МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФГАОУ ВО “КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО”
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В. И. Войтицкий, Д. О. Цветков

Неопределённый интеграл

Учебно-методическое пособие для студентов

Симферополь
Издательский дом КФУ
2022

УДК 517.3

Рецензенты:

Смолич Владимир Павлович, к.ф.-м.н, доцент кафедры математического анализа Физико-технического института КФУ имени В. И. Вернадского

Третьяков Дмитрий Вадимович, к.ф.-м.н, доцент кафедры алгебры и функционального анализа Физико-технического института КФУ имени В. И. Вернадского

Войтицкий В. И. Неопределённый интеграл / В. И. Войтицкий, Д. О. Цветков. – Симферополь: Издательский дом КФУ, 2022. – 51 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов дневной и заочной формы обучения физических, математических и инженерных специальностей. Соответствует программе второго модуля дисциплины “Математический анализ” образовательно-квалификационного уровня ”бакалавр”.

Рекомендовано к печати заседанием кафедры математического анализа от 16.12.2021*, протокол №* 5

Утверждено методической комиссией Физико-технического института ФГАОУ ВО “КФУ им. В. И. Вернадского” от 07.02.2022*, протокол №* 6

Содержание

Предисловие 4
1. Введение 5
1.1. Понятие неопределенного интеграла 5
1.2. Свойства неопределенного интеграла 6
1.3. Таблица основных неопределенных интегралов 7
2. Основные методы интегрирования 8
2.1. Метод непосредственного интегрирования 8
2.2. Метод подведения (занесения) под знак дифференциала и метод подстановки (замены переменной) 10
2.3. Метод интегрирования по частям 14
3. Интегрирование рациональных функций 17
3.1. Понятия о рациональных функциях 17
3.2. Интегрирование простейших рациональных дробей 22
3.3. Интегрирование рациональных дробей 24
3.4. Метод М.В. Остроградского 28
4. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций 31
4.1. Универсальная тригонометрическая подстановка 31
4.2. Интегрирование некоторых специальных классов тригонометрических функций 34
4.3. Интегрирование гиперболических функций 37
5. Интегрирование иррациональных функций 38
5.1. Интеграл вида $\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots\right)\,dx$ 38
5.2. Интегрирование дифференциального бинома 41
5.3. Интегрирование квадратичных иррациональностей 43

Предисловие

В учебно-методическом пособии рассмотрен раздел "Неопределенный интеграл", предусмотренный рабочей программой курса "Математический анализ" для студентов физико-математических и инженерных специальностей.

Пособие разбито на разделы, в начале каждого из которых приведены необходимые теоретические сведения, рассмотрены образцы решения как типовых задач, так и задач повышенной сложности. Затем предложено достаточное количество задач для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов.

Сочетание необходимой теоретической информации со значительным количеством разобранных задач позволяет использовать пособие для самостоятельного изучения математического анализа и проведения практических занятий (в том числе дистанционных).

1. Введение

1.1. **Понятие неопределенного интеграла.** При решении многих математических и физических задач необходимо найти функцию по заданной производной этой функции, т.е. решить задачу, обратную дифференцированию. Это приводит к следующему определению.

Определение 1.1. *Функция $F(x)$ называется* **первообразной функцией** *(или просто первообразной) для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если в любой точке $x \in (a;b)$ функция $F(x)$ дифференцируема и*

$$F^{'}(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является функция $F(x) = x^3/3$, так как

$$F^{'}(x) = \left(x^3/3\right)^{'} = x^2 = f(x).$$

Очевидно, что первообразными будут также любые функции $F(x) = x^3/3 + C$, где C – постоянная, поскольку

$$F^{'}(x) = \left(x^3/3 + C\right)^{'} = x^2 = f(x).$$

Отметим, что если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C – постоянное число.

Определение 1.2. *Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется* **неопределенным интегралом** *от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначают символом*

$$\int f(x)\,dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{1.2}$$

Здесь $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, $\int$ – знаком неопределенного интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется **интегрированием** *этой функции.*

1.2. **Свойства неопределенного интеграла.** Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

Свойство 1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Свойство 2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d\,F(x) = F(x) + C.$$

Свойство 3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx\,, \qquad k\neq 0 - \text{постоянная.}$$

Свойство 4.

$$\int (\,f(x)\pm g(x)\,)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\,.$$

Свойство 5. (Инвариантность формулы интегрирования.) Если $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, то $\int f(u)\,du = F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Так из формулы $\int x^2 dx = x^3/3 + C$ путем замены x на u ($u = \varphi(x)$) получаем $\int u^2 du = u^3/3 + C$. В частности,

$$\int \sin^2 x\, d \sin x = \sin^3 x/3 + C, \quad \int \ln^2 x\, d \ln x = \ln^3 x/3 + C,$$

1.3. **Таблица основных неопределенных интегралов.** Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул дифференциального исчисления (таблица дифференциалов) и использования свойств неопределенного интеграла.

Например, так как $d(\sin x) = \cos x\, dx$, то

$$\int \cos x\, dx = \int d(\sin x) = \sin x + C.$$

Интегралы в приводимой ниже таблице называются табличными. Их следует знать наизусть. В интегральном исчислении нет простых и универсальных правил отыскания первообразных от элементарных функций, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных (т.е. интегрирования функции) сводятся к указанию приемов, приводящих данный (искомый) интеграл к табличному. Следовательно, *необходимо знать табличные интегралы и уметь их узнавать.*

Отметим, что в таблице основных интегралов переменная интегрирования u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству инвариантности формулы интегрирования).

Таблица основных интегралов.

1. $\displaystyle\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \left(\int du = u + C\right);$
2. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C;$
3. $\displaystyle\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad \left(\int e^u du = e^u + C\right);$
4. $\displaystyle\int \sin u\, du = -\cos u + C;$

5. $\int \cos u \, du = \sin u + C;$

6. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

8. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$

9. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C;$

10. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$

11. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$

В справедливости приведенных выше формул можно убедиться, взяв дифференциал правой части, который будет равен подынтегральному выражению в левой части формулы. Докажем, например, справедливость формулы 10:

$$d \left(\frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} \, du = \frac{du}{a^2 + u^2}.$$

2. Основные методы интегрирования

2.1. **Метод непосредственного интегрирования.** Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения простейших свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием.*

Пример 2.1.

1. $\int (e^x - x^2) \, dx = e^x - \frac{x^3}{3} + C$

(формулы 1 и 3 таблицы интегралов);

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-4+3x}{x}\,dx = \int x^{1/2-1}\,dx - 4\int \frac{1}{x}\,dx + 3\int dx =$

$\displaystyle = \frac{x^{-1/2+1}}{1/2} - 4\ln|x| + 3x + C = 2\sqrt{x} - 4\ln|x| + 3x + C$

(формулы 1 и 2 таблицы интегралов);

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(9/4)+x^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3/2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3/2} + C =$

$\displaystyle = \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{3} + C$ (формула 10 таблицы интегралов);

4. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$

$= \mathrm{tg}\;x - x + C$ (формулы 1 и 6 таблицы интегралов).

5. $\displaystyle\int \frac{4-3x^2}{x^2(4-x^2)}\,dx = \int \frac{4-x^2}{x^2(4-x^2)}\,dx - 2\int \frac{x^2}{x^2(4-x^2)}\,dx =$

$\displaystyle = \int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{2^2-x^2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-1} - \frac{2}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C =$

$\displaystyle = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C$ (формулы 1 и 11 таблицы интегралов).

ЗАДАЧИ. Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int (1-2\sqrt{x})^2 dx,$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx,$

3. $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx,$

4. $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt[3]{x})^3}{3x}\,dx,$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+8},$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-6},$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}},$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+27}},$

9. $\displaystyle\int \frac{2^{x+2}-5^{x+1}}{10^x}\,dx,$

10. $\displaystyle\int \frac{2^{2x-1}-3^{2x+3}}{6^{2x}}\,dx,$

11. $\displaystyle\int 2^{x+1}\cdot 3^x\cdot 5^{x-1}\,dx,$

12. $\displaystyle\int \frac{3^{2x+1}\cdot 2^x}{5^{x-2}}\,dx,$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx,$

14. $\displaystyle\int \frac{(3+x)^2\,dx}{2x(9+x^2)},$

15. $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx,$

16. $\displaystyle\int 2\cos^2\frac{x}{2}\,dx,$

17. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx,$

18. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\, dx,$

19. $\displaystyle\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx,$

20. $\displaystyle\int (\arcsin x + \arccos x)\, dx.$

2.2. **Метод подведения (занесения) под знак дифференциала и метод подстановки (замены переменной).** При сведении данного интеграла к табличному часто используются прием преобразования дифференциала, который иначе называется операцией подведения (занесения) под знак дифференциала. Если $u(x)$ — некоторая функция, то согласно свойств операции дифференцирования мы, например, имеем

$$du = d(u+a); \qquad du = (1/a)\cdot d(au), \quad a \neq 0 - \text{число};$$

$$u\cdot du = 1/2\cdot d\,(u^2); \qquad u^2\cdot du = 1/3\cdot d\,(u^3);$$

$$\cos\, u\cdot du = d\,(\sin\, u); \qquad \sin\, u\cdot du = -d\,(\cos\, u);$$

$$\frac{du}{u} = d\,(\ln u); \qquad e^u\, du = d\,(e^u);$$

$$\frac{du}{\cos^2 u} = d\,(\operatorname{tg} u), \qquad \frac{du}{\sin^2 u} = -d\,(\operatorname{ctg} u).$$

Данный список формул можно продолжить, вычисляя дифференциалы от других функций.

Пример 2.2.

1. $$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$$
(формула 2 таблицы интегралов);

2. $$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin\, x}{\cos\, x}\, dx = \int \frac{-d\,(\cos\, x)}{\cos\, x} = -\ln\,|\cos\, x| + C$$
(формула 2 таблицы интегралов);

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \int \frac{d\,(\sqrt{3}\cdot x)}{\sqrt{2^2-(\sqrt{3}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \arcsin\, \frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} + C$$
(формула 8 таблицы интегралов);

4. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 3}} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\sqrt{(\operatorname{tg} x)^2-3}}\, dx =$$
$$= \ln(\operatorname{tg} x + \sqrt{(\operatorname{tg} x)^2 - 3}) + C$$ (формула 9 таблицы интегралов);

5. $$\int x\cdot(x+2)^9dx=\int(x+2-2)\cdot(x+2)^9dx=\int(x+2)^{10}dx-$$
$$-\int 2\cdot(x+2)^9dx=\int(x+2)^{10}d(x+2)-2\cdot\int(x+2)^9d(x+2)=$$
$$=\frac{(x+2)^{11}}{11}-2\cdot\frac{(x+2)^{10}}{10}+C \text{ (формула 1 таблицы интегралов).}$$

На метод подведения под знак дифференциала можно посмотреть с другой стороны. Применяя этот метод, мы негласно производим интегрирование по “другой переменной”, которая стоит под знаком дифференциала, то есть осуществляем замену переменной.

Прием введения новой переменной интегрирования называется методом интегрирования подстановкой. При этом новую переменную выбирают так, чтобы заданный интеграл сводился к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (такую подстановку называют “удачной”). Умение выбирать удачную подстановку заменяет необходимость осуществлять тождественные преобразования в методе занесения под знак дифференциала, поскольку метод замены является более общим. Однако, часто интегралы можно брать и одним, и другим способом. В дальнейших темах пособия будут рассмотрены некоторые стандартные *часто встречающиеся замены.* Здесь приведем лишь основную идею данного метода.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Сделаем подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx=\varphi^{'}(t)\,dt$ и на основании свойства инвариантности формы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\int f(x)\,dx=\int f(\,\varphi(t)\,)\,\varphi^{'}(t)\,dt\,. \tag{2.1}$$

Формула (2.1) также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла в правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Пример 2.3.

1. $$\int x\cdot(x+2)^{100}dx=\left|\begin{array}{l} x+2=t \\ x=t-2,\quad dx=dt \end{array}\right|=\int(t-2)\cdot t^{100}dt=$$

$$= \int t^{101}dt - 2\cdot\int t^{100}dt = \frac{t^{102}}{102} - 2\cdot\frac{t^{101}}{101} + C =$$

$$= \frac{(x+2)^{102}}{102} - 2\cdot\frac{(x+1)^{101}}{101} + C;$$

2. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{u^2+a}+u=t & \frac{2u}{2\cdot\sqrt{u^2+a}}\,du + du = dt \\ dt = \frac{u+\sqrt{u^2+a}}{\sqrt{u^2+a}}\,du & \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \frac{dt}{u+\sqrt{u^2+a}} = \frac{dt}{t} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sqrt{u^2+a}+u| + C$$

(получена формула 9 таблицы интегралов);

3. $$\int \frac{dx}{e^x+1} = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t, \quad dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t\cdot(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \int \frac{d\,(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\cdot\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right| + C = -\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right| + C\,;$$

4. $$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2-1, \quad dx = 2t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2tdt}{2+t} = 2\int \frac{2+t-2}{2+t}\,dt = 2\int dt - 4\int \frac{d(2+t)}{2+t} =$$

$$= 2t - 4\ln|2+t| + C = 2\sqrt{x+1} - 4\ln(2+\sqrt{x+1}) + C\,;$$

5. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \left| \begin{array}{c} x = 1/t \\ dx = -1/t^2\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{-dt/t^2}{1/t\,\sqrt{9/t^2-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} =$$

$$= \arccos(t/3) + C = \arccos(1/(3x)) + C\,.$$

Как видно, вычисление интегралов часто требует некоторой изобретательности, так сказать, "индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции". Соответствующие навыки приобретаются в результате значительного числа упражнений.

ЗАДАЧИ. Найти интегралы методом занесения под знак дифференциала либо методом подстановки:

1. $\displaystyle\int (2x+15)^{16}\,dx,$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-3x)^{30}},$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}},$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1+3x)^4}},$

5. $\displaystyle\int x\cdot(x-2)^5\,dx,$

6. $\displaystyle\int x\cdot\sqrt{1-2x}\,dx,$

7. $\displaystyle\int (x+2)\cdot\sqrt{x-2}\,dx,$

8. $\displaystyle\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-4}}\,dx,$

9. $\displaystyle\int \frac{6x-5}{3\sqrt{3x^2-5x+6}}\,dx,$

10. $\displaystyle\int \frac{4x+1}{x^2+9}\,dx,$

11. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}},$

12. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx,$

13. $\displaystyle\int \frac{1-4x}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx,$

14. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+x^4},$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^6-5},$

16. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{3+x^5}},$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot\ln^5 x},$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot(\ln\,x+3)},$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}\,dx,$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot(2+\ln^2 x)},$

21. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx,$

22. $\displaystyle\int \frac{e^x}{4-e^{2x}}\,dx,$

23. $\displaystyle\int x\cdot\cos\,x^2\,dx,$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos\,\sqrt{x}\,dx,$

25. $\displaystyle\int \frac{\cos\,x}{1+\sin\,x}\,dx,$

26. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx,$

27. $\displaystyle\int \cos^2(3x)\,dx,$

28. $\displaystyle\int (\sin\,x+2\cos\,x)^2\,dx,$

29. $\displaystyle\int 2^{\arccos x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$

30. $\displaystyle\int \frac{\cos\,x}{1+\cos^2 x}\,dx,$

31. $\displaystyle\int \frac{2^x 3^x}{9^x-4^x}\,dx,$

32. $\displaystyle\int \sin 2x\sin x\,dx,$

33. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arctg}\;3x}{1+9x^2}\,dx,$

34. $\displaystyle\int \frac{x+\arccos^{3/2}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

ЗАДАЧИ. Применяя подходящие подстановки, найти интегралы:

1. $\int (2x+1)^{20} dx,$
2. $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx,$
3. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx,$
4. $\int \frac{(2\cdot\ln\, x+3)^3}{x}\, dx,$
5. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}\, dx,$
6. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}\, dx,$
7. $\int x^3(1-2x^4)^3\, dx,$
8. $\int \sin{(2-3x)}\, dx,$
9. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^5-2}}\, dx,$
10. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx,$
11. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{2x+1}}\,,$
12. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^x-1}},$
13. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-2}},$
14. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}},$
15. $\int \frac{4x-3}{(x-2)^8}\, dx,$
16. $\int \frac{x^2}{(x+1)^{10}}\, dx,$
17. $\int (x+3)(x-2)^5\, dx,$
18. $\int (x^2-1)(x+1)^{10}\, dx,$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}},$
20. $\int \frac{e^x\, dx}{e^x+4},$
21. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\, dx,$
22. $\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}.$

2.3. **Метод интегрирования по частям.** Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором интервале. Тогда функция uv также имеет непрерывную производную на этом интервале и, согласно правилу дифференцирования произведения, выполняется равенство

$$(u\cdot v)^{'} = u^{'}\cdot v + u\cdot v^{'}.$$

Интегрируя это равенство и учитывая, что $\int (uv)^{'} dx = uv + C$, получаем

$$uv + C = \int u^{'} v\, dx + \int uv^{'} dx.$$

Относя произвольную постоянную C к интегралу $\int u\cdot v^{'}\,dx$, находим

$$\int uv^{'}\,dx = uv - \int u^{'}v\,dx \qquad \text{или} \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2.2}$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям.* Она дает возможность свести вычисления интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться более простым, чем исходный.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида

$$\int P_n(x)e^{x}dx, \quad \int P_n(x)\sin\,x\,dx, \quad \int P_n(x)\cos\,x\,dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n (см. определение 3.1). Удобно положить $u = P_n(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители. (Формулу применить n раз.)

2. Интегралы вида

$$\int P_n(x)(\ln\,x)^{m}dx, \quad \int P_n(x)\arcsin\,x\,dx, \quad \int P_n(x)\arccos\,x\,dx,$$

$$\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx, \quad \int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx.$$

Удобно положить $dv = P_n(x)\,dx$, а за u обозначить все остальные сомножители. (Для первого интеграла формулу применить m раз.)

3. Интегралы вида

$$\int e^{ax}\sin\,bx\,dx, \quad \int e^{ax}\cos\,bx\,dx,$$

где a и b – числа. За u принять функцию e^{ax}. (Формулу применить дважды.)

Пример 2.4.

1. $$\int \ln\,x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln\,x, & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}\,dx, & v = x \end{vmatrix} = x\ln\,x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = \\ = x\ln\,x - x + C;$$

2. $$\int x^2e^x dx = \left| \begin{array}{cc} u = x^2, & dv = e^x dx \\ du = 2x\,dx, & v = e^x \end{array} \right| = x^2e^x - 2\cdot\int xe^x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{array} \right| = x^2e^x - 2\cdot\left(xe^x - \int e^x dx\right) =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x dx + C;$$

3. $$I := \int e^{ax}\cos\, bx\,dx = \left| \begin{array}{cc} u = e^{ax}, & dv = \cos\, bx\,dx \\ du = ae^{ax}dx, & v = \frac{1}{b}\sin\, bx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin\, bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin\, bx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} u = e^{ax}, & dv = \sin\, bx\,dx \\ du = ae^{ax}dx, & v = -\frac{1}{b}\cos\, bx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin\, bx - \frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos\, bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos\, bx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin\, bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos\, bx - \frac{a^2}{b^2}\cdot I, \qquad \text{следовательно}$$

$$I = \frac{be^{ax}\sin\, bx + ae^{ax}\cos\, bx}{a^2+b^2} + C;$$

4. $$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{cc} u = \sqrt{a^2+x^2} & dv = dx \\ du = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} & \end{array} \right| = x\cdot\sqrt{a^2+x^2} -$$

$$-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x\cdot\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx =$$

$$= x\cdot\sqrt{a^2+x^2} - \int\sqrt{a^2+x^2}\,dx + a^2\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} =$$

$$= x\cdot\sqrt{a^2+x^2} - \int\sqrt{a^2+x^2}\,dx + a^2\cdot\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C.$$

Таким образом,

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\cdot\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C. \quad (2.3)$$

ЗАДАЧИ. Найти интегралы.

1. $\int x\cdot\sin\, x\,dx$,

2. $\int x\cdot\cos\, 3x\,dx$,

3. $\displaystyle\int x \cdot \cos^2 x \, dx$,

4. $\displaystyle\int (x^2 + 5x + 6) \cdot \cos 2x \, dx$,

5. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx$,

6. $\displaystyle\int x \cdot \arcsin x \, dx$,

7. $\displaystyle\int \ln^2 x \, dx$,

8. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$,

9. $\displaystyle\int x^2 \cdot e^{3x} \, dx$,

10. $\displaystyle\int x \cdot 2^{-x} \, dx$,

11. $\displaystyle\int e^x \cdot \sin x \, dx$,

12. $\displaystyle\int 3^x \cdot \cos x \, dx$,

13. $\displaystyle\int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx$,

14. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 3} \, dx$,

15. $\displaystyle\int \sqrt{2 - x^2} \, dx$,

16. $\displaystyle\int x \cdot \sin^3 x \, dx$,

17. $\displaystyle\int x \cdot \operatorname{ctg}^2 x \, dx$,

18. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$,

19. $\displaystyle\int x^2 \cdot \ln(1 + x) \, dx$,

20. $\displaystyle\int x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \, dx$,

21. $\displaystyle\int \cos^2(\ln x) \, dx$,

22. $\displaystyle\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} \, dx$,

23. $\displaystyle\int \arccos x \, dx$,

24. $\displaystyle\int x \cdot \arccos \frac{1}{x} \, dx$,

25. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x + 1}} \, dx$,

26. $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$,

27. $\displaystyle\int \arcsin^2 x \, dx$,

28. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$,

29. $\displaystyle\int \cos(\ln x) \, dx$,

30. $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2} \, dx$,

31. $\displaystyle\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1 + x^2}}$,

32. $\displaystyle\int x \operatorname{arctg}^2 x \, dx$.

3. Интегрирование рациональных функций

3.1. Понятия о рациональных функциях.

Определение 3.1. *Функция вида*

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{3.1}$$

где n – натуральное число, a_i $(i = \overline{0, n})$ – постоянные коэффициенты, называется **многочленом** *(или* **целой рациональной функцией***). Число n называется* **степенью** *многочлена.*

Корнем многочлена (3.1) называется такое значение x_0 (вообще говоря комплексное) переменной x, при котором многочлен обращается в нуль, т.е. $P_n(x_0) = 0$.

Приведем ряд утверждений без доказательства.

Утверждение 3.1. *Если x_1 корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_1$, т.е.*

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n - 1$.

Утверждение 3.2. *Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде*

$$P_n(x) = a_0 \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_r)^{k_r} \cdot$$
$$\cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}, \quad (3.2)$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2 \cdot (s_1 + s_2 + \ldots + s_m) = n$, все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней.

Примеры разложений (3.2):

1. $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$;
2. $x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x - 4)(x + 4)$.

Определение 3.2. Дробно-рациональной функцией *(или* **рациональной дробью***) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е. $f(x) = P_m(x)/Q_n(x)$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, $Q_n(x)$ – многочлен степени n.*

Рациональная дробь называется **правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$; в противном случае (если $m \geqslant n$) рациональная дробь называется* **неправильной.**

Утверждение 3.3. *Всякую неправильную рациональную дробь $P(x)/Q(x)$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $R(x)/Q(x)$, т.е.*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}. \tag{3.3}$$

Пример 3.1. Представить неправильную дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 6}{x + 1}$$

в виде представления (3.3).

Решение. Разделив числитель на знаменатель в столбик:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 + 5x - 6 & x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3 + 2x^2} \qquad\qquad & 2x^2 - 5x + 10 \\ -5x^2 + 5x - 6 & \\ \underline{-5x^2 - 5x} \quad\; & \\ 10x - 6 & \\ \underline{10x + 10} & \\ -16 & \end{array}$$

Получим частное $L(x) = 2x^2 - 5x + 10$ и остаток $R(x) = -16$. Следовательно,

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 6}{x + 1} = 2x^2 - 5x + 10 - \frac{16}{x + 1}\,.$$

Правильные рациональные дроби вида

I. $\dfrac{A}{x - a}$; *II.* $\dfrac{A}{(x - a)^k}$ $(\, k \geqslant 2,\ k \in \mathbb{N}\,)$;

III. $\dfrac{Mx + N}{x^2 + px + q}$ (корни знаменателя комплексные, т.е. $p^2 - 4q < 0$);

IV. $\dfrac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$ $(\, k \geqslant 2,\ k \in \mathbb{N},\ p^2 - 4q < 0\,)$,

где A, a, M, N, p, q – действительные числа, называются **простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типа.**

Теорема 3.1. *Всякую правильную рациональную дробь $P(x)/Q(x)$, знаменатель которой разложен на множители*

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r} \cdot \\ \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \ldots + \\ + \frac{B_1}{x-x_r} + \frac{B_2}{(x-x_r)^2} + \ldots + \frac{B_{k_r}}{(x-x_r)^{k_r}} + \\ + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \\ + \ldots + \\ + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2} + \ldots + \frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}, \tag{3.4}$$

где A_1, B_1, ..., C_1, D_1, ..., M_1, N_1, ... – некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1. $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3} = \dfrac{A_1}{x-2} + \dfrac{A_2}{x-3} + \dfrac{A_3}{(x-2)^2} + \dfrac{A_4}{(x-2)^3}$;
2. $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{A_3x+A_4}{x^2+1}$;
3. $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2} = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{x-2} + \dfrac{A_3x+A_4}{x^2+x+1} + \dfrac{A_5x+A_6}{(x^2+x+1)^2}$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов A_1, B_1, ..., C_1, D_1, ..., M_1, N_1, ... в равенстве (3.4) можно применить *метод сравнения коэффициентов*. Суть метода такова:

1. В правой части равенства (3.4) приводим к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получаем равенство $P(x)/Q(x) = S(x)/Q(x)$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т.е. $P(x) = S(x)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в полученном тождестве, получим систему линейных уравнений, из которой определим искомые коэффициенты.

Пример 3.2. Представить дробь в виде суммы простейших дробей
$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Решение. Согласно теореме 3.4 имеем:
$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5},$$
т.е.
$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$
Отсюда следует
$$\begin{aligned} 2x^2-3x-3 &\equiv A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1) = \\ &= (A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C). \end{aligned}$$
Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, получаем
$$\begin{cases} 2 = A+B, \\ -3 = -2A-B+C, \\ -3 = 5A-C. \end{cases}$$
Решая систему находим, что $A=-1,\ B=3,\ C=-2$. Следовательно,
$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{-1}{(x-1)} + \frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$

ЗАДАЧИ. Представить данные дроби в виде суммы простейших дробей.

1. $\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$, 2. $\dfrac{x^3-1}{4x^3-x}$,

3. $\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$, 4. $\dfrac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}$,

5. $\dfrac{x}{x^3-1}$, 6. $\dfrac{x^2}{1-x^4}$,

7. $\dfrac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}$, 8. $\dfrac{x^9}{(x^4-1)^2}$,

9. $\dfrac{1}{x^2(x^3+1)^2}$, 10. $\dfrac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

3.2. **Интегрирование простейших рациональных дробей.** Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

Рациональные дроби **I типа:**

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\cdot\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\cdot\ln|x-a|+C$$

(формула 2 таблицы интегралов).

Рациональные дроби **II типа:**

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\cdot\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$$

(формула 1 таблицы интегралов).

Рациональные дроби **III типа**.

Выделим в знаменателе полный квадрат и сделаем замену (выражение при полном квадрате обозначим через новую переменную t), тем самым сведем интегрирование к формулам 2 и 15 таблицы интегралов:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} x+\frac{p}{2}=t & x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt & a^2:=q-\frac{p^2}{4}\end{array}\right| = \int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt =$$

$$= M\cdot\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(-M\cdot\frac{p}{2}+N\right)\cdot\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot\ln(t^2+a^2) + \left(-M\cdot\frac{p}{2}+N\right)\cdot\frac{1}{a}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a}+C =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot\ln(x^2+px+q) + \frac{-M\cdot\frac{p}{2}+N}{\sqrt{q-\frac{p}{2}}}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p}{2}}}+C.$$

Рациональные дроби **IV типа**.

Исходный интеграл подстановкой $x + p/2 = t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx = M\cdot\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + \Big(-M\cdot\frac{p}{2}+N\Big)\cdot\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$

где $a^2 := q^2 - \frac{p^2}{4}$.

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\cdot\int (t^2+a^2)^{-k} d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} &= \frac{1}{a^2}\cdot\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt = \\ &= \frac{1}{a^2}\cdot\left(\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int\frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right) = \\ &= \frac{1}{a^2}\cdot\left(\mathcal{J}_{k-1} - \int\frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right).\end{aligned}$$

К последнему интегралу применим интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k} &= \left|\begin{matrix} u=t & dv = \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} \\ du = dt & v = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\end{matrix}\right| = \\ &= \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\cdot\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} = \\ &= \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\cdot\mathcal{J}_{k-1}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_k &= \frac{1}{a^2}\cdot\left(\mathcal{J}_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}\cdot\mathcal{J}_{k-1}\right) = \\ &= \frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\mathcal{J}_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right). \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл $\mathcal{J}_k$ для любого натурального числа $k \geqslant 2$.

ЗАДАЧИ. Вычислить интегралы от простейших дробей.

1. $\displaystyle\int\frac{3\,dx}{4x+5}$,

2. $\displaystyle\int\frac{-4\,dx}{2x-1}$,

3. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{(x+1)^5}$,

4. $\displaystyle\int \frac{-5\,dx}{(x+3)^2}$,

5. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{9x^2+6x+2}\,dx$,

6. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2+2x+2}\,dx$,

7. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}\,dx$,

8. $\displaystyle\int \frac{4x-1}{x^2+2x+9}\,dx$,

9. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{(x^2+8x+31)^2}\,dx$,

10. $\displaystyle\int \frac{7x+8}{(x^2-6x+25)^2}\,dx$.

3.3. **Интегрирование рациональных дробей.** Из рассмотренного выше можно сформулировать *общее правило интегрирование рациональных дробей.*

1. Так как на простейшие можно разложить только правильную дробь, то сначала (если дробь неправильная) нужно выделить целую часть, для чего надо поделить "углом" числитель на знаменатель (т.е. представить в виде суммы многочлена и правильной дроби).

2. Правильной дроби знаменатель разложить на множители – линейные и квадратные с отрицательным дискриминантом. Одинаковые множители собирают под общую степень.

3. Разложить правильную дробь на простейшие с неопределенными коэффициентами. Простейших дробей должно быть столько, сколько сомножителей в знаменателе, с учетом кратности.

4. Находят неопределенные коэффициенты и берут интегралы от простейших дробей.

Пример 3.3. Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx$, 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^2}$, 3. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Решение.

▶ **1.** Дробь правильная, знаменатель имеет только действительные различные корни, т.е. разлагается на неповторяющиеся множители первой степени. Согласно теореме 3.4 имеем:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}.$$

Освобождаясь от знаменателя (см., например, пример 3.2), получим

$$x^2+2x+6 = A\cdot(x-2)\cdot(x-4)+ \\ + B\cdot(x-1)\cdot(x-4) + C\cdot(x-1)\cdot(x-2). \quad (3.6)$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$x^2+2x+6 = (A+B+C)\cdot x^2 + (-6A-5B-3C)\cdot x + (8A+4B+2C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = A+B+C, \\ 2 = -6A-5B-3C, \\ 6 = 8A+4B+2C, \end{cases}$$

из которой найдем $A=3,\ B=-7,\ C=5$. Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4}.$$

Неизвестные $A,\ B,\ C$ в разложении можно было определить и иначе. После освобождения от знаменателя можно придать x значения, являющиеся действительными корнями знаменателя. Применим этот прием к решению данного примера. Положим в равенстве (3.6) $x=1$, тогда

$$1^2+2\cdot1+6 = A\cdot(1-2)\cdot(1-4) + B\cdot(1-1)\cdot(1-4) + C\cdot(1-1)\cdot(1-2),$$

откуда $9=3A$, т.е. $A=3$. Полагая, $x=2$, получаем $14=-2B$, т.е. $B=-7$, полагая $x=4$, имеем $30=6C$, т.е. $C=5$. В результате получились те же значения, что и при первом способе определения неизвестных.

Таким образом,

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx = 3\int\frac{dx}{x-1} - 7\int\frac{dx}{x-2} + 5\int\frac{dx}{x-4} =$$

$$= 3 \cdot \ln|x-1| - 7 \cdot \ln|x-2| + 5 \cdot \ln|x-4| + C =$$
$$= \ln\left|\frac{(x-1)^3 \cdot (x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + C.$$

► **2.** Разложим знаменатель на множители:

$$x^5 - x^2 = x^2 \cdot (x^3 - 1) = x^2 \cdot (x-1) \cdot (x^2 + x + 1).$$

Знаменатель имеет как действительные корни ($x = 0,\ x = 1$), причем один из них кратный ($x = 0$), так и простые комплексные корни, следовательно,

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{1}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + \\ + Bx(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1). \tag{3.7}$$

Перепишем полученное равенство в виде:

$$1 = A \cdot (x^3 - 1) + B \cdot (x^4 - x) + C \cdot (x^4 + x^3 + x^2) + \\ + D \cdot x^4 + E \cdot x^3 - D \cdot x^3 - E \cdot x^2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{ll} x^4: & 0 = B + C + D, \\ x^3: & 0 = A + C + E - D, \\ x^2: & 0 = C - E, \\ x^1: & 0 = -B, \\ x^0: & 1 = -A. \end{array} \right.$$

из которой найдем $A = -1,\ B = 0,\ C = E = 1/3,\ D = -1/3$. Отметим, что для упрощения нахождения решений данной системы, можно положить в (3.7) $x = 1$, тогда $1 = 3C$, т.е. $C = 1/3$. Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3 \cdot (x-1)} - \frac{x-1}{3 \cdot (x^2+x+1)}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = -\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{6} \cdot \int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{6} \cdot \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \cdot \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

► **3.** Так как x^2+1 есть двухкратный множитель, то

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x^3 - 2x = Ax + B + (Cx+D)\cdot(x^2+1).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} x^3: & 1 = C, \\ x^2: & 0 = D, \\ x^1: & -2 = A + C, \quad A = -3, \\ x^0: & 0 = B + D; \quad B = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{-3x}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2\cdot(x^2+1)} + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+x+1) + C.$$

Заметим, что данный интеграл можно было найти проще с помощью подстановки $x^2+1=t$.

ЗАДАЧИ. Вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$,
2. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-5}{x^3-x}\,dx$,
3. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$,
4. $\displaystyle\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}\,dx$,
5. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$,
6. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$,

7. $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$, 8. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3}$,

9. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{1-x^4}\,dx$, 10. $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$,

11. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}\,dx$, 12. $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx$,

13. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^3+5x^2+8x+4}$, 14. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx$,

15. $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^4-8x+16}\,dx$, 16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$.

3.4. **Метод М.В. Остроградского.** Для вычисления интегралов вида
$$\int \frac{P(x)\,dx}{(x-a)^m(x^2+px+q)^n},$$
где $p^2-4q<0$, а $P(x)$ — многочлен степени не более $m+2n-1$, существует прием, отличный от приема разложения подынтегральной функции на простейшие слагаемые. Данный прием называется *методом Остроградского* и заключается в том, что все рациональные выражения собираются сразу в одну дробь и остаются только простейшие дроби первого и третьего типа. Применяется он, только если в знаменателе есть кратные корни.

Чтобы проинтегрировать дробь по методу Остроградского, нужно

1) данный интеграл представить в следующем виде:
$$\int \frac{P(x)\,dx}{(x-a)^m(x^2+px+q)^n} = \frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}(x^2+px+q)^{n-1}} + \int \frac{A}{(x-a)}\,dx + \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx; \tag{3.8}$$
здесь $P_1(x)$ — многочлен степени не более $m+2n-4$, его коэффициенты, а также числа A, M и N однозначным образом восстанавливаются по коэффициентам многочлена $P(x)$ и числам $a,\ p,\ q$;

2) полученное тождество (3.8) дифференцируется, чтобы пропали интегралы;

3) дроби приводят к общему знаменателю и приравнивают числители;

4) находят неопределенные коэффициенты и берут интегралы от простейших дробей.

Аналогичный прием применим для интегралов вида

$$\frac{P(x)\,dx}{(x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_k)^{m_k}(x^2+px+q)^n},$$

где подынтегральная дробь является правильной. Такой интеграл можно искать в виде

$$\int\frac{P(x)\,dx}{(x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_k)^{m_k}(x^2+px+q)^n}= \tag{3.9}$$

$$=\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{m_1-1}\dots(x-a_k)^{m_k-1}(x^2+px+q)^{n-1}}+$$
$$+\int\frac{A_1}{(x-a_1)}\,dx+\dots+\int\frac{A_k}{(x-a_k)}\,dx+\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx,$$

где степень многочлена с неизвестными коэффициентами $P_1(x)$ на единицу меньше степени соответствующего знаменателя. Отметим, что методом М.В. Остраградского наиболее удобно пользоваться в случае, когда степени $m_i=1$.

Пример 3.4. Найти интеграл

$$\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$$

Решение. Будем искать данный интеграл в виде

$$\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx=\frac{Cx^2+Dx+E}{(x-1)(x^2+1)}+$$
$$+\int\frac{A}{(x-1)}\,dx+\int\frac{Mx+N}{x^2+1}\,dx.$$

Дифференцируя обе части полученного равенства, получаем

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Mx+N}{x^2+1}+$$
$$+\frac{(2Cx+D)(x-1)(x^2+1)-(Cx^2+Dx+E)(3x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

Домножая левую и правую часть на $(x-1)^2(x^2+1)^2$, имеем

$$\begin{aligned}
4x^2-8x &= \\
&= (2Cx+D)(x-1)(x^2+1)-(Cx^2+Dx+E)(3x^2-2x+1)+ \\
&+ A(x-1)(x^2+1)^2+(Mx+N)(x^2+1)(x-1)^2=(A+M)x^5+ \\
&+ (-C-A-2M+N)x^4+(-2D+2A+2M-2N)x^3+ \\
&+ (C+D-3E-2A-2M+2N)x^2+ \\
&+ (-2C+2E+A+M-2N)x+(-D-E-A+N).
\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left\{\begin{array}{lr} x^5: & 0=A+M, \\ x^4: & 0=-C-A-2M+N, \\ x^3: & 0=-2D+2A+2M-2N, \\ x^2: & 4=C+D-3E-2A-2M+2N, \\ x^1: & -8=-2C+2E+A+M-2N, \\ x^0: & 0=-D-E-A+N. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} A & =-M, \\ M & =N-C, \\ D & =-N, \\ 4 & =C-3E+N, \\ -4 & =-C+E-N, \\ 0 & =-C-E+3N. \end{array}\right.$$

Решением данной системы являются числа $C=3$, $E=0$, $N=1$, $D=-1$, $M=-2$, $A=2$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx &= \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\int \frac{2}{(x-1)}\,dx+ \\
&+\int \frac{-2x+1}{x^2+1}\,dx=\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+ \\
&+2\ln|x-1|-\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C.
\end{aligned}$$

ЗАДАЧИ. Вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$,
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$,
3. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$,
4. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,dx$,
5. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}\,dx$,
6. $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)^2}{(1+x)(1+x^2)^3}\,dx$,
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$,
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$,

9. $\displaystyle\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx,$ 10. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}.$

4. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

4.1. **Универсальная тригонометрическая подстановка.** Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функция с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложение, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R – знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов вида

$$\int R(\sin x; \cos x)\,dx$$

сводится к вычислению интеграла от рациональной функции подстановкой $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, *которая называется* **универсальной.**

Действительно, так как $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, поэтому

$$x = 2\operatorname{arctg} x, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

кроме того

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Таким образом,

$$\int R(\sin x; \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий, зато всегда приводит к результату.

На практике применяются и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1. Если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетная относительно* $\sin x$, *т.е.* $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, *то подстановка* $t = \cos x$ *рационализирует интеграл.*

2. Если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетная относительно* $\cos x$, *т.е.* $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, *то делается подстановка* $t = \sin x$.

3. Если функция $R(\sin x; \cos x)$ *четная относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$ *(одновременно), т.е.* $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, *то делается подстановка* $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 4.1.

1. $$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$
$$= \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\cdot\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C;$$

2. $$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg} x & x = \operatorname{arctg} x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} & \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$
$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)\cdot\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2}t + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{2}\operatorname{tg} x + C;$$

3. $$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x & x = \arccos t \\ \sin x = \sqrt{1-t^2} & dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{matrix} \right| =$$
$$= \int \frac{(\sqrt{1-t^2})^5}{t^2\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int \frac{(1-t^2)^2\,dt}{t^2} = \int \frac{(1-2t^2+t^4)dt}{t^2} =$$
$$= -\frac{1}{t} - 2t + \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{\cos x} - 2\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Пример 4.2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sin\, x + \cos\, x}{2 \cdot \sin\, x - 3 \cdot \cos\, x}\, dx.$$

Решение. К этому интегралу подходит универсальная тригонометрическая подстановка, но удобнее взять его методом неопределенных коэффициентов. Найдем

$$d\,(2 \cdot \sin\, x - 3 \cdot \cos\, x) = (2 \cdot \cos\, x + 3 \cdot \sin\, x)\, dx$$

и представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\sin\, x + \cos\, x}{2 \cdot \sin\, x - 3 \cdot \cos\, x} = A \cdot \frac{2 \cdot \sin\, x - 3 \cdot \cos\, x}{2 \cdot \sin\, x - 3 \cdot \cos\, x} + B \cdot \frac{2 \cdot \cos\, x + 3 \cdot \sin\, x}{2 \cdot \sin\, x - 3 \cdot \cos\, x}.$$

Приравняем числители

$$\sin\, x + \cos\, x = A \cdot (2 \cdot \sin\, x - 3 \cdot \cos\, x) + B \cdot (2 \cdot \cos\, x + 3 \cdot \sin\, x),$$

это тождество выполняется только если равны коэффициенты при $\sin\, x$ и $\cos\, x$:

$$1 = 2A + 3B, \quad 1 = -3A + 2B \qquad \Longrightarrow \qquad A = -\frac{1}{13}, \quad B = \frac{5}{13}.$$

$$\int \frac{\sin\, x + \cos\, x}{2 \cdot \sin\, x - 3 \cdot \cos\, x}\, dx = -\frac{1}{13}\int dx + \frac{5}{13}\int \frac{2 \cdot \cos\, x + 3 \cdot \sin\, x}{2 \cdot \sin\, x - 3 \cdot \cos\, x}\, dx =$$
$$= -\frac{1}{13} \cdot x + \frac{5}{13} \cdot \ln|2 \cdot \sin\, x - 3 \cdot \cos\, x| + C.$$

ЗАДАЧИ. Вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$,
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - \sin x}$,
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$,
4. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$,
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$,
6. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$,
7. $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{(1 - \cos x)^2}$,
8. $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$,
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\cos x + \sin x)^2}$,
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + \sin^2 x}$,
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$,
12. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1 - \operatorname{tg} x}\, dx$,

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}$,

14. $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$,

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$,

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$,

17. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$,

18. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$,

19. $\displaystyle\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\,dx$,

20. $\displaystyle\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2}\,dx$.

4.2. **Интегрирование некоторых специальных классов тригонометрических функций.** Часто для вычисления интеграла от тригонометрической функции удобно пользоваться тригонометрическими преобразованиями. В частности, этот прием используется, если имеются тригонометрические функции с различными аргументами.

Например, интегралы вида

$$\int \sin\, ax \cdot \sin\, bx\,dx, \qquad \int \cos\, ax \cdot \cos\, bx\,dx, \qquad \int \sin\, ax \cdot \cos\, bx\,dx \quad (4.1)$$

вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\,\alpha \cdot \sin\,\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$
$$\cos\,\alpha \cdot \cos\,\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$
$$\sin\,\alpha \cdot \cos\,\beta = \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

Если же в подынтегральных произведениях вида (4.1) один или два из сомножителей возведены в квадраты (или в произвольную четную степень), то удобно пользоваться формулами понижения степени:

$$\sin^2 ax = \frac{1-\cos 2ax}{2}, \qquad \cos^2 bx = \frac{1+\cos 2bx}{2}\,. \qquad (4.2)$$

Пример 4.3. Вычислить интеграл

$$\int \sin 3x \cos^4 2x\,dx.$$

Решение. Поскольку $\cos^2 2x = (1+\cos 4x)/2$, то мы имеем

$$\int \sin 3x \cos^4 2x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin 3x (1+\cos 4x)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 3x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin 3x \cos 4x\,dx + \frac{1}{4}\int \sin 3x \cos^2 4x\,dx =$$
$$-\frac{1}{12}\cos 3x + \frac{1}{4}\int (\sin(-x) + \sin 7x)\,dx + \frac{1}{8}\int \sin 3x(1+\cos 8x)\,dx =$$
$$-\frac{\cos 3x}{12} + \frac{\cos x}{4} - \frac{\cos 7x}{28} - \frac{\cos 3x}{24} + \frac{1}{16}\int (\sin(-5x) + \sin 11x)\,dx =$$
$$-\frac{\cos 3x}{12} + \frac{\cos x}{4} - \frac{\cos 7x}{28} - \frac{\cos 3x}{24} + \frac{\cos 5x}{80} - \frac{\cos 11x}{176}.$$

Рассмотрим интеграл вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$. Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t$, *если* n *– целое нечетное число;*

2) подстановка $\cos x = t$, *если* m *– целое нечетное число;*

3) формулы понижения (4.2), *если* m *и* n *– целые неотрицательные четные числа;*

4) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, *если* $m+n$ *– четное отрицательное целое число.*

Пример 4.4.

1. $$\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx = \left| \begin{array}{cc} t = \sin x & x = \arcsin t \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} & \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right| =$$
$$= \int t^4 \cdot \left(\sqrt{1-t^2}\right)^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 \cdot (1-t^2)^2 dt =$$
$$= \int \left(t^4 - 2t^6 + t^8\right)\,dt = \frac{t^5}{5} - 2\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot \sin^5 x - \frac{2}{7}\cdot \sin^7 x + \frac{1}{9}\cdot \sin^9 x + C;$$

2. $$\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cdot \sin^2 x\,dx =$$
$$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}\,(\,1 - \cos 2x\,)\;dx =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot \int \sin^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\cdot\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\int \frac{1}{2}\cdot(1-\cos 4x)\,dx - \frac{1}{16}\cdot\int \sin^2 2x\,d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot x - \frac{1}{64} \cdot \sin\, 4x - \frac{1}{48} \cdot \sin^3 2x + C;$$

3. $$\int \frac{dx}{\cos\, x \cdot \sin^3 x} = \left| \begin{array}{cc} t = \mathrm{tg}\; x & dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin\, x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & \cos\, x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3}\, dt =$$

$$= \int t^{-3} dt + \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2t^2} + \ln\, |t| + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{ctg}^2\, x + \ln\, |\,\mathrm{tg}\; x| + C.$$

ЗАДАЧИ. Вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int \sin 5x \cos x \, dx$,
2. $\displaystyle\int \cos 4x \cos 3x \, dx$,
3. $\displaystyle\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$,
4. $\displaystyle\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} \, dx$,
5. $\displaystyle\int \sin^2 3x \cos 4x \, dx$,
6. $\displaystyle\int \cos^2 2x \sin x \, dx$,
7. $\displaystyle\int \sin^2 2x \cos^2 3x \, dx$,
8. $\displaystyle\int \cos^4 (2x) \, dx$,
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^4 x}$,
10. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx$,
11. $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$,
12. $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$,
13. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$,
14. $\displaystyle\int \sin^6 x \, dx$,
15. $\displaystyle\int \cos^5 x \, dx$,
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$,
17. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} \, dx$,
18. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^4 x \, dx$,
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$,
20. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x} \, dx$.

4.3. **Интегрирование гиперболических функций.** Интегрирование гиперболических функций вполне аналогично интегрированию тригонометрических функций.

Следует помнить основные формулы:

▶ формулы преобразования

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \qquad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2},$$

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad 1 - \operatorname{cth}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

▶ таблицу производных

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

▶ таблицу интегралов

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C, \qquad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Пример 4.5.

1. $$\int \operatorname{ch}^2 x\, dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}\, dx = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{2} \cdot x + C;$$

2. $$\int \operatorname{ch}^3 x\, dx = \int \operatorname{ch}^2 x\, d(\operatorname{sh} x) = \int (1 + \operatorname{sh}^2 x)\, d(\operatorname{sh} x) =$$
$$= \operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} + C;$$

3. $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} = \int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x} = \int \frac{d(\operatorname{sh} x)}{(1 + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{sh} x} =$$
$$= |t = \operatorname{sh} x| = \int \frac{dt}{(1+t^2)t} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t\, dt}{(1+t^2)} =$$

$$= \ln|t| - \frac{1}{2}\cdot\int\frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)} = \ln|t| - \frac{1}{2}\cdot\ln(1+t^2) + C =$$
$$= \ln|\operatorname{sh} x| - \frac{1}{2}\cdot\ln(1+\operatorname{sh}^2 x) + C = \ln|\operatorname{sh} x| - \frac{1}{2}\cdot\ln(\operatorname{ch}^2 x) + C.$$

ЗАДАЧИ. Вычислить интегралы.

1. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx,$
2. $\int \operatorname{sh}^3 x\cdot\operatorname{ch} x\,dx,$
3. $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx,$
4. $\int \operatorname{ch}^2 x\cdot\operatorname{sh}^2 x\,dx,$
5. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x},$
6. $\int \operatorname{th}^2 x\,dx,$
7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch}^2 x},$
8. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x\cdot\operatorname{ch}^2 x},$
9. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x},$
10. $\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x+3\operatorname{ch} x},$
11. $\int \operatorname{th}^3 x\,dx,$
12. $\int \operatorname{cth}^4 x\,dx.$

5. Интегрирование иррациональных функций

5.1. Интеграл вида $\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\dots\right)dx$.

Рассмотрим сначала интеграл вида $\int R(x,\ \sqrt[m]{x},\ \sqrt[n]{x},\dots)\,dx$. Он приводится к интегралу о рациональной функции с помощью подстановки $x = t^s$, s – наименьшее общее кратное показателей корней[1].

Пример 5.1. Найти интеграл

$$I = \int\frac{dx}{x\cdot(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})} \qquad (x>0).$$

Решение. Показатели корней 2, 5; НОК$(2,5) = 10$, поэтому делаем подстановку

$$x = t^{10},\quad dx = 10\cdot t^9\,dt,\quad \sqrt{x} = t^5,\quad \sqrt[5]{x^2} = t^4.$$

[1] НОК – наименьшее общее кратное, НОД – наибольший общий делитель. Например, $504 = 2^3\cdot3^2\cdot7$, $540 = 2^2\cdot3^3\cdot5$, то НОК(504,540) $= 2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7 = 7560$, НОД(504,540) $= 2^2\cdot3^2 = 36$.

$$I=\int\frac{dx}{x\cdot(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}=\int\frac{10\cdot t^9\,dt}{t^{10}\cdot(t^5+t^4)}=10\cdot\int\frac{dt}{t^5\cdot(t+1)}.$$

Выписываем дробь, стоящую под знаком интеграла и раскладываем ее на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами

$$\frac{1}{t^5\cdot(t+1)}=\frac{A}{t^5}+\frac{B}{t^4}+\frac{C}{t^3}+\frac{D}{t^2}+\frac{E}{t}+\frac{K}{t+1}=$$
$$=\frac{A(t+1)+Bt(t+1)+Ct^2(t+1)+Dt^3(t+1)+Et^4(t+1)+Kt^5}{t^5(t+1)}.$$

Получим тождественное равенство:

$$1\equiv A(t+1)+Bt(t+1)+Ct^2(t+1)+Dt^3(t+1)+Et^4(t+1)+Kt^5.$$

Пусть $t=0\implies A=1,\ t=-1\implies K=-1.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$$\begin{array}{r|lcl}
t^5 & 0=E+K & \Longrightarrow & E=1,\\
t^4 & 0=D+E & \Longrightarrow & D=-1,\\
t^3 & 0=D+C & \Longrightarrow & C=1,\\
t^2 & 0=C+B & \Longrightarrow & B=-1.
\end{array}$$

$$I=10\cdot\int\left(\frac{1}{t^5}-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$
$$=10\cdot\left(-\frac{1}{4t^4}+\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{t}+\ln|t|-\ln|t+1|\right)+C=$$
$$=\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\cdot\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\cdot\sqrt[5]{x^2}}+C.$$

Интеграл вида $\int R\left(x,\ \sqrt[m]{ax+b},\ \sqrt[n]{ax+b},\ldots\right)dx$ приводится к интегралу о рациональной функции с помощью подстановки $ax+b=t^s$, где $s=\text{НОК}(m,n,\ldots)$.

Пример 5.2. Найти интеграл

$$I=\int\frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$$

Решение. Делаем замену $1 + x = t^6$, так как $6 = \text{НОК}(2, 3)$; $x = t^6 - 1$, $dx = 6t^5 dt$, получим:

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx = \int \frac{((t^6-1)^2 + t^3) \cdot 6t^5}{t^2}\, dt =$$
$$= 6 \int t^3 \cdot (t^{12} - 2t^6 + 1 + t^3)\, dt = 6 \int (t^{15} - 2t^9 + t^3 + t^6)\, dt =$$
$$= \frac{3t^{16}}{8} - \frac{6t^{10}}{5} + \frac{3t^4}{4} + \frac{6t^7}{7} + C \quad \text{при} \quad t = \sqrt[6]{1+x}.$$

Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\right) dx$ приводится к интегралу о рациональной функции с помощью подстановки $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где $s = \text{НОК}(m, n, \ldots)$.

Пример 5.3. Найти интеграл

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, \frac{dx}{x}.$$

Решение. Делаем подстановку

$$\frac{1+x}{1-x} = t^2, \quad 1 + x = t^2 - t^2 x, \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad 1 - x = \frac{2}{t^2+1},$$
$$dx = \frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\, dt = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\, dt,$$

поэтому

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, \frac{dx}{x} = \int \frac{t \cdot 4t\, dt}{(t^2+1)^2 \cdot \frac{2}{t^2+1}} = \int \frac{2t^2\, dt}{t^2+1} = 2 \int \frac{(t^2+1) - 1}{t^2+1}\, dt =$$
$$= 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C =$$
$$= 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

ЗАДАЧИ. Вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$,
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$,
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}}$,
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}$,

5. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx,$

6. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx,$

7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/3}},$

8. $\displaystyle\int \frac{(2x-3)^{1/2}\,dx}{(2x-3)^{1/3}+1},$

9. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x},$

10. $\displaystyle\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx,$

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx,$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x}}\,dx,$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(x-1)^4}},$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x^2+4\sqrt[4]{(x+5)^3}}},$

15. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx,$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

5.2. **Интегрирование дифференциального бинома.** Интеграл вида

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \tag{5.1}$$

называется *интегралом от дифференциального бинома*, если a и b – действительные числа, $m,\ n,\ p$ – рациональные числа. Как показал П.А. Чебышев, данный интеграл берется (сводится к интегрированию дробно-рациональной функции) лишь тогда, когда хотя бы одно из чисел $p,\ \frac{m+1}{n},\ p+\frac{m+1}{n}$ является целым.

Вычисления интеграла в этих случаях осуществляется следующими подстановками (Чебышева):

1) если p – целое число, то $x=t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n (данная подстановка использовалось в пункте 5.1);

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то $a+bx^n=t^k$, где k – знаменатель дроби p;

3) если $p+\frac{m+1}{n}$ – целое число, то $a+bx^n=t^kx^n$, где k – знаменатель дроби p.

Во всех остальных случаях интеграл вида (5.1) не выражается через известные элементарные функции, т.е. "не берется".

Пример 5.4.

1. $$\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2\,dx = \left| \begin{array}{cc} p = 2 \in \mathbb{Z} & x = t^6 \\ & dx = 6t^5\,dt \end{array} \right| = \int t^3(1+t^2)^2\,6t^5 dt =$$
$$= 6 \cdot \int t^8(1+2t^2+t^4)\,dt = 6 \cdot \int t^8\,dt + 12 \cdot \int t^{10}\,dt + 6 \cdot \int t^{12}\,dt =$$
$$= \frac{6t^9}{9} + \frac{12t^{11}}{11} + \frac{6t^{13}}{13} + C = \frac{2x^{3/2}}{3} + \frac{12x^{11/6}}{11} + \frac{6x^{13/6}}{13} + C;$$

2. $$\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}\,dx =$$
$$\left| \begin{array}{cc} \frac{m+1}{n} = 2 & \sqrt[4]{x}+1 = t^3 \\ x = (t^3-1)^4 & dx = 4(t^3-1)^3 \cdot 3t^2\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{(t^3-1)^2} \cdot 12t^2(t^3-1)^3 dt =$$
$$= 12 \cdot \int t^3(t^3-1)\,dt = 12 \cdot \left(\int t^6 dt - \int t^3 dt\right) =$$
$$= 12 \cdot \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C = \frac{12}{7} \cdot \left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{\frac{7}{3}} - 3 \cdot \left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{\frac{4}{3}} + C;$$

3. $$\int \frac{dx}{x^{11} \cdot \sqrt{1+x^4}} = \int x^{-11} \cdot (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \left| \begin{array}{cc} \dfrac{m+1}{n} + p = -3 & 1+x^4 = x^4 \cdot t^2 \\ x^4(t^2-1) = 1 & x^4 = (t^2-1)^{-1} \\ 4x^3\,dx = -\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2} & x^3\,dx = -\frac{t\,dt}{2\cdot(t^2-1)^2} \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{dx}{x^{11} \cdot \sqrt{x^4 \cdot t^2}} = \int \frac{dx}{x^{11} \cdot x^2 \cdot t} = \int \frac{x^3\,dx}{x^{16} \cdot t} = \int \frac{x^3\,dx}{(x^4)^4 \cdot t} =$$
$$= -\int \frac{t\,dt}{2 \cdot (t^2-1)^2 \cdot t \cdot \frac{1}{(t^2-1)^4}} = -\frac{1}{2} \cdot \int (t^2-1)^2\,dt =$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot \int (t^4 - 2t^2 + 1)\,dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + C =$$
$$= -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)^5 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + C.$$

ЗАДАЧИ. Вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int \sqrt{x}(2+\sqrt[3]{x})^2\,dx,$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}},$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}},$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx,$

5. $\displaystyle\int x^{-2/3}(1+x^{2/3})^{-1}\,dx,$

6. $\displaystyle\int x^{-11}(1+x^4)^{-1/2}\,dx,$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$,

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$,

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt[5]{1+1/x}}$,

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$,

11. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$,

13. $\displaystyle\int \sqrt[4]{3x-x^4}\,dx$,

14. $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$.

5.3. **Интегрирование квадратичных иррациональностей.**

5.3.1. *Интегрирование некоторых специальных классов квадратичных иррациональностей.*

▶ Интеграл вида

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2+bx+c = a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\cdot\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

и сделать подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$.

Пример 5.5.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \left|\begin{array}{c} 4x^2+2x+1 = 4\cdot\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right) = \\ = 4\cdot\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right)\end{array}\right| =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4\cdot\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right)}} = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}} =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} x+\frac{1}{4}=t & x=t-\frac{1}{4} \\ dx=dt & \end{array}\right| = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right|+C.$$

► Интеграл вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, можно вычислить пользуясь формулой

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \tag{5.2}$$

$$= Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,,$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами и λ – также неопределенный коэффициент.

Дифференцируются обе части равенства (5.2), затем правую часть приводят к общему знаменателю, в результате получается равенство двух дробей с одинаковыми знаменателями, приравниваются числители и составляется система уравнений для определения неопределенных коэффициентов.

Пример 5.6. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx.$$

Решение.

$$I = \int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = (Ax+B)\cdot\sqrt{3-2x-x^2}+\lambda\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$$

Так как в числители стоит многочлен второй степени, то в правой части стоит многочлен $Ax+B$ первой степени. Дифференцируем обе части, получаем

$$\frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}} = A\cdot\sqrt{3-2x-x^2}+\frac{(Ax+B)\cdot(-2-2x)}{2\cdot\sqrt{3-2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{3-2x-x^2}};$$

$$\frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \frac{A\cdot(3-2x-x^2)+(Ax+B)\cdot(-1-x)+\lambda}{\sqrt{3-2x-x^2}};$$

$$3x^2-5x \equiv A\cdot(3-2x-x^2)+(Ax+B)\cdot(-1-x)+\lambda.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, получаем

$$\begin{array}{c|lcl} x^2 & 3 = -A - A & \Longrightarrow & A = -\frac{3}{2}, \\ x & -5 = -2A - A - B & \Longrightarrow & B = \frac{19}{2}, \\ x^0 & 0 = 3A - B + \lambda & \Longrightarrow & \lambda = 14, \end{array}$$

учитывая, что

$$3 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 3) = -((x+1)^2 - 4) = 4 - (x+1)^2,$$

имеем

$$I = \int \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx = C - \frac{1}{2}\cdot(3x-19)\cdot\sqrt{3 - 2x - x^2} + 14\cdot\arcsin\frac{x+1}{2}.$$

► Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

приводится к интегралу вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx$$

с помощью подстановки $\frac{1}{x-\alpha} = t$.

Пример 5.7.

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^3 \cdot \sqrt{x^2 + 2x}} = \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{x+1} = t, & x + 1 = \frac{1}{t} \\ x = \frac{1}{t} - 1, & dx = -\frac{1}{t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t^3} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{t} - 1\right)}} = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 1 + \frac{2}{t} - 2}} =$$

$$= -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1 - t^2}} = (At + B)\cdot\sqrt{1 - t^2} + \lambda \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}},$$

$$\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1 - t^2}} = A \cdot \sqrt{1 - t^2} - \frac{(At + B)\cdot t}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - t^2}};$$

$$t^2 \equiv A \cdot \sqrt{1 - t^2} - (At + B)\cdot t + \lambda,$$

$$\begin{array}{c|lcl} t^2 & 1 = -A - A & \Longrightarrow & A = -\frac{1}{2}, \\ t & 0 = -B & \Longrightarrow & B = 0, \\ t^0 & 0 = A + \lambda & \Longrightarrow & \lambda = \frac{1}{2}, \end{array}$$

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^3 \cdot \sqrt{x^2+2x}} = -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} t + C = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{2\cdot(x+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} + C.$$

ЗАДАЧИ. Вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$,
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-8}}$,
3. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{4x^2-12x+10}}\,dx$,
4. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{2-6x-9x^2}}\,dx$,
5. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$,
6. $\displaystyle\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}\,dx$,
7. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$,
8. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$,
9. $\displaystyle\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$,
10. $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$,
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$,
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$,
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$,
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$,
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$,
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

5.3.2. *Подстановки Эйлера.*

Интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a \neq 0, \quad b^2-4ac \neq 0. \qquad (5.3)$$

может быть сведен с помощью замены переменного (так называемых *подстановок Эйлера*) к интегралу от дробно-рациональной функции.

▶ *Первая подстановка Эйлера*: $a > 0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x \cdot \sqrt{a}.$$

▶ *Вторая подстановка Эйлера*: $c > 0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x \cdot t \pm \sqrt{c}.$$

▶ *Третья подстановка Эйлера*: $b^2 - 4ac > 0$.
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\cdot(x-x_1),$$
где $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, причем $x_1 \neq x_2$.

Пример 5.8. Используя соответствующую подстановку Эйлера свести исходный интеграл к интегралу от дробно-рациональной функции.

$$1.\ \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{l} \text{Первая подстановка Эйлера} \\ \sqrt{x^2+1} = t - x\cdot\sqrt{a} = t - x \\ x^2+1 = t^2 - 2xt + x^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2-1}{2t} + t - \frac{t^2-1}{2t}} = \int \frac{t^2+1}{2t^3}\,dt\,;$$
$$2.\ \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+4}+2} = \left| \begin{array}{l} \text{Вторая подстановка Эйлера} \\ \sqrt{-x^2+x+4} = x\cdot t - \sqrt{c} = x\cdot t - 2 \\ -x^2+x+4 = x^2\cdot t^2 - 4\cdot x\cdot t + 4 \\ -x^2+x = x^2\cdot t^2 - 4\cdot x\cdot t \\ -x+1 = x\cdot t^2 - 4\cdot t \\ x = \frac{1+4t}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-2\cdot(2t^2+t-2)}{(t^2+1)^2}\,dt \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{\frac{-2\cdot(2t^2+t-2)}{(t^2+1)^2}\,dt}{\frac{1+4t}{t^2+1}\cdot t - 2 + 2} = \int \frac{-2\cdot(2t^2+t-2)}{(t^2+1)\cdot(1+4t)\cdot t}\,dt;$$
$$3.\ \int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{-x^2+3x-2}} = \left| \begin{array}{l} \text{Третья подстановка Эйлера} \\ -x^2+3x+2 = -(x-1)\cdot(x-2) \\ \sqrt{-x^2+3x+2} = t\cdot(x-1) \\ -(x-1)\cdot(x-2) = t^2\cdot(x-1)^2 \\ -(x-2) = t^2\cdot(x-1) = t^2\cdot x - t^2 \\ x = \frac{t^2+2}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-2t\,dt}{(t^2+1)^2} \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt}{\frac{t^2+2}{t^2+1}\cdot t\cdot\left(\frac{t^2+2}{t^2+1} - 1\right)} = \int \frac{-2\,dt}{t^2+2}.$$

Отметим, что чаще всего вычисление интегралов с помощью подставновок Эйлера приводит к громоздким вычислениям, поэтому их следует применять, вообще говоря, лишь тогда, когда рассматриваемый интеграл не удается вычислить другим более коротким способом.

Например, выделяя в подкоренном выражении полный квадрат, нетрудно убедиться, что интеграл (5.3) с помощью линейной подстановки (см. п.п. 5.3.3) может быть приведен к одному из трех интегралов вида (5.4). Для вычисления полученных интегралов часто оказываются очень удобными тригонометрические и гиперболические подстановки.

ЗАДАЧИ. Используя одну из подстановок Эйлера вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$,
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$,
3. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$,
4. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$,
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$,
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$,
7. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$,
8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\,dx$,
9. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$,
10. $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$,
11. $\displaystyle\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$,
12. $\displaystyle\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$.

5.3.3. *Тригонометрическая подстановка.*

Выделим в подкоренном выражении (5.3) полный квадрат:

$$ax^2+bx+c=a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\cdot\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

и осуществим подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$, тогда интеграл (5.3) может быть приведен к одному из трех интегралов вида:

$$1.\int R\left(t;\sqrt{a^2-t^2}\right)\,dt,\qquad 2.\int R\left(t;\sqrt{a^2+t^2}\right)\,dt,\qquad 3.\int R\left(t;\sqrt{t^2-a^2}\right)\,dt. \tag{5.4}$$

Каждому из перечисленных интегралов соответствуют свои подстановки:

$$1.\quad t = a\sin z \quad \text{или} \quad t = a\cos z;$$

$$2.\quad t = a\,\mathrm{tg}\, z \quad \text{или} \quad t = a\,\mathrm{ctg}\, z, \quad \text{или} \quad t = a\,\mathrm{sh}\, z;$$

$$3.\quad t = \frac{a}{\cos z} \quad \text{или} \quad t = \frac{a}{\sin z}, \quad \text{или} \quad t = a\,\mathrm{ch}\, z.$$

При использовании тригонометрических подстановок в конце решения возникают обратные тригонометрические функции, аналогично при использовании гиперболических подстановок в конце решения возникают обратные гиперболические функции

$$\mathrm{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \text{(читается как “ареасинус”);}$$

$$\mathrm{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad |x| \ge 1 \qquad \text{(читается как “ареакосинус”).}$$

Таким образом, при интегрировании квадратичных иррациональностей существует несколько вариантов подходящих замен. К сожалению, общего алгоритма выбора наиболее оптимального решения не существует. Поэтому для каждого конкретного примера можно выбирать замену по собственному желанию. Если же какая-то подстановка не приводит к приемлемому результату, то выбирают другую подстановку. Умение выбирать “удачную” замену вырабатывается в результате решения большого числа упражнений.

Пример 5.9. Найти интегралы:

$$1.\ \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx\,, \quad 2.\ \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx, \quad 3.\ \int \sqrt{x^2-2x-3}\,dx\,.$$

Решение.

► **1.** Делаем подстановку $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\,dt$, $t = \arcsin \frac{x}{2}$, тогда

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{4-4\cdot\sin^2 t}}{4\cdot\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int \frac{4\cdot\cos^2 t}{4\cdot\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt == \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\,\mathrm{ctg}\ t - t + C =$$

$$= -\,\mathrm{ctg}\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) - \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

▶ **2.** Делаем подстановку $x = \operatorname{tg} z$, $dx = \frac{dz}{\cos^2 z}$, $z = \operatorname{arctg} x$, тогда

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}}{\operatorname{tg}^4 z}\cdot\frac{dz}{\cos^2 z} = \int \frac{dz}{\operatorname{tg}^4 z\cdot\cos^3 z} =$$
$$= \int \frac{\cos z\,dz}{\sin^4 z} = \frac{\sin^{-4+1} z}{-3} + C = -\frac{1}{3\sin^3(\operatorname{arctg} z)} + C.$$

▶ **3.** Имеем $\int\sqrt{x^2-2x-3}\,dx = \int\sqrt{(x-1)^2-4}\,dx$. Делаем подстановку $x-1 = 2\operatorname{ch} z$, $dx = 2\operatorname{sh} z\,dz$, $z = \operatorname{Arch}\frac{x-1}{2}$, тогда

$$\int\sqrt{(x-1)^2-4}\,dx = \int\sqrt{4\operatorname{ch}^2 z-4}\cdot 2\operatorname{sh} z\,dz = 4\cdot\int \operatorname{sh}^2 z\,dz =$$
$$= 2\cdot\int \operatorname{ch} 2z\,dz - 2\cdot\int dz = \operatorname{sh} 2z - 2z + C =$$
$$= \operatorname{sh}\left(2\cdot\operatorname{Arch}\frac{x-1}{2}\right) - 2\cdot\operatorname{Arch}\frac{x-1}{2} + C.$$

ЗАДАЧИ. Вычислить интегралы.

1. $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$,
2. $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$,
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$,
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$,
5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$,
6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$,
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(8+2x^2)^3}}$,
8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(27-3x^2)^3}}{x^6}\,dx$,
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$,
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4x^2-4)^3}}$,
11. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+6x-7}\,dx$,
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

Учебное издание

Войтицкий В. И., Цветков Д. О.

Неопределённый интеграл

Учебно-методическое пособие для студентов

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ г.
Формат 60х84/16. Усл. п. л. 2, 97.
Тираж: печать по требованию. Заказ № ____.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая.

Издательский дом ФГАОУ ВО "КФУ имени В. И. Вернадского".
295051, Республика Крым, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7,
тел.: +7 978 823 14 29, e-mail: print@cfuv.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ФГАОУ ВО "КФУ имени В. И. Вернадского".
295051, Республика Крым, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7,
тел.: +7 978 823 14 29, e-mail: print@cfuv.ru