548	0	0	-0,290	1	-0,484	0
55	x_1	49,677	1	0	-0,065	0	0,226	0
0	x_6	-0,806	0	0	-0,161	0	-0,935	1
Z	Δ_j	4335,484	0	0	2,097	0	10,161	0
	ДСО		-	-	-13		-10,862	x

Принимаем новую строку за разрешающую и подсчитываем отношение неотрицательных оценок к строго отрицательным коэффициентам разрешающей строки. По наибольшему отрицательному отношению выбираем разрешающий столбец (это столбец x_5). Проводим преобразования однократного замещения.

№4	C_j	0	55	35	0	0	0	0
C_i	Б/П	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
35	x_2	45,862	0	1	0,172	0	0	-0,069
0	x_4	23,966	0	0	-0,207	1	0	-0,517
55	x_1	49,483	1	0	-0,103	0	0	0,241
0	x_5	0,862	0	0	0,172	0	1	-1,069
Z	Δ_j	4326,724	0	0	0,345	0	0	10,862

В таблице 8 получено оптимальное решение (все $\Delta_j \ge 0$) с целочисленными значениями переменных: X*(50,45,0,25,6,0,3,0). MaxZ(X*) = 4325.

№8	C_j	0	55	35	0	0	0	0	0	0
C_i	Б/П	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
35	x_2	45	0	1	0	0	0	-1	0	1
0	x_4	25	0	0	0	1	0	0,6	0	-1,2
55	x_1	50	1	0	0	0	0	0,8	0	-0,6
0	x_3	0	0	0	0	0	1	-2	0	1
0	x_5	5	0	0	1	0	0	5,4	0	-5,8
0	x_7	3	0	0	0	0	0	3,8	1	-4,6
Z	Δ_j	4325	0	0	0	0	0	9	0	2

<u>Процедура «Поиск решения» для решения задач целочисленного программирования</u>

Оформим исходные данные на рабочем *листе 1*.

	A	B	C	D	E	F
1	Ограничения	x1	x2	Формулы	Тип ограничения	Правая часть ограничения
2	Баланс сырья 1	2	7	=СУММПРОИЗВ(B2:C2;$B$6:$C$6)	≤	420
3	Баланс сырья 2	3	3	=СУММПРОИЗВ(B3:C3;$B$6:$C$6)	≤	310
4	Баланс сырья 3	5	2	=СУММПРОИЗВ(B4:C4;$B$6:$C$6)	≤	340
5	Целевая функция	55	35	=СУММПРОИЗВ(B5:C5;$B$6:$C$6)		
6	Переменные					

Рис. 7.1. **Исходные данные на рабочем листе**

Здесь ячейки:

B6:C6 – результат (оптимальное количество продукции каждого вида);

B5:C5 – коэффициенты целевой функции;

D5 – значение целевой функции;

B2:C4 – коэффициенты ограничений;

F2:F4 – правая часть ограничений;

D2:D4 – вычисляемые (фактические) значения левой части ограничений.

Решим задачу с помощью команды меню **Данные / Поиск решения**. Делаем активной ячейку D5. Выполняем команду **Данные / Поиск решения**.

На экране появляется диалоговое окно *Поиск решения*.

Прописываем ячейку целевой функции, критерий оптимальности, искомые переменные и условия, накладываемые на них в системе ограничений включая условия неотрицательности и целочисленности.

Условие целочисленности вводится через окно *Добавление ограничений*

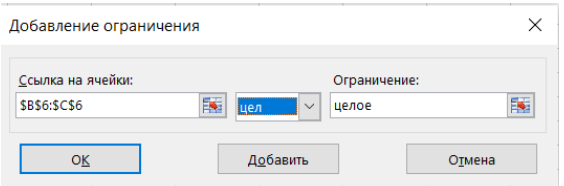

Рис. 7.2. **Вид окна «Добавление ограничения» с условием целочисленности**

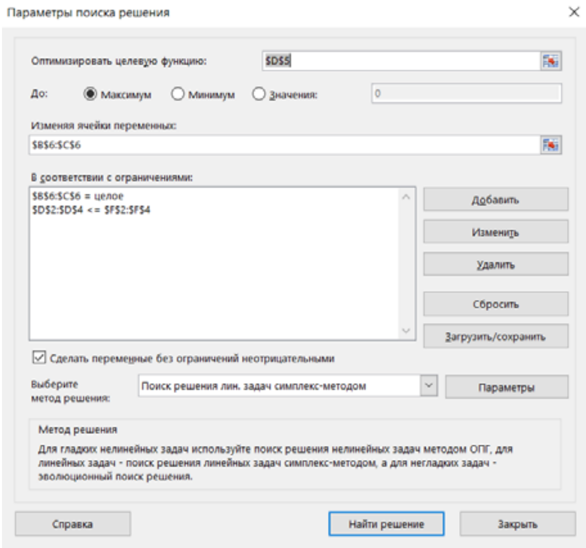

Рис. 7.3. **Вид окна «Поиск решения» с условием целочисленности**

Выбираем метод **решения Поиск решения лин. задач симплекс-методом** и запускаем поиск оптимального решения кнопкой *Найти решение.*

В диалоговом окне *Результаты поиска решения* установить переключатель *Сохранить найденное* и нажимаем кнопку *ОК.*

На *Листе1* (исходные данные) в строке 6 (Переменные) выводятся значения соответствующих переменных, в ячейке D5 – значение целевой функции, в ячейках D2:D4 – значения выполнения ограничений.

	A	B	C	D	E	F
1	Ограничения	x1	x2	Формулы	Тип ограничения	Правая часть ограничения
2	Баланс сырья 1	2	7	415	≤	420
3	Баланс сырья 2	3	3	285	≤	310
4	Баланс сырья 3	5	2	340	≤	340
5	Целевая функция	55	35	4325		
6	Переменные	50	45			

Рис. 7.4. **Результаты решения задачи на рабочем листе**

Получено следующее решение: предприятие выпустит продукции А – 55 ед., продукции В – 45 ед. с общей суммой выручки в 4325 ден. ед.

Индивидуальные задания

Задание. Найти оптимальные целочисленные решения задач по индивидуальным вариантам методом Гомори. Выполнить вычисления в приложении MS Excel «Поиск решений».

1. max $Z = x_1 + 2x_2$ $1{,}5x_1 + 2x_2 \le 3$ $2x_1 + x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \le 4$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**2.** max $Z = x_1 + x_2$ $-1x_1 + 2x_2 \le 3$ $2x_1 + x_2 \le 3$ $x_1 + 1{,}5x_2 \le 4$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**3.** max $Z = 2x_1 + 3x_2$ $x_1 + 2x_2 \le 3$ $-x_1 + 2x_2 \le 2$ $x_1 - x_2 \le 1$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые
4. max $Z = 2x_1 + x_2$ $1{,}5x_1 + 2x_2 \le 5$ $2x_1 + x_2 \le 3$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**5.** max $Z = x_1 + x_2$ $3x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 + x_2 \le 4$ $x_2 \le 4$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;$ x_1, x_2; -целые	**6.** max $Z = x_1 + x_2$ $1{,}5x_1 + 2x_2 \le 5$ $2x_1 + x_2 \le 2$ $-5x_1 + 1{,}5x_2 \le 2$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые
7. max $Z = 1{,}5x_1 + 2x_2$ $x_1 + 2{,}5x_2 \le 6$ $x_1 + x_2 \le 4$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**8.** min $Z = x_1 + x_2$ $4x_1 + x_2 \ge 2$ $x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 \le 3$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**9.** min $Z = x_1 + x_2$ $x_1 + 4x_2 \ge 2$ $x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 \le 3$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;$ x_1, x_2 -целые
10. min $Z = x_1 - x_2$ $x_1 + 2x_2 \le 3$ $2x_1 - x_2 \le 2$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**11.** max $Z = -2x_1 + 3x_2$ $-x_1 + 4x_2 \le 3$ $1x_1 + x_2 \le 5$ $2x_1 + x_2 \ge -1$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**12.** max $Z = 2x_1 - x_2$ $x_1 + x_2 \le 4$ $2x_1 - x_2 \le 1$ $3x_1 \ge 1$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые
13. max $Z = 2x_1$ $x_1 + 2x_2 \le 3$ $2x_1 + x_2 \le 3$ $x_2 \ge 0{,}5$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**14.** max $Z = 11x_1 + 9x_2$ $x_1 + 3x_2 \le 3$ $3x_1 + x_2 \le 9$ $x_1 + 0{,}5x_2 \le 2$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**15.** min $Z = x_1 + x_2$ $x_1 + 4x_2 \ge 2$ $x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;$ x_1, x_2-целые

16. max $Z = 2x_1 + x_2$ $-x_1 + 2x_2 \ge 3$ $x_1 + 2x_2 \le 7$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**17.** min $Z = x_1 + x_2$ $x_1 + 2x_2 \le 3$ $2x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;$ x_1, x_2-целые	**18.** max $Z = 2x_1$ $x_1 + 2x_2 \le 4$ $2x_1 + x_2 \le 3$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые
19. min $Z = x_1 + x_2 + 3$ $4x_1 + x_2 \ge 2$ $x_1 + x_2 \le 6$ $x_1 \le 3$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**20.** max $Z = x_1 - x_2 + 5$ $-1{,}5x_1 + x_2 \ge -2{,}5$ $x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые	**21.** max $Z = x_1 + 2x_2 + 4$ $x_1 - 3x_2 \ge 0{,}5$ $2x_1 + x_2 \le 2$ $x_1 + x_2 \le 5$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$ x_1, x_2-целые

Тема 8. Дробно-линейное программирование

Теоретическая часть

Дробно-линейное программирование относится к задаче линейного программирования, так как имеет целевую функцию, заданную в нелинейном виде, а ограничения линейные. Математическая модель задачи дробно-линейного программирования может быть использована для определения рентабельности производства продукции, рентабельности продаж, себестоимости продукции, трудоемкости, объема продукции на единицу затрат и т.д.

Задача дробно-линейного программирования в общем виде записывается следующим образом:

$$L = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_{i0}, i = 1 \div m$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1 \div n$$

где C_j, d_j, a_{ij}, a_{i0} – постоянные коэффициенты.

При решении задач дробно-линейного программирования принимают условия, что $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$ и строго положителен в области допустимых решений, целевая функция на любом отрезке в области допустимых решений изменяется монотонно. Если знаменатель целевой функции меньше нуля, то числитель и знаменатель дробно-линейной функции умножают на «-1».

Фундаментальная теорема дробно-линейного программирования

Если область допустимых решений задачи непустая и ограниченная, то оптимальное решение существует и достигается, по крайней мере, в одной из крайних точек области допустимых решений или в одном из опорных решений системы ограничений. Если оптимальное решение достигается в нескольких крайних точках (альтернативное решение), то любая выпуклая комбинация этих крайних точек или соответствующих им опорных решений является оптимальным решением.

Если знаменатель дробно-линейной целевой функции в какой-либо точке области допустимых решений или соответствующем опорном решении равен нулю, то эту точку выкалывают из области допустимых решений, а соответствующее опорное решение исключают, перейдя к новому опорному решению, в котором знаменатель отличен от нуля.

Задача дробно-линейного программирования, в которой целевая функция имеет вид: $L = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}$, где хотя бы один из элементов c_0 и d_0 отличны от нуля, называется задачей с неоднородной целевой функцией. Если $c_0 = d_0 = 0$, то задача называется задачей с однородной целевой функцией.

Графический метод решения задач дробно-линейного программирования

Рассмотри задачу дробно-линейного программирования в виде

L = (c1x1+ c2x2) / (d1x1+ d2x2) → max (min) (1)

ai1x1 + ai2x2 ≤ ai0, i = 1÷ m (2)

x1 ≥ 0, x2 ≥ 0

Будем считать, что d1x1+ d2x2 ≠ 0.

Для решений данной задачи найдем область допустимых решений, определяемую ограничениями (2). Пусть эта область не является пустым множеством.

Из выражения (1) найдем x_2:

$Ld_1x_1 + Ld_2x_2 = c_1x_1 + c_2x_2$

$Ld_2x_2 - c_2x_2 = c_1x_1 - Ld_1x_1$

$x_2 (Ld_2 - c_2) = x_1 (c_1 - Ld_1)$

$x_2 = x_1 (c_1 - Ld_1) / (Ld_2 - c_2)$

$x_2 = kx_1,\ k = (c_1 - Ld_1) / (Ld_2 - c_2)$

Прямая $x_2 = kx_1$ проходит через начало координат. При некотором фиксированном значении L угловой коэффициент k прямой тоже фиксирован и прямая займет определенное положение. При изменении значений L прямая $x_2 = kx_1$ будет поворачиваться вокруг начала координат (рис. 8.1).

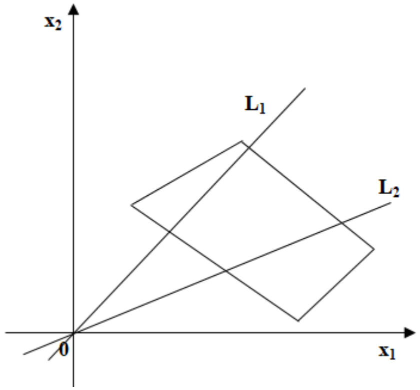

Рис 8.1. **Графическое изображение дробно-линейной задачи**

Найдем производную от k по L:

$$\frac{dk}{dL} = k' = \frac{-d_1(Ld_2 - c_2) - d_2(c_1 - Ld_1)}{(Ld_2 - c_2)^2} = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(Ld_2 - c_2)^2}$$

Знаменатель производной всегда положителен, а числитель от L не зависит. Следовательно, производная имеет постоянный знак и при увеличении L угловой коэффициент будет только возрастать или только убывать, а прямая будет поворачиваться в одну сторону. При возрастании целевой функции положительный знак производной соответствует вращению линии уровня против часовой стрелки, отрицательный знак – по часовой стрелке.

Направление вращения линии уровня можно определить, придав целевой функции различные значения. Значения целевой функции лучше брать из области допустимых решений задачи.

Установив направление вращения линии уровня, находим ее крайнее положение, при котором имеется общая точка (точки) с областью допустимых решений либо устанавливаем неограниченность задачи.

При этом возможны следующие случаи.

1. Область допустимых решений ограничена, максимум и минимум достигаются в ее угловых точках (рис. 8.2) или на отрезке.

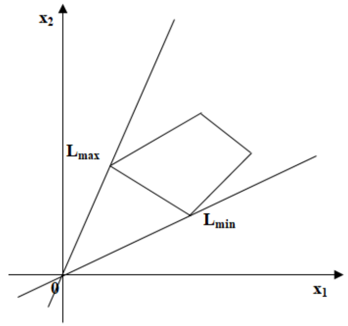

Рис. 8.2. **ОДР – ограничена, оптимальное решение в точке**

2. Область допустимых решений неограниченная, однако, существуют угловые точки, в которых целевая функция принимает максимальное и минимальное значения в точке (рис. 8.3) или на отрезке.

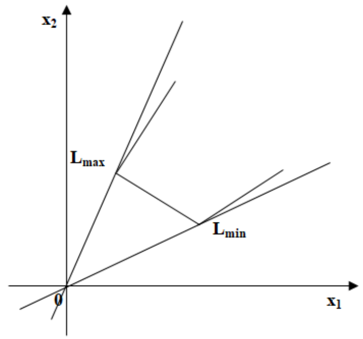

Рис. 8.3. **ОДР – неограниченная, оптималььное решение в точке**

3. Область допустимых решений неограниченная, имеется один из экстремумов. Например, минимум достигается в одной из вершин области и имеет так называемый асимптотический максимум (рис. 8.4).

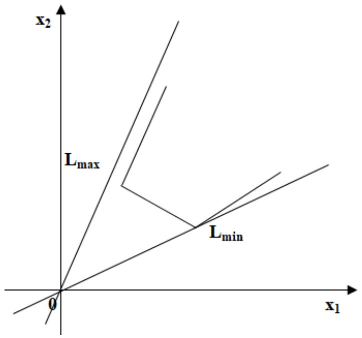

Рис. 8.4. **ОДР – неограниченная, асимптотачеcкий максимум**

4. Область допустимых решений неограниченная. Максимум и минимум являются асимптотическими (рис. 8.5).

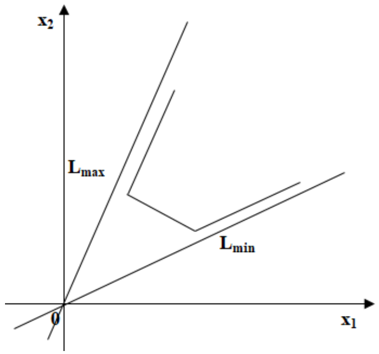

Рис. 8.5. **ОДР – неограниченная, асимптотический максимум и минимум**

5. Область допустимых решений – точка, оптимальное решение существует и достигается в этой точке.

6. Область допустимых решений – пустая. Система ограничений несовместна.

В случае неоднородной целевой функции центр вращения определяется из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = 0 \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_0 = 0 \end{cases}$$

Последовательность графического решения

1. Находим область допустимых решений.
2. Устанавливаем направление поворота целевой функции.
3. Находим точку max (min) целевой функции или устанавливаем неразрешимость задачи.

Сведение задачи дробно-линейного программирования к решению симплексным методом

Общий вид задачи дробно-линейного программирования: найти максимум или минимум целевой функции

$$L = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n}{d_1x_1 + d_2x_2 + ... + d_nx_n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_jx_j}{\sum_{j=1}^{n} d_jx_j}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le a_{i0}, i = 1 \div m \\ x_j \ge 0, j = 1 \div n \end{cases}$$

Большинство экономических задач дробно-линейной целевой функции имеет положительное значение знаменателя, т.е. $\sum_{j=1}^{n} d_jx_j > 0$. В этом случае задачу дробно-линейного программирования можно решить симплексным методом.

Введем новые переменные, обозначив через $y_0 = \frac{1}{d_1x_1 + d_2x_2 + ... + d_nx_n}$. Тогда целевая функция примет вид:

$$\frac{c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n}{\frac{1}{y_0}} = c_1x_1y_0 + c_2x_2y_0 + ... + c_nx_ny_0.$$

Обозначим $x_1y_0 = y_1,\ x_2y_0 = y_2,\ ...,\ x_ny_0 = y_n$, т.е. $y_j = y_0x_j,\ j = 1 \div n$.

С учетом введенных обозначений получаем новую задачу: найти максимальное или минимальное значение целевой функции $F(y) = \sum_{j=1}^{n} c_jy_j$.

Определим условия новой задачи.

Преобразуем выражение $y_0 = \dfrac{1}{d_1x_1 + d_2x_2 + ... + d_nx_n}$ следующим образом:

$d_1x_1y_0 + d_2x_2y_0 + ... + d_nx_ny_0 = 1$ или $d_1y_1 + d_1y_2 + ... + d_1y_n = 1$

$\sum_{j=1}^{n} d_jy_j = 1$. Последнее выражение будет одним из ограничений новой задачи.

Далее умножим левую и правую части исходных ограничений на y_0.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jy_0 \le b_iy_0, i = 1 \div m \\ x_jy_0 \ge 0, j = 1 \div n \end{cases}$$

Таким образом, получена задача линейного программирования, которая может быть решена симплексным методом:

найти максимум или минимум функции $F(y) = \sum_{j=1}^{n} c_jy_j$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j - b_iy_0 \le 0, i = 1 \div m \\ \sum_{j=1}^{n} d_jy_j = 1 \\ y_j \ge 0, j = 0 \div n \end{cases}$$

В результате решения задачи определяем значения переменных $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Из обозначений $x_1y_0 = y_1,\ x_2y_0 = y_2,\ ...,\ x_ny_0 = y_n$ находим значение переменных x_j $(j=1\div n)$ как $x_1 = \dfrac{y_1}{y_0}, x_2 = \dfrac{y_2}{y_0}, \cdots, x_n = \dfrac{y_n}{y_0}$. Подставляя найденные значения x_j $(j=1\div n)$ в целевую функцию исходной задачи определяем значение $L(x) = \dfrac{c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n}{d_1x_1 + d_2x_2 + ... + d_nx_n} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_jx_j}{\sum_{j=1}^{n} d_jx_j}$.

Контрольные вопросы

1. Какая задача называется задачей дробно-линейного программирования?
2. Дайте определение фундаментальной теоремы дробно-линейного программирования.
3. Какая задача дробно-линейного программирования называется с однородной целевой функцией?
4. Какая задача дробно-линейного программирования называется с неоднородной целевой функцией?
5. Что представляет собой линия уровня?
6. Как располагаются линии уровня относительно друг друга?
7. Как найти центр вращения линии уровня в случае с неоднородной целевой функцией?
8. Какие возможные варианты графического решения задач дробно-линейного программирования?
9. Что значит асимптотическое оптимальное решение?

Практическая часть
Пример выполнения задания

Задача. Найти максимум целевой функции следующей задачи дробно-линейного программирования:

$$\max L = \frac{3x_1 + x_2 + 3}{x_1 - x_2 - 3} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

На плоскости координат строим граничные прямые и определяем полуплоскости, соответствующие ограничениям задачи.

1. $2x_1 + 3x_2 \le 6$; $2x_1 + 3x_2 = 6$

x_1	0	3
x_2	2	0

Точка (0,0) $\in$ полуплоскости ($2*0+3*0 \le 6$; $0 < 6$ – верное неравенство).

2. $3x_1 + 2x_2 \le 6$, $3x_1 + 2x_2 = 6$

x_1	0	2
x_2	3	0

Точка (0,0) $\in$ полуплоскости ($3\cdot0+2\cdot0 \le 6$; $0 < 6$ – верное неравенство).

3. $x_1 + x_2 \ge 1$, $x_1 + x_2 = 1$

x_1	0	1
x_2	1	0

Точка (0,0) $\notin$ полуплоскости ($1\cdot0+1\cdot0 \le 1$; $0 < 1$).

4. Условия неотрицательности переменных.

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ – I четверть плоскости координат.

8. Пересечение полуплоскостей – пятиугольник ABCDE – область допустимых решений (ОДР) (рис. 8.6).

Прямая $Z_2 = x_1 - 2x_2 - 3 = 0$ (знаменатель равен 0) не проходит через область допустимых решений задачи, следовательно, можно применить фундаментальную теорему. Теорема о монотонности изменения целевой функции также действует.

9. Найдем центр вращения целевой функции, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Точка K (0; -3) – является центром вращения целевой функции.

8. Найдем направление вращения целевой функции. Так как знаменатель целевой функции отрицательный в области допустимых решений, то умножим и числитель, и знаменатель на (-1).

$$L = \frac{-3x_1 - x_2 - 3}{-x_1 + x_2 + 3}$$

Возьмем две любые точки из области допустимых решений и подставим их в значение L.

Например, в точке (2; 0) значение целевой функции равно -9 (L_1), а в точке (1; 0) – $L_2 = -3$.

Таким образом, линия уровня в направлении максимизации вращается против часовой стрелки.

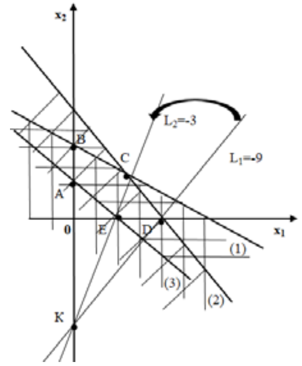

Рис. 8.6. **Графическое решение задачи**

9. Оптимальное решение получаем, вращая линию уровня в направлении максимизации с центром вращения в точке K. Получается отрезок прямой [AB] – оптимальное альтернативное решение. Координаты точки A(0; 1); координаты точки B(0; 2).

Экстремальное значение целевой функции: $L(A) = \dfrac{3\times0+1+3}{0-1-3} = -1$;

$L(B) = \dfrac{3\times0+2+3}{0-2-3} = -1$.

Ответ: Область допустимых решений – ограниченная выпуклая – многоугольник ABCDE. Оптимальное решение достигается на отрезке [AB].

Первое решение – A(0; 1).

Целевая функция:

maxL = -1

Переменные:

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$

Второе решение – B(0; 2).

Переменные:

$x_1 = 0$; $x_2 = 2$

Целевая функция:

maxL = -1.

Процедура «Поиск решения» для решения задач дробно-линейного программирования

Сведем задачу дробно-линейного программирования к решению симплексным методом.

$$\max L = \frac{3x_1 + x_2 + 3}{x_1 - x_2 - 3}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Так как знаменатель целевой функции отрицательный в области допустимых решений, то умножим и числитель, и знаменатель на (-1) и введем замены:

$$-x_1 + x_2 + 3 = \frac{1}{y_0}$$

$$x_1 y_0 = y_1, x_2 y_0 = y_2$$

$$-y_1 + y_2 + 3y_0 = 1$$

Получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 3y_0 = 1 \\ 2y_1 + 3y_2 - 6y_0 \le 0 \\ 3y_1 + 2y_2 - 6y_0 \le 0 \\ y_1 + y_2 - y_0 \ge 0 \\ y_1 \ge 0; y_2 \ge 0; y_0 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max L = \frac{-3x_1 - x_2 - 3}{\frac{1}{y_0}} = -3y_1 - y_2 - 3y_0$$

Оформим исходные данные на рабочем *листе 1*.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ограничения	y_1	y_2	y_0	Формулы	Тип ограничения	Правая часть
2	Ограничение 1	-1	1	3	=СУММПРОИЗВ(B2:D2;$B$7:$D$7)	=	1
3	Ограничение 2	2	3	-6	=СУММПРОИЗВ(B3:D3;$B$7:$D$7)	≤	0
4	Ограничение 3	3	2	-6	=СУММПРОИЗВ(B4:D4;$B$7:$D$7)	≤	0
5	Ограничение 4	1	1	-1	=СУММПРОИЗВ(B5:D5;$B$7:$D$7)	≥	0
6	maxL=	-3	-1	-3	=СУММПРОИЗВ(B6:D6;$B$7:$D$7)		
7	Значения по решению						

Рис. 8.7. **Исходные данные на рабочем листе**

Решим задачу с помощью команды меню **Данные / Поиск решения**. Делаем активной ячейку E6. Выполняем команду **Данные / Поиск решения**.

На экране появляется диалоговое окно *Поиск решения*.

Прописываем ячейку целевой функции, критерий оптимальности, искомые переменные и условия, накладываемые на них в системе ограничений, включая условия неотрицательности.

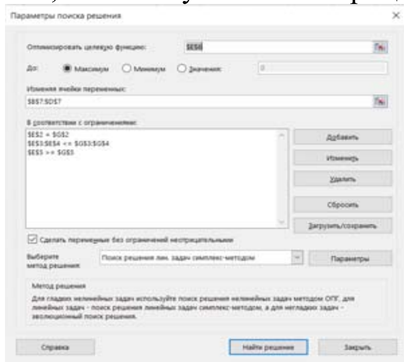

Рис. 8.8. **Вид окна «Поиск решения»**

Выбираем метод **решения Поиск решения лин. задач симплекс-методом** и запускаем поиск оптимального решения кнопкой *Найти решение.*

В диалоговом окне *Результаты поиска решения* установить переключатель *Сохранить найденное решение* и нажать кнопку ***ОК***.

На листе1 (исходные данные) в строке 7 (Значения по решению) выводятся значения соответствующих переменных, в ячейке E6 – значение целевой функции, в ячейках E2:E5 – значения выполнения ограничений.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ограничения	y_1	y_2	y_0	Формулы	Тип ограничения	Правая часть
2	Ограничение 1	-1	1	3	1	=	1
3	Ограничение 2	2	3	-6	0	≤	0
4	Ограничение 3	3	2	-6	-0,4	≤	0
5	Ограничение 4	1	1	-1	0,2	≥	0
6	maxL=	-3	-1	-3	-1		
7	Значения по решению	0	0,4	0,2			

Рис. 8.8. **Результаты решения задачи на рабочем листе**

Вычисляем искомые значения переменных:

$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = \frac{0}{0,2} = 0$; $x_2 = \frac{y_2}{y_0} = \frac{0,4}{0,2} = 2$; $\max L = -1$

Индивидуальные задания

Задача. решить задачу графическим методом на максимум и минимум целевой функции. Проверить полученное решение в приложении «Поиск решения» MS Excel.

1. $Z = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ -0,5x_1 + x_2 \ge 0,5 \\ -2x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**2**. $Z = \frac{x_1 + 1}{x_2 + 1}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 3x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
3. $Z = \frac{3x_1 + 3,5x_2}{x_1 + x_2}$ $\begin{cases} 4x_1 + 1,5x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**4**. $Z = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
5. $Z = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2 + 6}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**6**. $Z = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 \le 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

7. $Z = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \le 3 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**8**. $Z = \frac{x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2 + 2}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 1,5x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
9. $Z = \frac{x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2}$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**10**. $Z = \frac{1,5x_1 + x_2}{x_1 + 0,5x_2}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
11. $Z = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + 2}$ $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**12**. $Z = \frac{x_1 + x_2}{x_2 + 4}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ x_1 \ge 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
13. $Z = \frac{-x_1 + x_2}{2x_1 + 2x_2 + 2}$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	**14**. $Z = \frac{-x_1 + x_2}{x_1 + x_2}$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

15. $Z=\dfrac{-x_1}{x_1+x_2}$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 8\\ x_1+x_2\le 4\\ x_1\ \ \ge 1\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$	**16**. $Z=\dfrac{x_1+x_2}{1{,}5x_1+2x_2}$ $\begin{cases}2x_1+3x_2\le 16\\ x_1+2x_2\le 10\\ x_1\ge 4\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$
17. $Z=\dfrac{2x_1+x_2}{x_1+x_2+1}$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 4\\ 2x_1-x_2\le 2\\ x_1+3x_2\ \ \le 6\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$	**18**. $Z=\dfrac{x_1+x_2+1}{2x_1+x_2+1}$ $\begin{cases}-2x_1+x_2\le 4\\ x_1-3x_2\le 3\\ x_1+2x_2\ \ \le 8\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$

Тема 9. Динамическое программирование

Теоретическая часть

Динамическое программирование – метод оптимизации, который предусматривает разбиение процесса принятия решения и управления на шаги, т.е. этот процесс является многошаговым. Под управлением понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход события процесса.

Метод динамического программирования может использоваться для решения таких, например, задач как:

- распределение капитальных вложений между возможными направлениями использования;
- распределение ресурсов между организациями;
- выбор оптимальной стратегии замены оборудования;
- нахождение оптимальных маршрутов транспортировки груза по заданной сети и др.

Рассмотрим некоторый динамический управляемый процесс. В результате принятия управленческих решений рассматриваемая система S (объект управления) переходит из начального состояния S_0 в конечное состояние S_n. Процесс принятия решения разбивается на шаги (n-шагов). Через $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обозначим шаговые управления, переводящие систему из состояния S_0 в состояние S_n. Описанная схема представлена на рисунке 9.1.

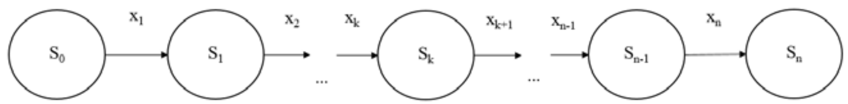

Рис. 9.1. **Схема процесса принятия решения**

Управление процесса в целом называется последовательность шаговых управлений. Рассмотрим состояние S_k в конце k-го шага. Оно зависит от предшествующего состояния S_{k-1} и шаговых управлений на k-ом шаге x_k. Такое положение можно записать в виде управления:

$S_k = \varphi_k (S_{k-1}, X_k)$, k = 1, 2,…, n;

где φ_k - некоторая функция.

Это уравнение называется уравнением состояния.

Если обозначить показатель эффективности k-ого шага через $Z_k = f_k$ (S_{k-1}, X_k), k = 1,2,…,n, где f_k – некоторая функция, определяющая критерий эффективности, то целевая функция (показатель эффективности) в целом задачи может быть записана так:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}, x_k)$$

Таким образом, в задачах динамического программирования целевая функция обладает свойством аддитивности, т.е. в целом она равняется сумме целевых функций каждого шага.

Целевая функция в задачах динамического программирования называется выигрышем.

Переменными являются и шаговые управления, и величины, характеризующие состояние S под влиянием управления.

Общая постановка задачи может быть сформулирована так: определить такое допустимое управление X, переводящее систему S из состояния S_0 в состояние S_n, при котором целевая функция Z принимает наибольшее (наименьшее) значение.

Принцип оптимальности Беллмана

Универсального способа, каким в линейном программировании является симплексный метод, в динамическом программировании нет. Но можно определить основной подход (вычислительную схему) к решению задач такого рода. Впервые он был сформулирован американским математиком Р. Беллманом в 1953 г.

Принцип оптимальности Беллмана формулируется следующим образом: каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге управление надо выбирать так, чтобы оптимальной была сумма выигрышей на всех оставшихся до конца процесса шагах, включая выигрыш на данном шаге.

Исходя из принципа оптимальности, оптимизацию следует проводить от конца процесса к началу, т. к. на последнем шаге принимается управление x_n без учета выигрышей на последующих шагах, т.к. эти шаги просто отсутствуют.

Т.е. на последнем шаге (при решении на max) $Z_n^* = \max\limits_{\{x_n\}} f_n(S_{n-1}, x_n)$.

Далее на каждом шаге делают предположение о возможных исходах предыдущего шага и проводят условную оптимизацию для каждого шага.

Согласно принципу оптимального управления x_k выбирается таким образом, чтобы

$$Z_k^* = \max_{\{x_k\}}\left\{f_k(S_{k-1}, x_k) + Z_{k+1}^*(S_k)\right\}, k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1 \quad (1)$$

Управление x_k на k-том шаге и x_n на n-ном шаге называется условным оптимальным управлением, а уравнение (1) называют уравнением Беллмана.

После условной оптимизации проводят безусловную оптимизацию. Выбирают оптимальное управление, обеспечивающее оптимальный выигрыш на первом и всех последующих шагах, т.е. определяют x_1 и Z_1^*, где Z_1^* – это и есть оптимальный выигрыш для всей задачи. Из уравнения состояния определяют S_1. Зная безусловное оптимальное управление на первом шаге, определяют безусловные оптимальные управления на всех до конца шагах.

Контрольные вопросы

1. Что такое динамическое программирование?
2. Сформулируйте общую постановку задачи динамического программирования.
3. Какие критерии оптимальности могут использоваться в постановке задачи динамического программирования?
4. Как формулируется принцип оптимальности Беллмана?
5. Запишите уравнение Беллмана для заданной задачи.
6. Где может быть использован аппарат динамического программирования?
7. Как называются целевые функции задачи динамического программирования?

Практическая часть
Пример выполнения задания

Возможные маршруты перевозки груза из п.1 в п.10 представлены в виде сети (рис. 9.2). Найти оптимальный маршрут, обеспечивающий наименьшее расстояние перевозки из начального в конечные пункты транспортировки.

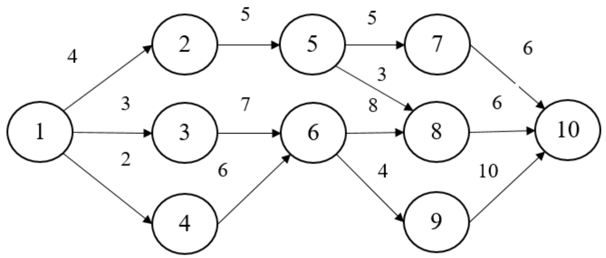

Рис. 9.2. **Схема маршрутов транспортировки грузов**

Исходя из методики поэтапной оптимизации выделим шаги:

1 шаг – к пунктам 2, 3, 4.

2 шаг – к пунктам 5, 6.

3 шаг – к пунктам 7, 8, 9.

4 шаг – к пункту 10.

Введем обозначения:

k – номер шага, k =1,2,3,4;

i – индекс пункта, из которого осуществляется транспортировка;

j - индекс пункта, в который поставляется груз;

c_{ij} – расстояние из пункта i в пункт j;

$Z_k(i)$ – минимальное расстояние на k –ом шаге из i пункта до конечного пункта.

Уравнение Беллмана имеет следующий вид:

$$Z_k^*(i) = \min_j \left\{ c_{ij} + Z_{k+1}^*(j) \right\}$$

Это означает, что на k- том шаге выбирается маршрут, на котором сумма расстояний на этом направлении и на последующих до конечного пункта была бы минимальной.

I этап решения. Условная оптимизация:

1. k = 4. На последнем шаге $Z_4^*(i) = c_{i10}$. В пункт 10 можно попасть из пунктов 7,8,9.

j / i	10	$Z_4^*(i)$	j^*
	C_{ij}		
7	6	6	10
8	6	6	10
9	10	10	10

2. k =3. $Z_3^*(i) = \min \{C_{ij} + Z_4^*(j)\}$

j / i	7	8	9	$Z_3^*(i)$	j^*
	$C_{ij} + Z_4^*(j)$				
5	5+6	3+6	-	**9**	**8**
6	-	8+6	4+10	14	8,9

3. k = 2. $Z_2^*(i) = \min \{C_{ij} + Z_3^*(j)\}$

j / i	5	6	$Z_2^*(i)$	j^*
	$C_{ij} + Z_3^*(j)$			
2	5+9	-	**14**	**5**
3	-	7+14	21	6
4	-	6+14	20	6

4. k = 1. $Z_1^*(i) = \min \{C_{ij} + Z_2^*(j)\}$

j / i	2	3	4	$Z_1^*(i)$	j^*
	$C_{ij} + Z_2^*(j)$				
1	4+14	3+21	2+20	**18**	**2**

II этап. Безусловная оптимизация:

Минимальное расстояние из п.1 в п.10 составляет 18 км. Из п.1 маршрут должен следовать в п.2. Из таблицы при k = 2 находим, что далее надо следовать в п. 5 и так далее.

В результате решения получен следующий маршрут (рис 9.3):

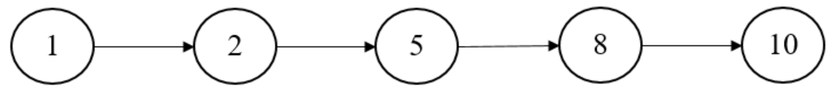

Рис. 9.3. **Оптимальный маршрут**

Индивидуальные задания

Задача. Маршруты перевозки груза представлены на рисунке 9.4. Найти оптимальный маршрут, обеспечивающий минимальное расстояние от начального до конечного пункта. Расстояния между населенными пунктами даны в таблице 9.1 по вариантам.

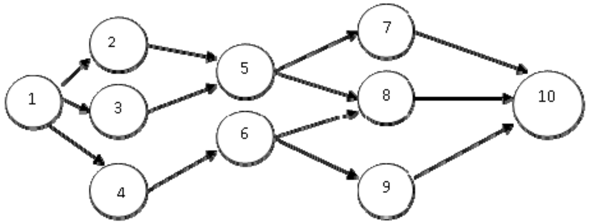

Рис. 9.4. **Схема маршрутов**

Таблица 9.1

Расстояния между населенными пунктами, км

Расстояние между пунктами	Номер варианта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1-2	2	7	3	10	8	5	20	14	8	16	21	10
1-3	4	4	5	6	5	9	14	10	10	12	15	20
1-4	3	6	4	6	10	3	11	12	12	10	13	17
2-5	4	4	8	5	4	8	8	8	9	8	8	13
3-5	5	3	9	8	6	5	10	9	4	5	10	10
4-6	6	8	7	9	4	6	6	6	5	7	9	9
5-7	6	6	6	11	9	10	12	5	6	13	7	11
5-8	5	8	3	14	7	12	15	9	8	11	5	7
6-8	2	5	9	8	3	9	8	4	10	7	4	9
6-9	3	4	4	7	12	13	7	12	12	9	6	5
7-10	3	8	5	6	8	9	10	9	9	12	12	8
8-10	1	6	8	4	14	4	13	12	7	4	10	10
9-10	5	10	7	8	4	3	16	15	6	9	12	12

Тема 10. Решение задач с помощью рекуррентных уравнений

Теоретическая часть

В задачах о распределении на несколько лет ресурсов деятельности организации этапом целесообразно считать временной период. В задачах о распределении средств между организациями этапом целесообразно считать номер очередной организации.

Общая постановка задачи

Инвестор выделяет средства в размере S усл. ден. ед., которые должны быть распределены между n предприятиями. Каждое k-ое предприятие (k = 1, 2, …, n) при инвестировании в него средств X_k приносит в конце года прибыль $f_k(x)$ усл. ден. ед. Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы обеспечить максимум суммарной прибыли. При этом учитывается, что прибыль $f_k(x)$ не зависит от вложения средств в другие предприятия, и общая прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Схема решения задачи

1. Определение числа шагов.

Число шагов равно числу предприятий, в которые осуществляется инвестирование.

2. Выбор шаговых управлений.

Управлением на k-ом шаге является количество средств, выделенных k-ому предприятию (X_k). Переменные X должны удовлетворять условию $\sum_{k=1}^{n} X_k = S$, т.е. все средства должны быть распределены.

3. Определение параметра состояния системы.

На каждом шаге состояние системы (S_k) определяется количеством средств, которые остаются после k-того шага. Уравнение состояния в данной задаче имеет вид: $S_k = S_{k-1} - X_k$ ($k = 1 \div n$), где S_{k-1}- количество средств, имеющееся в наличии перед данным шагом. Таким образом, если на k-ом шаге система находилась в состоянии S_{k-1}, а выбрано управление X_k, то на k+1 шаге система будет находиться в состоянии $S_k = S_{k-1} - X_k$, т.е. после вложения в k-ое предприятие X_k усл.ед. для дальнейшего инвестирования остается средств меньше, чем было перед данным шагом на X_k усл.ед.

4. Определение показателя эффективности k-ого шага.

Выигрышем на k-ом шаге является прибыль, которую приносит k-ое предприятие при инвестировании в него средств X_k. Функцию выигрыша обозначим через $f_k(x_k)$. Тогда эффективность в целом будет составлять $Z=\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k)$.

5. Определение функционального уравнения на последнем шаге.

Инвестирование в последнее предприятие исходит из того: сколько средств осталось, столько и надо вложить в данное предприятие. Условный оптимальный выигрыш на этом шаге равен прибыли, приносимой последним предприятием. Для k = n $Z_n^*(S_{n-1}) = f_n(x_n)$.

Перед k-ым шагом в наличии имеется S_{k-1} усл. ед. денежных средств. Инвестор может вложить в k-ое предприятие X_k усл. ед., которое принесет $f_k(x_k)$ усл. ед. прибыли. Оставшиеся $(S_{k-1} - X_k)$ усл. ед. денежных средств инвестор вложит в остальные предприятия с (k+1) до n. Оптимальным будет считаться то шаговое управление X_k, при котором сумма $f_k(x_k)$ и $Z_{k+1}^*(S_{k-1}-x_k)$ будет максимальна.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте общую постановку задачи.
2. Что определяет параметр состояния?
3. Что является шаговым управлением?
4. Каким образом происходит деление процесса управления на шаги?
5. Что представляет собой условный оптимальный выигрыш на последнем шаге?
6. Как записывается суммарная целевая функция?
7. Раскройте содержания этапов условной оптимизации.

Практическая часть

Пример выполнения задания

На очередной год планируется деятельность трех предприятий. Начальные денежные средства составляют 5 усл. ден. ед. ($S_0 = 5$). Они должны быть распределены между тремя предприятиями. Размеры вложений в каждое предприятие кратны 1 усл. ден. ед. Функция $f_k(x)$ задана таблично (табл. 10.1).

Таблица 10.1

Функция $f_k(x)$

X усл. ед.	$f_1(x)$ усл. ед.	$f_2(x)$ усл. ед.	$f_3(x)$ усл. ед.
1	1,7	2,0	1,7
2	2,0	2,1	2,4
3	2,2	2,3	2,6
4	2,8	3,3	3,2
5	3,5	4,0	3,6

<u>I. Условная оптимизация</u>

1. k = 3

К последнему шагу все оставшиеся средства следует вложить в третье предприятие. При этом вложения могут составить S_2 = 1,2,3,4,5.

$Z_3^*(S_2) = f_3(x_3)$

Таблица 10.2

Промежуточные результаты

S	X_3	$f_3(x_3)$
1	1	1,7
2	2	2,4
3	3	2,6
4	4	3,2
5	5	3,6

2. k = 2

Функциональное уравнение для данного шага:

$Z_2^*(S_1) = \max\{ f_2(x_2) + Z_3^*(S_1 - X_2)\}$

Пусть S_1 = 1(усл. ден. ед.). Если осталась 1 усл. ден. ед. средств, то возможны два варианта: либо вложить эту сумму в предприятие (x_2 =1), либо нет (x_2 =0). Так рассматриваются все возможные имеющиеся на начальном шаге денежные средств. Результаты можно представить в виде таблицы 10.3.

Таблица 10.3

Промежуточные результаты

S_1	X_2	$f_2(x_2)$	S_1 - X_2	$Z_3^*(S_1 - X_2)$	$f_2(x_2) + Z_3^*(S_1 - X_2)$
1	0	0	1 – 0 =1	1,7	0+1,7 = 1,7
	1	2	1 – 1 = 0	0	2,0 +0 = **2,0**
2	0	0	2 – 0 =2	2,4	0 + 2,4 = 2,4
	1	2,0	2 – 1 =1	1,7	2,0 + 1,7 = **3,7**
	2	2,1	2 – 2 = 0	0	2,1 + 0 = 2,1
3	0	0	3 – 0 = 3	2,6	0 + 2,6 = 2,6
	1	2,0	3 – 1 = 2	2,4	2 + 2,4 = **4,4**
	2	2,1	3 – 2 = 1	1,7	2,1 + 1,7 = 3,8
	3	2,3	3 – 3 = 0	0	2,3 + 0 = 2,3
4	0	0	4 – 0 = 4	3,2	0 + 3,2 = 3,2
	1	2	4 – 1 = 3	2,6	2 + 2,6 = **4,6**
	2	2,1	4 – 2 = 2	2,4	2,1 + 2,4 = 4,5
	3	2,3	4 – 3 = 1	1,7	2,3 + 1,7 = 4,0
	4	3,3	4 – 4 = 0	0	3,3 + 0 = 3,3
5	0	0	5 – 0 = 0	3,6	0 + 3,6 = 3,6
	1	2	5 – 1 = 4	3,2	2 + 3,2 = **5,2**
	2	2,1	5 – 2 = 3	2,6	2,1 + 2,6 = 4,7
	3	2,3	5 – 3 = 2	2,4	2,3 + 2,4 = 4,7
	4	3,3	5 – 4 = 1	1,7	3,3 + 1,7 = 5,0
	5	4,0	5 – 5 = 0	0	4,0 + 0 = 4,0

При $S_1=1$ $Z_2^*(1) = \max\{1,7;\ 2,0\} = 2,0$

$S_1=2$ $Z_2^*(2) = \max\{2,4;\ 3,7;\ 2,1\} = 3,7$

$S_1=3$ $Z_2^*(3) = \max\{2,6;\ 4,4;\ 3,8;\ 2,3\} = 4,4$

$S_1=4$ $Z_2^*(4) = \max\{3,2;\ 4,6;\ 4,5;\ 4,0;\ 3,3\} = 4,6$

$S_1=5$ $Z_2^*(5) = \max\{3,6;\ 5,2;\ 4,7;\ 4,7;\ 5,0;\ 4,0\} = 5,2$

3. k = 1.

Перед первым шагом состояние системы известно $S_0 = 5$.

Таблица 10.4

Промежуточные результаты

X_1	$f_1(x_1)$	$S_0 - X_1$	$Z_2^*(S_0 - X_1)$	$f_1(x_1) + Z_2^*(S_0 - X_1)$
0	0	5	5,2	0 + 5,2 = 5,2
1	1,7	4	4,6	1,7 + 4,6 = 6,3
2	2,0	3	4,4	2 + 4,4 = **6,4**
3	2,2	2	3,7	2,2 + 3,7 = 5,9
4	2,8	1	2,0	2,8 + 2,0 = 4,8

X_1	$f_1(x_1)$	$S_0 - X_1$	$Z_2^*(S_0 - X_1)$	$f_1(x_1) + Z_2^*(S_0 - X_1)$
5	3,5	0	0	3,5 + 0 =3,5

$Z_1^*(5) = \max\{5,2;\ 6,3;\ 6,4;\ 5,9;\ 4,8;\ 3,5\} = 6,4$

Оптимальная прибыль, которую можно получить от трех предприятий, инвестировав в них 5 условных денежных единиц денежных средств, составляет 6,4 условные денежные единицы.

II. Безусловная оптимизация

В первое предприятие следует вложить 2 условные денежные единицы, т.е. $X_1 = 2$ (т.к. 6,4 получено по строке с $X_1 = 2$). Прибыль от этих вложений составит 2 условные денежные единицы.

Далее к распределению остается

5 – 2 = 3 (усл. ден. ед.).

При $S_1 = 3$, $X_2 = 1$, т.е. во второе предприятие надо вложить 1 условную денежную единицу. Прибыль от этого будет составлять 2 усл. ден. ед. После второго шага остается к распределению 3 – 1 = 2 (усл. ден. ед.) Такую сумму мы и вложим в третье предприятие. При этом будет получена прибыль 2,4 усл. ден. ед.

Таким образом, в результате решения было определено, что для получения максимальной прибыли в размере 6,4 усл. ден. ед. следует инвестировать в первое предприятие 2 усл. ден. ед., во второе – 1 усл. ден. ед., в третье – 2 усл. ден. ед. При этом от предприятий будет получено прибыли соответственно 2 усл. ден. ед., 2 усл. ден. ед., 2,4 усл. ден. ед.

Процедура «Поиск решения» для решения задач с помощью рекуррентных уравнений

Запишем исходные данные на рабочем листе MS Excel (рис. 10.1).

	A	B	C	D
1	X	f1	f2	f3
2	1	1,7	2	1,7
3	2	2	2,1	2,4
4	3	2,2	2,3	2,6
5	4	2,8	3,3	3,2
6	5	3,5	4	3,6
7				

Рис. 10.1. **Исходные данные**

Для матрицы распределения средств создадим правила и запишем их формулами в ячейках (рис. 10.2).

	A	B	C	D	E
1	X	f1	f2	f3	
2	1	1,7	2	1,7	
3	2	2	2,1	2,4	
4	3	2,2	2,3	2,6	
5	4	2,8	3,3	3,2	
6	5	3,5	4	3,6	
7	**Матрица распределения**				
8		f1	f2	f3	
9	1	1	1	1	=СУММ(B9:D9)
10	2	1	1	1	=СУММ(B10:D10)
11	3	1	1	1	=СУММ(B11:D11)
12	4	1	1	1	=СУММ(B12:D12)
13	5	1	1	1	=СУММ(B13:D13)
14		=СУММ(B9:B13)	=СУММ(C9:C13)	=СУММ(D9:D13)	=СУММПРОИЗВ(E9:E13:A9:A13)
15				ЦФ	=СУММПРОИЗВ(B2:D6:B9:D13)

Рис. 10.2. **Запись матрицы распределения**

Решим задачу с помощью команды меню **Данные / Поиск решения**. Делаем активной ячейку E15. Выполняем команду **Данные / Поиск решения** (рис. 10.3).

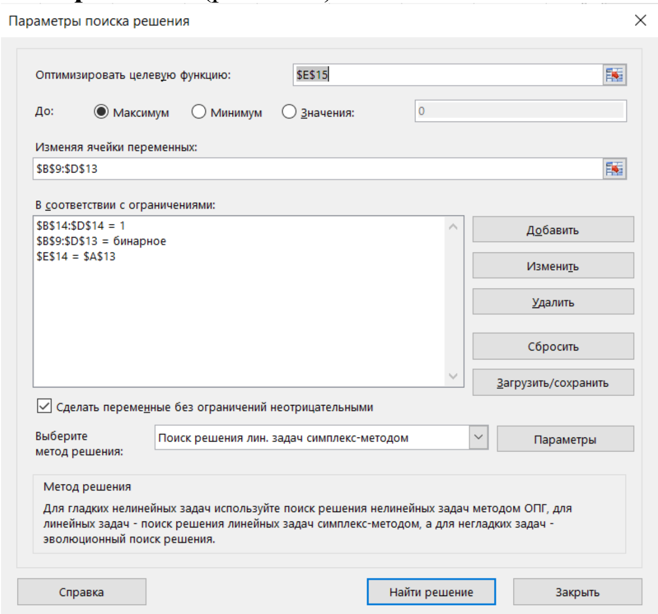

Рис. 10.3. **Вид окна «Поиск решения»**

Прописав ячейку целевой функции, критерий оптимальности, искомые переменные и условия, накладываемые на них в системе ограничений (матрицу распределения определяем как бинарную, суммы по столбцам матрицы должны быть равны 1, поскольку

предполагается осуществлять одно вложение в одно предприятие, сумма всех вложений не должна превышать выделенных средств), включая условие неотрицательности, запускаем поиск оптимального решения кнопкой *Найти оптимальное решение.*

В диалоговом окне *Результаты поиска решения* установить переключатель *Сохранить найденное решение* и нажать кнопку *ОК*.

Получаем решение на рабочем листе (рис. 10.4):

	A	B	C	D	E
1	X	f1	f2	f3	
2	1	1,7	2	1,7	
3	2	2	2,1	2,4	
4	3	2,2	2,3	2,6	
5	4	2,8	3,3	3,2	
6	5	3,5	4	3,6	
7	**Матрица распределения**				
8		f1	f2	f3	
9	1	0	1	0	1
10	2	1	0	1	2
11	3	0	0	0	0
12	4	0	0	0	0
13	5	0	0	0	0
14		1	1	1	5
15				ЦФ	6,4

Рис. 10.4. **Оптимальное решение**

Оптимальное решение имеет вид:

maxZ = 6,4 усл. ден. ед.

Средства распределились так: предприятию F1 – 2 усл. ден. ед., F2 – 1 усл. ден. ед., F3 – 1 усл. ден.

Индивидуальные задания

Найти оптимальное распределение 5 млн. ден. ед. между 4 предприятиями, чтобы получить максимальную прибыль. Прибыль, полученная от каждого предприятия, является функцией от вложенных в него средств X (f(x)) и задана в таблице «Прибыль предприятий от вложенных средств». Вложения кратны 1 млн. ден. ед. Номера предприятий необходимо взять по вариантам.

Таблица 10.5

Прибыль предприятий от вложения средств, млн. ден. ед.

Номер предприятия	X млн. ден. ед.				
	1	2	3	4	5
1	2,4	2,8	3,1	3,6	4,0
2	3	3,2	3,5	3,7	3,9
3	3,5	2,8	3,4	4,0	4,2
4	4,8	5,0	5,2	5,5	5,9
5	3,5	3,8	4,0	4,3	4,8
6	2,1	2,5	2,9	3,2	3,6
7	2	2,1	2,3	3,3	4,0
8	2,2	2,4	2,9	3,5	4,2
9	3,2	3,7	4,0	4,5	5,1
10	1,8	2,4	2,7	3,3	4,0

Таблица 10.6

Варианты заданий

Номер варианта	Номера предприятий	Номер варианта	Номера предприятий	Номер варианта	Номера предприятий
1	1, 2, 3, 4	6	6, 7, 8, 9	11	2, 4, 6, 9
2	2, 3, 4, 5	7	7, 8, 9, 10	12	1, 3, 6, 7
3	3, 4, 5, 6	8	1, 8, 9, 10	13	1, 7, 8, 10
4	4, 5, 6, 7	9	2, 3, 9, 10	14	2, 4, 5, 9
5	5, 6, 7, 8	10	2, 6, 7, 10	15	3, 6, 8, 10
16	4, 7, 3,10	17	1, 2, 6, 7	18	8, 1, 5,10
19	4, 5, 8, 2	20	3, 5, 8,10	21	9, 4, 7, 1
22	9,10, 1, 7	23	1, 2, 7, 8	24	3, 4, 5, 6
25	2, 4, 5, 9	26	1, 2, 6, 7	27	3, 5, 8,10

Тема 11. Элементы теории игр

Теоретическая часть

В жизни часто приходится анализировать ситуации, связанные с конфликтом двух и более сторон. Для решения данных ситуаций разработан специальный математический аппарат – **теория игр**. Стороны, участвующие в конфликте, называются игроками. Задача теории игр состоит в выборе такой линии поведения данного игрока, отклонение от которой может лишь уменьшить его выигрыш.

Чтобы осуществить анализ конфликтной ситуации необходимо построить упрощенную математическую модель, которую и называют **игрой**.

Количественная оценка результатов игры называется **платежом**.

При постановке игровых задач должны быть заданы следующие **условия**: определены стороны, принимающие решения; множество всех возможных стратегий; выигрыши сторон для каждой стратегии.

Наибольшее практическое распространение получили парные игры.

Парная игра (два лица) называется игрой с нулевой суммой (антагонистической игрой), если сумма платежей равна нулю, т.е. если проигрыш одного игрока равен выигрышу другого.

Стратегия игрока называется **оптимальной**, если при многократном повторении игры она обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш (или, то же самое, минимально возможный средний выигрыш).

Игра, определяемая матрицей А, имеющей m строк и n столбцов, называется **конечной парной игрой** размерности m х n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{mj} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где $i = \overline{1,m}$ - стратегия первого игрока, имеющего m стратегий; $j = \overline{1,n}$ - стратегия второго игрока, имеющего n стратегий; a_{ij}– выигрыш первого игрока по i-й стратегии при использовании вторым *j*-й стратегии (или, что то же самое, проигрыш второго по своей *j*-й стратегии, при использовании первым *i*-й).

$A = \|a_{ij}\|$ – платежная матрица игры.

Матричные игры могут иметь решение в **чистых** или **смешанных** стратегиях.

Решение матричной игры в чистых стратегиях

1. Найти нижнюю цену игры (для первого игрока) или максимин:

$$\alpha = \max_i(\min_j(a_{ij}))$$

2. Найти верхнюю цену игры (для второго игрока) или минимакс:

$$\beta = \min_j(\max_i(a_{ij}))$$

3. Если нижняя цена игры равна верхней ($\alpha = \beta$), то игра называется игрой с седловой точкой, или игрой с чистыми стратегиями. При этом $V = \alpha = \beta$ называют ценой игры (V- цена игры).

Решение матричной игры в смешанных стратегиях

Если игра не имеет седловой точки, т.е. $\alpha \neq \beta$, и ни один из участников игры не может выбрать один план в качестве своей оптимальной стратегии, игроки переходят на смешанные стратегии. При этом каждый из игроков использует в процессе игры несколько раз каждую из своих стратегий.

Смешанной стратегией игрока А называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с вероятностью соответственной $p_1, p_2, \ldots, p_m$, причем

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1 \div m.$$

Смешанной стратегией игрока В называется применение чистых стратегий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ с вероятностью соответственной $q_1, q_2, \ldots, q_n$, причем

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \quad q_j \geq 0, \quad j = 1 \div n.$$

Стратегии, примененные с вероятностью, отличной от нуля, называются активными стратегиями.

Платежная матрица игры в смешанных стратегиях имеет следующий вид:

A_i \ B_j		B			
		q_1	q_2	…	q_n
A	p_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
	p_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
	…	…	…	…	…
	p_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Найти оптимальные смешанные стратегии означает нахождение таких значений вероятностей выбора чистых стратегий для обоих игроков, при которых достигается наибольший выигрыш.

Рассматриваемую матричную игру можно привести к задаче линейного программирования:

1. Если игрок А применяет смешанную стратегию против любой чистой стратегии игрока В, то его средний выигрыш должен быть не меньше цены игры. Каждый элемент j-го столбца платежной матрицы умножается на соответствующие вероятности стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и результаты складываются. Получается следующая система неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \geq v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \geq v \end{cases}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \ldots p_m \geq 0$$

Разделив обе части неравенств на v и введя обозначения: $x_1 = \frac{p_1}{v}; x_2 = \frac{p_2}{v}; \ldots; x_m = \frac{p_m}{v}$ система принимает вид:

а) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_m \geq 0$$

Для первого игрока надо найти максимальную цену игры (v), следовательно, $\frac{1}{v}$ будет стремиться к минимуму. Для первого игрока целевая функция примет вид:

$$\min Z = \frac{1}{v} = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

Если игрок B применяет смешанную стратегию против любой чистой стратегии игрока A, то его средний проигрыш не превосходит цены игры. Каждый элемент i-ой строки платежной матрицы умножается на соответствующие вероятности стратегий B_1, B_2,…, B_n и результаты складываются. Получается следующая система неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le v \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$$

$$q_1 \ge 0, q_2 \ge 0, \ldots, q_n \ge 0$$

Разделив обе части неравенств на v и введя обозначения: $y_1 = \frac{q_1}{v}; y_2 = \frac{q_2}{v}; \ldots; y_n = \frac{q_n}{v}$ система принимает вид:

$$б)\quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_n \ge 0$$

Второй игрок стремится минимизировать свой проигрыш (v), поэтому $\frac{1}{v}$ должно стремиться к максимуму и целевая функция примет вид:

$$\max Z = \frac{1}{v} = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

2. В результате решения задач (а, б) определяются значения целевых функций (для обоих игроков они совпадают, т.к. получена

пара симметричных двойственных задач линейного программирования), значения x_i и y_j.

3. Находят значения вероятностей выбора чистых стратегий для обоих игроков, при которых достигается наибольший выигрыш:

$$Z = \frac{1}{v} \text{ следовательно } \quad v = \frac{1}{z},$$

$$x_i = \frac{p_i}{v} \text{ следовательно } \quad p_i = x_i \cdot v,\ i = 1 \div m$$

$$y_j = \frac{q_j}{v} \text{ следовательно } \quad q_j = y_j \cdot v,\ j = 1 \div n$$

Так как на x и y наложены условия неотрицательности, а они определяются как $x = \frac{p}{v}$ и $y = \frac{q}{v}$, то значение игры v должно быть неотрицательной величиной (вероятности – величины неотрицательные). Поэтому, чтобы гарантировать условие неотрицательности переменных, необходимо, чтобы все коэффициенты платежной матрицы были неотрицательными. Этого достигают, прибавив к каждому коэффициенту матрицы модуль наименьшего отрицательного коэффициента матрицы. Тогда в ходе игры будет определена не цена игры (v), а цена, увеличенная на некоторое число (s). Для определения цены игры s вычитают.

Последовательность решения произвольной конечной игры с нулевой суммой

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные или дублирующие стратегии по сравнению с другими стратегиями.

Дублирующими называют стратегии, у которых соответствующие элементы платежной матрицы одинаковые.

Заведомо невыгодной i-й стратегией для первого игрока A считается стратегия, если все элементы i-й строки платежной матрицы меньше соответствующих элементов, например, k-й строки (k-я строка доминирует над i-ой строкой). Если все элементы j-го столбца платежной матрицы больше соответствующих элементов m-го столбца, то j-я стратегия заведомо невыгодна для игрока B (m-ый столбец доминирует над j-м). Таким образом, из платежной матрицы удаляются дублирующие стратегии (кроме одной), доминируемые строки и доминирующие столбцы.

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку.

Если имеет, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными. Если седловой точки нет, то решение следует искать в смешанных стратегиях.

3. Проверить платежную матрицу на неотрицательность коэффициентов.

4. Если все коэффициенты неотрицательные, то составляют системы линейных неравенств и записывают целевую функцию. Далее переход к п.6.

5. Если есть отрицательные коэффициенты, то находят наименьший отрицательный коэффициент в матрице и модуль этого числа прибавляют к каждому элементу платежной матрицы. Далее переход к п.4.

6. Решают задачу линейного программирования. Затем проводят расчеты по определению вероятностей и цены игры.

Игры с природой

Во многих задачах, приводящихся к игровым, присутствует неопределенность, которая вызвана отсутствием информации об условиях, в которых принимается управленческое решение (погодные условия, покупательский спрос и т.п.). Эти условия зависят не от действий другого игрока, а от объективной действительности. Такие задачи могут быть описаны матричными играми, в которых игрок (лицо, принимающее решение) взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой и называются играми с природой.

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии лица, принимающего решение (ЛПР).

Критерий Вальда

При таком критерии рекомендуется применять стратегию, которая обеспечивает максимум минимального выигрыша, т.е. максиминную стратегию. Критерий является пессимистическим, т.к. применяя его, ЛПР ориентируется на то, что природа будет действовать наихудшим для человека способом. Выбранная таким образом стратегия полностью исключает риск.

Для определения максимина по каждой строке матрицы находится минимальный элемент и далее среди найденных значений выбирается максимальное: $W = \max\limits_{i=1\div m} \min\limits_{j=1\div n} a_{ij}$

Критерий Лапласа

Данный критерий применяется при условии, когда ЛПР не имеет информации о возникновении того или иного состояния внешней среды (или информация неполная). В этом случае вероятности принимаются равными, и по каждой строке матрицы находится среднее значение выигрышей. Рекомендуется применять ту стратегию, которая соответствует максимальному значению среднего выигрыша.

$$W = \max_{i=1\div m}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}}{n}\right)$$

Критерий Сэвиджа

По данному критерию оптимальной считается та стратегия, при которой величина риска минимальна. Для определения оптимальной стратегии:

1. На основе заданной платежной матрицы рассчитывается матрица рисков, элементы которой показывают потери, которые понесет ЛПР, если для каждого состояния природы не будет выбрана наилучшая стратегия.

$R = (r_{ij}) = \max\limits_{i=1\div m} a_{ij} - a_{ij}$

где $\max\limits_{i=1\div m} a_{ij}$ – максимальный элемент в j – ом столбце исходной матрицы

2. Матрица рисков дополняется столбцом, в котором содержатся максимальные значения коэффициентов (r_{ij}) по строкам: $R_i = \max\limits_{j} r_{ij}, \quad i = 1 \div m$

3. Выбирается минимальный элемент из дополнительного столбца:

$$W = \min R_i,\ i = 1 \div m$$

Критерий Гурвица

На основе статистических исследований или личного опыта принятия решения ЛПР вводит оценочный коэффициент c, который находится в интервале [0,1] и отражает ситуацию между точкой зрения крайнего оптимизма (наилучшего поведения природы) и крайнего пессимизма (наихудшего поведения природы). Платежная матрица дополняется столбцом, элементы которого рассчитываются по формуле: $W_i = c \cdot \min\limits_j a_{ij} + (1-c) \cdot \max\limits_j a_{ij}, i = 1 \div m$,

где c - коэффициент пессимизма.

Максимальное значение W_i в дополнительном столбце определяет оптимальную стратегию. Чем больше ЛПР желает застраховаться от последствий ошибочных решений, тем коэффициент c ближе к 1. При $c = 1$ критерий превращается в критерий Вальда.

Контрольные вопросы

1. Какая игра называется матричной игрой?
2. Как записать матричную игру в виде платежной матрицы?
3. Что такое нижняя и верхняя цена игры?
4. При каких условиях игра имеет решение в чистых стратегиях?
5. Что понимается под смешанной стратегией игрока?
6. Какая стратегия называется активной?
7. Что значит решить игру в смешанных стратегиях?
8. Как свести матричную игру к задаче линейного программирования?
9. Как определить цену игры и вероятности применения стратегий игроков по результатам решения задач линейного программирования?
10. Что понимают под игрой с природой?
11. Как записывается платежная матрица в играх с природой?

Какие критерии могут использоваться для определения оптимальной стратегии в играх с природой?

Практическая часть

Пример выполнения задания

Задача. У фермера имеется поле, которое он может засеять культурами А1, А2, А3. Урожайность этих культур зависит от сочетания погодных факторов, главными из которых являются осадки и тепло в летний период. Будем считать, что по признаку «осадки» лето имеет три градации: Н – нормальное, З – засушли-

вое, Д – дождливое; по признаку «тепло» – две градации: Н – нормальное и Ж – жаркое.

Известна урожайность культур А1, А2, А3 (в центнерах) в зависимости от сочетания типов погодных условий, а также рыночная цена этих культур в тыс. ден. ед. за 1 ц (табл. 11.1).

Таблица 11.1

Исходные денные

Культура	Цена, ден.ед./ц	Осадки, Тепло					
		Н,Н	Н,Ж	З,Н	З,Ж	Д,Н	Д,Ж
А1	90	133	133	100	33	233	233
А2	120	125	150	200	250	75	100
А3	150	80	100	60	20	120	140

Предполагается, что расходы, связанные с выращиванием культур А1, А2, А3, одинаковы. В какой пропорции надо засеять поле культурами А1, А2, А3, чтобы максимизировать гарантированную прибыль?

Решение. Умножая урожайность культур на их цены, получаем прибыль без учета постоянной величины всех расходов (в тыс. ден. ед.).

Таблица 11.2

Прибыль от реализации единицы продукции, тыс. ден. ед.

Культура	Осадки, Тепло					
	Н,Н	Н,Ж	З,Н	З,Ж	Д,Н	Д,Ж
А1	12	12	9	3	21	21
А2	15	18	24	30	9	12
А3	12	15	9	3	18	21

Приведенную выше таблицу можно рассматривать как матрицу, задающую игру фермера (игрок 1) против природы (игрок 2).

1. Определим верхнюю и нижнюю цену игры:

<table>
<tr><td rowspan="2">Культура</td><td colspan="6">Осадки, Тепло</td><td rowspan="2">$\min\limits_j$</td><td rowspan="2">$\max\limits_i$</td></tr>
<tr><td>Н,Н</td><td>Н,Ж</td><td>З,Н</td><td>З,Ж</td><td>Д,Н</td><td>Д,Ж</td></tr>
<tr><td>А1</td><td>12</td><td>12</td><td>9</td><td>3</td><td>21</td><td>21</td><td>3</td><td rowspan="3">9</td></tr>
<tr><td>А2</td><td>15</td><td>18</td><td>24</td><td>30</td><td>9</td><td>12</td><td>9</td></tr>
<tr><td>А3</td><td>12</td><td>15</td><td>9</td><td>3</td><td>18</td><td>21</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$\max\limits_i$</td><td>15</td><td>18</td><td>24</td><td>30</td><td>21</td><td>21</td><td colspan="2" rowspan="2">15; 9</td></tr>
<tr><td>$\min\limits_j$</td><td colspan="6">15</td></tr>
</table>

$$\alpha = \max_i(\min_j(a_{ij})) = 9, \quad i=1 \div 3 \qquad \beta = \min_j(\max_i(a_{ij})) = 15, \quad j=1 \div 6.$$

Убеждаемся, что в данной игре нет седловой точки – $\alpha \neq \beta$.

2. Упростим игру, исключая доминируемые стратегии игроков. В данном случае второй столбец матрицы доминирует над первым, а шестой – пятым. Удалим столбцы №2 и №6, после чего в новой матрице первая строка доминирует над третьей. Удалим третью строку, соответствующую доминируемой стратегии игрока 2, получаем игру размерностью 2×4, представленную матрицей: $\begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 & 21 \\ 15 & 24 & 30 & 9 \end{pmatrix}$

Исключение третьей строки из матрицы уже говорит о том, что возделывание культуры А3 является невыгодным для фермера при любых сочетаниях погодных условий.

3. Составим задачу линейного программирования для игрока 1 и двойственную ей – для игрока 2.

Для игрока 1:	Для игрока 2:
$\begin{cases} 12x_1 + 15x_2 \geq 1 \\ 9x_1 + 24x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + 30x_2 \geq 1 \\ 21x_1 + 9x_2 \geq 1 \end{cases}$ $\min Z = \frac{1}{v} = x_1 + x_2$	$\begin{cases} 12y_1 + 9y_2 + 3y_3 + 21y_4 \leq 1 \\ 15y_1 + 24y_2 + 30y_3 + 9y_4 \leq 1 \end{cases}$ $\max Z = \frac{1}{v} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$

4. Решим задачу при помощи процедуры «*Поиск решения*»:

Оформить исходные данные на рабочем *листе 1*.

	A	B	C	D	E	F
1		Переменные				
2		x1	x2	Формулы	Правая часть ограничения	Тип ограничения
3		12	15	=СУММПРОИЗВ(B3:C3;$B$8:$C$8)	1	≥
4		9	24	=СУММПРОИЗВ(B4:C4;$B$8:$C$8)	1	≥
5		3	30	=СУММПРОИЗВ(B5:C5;$B$8:$C$8)	1	≥
6		21	9	=СУММПРОИЗВ(B6:C6;$B$8:$C$8)	1	≥
7	Целевая функция (минимум)	1	1	=СУММПРОИЗВ(B7:C7;$B$8:$C$8)		
8	Значения по решению					
9						
10						
11		v=	=1/D7			
12		p1=	=$C$11*B8			
13		p2=	=$C$11*C8			

Рис. 11.1. **Исходные данные на рабочем листе**

Здесь ячейки:

B8:C8 – результат (значения переменных);

B7:C7 – коэффициенты целевой функции;

D7 – значение целевой функции;

B3:C6 – коэффициенты ограничений;

E3:E6 – правая часть ограничений;

D3:D6 – вычисляемые (фактические) значения левой части ограничений.

Решим задачу с помощью команды меню **Данные / Поиск решения**. Делаем активной ячейку D7. Выполняем команду **Данные / Поиск решения**.

На экране появляется диалоговое окно *Поиск решения*.

Прописываем ячейку целевой функции, критерий оптимальности, искомые переменные и условия, накладываемые на них в системе ограничений, включая условия неотрицательности (рис. 11.2).

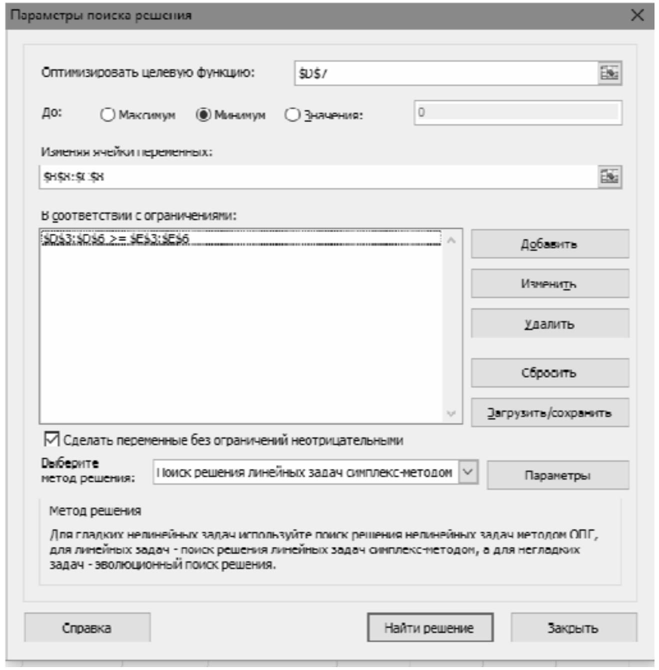

Рис. 11.2. **Вид окна «Поиск решения»**

Выбираем метод решения **Поиск решения линейных задач симплекс-методом.** Запускаем поиск оптимального решения кнопкой *Найти решение.*

В диалоговом окне *Результаты поиска решения* установить переключатель *Сохранить найденное решение*, выбрать все 3 типа отчетов, щелкая по их названиям левой кнопкой мыши, и нажать кнопку ***ОК***.

На *Листе1* (исходные данные) в строке 8 (Значения по решению) выводятся значения соответствующих переменных, в ячейке D7 - значение целевой функции, в ячейках D3:D6 – значения выполнения ограничений. В ячейках C11:C13 на основании полученного оптимального решения рассчитываются цена игры и вероятности выбора первой и второй стратегий игроком 1 (рис. 11.3).

	A	B	C	D	E	F
1		Переменные				
2		x1	x2	Формулы	Правая часть	Тип ограничения
3		12	15	1	1	≥
4		9	24	1,304347826	1	≥
5		3	30	1,391304348	1	≥
6		21	9	1	1	≥
7	Целевая функция (минимум)	1	1	0,072463768		
8	Значения по решению	0,02899	0,043478			
9						
10						
11		v=	13,8			
12		p1=	0,4			
13		p2=	0,6			

Рис. 11.3. **Результаты решения задачи на рабочем листе**

Ответ: $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}6$; $v = 13{,}8$

Результат интерпретируется следующим образом: оптимальная стратегия фермера состоит в том, чтобы 40% поля засеять культурой А1, 60% - культурой А2. При этом фермер получит максимально возможную гарантированную прибыль в 13,8 тыс. ден. ед. Здесь речь идет о гарантированной прибыли, то есть о той, которая получается при наиболее неблагоприятном сочетании погодных факторов. Отметим также, что в данной задаче компоненты смешанной стратегии игрока 1 (фермера) могут быть интерпретированы не как вероятности использования чистых стратегий, а как доли, в которых засевается общая площадь поля той или иной культурой. Таким образом, смешанная стратегия игрока здесь носит характер «физической смеси», принимая вид пропорций сочетания культур А1 и А2 и оптимальная стратегия игрока максимизирует не ожидаемую, а гарантированную прибыль.

Решая двойственную задачу для игрока 2 получим: $q_1 = 0{,}8$; $q_2 = 0$; $q_3 = 0$; $q_4 = 0{,}2$; $v = 13{,}8$. Анализ результата решения для природы позволяет сделать вывод, что в данной игре с наибольшей вероятностью прогнозируется наступление нормального по осадкам и теплу лета для выращивания культур А1 и А2.

Индивидуальные задания

Задание 1. Определить нижнюю и верхнюю цены игры. Найти оптимальные стратегии, если существует седловая точка. Если нет решения в чистых стратегиях, то привести матричную игру к задаче линейного программирования и найти решение игры в смешанных стратегиях.

1. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	**2.** $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 7 & 7 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$	**4.** $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 14 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	**6.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 10 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	**8.** $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 9 \\ 10 & 7 & 12 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 7 & 1 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	**10.** $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 1{,}1 & 1{,}5 \\ 1{,}3 & 1{,}6 & 1{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 1{,}9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 1{,}1 & 1{,}5 \\ 1{,}3 & 1{,}6 & 1{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 1{,}9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	**12.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 8 & 9 & 11 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ 8 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	**14.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 13 \\ 5 & 8 & 12 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 8 & 16 & 14 \\ 10 & 15 & 17 \\ 6 & 8 & 19 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	**16.** $\begin{pmatrix} 1{,}0 & 1{,}5 & 1{,}8 \\ 0{,}8 & 1{,}6 & 1{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 1{,}9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 10 \\ 0{,}9 & 8 & 11 \\ 1{,}0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	**18.** $\begin{pmatrix} 15 & 19 & 21 \\ 10 & 9 & 11 \\ 8 & 12 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 20 & 25 & 27 \\ 18 & 16 & 24 \\ 15 & 19 & 18 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	**20.** $\begin{pmatrix} 17 & 19 & 21 \\ 15 & 14 & 22 \\ 13 & 17 & 16 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 2. В приближении посевного сезона фермер Петров имеет четыре альтернативы: A_1 – выращивать кукурузу, A_2 – выращивать пшеницу, A_3 – выращивать овощи, A_4 – использовать землю под пастбища. Платежи, связанные с указанными возможностями, зависят от количества осадков, которые условно можно разделить на четыре категории: B_1 – сильные осадки, B_2 – умеренные осадки, B_3 – незначительные осадки, B_4 – засушливый сезон. Построить платежную матрицу в ден. ед. используя таблицы 6.3 и 6.4, определить, как следует распределить сельскохозяйственные угодья, чтобы фермер получил наибольший выигрыш.

Требуется сделать выбор действия по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица при $\alpha = 0.5$, Лапласа.

Таблица 11.3

Доходы (убытки) фермера от использования сельскохозяйственных угодий

Культуры	Осадки			
	Сильные	Умеренные	Незначительные	Засуха
1.	-10	80	40	3
2.	40	90	35	-10
3.	25	110	55	2
4.	20	25	45	-7
5.	-12	70	65	-25
6.	30	80	65	2
7.	30	140	50	0
8.	-18	25	45	-10
9.	45	75	50	0
10.	16	125	88	3

Таблица 11.4

Варианты заданий

№ варианта	№ культур	№ варианта	№ культур
1	1, 2, 3, 4	11	2, 4, 6, 8
2	2, 3, 8, 4	12	1, 3, 6, 8
3	3, 5, 7,4	13	1, 8, 7,10
4	5, 6, 7,4	14	2, 4, 7, 1
5	5, 1, 7, 8	15	3, 6,10,8
6	6,8, 7,1	16	2, 4, 3, 8
7	7, 8,10, 6	17	1, 6, 10,8
8	1, 8,10, 9	18	1, 5, 7, 8
9	2, 3, 10,1	19	1, 2,10,9
0	2, 6,10,9	20	3, 5, 7, 1

Библиографический список

1. Бабкина, А. В. Математические методы в экономике: задачник с ответами. Автоматизация расчетов: учебное-методическое пособие / А. В. Бабкина, Е. А. Ермакова, Г. Н. Светлова. – Москва: ФГБНУ "Росинформагротех", 2017. – 112 с. – ISBN 978-5-7367-1341-7. – EDN YOXBOS.
2. Бабкина, А. В. Математическое моделирование и проектирование: Учебно-методическое пособие / А. В. Бабкина, О. С. Пучкова. – Москва: Российский государственный аграрный университет - МСХА им. К.А. Тимирязева, 2019. – 71 с. – EDN QMXUAC.
3. Бабкина, А. В. Экономико-математические методы и моделирование / А. В. Бабкина, Е. А. Ермакова, Г. Н. Светлова. – Москва: Российский государственный аграрный университет - МСХА им. К.А. Тимирязева, 2018. – 112 с. – EDN ZBAXYT.
4. Бабкина, А. В. Экономико-математические модели оптимизации землепользования / А. В. Бабкина, О. С. Пучкова. – Москва: Российский государственный аграрный университет - МСХА им. К.А. Тимирязева, 2020. – 94 с. – EDN CEOKLF.
5. Колобашкина Л.В. Основы теории игр: учебное пособие. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017.
6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики. М.: Финансы и статистика, 2005.
7. Кремер Н.Ш. и др. Исследование операций в экономике. М.: Юрайт, 2014.
8. Кузнецов Б.Т. Математические методы и модели исследования операций: Профессиональный учебник. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
9. Лапшин К.А. Игровые модели и принятие решений: Учебное пособие. М.: Изд-во МСХА, 2001.
10. Лядина, Н. Г. Исследование операций / Н. Г. Лядина, Л. В. Уразбахтина. – Москва: Российский государственный аграрный университет - МСХА им. К.А. Тимирязева, 2016. – 164 с. – ISBN 978-5-9675-1412-8. – EDN YLDJZB.
11. Методы принятия управленческих решений. Линейное и дискретное программирование: Практикум / Н. Г. Лядина, Г. Н. Светлова, Л. В. Уразбахтина, Е. А. Ермакова. – Москва: Россий-

ский государственный аграрный университет - МСХА им. К.А. Тимирязева, 2014. – 277 с. – EDN WTKPEJ.

12. Просветов Г.И. Математические методы и модели в экономике: задачи и решения: Учебно-практическое пособие. М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008.

13. Светлова, Г. Н. Экономико-математические методы и модели / Г. Н. Светлова, Е. А. Ермакова. – Москва: Российский государственный аграрный университет - МСХА им. К.А. Тимирязева, 2016. – 109 с. – EDN WTMEON.

14. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие. Под ред. Ф.И. Макарова. – 2 изд. перераб. и доп. М.: КНОРУС, 2009.

Учебное издание

Бабкина Анастасия Валентиновна
Пучкова Ольга Сергеевна
Торопцев Василий Владимирович

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В АПК**

Учебно-методическое пособие

ISBN 978-5-907916-51-7

9 785907 916517 >

Компьютерная верстка и макет *Горохов А.А.*

Подписано в печать 13.09.2024.
Формат 60×84 1/16. Бумага офисная
Усл. печ. л. 7,7. Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 500 экз. Заказ 2322

Отпечатано в типографии
Закрытое акционерное общество "Университетская книга"
305018, г. Курск, ул. Монтажников, д.12
ИНН 4632047762 ОГРН 1044637037829 дата регистрации 23.11.2004 г.
Телефон +7-910-730-82-83 www.nauka46.ru