МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФГАОУ ВО “КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО”
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В. И. Войтицкий, А. И. Коваленко

Производная и её применения

Учебно-методическое пособие для студентов

Симферополь
Издательский дом КФУ
2022

УДК 517.2

Рецензенты:

Смолич Владимир Павлович, к.ф.-м.н, доцент кафедры математического анализа Физико-технического института КФУ имени В. И. Вернадского

Третьяков Дмитрий Вадимович, к.ф.-м.н, доцент кафедры алгебры и функционального анализа Физико-технического института КФУ имени В. И. Вернадского

Войтицкий В. И. Производная и её применение / В. И. Войтицкий, А. И. Коваленко. – Симферополь: Издательский дом КФУ, 2021. – 36 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов дневной и заочной формы обучения физических, математических и инженерных специальностей. Соответствует программе первого модуля дисциплины "Математический анализ" образовательно-квалификационного уровня "бакалавр".

Рекомендовано к печати заседанием кафедры математического анализа от 16.12.2021*, протокол №* 5

Утверждено методической комиссией Физико-технического института ФГАОУ ВО "КФУ им. В. И. Вернадского" от _ _ _ _ _, протокол № 1

Содержание

Предисловие

В учебно-методическом пособии представлена необходимая теоретическая информация, предложены решения типовых задач и задания для самостоятельного решения по темам “Техника дифференцирования”, “Приложения производной”, “Анализ и построение графиков”, соответствующим учебной программе первого (второго) модуля дисциплины “Математический анализ” для студентов физико-математических специальностей.

Пособие разбито на разделы, в каждом из которых предложено по тридцать вариантов заданий для самостоятельного решения. Сочетание базового теоретического материала, разобранных примеров и значительного количества задач для самостоятельного решения, позволяет использовать пособие при проведении практических занятий (в том числе дистанционных), самостоятельных и контрольных работ, а также для самостоятельного изучения данных разделов математического анализа. Авторы выражают благодарность рецензентам за ценные замечания.

1. Техника дифференцирования

1.1. **Производные функций, заданных явно.** Пусть $y = f(x)$ заданная функция, причём некоторая точка x_0 является внутренней точкой области определения $\mathcal{D}(f)$ (т.е. существует некоторая окрестность $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset \mathcal{D}(f)$). Тогда производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют число

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{1.1}$$

если предел справа существует. При этом говорят, что функция дифференцируема в точке x_0. Данное определение эквивалентно определению с использованием приращения аргумента (Δx) и приращения функции (Δf)

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Вычисляя данные пределы во всех точках $x = x_0$, для которых существует конечный предел (1.1), получаем функцию $y = f'(x)$ (которая также называется производной) с областью определения $\mathcal{D}(f') \subset \mathcal{D}(f)$.

Для вычисления производных на практике используют нижеприведённые правила дифференцирования:

$$1^\circ.\quad (f \pm g)' = f' \pm g';$$

$$2^\circ.\quad (\mathrm{const} \cdot f)' = \mathrm{const} \cdot f';$$

$$3^\circ.\quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f;$$

$$4^\circ.\quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2};$$

$$5^\circ.\quad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2};$$

$$6^\circ.\quad f(g)' = f'(g) \cdot g',$$

а также таблицу основных элементарных функций (которую необходимо выучить):

$$1)\ \mathrm{const}' = 0; \qquad 2)\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$3)\ (e^x)' = e^x; \qquad 4)\ (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$5)\ (\ln x)' = \frac{1}{x}; \qquad 6)\ (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a};$$
$$7)\ (\sin x)' = \cos x; \qquad 8)\ (\cos x)' = -\sin x;$$
$$9)\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad 10)\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$11)\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad 12)\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$13)\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \qquad 14)\ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$
$$15)\ (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \qquad 16)\ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$
$$17)\ (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \qquad 18)\ (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Напомним, что функция $\operatorname{ch} x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется *гиперболическим косинусом*, а $\operatorname{sh} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — *гиперболическим синусом.* Аналогично $\operatorname{th} x := \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ — *гиперболический тангенс*, $\operatorname{cth} x := \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ — *гиперболический котангенс.*

Также нужно запомнить важные следствия общей формулы 2):

$$1)\ x' = 1; \qquad 2)\ (x^2)' = 2x;$$
$$3)\ (x^3)' = 3x^2; \qquad 4)\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$5)\ (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; \qquad 6)\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Правила $1^\circ - -6^\circ$ и таблица производных позволяют вычислять производные всех элементарных функций, арифметические операции и композицию за исключением степенно-показательных функций вида $y = f(x)^{g(x)}$. В последнем случае используют так называемый *метод логарифмического дифференцирования.* Идея состоит в использовании производной не от заданной функции, а от ее натурального логарифма. Именно, имеем

$$(\ln y)' = (\ln f(x)^{g(x)})' = (g(x)\cdot\ln(f(x)))' = g'(x)\cdot\ln(f(x)) + \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot g(x).$$

С другой стороны $(\ln y)' = \dfrac{1}{y(x)} \cdot y'(x)$. Исходя из этого, окончательно получаем

$$y' = y(x) \cdot \left[g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x) \right].$$

Последнюю формулу запоминать не нужно, в каждом конкретном примере такого типа вначале вычисляют логарифм от функции, затем производную от обеих частей. Отметим, что метод логарифмического дифференцирования также эффективно применяется при вычислении производной произведения (или частного) от большого числа сомножителей, см. примеры ниже.

Пример 1.1. Найти производную функции $y = f(x)$, если
а) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x - 2$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \arcsin x$;
в) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x}{e^x}$; г) $f(x) = \sqrt{\ln(x - x^2)}$; д) $f(x) = (\sin x)^{1/x}$;
е) $f(x) = \left(\dfrac{(x-2)^3 \sqrt[3]{x+3}}{2^x \cos x} \right)^2$.

Решение:

а) $f'(x) = (4x^3 + 2x^2 - 3x - 2)' = 4(x^3)' + 2(x^2)' - 3x' - 2' = 4(3x^2) + 2(2x) - 3 = 12x^2 + 4x - 3$.

б) $f'(x) = (\operatorname{tg} x \cdot \arcsin x)' = (\operatorname{tg} x)' \cdot \arcsin x + (\arcsin x)' \cdot \operatorname{tg} x = \dfrac{\arcsin x}{\cos^2 x} + \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

в) $f'(x) = \left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{e^x} \right)' = \dfrac{(\operatorname{ch} x)' \cdot e^x - (e^x)' \cdot \operatorname{ch} x}{(e^x)^2} = \dfrac{\operatorname{sh} x \cdot e^x - e^x \cdot \operatorname{ch} x}{e^{2x}} = \dfrac{\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}{e^x}$;

г) $f'(x) = (\sqrt{\ln(x - x^2)})' = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x - x^2)}}(\ln(x - x^2))' = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x - x^2)}} \dfrac{(x - x^2)'}{x - x^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x - x^2)}} \dfrac{1 - 2x}{x - x^2}$;

д) $(\ln f(x))' = (1/x \ln(\sin x))' = -1/x^2 \ln(\sin x) + 1/x \dfrac{\cos x}{\sin x}$, отсюда $f'(x) = f(x)[-1/x^2 \ln(\sin x) + 1/x \operatorname{ctg} x] = (\sin x)^{1/x}[-1/x^2 \ln(\sin x) + 1/x \operatorname{ctg} x]$;

e) $(\ln f(x))' = 2\left(\ln\left(\frac{(x-2)^3\sqrt[3]{x+3}}{2^x\cos x}\right)\right)' =$
$2\left(3\ln(x-2) + 1/3\ln(x+3) - x\ln 2 - \ln(\cos x)\right)' =$
$2\left(\frac{3}{x-2} + \frac{1}{3(x+3)} - \ln 2 + \frac{\sin x}{\cos x}\right).$

Отсюда $f'(x) = 2f(x)\left(\frac{3}{x-2} + \frac{1}{3(x+3)} - \ln 2 + \operatorname{tg} x\right).$

Задание 1.1. Вычислить производные явно заданных функций.

Вариант 1

a. $y = (4\cos(8x+5) - 6\sin^3(0,8x))^2;$

b. $y = \sqrt[17]{3 + 7\sqrt[3]{2x}};$

c. $y = \frac{\sqrt{(1-2x)^3(3x+1)\ln^3 x}}{\sqrt[3]{e^{2x}\operatorname{ctg}^5 x}};$

d. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right) + \sin\frac{\pi}{8};$

e. $y = \sin^2\left(3\arccos\frac{x}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{3};$

f. $y = 3^{\operatorname{arctg}(2x+\pi)};$

g. $y = (2x)^{\log_4 x};$

Вариант 2

a. $y = \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x\cdot(1-2x)^4\cdot e^x}{\sqrt[5]{x^2+1}}};$

b. $y = \sqrt[13]{9 + 7\cdot\sqrt[5]{2x}};$

c. $y = 10^{\frac{x}{\log_2 x}};$

d. $y = \frac{1-\cos(8x-3\pi)}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x};$

e. $y = \cos(3\arcsin^2 x) + \sin\frac{\pi}{8};$

f. $y = \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} - \ln\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}};$

g. $y = 2^{x^x};$

Вариант 3

a. $y = \sqrt[13]{9 + 7\sqrt[5]{2x}};$

b. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12};$

c. $y = \cos\frac{\pi}{6} + \cos(3\arcsin^2 x);$

d. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right) + \cos\frac{\pi}{8};$

Вариант 4

a. $y = \frac{\operatorname{arctg}^3 x\cdot\ln^2(x+1)}{\sqrt{\sin 2x\cdot(x^2+2)\cdot e^x}};$

b. $y = 2^{\operatorname{arctg}(2x+\pi)};$

c. $y = \sin^2\frac{1}{x};$

d. $y = \sqrt{3x^3 + \sqrt{x^3+1}};$

$e.\ y=\dfrac{\sqrt[3]{e^{2x}\operatorname{ctg}^6 x}}{\sqrt{(1-2x)^3(3x+1)\ln^3 x}};$

$f.\ y=e^{\cos^2(1-3x)};$

$g.\ y=(\cos x)^{\operatorname{tg}2x};$

$e.\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin x\right);$

$f.\ y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}-\lg\dfrac{1-x\cos\alpha}{1+x\cos\alpha};$

$g.\ y=(\cos x)^{\sin x};$

Вариант 5

$a.\ y=\dfrac{\cos 2}{3}x-\dfrac{1}{4}\sin^2 x+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8};$

$b.\ y=10^{\frac{\log_2 x}{x}};$

$c.\ y=\operatorname{ctg}x^2-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 2x+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6};$

$d.\ y=\dfrac{\sqrt{(x+1)^3(x+3)^5e^{2x}}}{(x+2)^3(x-2)^4};$

$e.\ y=\sqrt[17]{3+7\sqrt[3]{2x}};$

$f.\ y=x^{3^x};$

$g.\ y=\ln^2\arcsin(3x+1);$

Вариант 6

$a.\ y=\dfrac{1-\sin(8x-3\pi)}{\operatorname{ctg}2x-\operatorname{tg}2x};$

$b.\ y=10^{\frac{\log_2 x}{x}};$

$c.\ y=\sqrt[17]{8+5\sqrt[7]{3x}};$

$d.\ y=\sqrt[3]{\dfrac{\sin^2 x(1-2x)^4e^x}{\sqrt[5]{x^2+1}}};$

$e.\ y=\sin^2(3\arccos 3x)+\cos\dfrac{\pi}{6};$

$f.\ y=\ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}}-\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}};$

$g.\ y=x^{2^x};$

Вариант 7

$a.\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\lg x\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin x\right);$

$b.\ y=\ln\dfrac{1-x\sin\alpha}{1+x\sin\alpha}-\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}};$

$c.\ y=\sqrt[3]{3x^3+\sqrt{x^3+1}};$

$d.\ y=2\dfrac{\sqrt{(1-2x)^3(3x+1)\ln^3 x}}{\sqrt[3]{e^{2x}\operatorname{ctg}^3 x}};$

$e.\ y=3^{\operatorname{arcctg}(2x+\pi)};$

$f.\ y=\cos^2\dfrac{1}{x};$

Вариант 8

$a.\ y=\dfrac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}2x}{1-\cos(8x-3\pi)};$

$b.\ y=\dfrac{\sqrt{\sin 2x(x^2+2)e^{2x}}}{\operatorname{arctg}^3 x\ln^2(x+1)};$

$c.\ y=\sqrt[15]{5+9\sqrt[3]{2x}};$

$d.\ y=10^{\frac{x}{\log_2 x}};$

$e.\ y=\sin\dfrac{\pi}{8}+\cos(3\arccos^2 x);$

$f.\ y=\ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}}-\arccos e^{\frac{x}{2}};$

g. $y = (\operatorname{tg} x)^{\arccos x}$;

g. $y = 2^{x^x}$;

Вариант 9

a. $y = a^2 \arccos\dfrac{x}{a} - x\sqrt{a^2 - x^2}$;

b. $y = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$;

c. $y = \dfrac{1}{4}\sin(2x+3) + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\cos 3}{2}x$;

d. $y = e^{-\frac{x^2}{3}}$;

e. $y = \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$;

f. $y = \dfrac{\sqrt[3]{e^{2x}\operatorname{ctg}^5 x}}{3\ln^3 x\sqrt{(1-2x)^3(3x+1)}}$;

g. $y = (2x)^{\log_4 ex}$;

Вариант 10

a. $y = \lg\dfrac{1-x}{1+x} - \ln\dfrac{1-x\cos\alpha}{1+x\cos\alpha}$;

b. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin x\right)\cdot\lg x$;

c. $y = \sin^2\dfrac{1}{x}$;

d. $y = \sqrt[3]{3x^3 + \sqrt[3]{x^3+1}}$;

e. $y = 2^{\operatorname{arcctg}(3x+\pi)}$;

f. $y = \dfrac{3\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}\sqrt{(2x+1)^3\ln(2x)}}{\sqrt[3]{\arcsin^5 x(x^2+1)^2}}$;

g. $y = (\sin x)^{\cos x}$;

Вариант 11

a. $y = \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} - \ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x-1}}$;

b. $y = \sin^2(3\arccos 2x) + \cos\dfrac{\pi}{8}$;

c. $y = \dfrac{\sqrt[3]{e^{2x}\operatorname{ctg}^5 x}}{3\ln^3 x\sqrt{(1-2x)^3(3x+1)}}$;

d. $y = \sqrt[17]{8 + 5\sqrt[7]{3x}}$;

e. $y = 10^{\frac{\log_2 x}{x}}$;

f. $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x}{1 - \sin(8x - 3\pi}$;

g. $y = x^{2^x}$;

Вариант 12

a. $y = a^2 \arcsin\dfrac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}$;

b. $y = \ln\dfrac{x-2}{x+2} - \dfrac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

c. $y = \dfrac{\operatorname{arctg}^3 x\ln^2(x+1)}{\sqrt[3]{\sin 3x(x^2+1)e^x}}$;

d. $y = \sqrt[k]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$;

e. $y = e^{-\frac{x^2}{3}}$;

f. $y = \dfrac{\cos 3}{2}x + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{x}{6}$;

g. $y = (2x)^{\log_4 ex}$;

Вариант 13

a. $y = \sqrt[5]{3x^2\sqrt[3]{x^3-1}}$;

b. $y = \dfrac{\sqrt[3]{e^{2x}\operatorname{ctg}^6 x}}{\sqrt{(1-2x)^3(3x+1)\ln^3 x}}$;

c. $y = \sin^2(3\arccos\dfrac{x}{3}) + \cos\dfrac{\pi}{3}$;

d. $y = \left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^7$;

e. $y = 3^{\operatorname{arctg}(2\mathrm{x}+\pi)}$;

f. $y = 2^{x^x}$;

g. $y = \ln^2\arccos 7x$;

Вариант 14

a. $y = \dfrac{\sqrt{(x+2)^3(x-2)^4}}{(x+1)^3(x+3)^5e^2x}$;

b. $y = \sqrt[13]{9+7\sqrt[5]{2x}}$;

c. $y = 10^{\frac{x}{\log_2 x}}$;

d. $y = \dfrac{1-\cos(8x-3\pi)}{\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}2x}$;

e. $y = \cos(3\arccos^2 x) + \sin\dfrac{\pi}{8}$;

f. $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}} - \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}$;

g. $y = 2^{x^x}$;

Вариант 15

a. $y = \sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}}$;

b. $y = \dfrac{\ln^3 x\sqrt{(1-2x)^3(3x+1)}}{\sqrt[3]{e^{2x}\operatorname{ctg}^5 x}}$;

c. $y = \cos^2\dfrac{1}{x}$;

d. $y = 3^{\operatorname{arctg}(2x+\pi)}$;

e. $y = \lg x\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\sin x\right)$;

f. $y = \operatorname{ctg}(\alpha x)\ln\sqrt{\dfrac{1+x\cos\alpha}{1-x\cos\alpha}}$;

g. $y = (\sin x)^{\cos x}$;

Вариант 16

a. $y = \dfrac{\sqrt[3]{\sin 3x(x^2+1)e^x}}{\operatorname{arctg}^3 x\ln^2(x+1)}$;

b. $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$;

c. $y = e^{-\frac{x^2}{3}}$;

d. $y = \dfrac{\cos 3x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} - \sin^3(2x)$;

e. $y = \ln\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

f. $y = a^2\arcsin\dfrac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}$;

g. $y = (2x)^{\log_4 ex}$;

Вариант 17

$a.\ y = 3^{\operatorname{arctg}(2x+\pi)};$

$b.\ y = \dfrac{\cos x}{3} - \sin^2(2x+3) + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8};$

$c.\ y = \sqrt[13]{9 + 7\sqrt[5]{2x}};$

$d.\ y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \arccos x \ln\operatorname{tg} x;$

$e.\ y = \operatorname{ctg}\ln\sqrt[10]{\dfrac{1 - x\sin\alpha}{1 + x\sin\alpha}};$

$f.\ y = \dfrac{\sqrt[3]{e^{2x}\operatorname{ctg}^6 x}}{\sqrt{\ln^3 x(1-2x)^3(3x+1)}};$

$g.\ y = x^{3^x};$

Вариант 18

$a.\ y = \dfrac{\sqrt{(x+1)^3(x+3)^5e^{2x}}}{(x+2)^3(x-2)^4};$

$b.\ y = \sin^2\dfrac{1}{x};$

$c.\ y = 3^{\operatorname{arcctg}(2x+\pi)};$

$d.\ y = \sqrt[3]{3x^2 + \sqrt[3]{x^3+1}};$

$e.\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln x \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\sin x\right);$

$f.\ y = \dfrac{x\sin(2x - \pi/2)}{3^x};$

$g.\ y = (\sin x)^{\cos x};$

Вариант 19

$a.\ y = \dfrac{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x}{1 - \sin(8x - 3\pi}));$

$b.\ y = \sqrt[17]{8 + 5\sqrt[7]{3x}};$

$c.\ y = 10^{\frac{\log_2 x}{x}};$

$d.\ y = \dfrac{\sqrt[3]{e^{2x}\operatorname{ctg}^6 x}}{\sqrt{(1-2x)^3(3x+1)\ln^3 x}};$

$e.\ y = \sin^2(3\arccos 2x) + \cos\dfrac{\pi}{6};$

$f.\ y = \ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}} - \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}};$

$g.\ y = x^{2^x};$

Вариант 20

$a.\ y = \sin^2(x+\pi) - \dfrac{\operatorname{ctg} 2}{2}x + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x};$

$b.\ y = e^{-\frac{x^3}{3}};$

$c.\ y = \sqrt[4]{\dfrac{2x+3}{4x-1}};$

$d.\ y = \dfrac{\operatorname{arctg}^3 x \ln^2(x+1)}{\sqrt[3]{\sin 3x(x^2+1)e^x}};$

$e.\ y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}};$

$f.\ y = a^2\arcsin\dfrac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2};$

$g.\ y = (2x)^{\log_4 ex};$

Вариант 21

$a.\ y = \operatorname{arctg} 2^{1-x};$

Вариант 22

$a.\ y = (4\cos(8x+5) - 6\sin^3(0,8x))^2;$

$b.\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}} \sin x \right) \cdot \ln x;$

$c.\ y = \sqrt[m]{\dfrac{bx+c}{ax+d}};$

$d.\ y = 8^{\frac{x}{\log_2 x}};$

$e.\ y = \ln \sqrt{\dfrac{e^x}{e^{x+1}-1}} - \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}};$

$f.\ y = \sqrt{\sin x} \cdot b^{\sqrt{\sin x}} + b^{11};$

$g.\ y = \dfrac{(x+2)^3(x-2)^4}{\sqrt{(x+1)^3(x+3)^5 e^{2x}}};$

$b.\ y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right)^{12};$

$c.\ y = \arccos 2^{-x};$

$d.\ y = \operatorname{ctg} x^2 - \dfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 2x + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{6};$

$e.\ y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \cos x \ln \operatorname{tg} x;$

$f.\ y = \dfrac{\sqrt{e^{3x} \operatorname{tg}^3 x}}{\sqrt[3]{(1-2x)^4(3x+1)\ln^2 x}};$

$g.\ y = x^{x^e};$

Вариант 23

$a.\ y = \dfrac{1-\cos(8x-3\pi)}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x};$

$b.\ y = \sqrt[13]{9 + 7\sqrt[5]{2x}};$

$c.\ y = 10^{\frac{\log_2 x}{x}};$

$d.\ y = \dfrac{\sqrt[5]{x^2+2}}{\sqrt[3]{e^x(1-2x)^4 \sin^2 3x}};$

$e.\ y = \cos(3 \arcsin^2 x) + \sin \dfrac{\pi}{4};$

$f.\ y = \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} - \ln \sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}};$

$g.\ y = 2^{x^x};$

Вариант 24

$a.\ y = \dfrac{\pi}{3x} + \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4} \sin^2(2x+3);$

$b.\ y = \dfrac{\sqrt[3]{e^{2x} \operatorname{ctg}^5 x}}{\frac{1}{3} \ln^3 x \sqrt{(1-2x)^3(3x+1)}};$

$c.\ y = \sqrt[10]{\dfrac{10x^2+x-3}{4x-1}};$

$d.\ y = e^{-\frac{x^3}{6}};$

$e.\ y = \ln \dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} - \dfrac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

$f.\ y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \dfrac{x}{a};$

$g.\ y = (2x)^{\log_4 ex};$

Вариант 25

$a.\ y = \dfrac{\sqrt[3]{e^x(x^2+2)\sin 2x}}{\ln^2(x+1) \operatorname{arctg}^3 x};$

$b.\ y = 3^{\operatorname{arcctg}(2\mathrm{x}+\pi)};$

Вариант 26

$a.\ y = \sqrt[3]{\cos^2(2x+3) - \sin\sqrt{x}};$

$b.\ y = \operatorname{arctg} 2^{1-x};$

c. $y = \cos^2 \dfrac{1}{x};$

d. $y = \sqrt{2x^5 + \sqrt[3]{x^3+1}};$

e. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}} \sin x\right) \cdot \ln x;$

f. $y = \operatorname{ctg} 2^x - \sqrt{\pi} + \dfrac{1}{\sin^2 x};$

g. $y = (\cos x)^{\sin x};$

c. $y = \left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^7;$

d. $y = \dfrac{1}{3} \operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{ctg} x^2;$

e. $y = \cos^3 x \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2};$

f. $y = \dfrac{\sqrt[5]{e^x (1-3x)^3 \sin^2 5x}}{\sqrt{x^2-1}};$

g. $y = x^{e^x};$

Вариант 27

a. $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x}{1 - \sin(8x - 3\pi)};$

b. $y = 10^{\frac{\log_2 x}{x}};$

c. $y = \sqrt[13]{5 + 8\sqrt[7]{3x}};$

d. $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt[5]{x^2+3}e^{2x}}{(1-2x)^3(3x+1)\sin^2 x)}};$

e. $y = \sin^2(3 \arccos \dfrac{x}{3}) + \cos \dfrac{\pi}{3};$

f. $y = \operatorname{arctg} e^{-x} + \ln \sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}};$

g. $y = x^{3^x};$

Вариант 28

a. $y = \dfrac{1}{\cos 2x} \log_4 \dfrac{1+x}{1-x};$

b. $y = \sqrt[5]{3x^3 + \sqrt[3]{x^3-1}};$

c. $y = \lg x \arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} \sin x\right) + \sin \dfrac{\pi}{8};$

d. $y = \dfrac{\sqrt{e^{2x} \operatorname{ctg}^3 x}}{3 \ln \frac{x}{3} \sqrt{(1-2x)^3(3x+1)}};$

e. $y = 3^{\operatorname{arctg}(2x+\pi)};$

f. $y = \sin^3 \dfrac{1}{x;}$

g. $y = (\operatorname{tg} x)^{\arccos x};$

Вариант 29

a. $y = \cos(3 \arcsin^2 x) + \cos \dfrac{\pi}{6};$

b. $y = \dfrac{\ln^3(x+1) \operatorname{arctg}^2 x}{\sqrt{e^{2x}(x^2+1)^3 \sin 2x}};$

c. $y = \dfrac{1 - \cos(8x - 3\pi)}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x};$

d. $y = \sqrt[17]{3 + 7\sqrt[3]{2x}};$

Вариант 30

a. $y = \dfrac{\sqrt{(x+1)^3(x+3)^5 e^{3x}}}{(x+2)^3(2x-1)^4};$

b. $y = \sin^2(3 \arccos \dfrac{x}{3}) + \cos \dfrac{\pi}{3};$

c. $y = \operatorname{arctg} 2^{1-x};$

d. $y = 3^{\operatorname{arcctg}(2x+\pi)};$

e. $y = 10^{\frac{x}{\log_2 x}}$;

f. $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^{x+1}-1}} - \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}$;

g. $y = 2^{3^x}$;

e. $y = \ln\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} - \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

f. $y = \operatorname{ctg} x^2 - \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 2x$;

g. $y = 3^{x^x}$.

1.2. **Производные функций, заданных неявно и параметрически.** Согласно теореме о неявной функции, если функция $F(x,y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0)$ и в этой точке частная производная $F'_y(x_0;y_0) \neq 0$, то соотношение $F(x,y)=0$ в данной окрестности определяет единственную непрерывно дифференцируемую функцию $y=f(x)$, при этом

$$y'|_{x=x_0} = f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0;y_0)}{F'_y(x_0;y_0)}.$$

Эта формула определяет тангенс угла между касательной к кривой $F(x,y)=0$ в точке $(x_0;y_0)$ (лежащей на ней) и осью Ox даже в том случае, когда неявная функция не существует. Вторая и последующие производные от неявной функции вычисляются от выражения $-\dfrac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}$ (производная неявной функции является функцией двух переменных), считая, что $y=y(x)$ и y' — известно. При вычислении частной производной по одной из переменных вторую переменную считают константой (параметром). Для того, чтобы вычислить неявную функцию в заданной точке $(x_0;y_0)$ необходимо предварительно проверить соотношение $F(x_0,y_0)=0$, иначе задача является некорректной.

Также производную от неявной функции, заданной равенством $F_1(x,y)=F_2(x,y)$, можно вычислить, беря производные от обеих частей равенства по x, с учетом того, что $y=y(x)$. При этом производная каждой функции вида $g(y)$ будет вычисляться как производная сложной функции, т.е. будет равна $g'(y)\cdot y'$. Полученное в результате дифференцирования равенство нужно рассматривать как линейное уравнение относительно y'.

Для того, чтобы найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} y=y(t), \\ x=x(t), \end{cases}$ нужно воспользоваться

формулой
$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \varphi(t).$$
Найденное выражение определяет функцию, заданную параметрически $\begin{cases} y'_x = \varphi(t), \\ x = x(t). \end{cases}$ Чтобы вычислить производную в данной точке $(x_0; y_0)$, лежащей на кривой, необходимо вычислить параметр t, используя систему $\begin{cases} y_0 = y(t), \\ x_0 = x(t). \end{cases}$ Если эта система имеет несколько решений, то указанная точка является местом самопересечения кривой и производная однозначно не вычисляется (каждому решению соответствует своя касательная, со своим угловым коэффициентом). Если система неразрешима, то точка не лежит на кривой, а значит задача некорректна.

Пример 1.2. Вычислить y'_x и y''_{xx} от функции, заданной неявно: $x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$.

Решение:

Приравняем производные левой и правой частей: $(x^2y^2 - 5x + \sin y)' = (3y - 1)'$. Имеем $(2xy^2 + x^2 \cdot 2yy') - 5 + \cos y y' = 3y'$. Вынесем y' за скобки: $y'(2x^2y + \cos y - 3) = 5 - 2xy^2$. Выразим y':
$$y'_x = \frac{5 - 2xy^2}{2x^2y + \cos y - 3}.$$

Дифференцируя обе части полученного равенства по x, получаем
$$y''_{xx} = \left(\frac{5 - 2xy^2}{2x^2y + \cos y - 3} \right)'_x =$$
$$= \frac{(-2y^2 - 4xyy'_x)(2x^2y + \cos y - 3) - (5 - 2xy^2)(4xy + 2x^2y'_x - \sin y y'_x)}{(2x^2y + \cos y - 3)^2},$$
где y'_x получен ранее.

Пример 1.3. В точке $M(2; 1)$ вычислить y'_x и y''_{xx} от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} y = t, \\ x = t^2 + 1. \end{cases}$

Решение:

Имеем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{1}{2t}$, $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{-1/2t^2}{2t} = -\dfrac{1}{4t^3}$.

Чтобы найти параметр t, соответствующий точке $M(2;1)$, решаем систему $\begin{cases} 1 = t, \\ 2 = t^2 + 1. \end{cases}$ Отсюда $t = 1$, следовательно $y'_x = 1/2$, $y''_{xx} = -1/4$.

Задание 1.2. Вычислить y'_x и y''_{xx} от функций, заданных неявно и параметрически.

Вариант 1

a. $x^2 y + \ln^3 y = x^5$;

b. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

Вариант 2

a. $xy + \ln^2 y = 1$;

b. $\begin{cases} y = \ln \sin t, \\ x = \ln \sin t/2; \end{cases}$

Вариант 3

a. $y - x^2 = \varepsilon \sin^2 y$;

b. $\begin{cases} y = t^2 - t, \\ x = t^3 + 1; \end{cases}$

Вариант 4

a. $e^y + xy^3 = 2x^2$;

b. $\begin{cases} y = a \cos^3 t, \\ x = b \sin^3 t; \end{cases}$

Вариант 5

a. $e^y + xy^3 = 2x^2$;

b. $\begin{cases} x = t^2 + 6t = 2x^2, \\ y = \frac{t^3 - 54}{t}; \end{cases}$

Вариант 6

a. $xy^2 + \ln^4(y+1) = 3x^2$;

b. $\begin{cases} y = \ln \cos t, \\ x = \ln \cos t/2; \end{cases}$

Вариант 7

a. $e^{2y} + 3x^2 y - 1 = 0$;

b. $\begin{cases} x = e^{-t} - e^t, \\ y = t^3 + 2t - 1; \end{cases}$

Вариант 8

a. $xy^2 + \ln^3 y + x^3 = 0$;

b. $\begin{cases} y = \ln \sin t/2, \\ x = \ln \sin t; \end{cases}$

Вариант 9

a. $y^2 - x = \varepsilon \cos^4 y$;

Вариант 10

a. $e^y + xy^2 = 2x$;

b. $\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5, \\ y = \frac{t^3-54}{t}; \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = a\sin^3 t, \\ x = b\cos^3 t; \end{cases}$

Вариант 11

a. $xy^2 + \ln^2 y = 3x;$

b. $\begin{cases} y = \ln\cos t/2, \\ x = \ln\cos t; \end{cases}$

Вариант 12

a. $y^2 - x = \varepsilon\cos^3 y;$

b. $\begin{cases} x = \frac{t^3-54}{t}, \\ y = t^2 + 6t + 5; \end{cases}$

Вариант 13

a. $xy^2 + \ln^3 y + x^2 = 0;$

b. $\begin{cases} x = e^{-t+1} - et - 1, \\ y = t^3 + 2t - 1; \end{cases}$

Вариант 14

a. $x^2 y + \ln^3 y^2 = x;$

b. $\begin{cases} x = \ln\cos t, \\ y = \ln\cos t/2; \end{cases}$

Вариант 15

a. $e^y + xy^4 = ex^3;$

b. $\begin{cases} y = t^3 + 2t, \\ x = e^{-t}; \end{cases}$

Вариант 16

a. $x^2y^2 - x = \varepsilon\sin^2 y;$

b. $\begin{cases} y = \frac{t^3-54}{t}, \\ x = t^2 + 6t + 5; \end{cases}$

Вариант 17

a. $\ln^3 y + \dfrac{x}{y} = 3x^3;$

b. $\begin{cases} y = a\cos^3 t, \\ x = b\sin^3 t; \end{cases}$

Вариант 18

a. $e^y + xy^2 = 2x^3;$

b. $\begin{cases} y = a\cos^3 t, \\ x = b\sin^3 t; \end{cases}$

Вариант 19

a. $-xy^2 + \ln^3(y+1) = 3x^2;$

b. $\begin{cases} y = \ln\sin t, \\ x = \ln\sin t/2; \end{cases}$

Вариант 20

a. $x^3y^2 - x = \delta\cos^2 y;$

b. $\begin{cases} y = t^2 + 6t + 5, \\ x = \frac{t^3-54}{t}; \end{cases}$

Вариант 21

a. $xy^2 + \ln^4(y+1) = x^3;$

b. $\begin{cases} y = b\sin^3 t, \\ x = a\cos^2 t; \end{cases}$

Вариант 22

a. $x^{2/3} + xy^{2/3} = a^{2/3};$

b. $\begin{cases} y = a(1-\cos t), \\ x = a(t-\sin t); \end{cases}$

Вариант 23

a. $x^2 y + \ln^3 y = x^5;$

b. $\begin{cases} y = \ln\sin t/2, \\ x = \ln\sin t; \end{cases}$

Вариант 24

a. $y - x^2 = \varepsilon \sin^3 y;$

b. $\begin{cases} y = \frac{t^3-54}{t}, \\ x = t^2 + 6t + 5; \end{cases}$

Вариант 25

a. $e^y + xy^3 = 2x^2;$

b. $\begin{cases} y = a\cos^3 t, \\ x = b\sin^3 t; \end{cases}$

Вариант 26

a. $\ln^3 y + \dfrac{x}{y} = 3x^3;$

b. $\begin{cases} y = b\sin^2 t, \\ x = a\cos^2 t; \end{cases}$

Вариант 27

a. $xy^2 + \ln^4(y+1) = x^3;$

b. $\begin{cases} y = \ln\cos t/2, \\ x = \ln\cos t; \end{cases}$

Вариант 28

a. $e^{2y} + 3x^2 y - 1 = 0;$

b. $\begin{cases} y = t^3 + 2t - 1, \\ x = e^{-t+1} - e^{t-1}; \end{cases}$

Вариант 29

a. $xy^2 + \ln^3 y + x^2 = 0;$

b. $\begin{cases} x = \ln\sin t/2, \\ y = \ln\sin t; \end{cases}$

Вариант 30

a. $xy^2 + \ln^2 y + x^3 = 0;$

b. $\begin{cases} y = t^3 + 2t - 1, \\ x = e^{-t-1} - e^{t-1}. \end{cases}$

2. Приложения производной

2.1. **Правило Лопиталя.** Правило Лопиталя — метод нахождения пределов функций, являющихся неопределённостями вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. В этом случае предел отношения функций равен пределу отношения их производных

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если второй предел существует.

Отметим, что правилом Лопиталя можно пользоваться несколько ряд подряд, вычисляя производные второго, третьего порядка и далее, убеждаясь перед каждым его применением, что неопределенность сохраняется. Если на каком то шаге неопределенность уходит, то все пределы становятся вычисленными. Имеются однако примеры, которые после вычисления производных лишь усложняются и не сводятся к числу или определенности за конченое число шагов. К таким примерам правило Лопиталя НЕ применимо. Неопределённости другого вида как правило сводятся к двум основным с помощью замены переменных или логарифмирования.

Пример 2.1. Найти предел функции, используя правило Лопиталя:
а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{(\sqrt{2+x}-3)'}{(x-7)'}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}=\dfrac{1}{6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-\cos^3 x)'}{(x^2)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x+3\cos^2 x\cdot\sin x}{2x}=\dfrac{0}{0}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+3(2\cos x(-\sin x)\sin x+\cos^3 x)}{2}=\frac{-1+3}{2}=1;$$

в) пусть $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}=\infty^0=A$, тогда $\ln A=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}=$

$=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\ln\operatorname{tg} x=0\cdot\infty=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{(2x-\pi)^{-1}}=\dfrac{\infty}{\infty}=$

$=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-2(2x-\pi)^{-2}}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{(2x-\pi)^2}{\operatorname{tg} x}=\dfrac{0}{\infty}=0 \quad\Rightarrow\quad A=1.$

Задание 2.1. Найти предел функции, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3}-1}{\sin^3 2x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-\cos 3x}{e^{4x}-\cos 4x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{x}-2}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos 2x-1)^2}{x^4}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3}-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x-\sin x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(3x)}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$;

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{tgx}-e^{x}}{\operatorname{tg} x-x}$;

15. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin(2x)}{\ln\sin(x)}$;

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$;

18. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$;

19. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$;

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$;

21. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$;

24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\ln\operatorname{tg} x}$;

25. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$;

26. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$;

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$;

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$;

29. $\lim\limits_{x\to \dfrac{\pi}{2}} (2x\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{\cos x})$;

30. $\lim\limits_{x\to \infty} (1+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

2.2. **Уравнение касательной и нормали.** Уравнение касательной к функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ определяется формулой

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

где $k = f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$, φ — угол между касательной и осью OX.

Нормаль в каждой точке перпендикулярна касательной, отсюда ее угловой коэффициент $k_1 = -1/k = -1/f'(x_0)$. Следовательно уравнение нормали определяется формулой

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Если $f'(x_0) = 0$, то касательная параллельна оси Ox и определяется уравнением $y = f(x_0)$, при этом нормаль параллельна оси Oy и определяется уравнением $x = x_0$.

Пример 2.2. Найти уравнение касательной и нормали к данной функции в данной точке:

а) $y = x^2 - 3x + 4, \quad x_0 = 0;$ б) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases} \quad t_0 = 2.$

Решение:

а) Имеем $y(0) = 4$, $y'(0) = (2x-3)|_{x=0} = -3$. Составим уравнение касательной: $y = 4-3(x-0) = -3x+4$. Составим уравнение нормали: $y = 4 + (1/3)(x - 0) = x/3 + 4$.

б) Имеем $x(2) = 4 - 4 = 0$, $y(2) = 6 - 8 = -2$, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3-3t^2}{2-2t}$, отсюда $y'_x(2) = \dfrac{3-12}{2-4} = 9/2$. Получаем уравнение касательной: $y = -2 + (9/2)(x - 0) = 9x/2 - 2$, а также уравнение нормали $y = -2 - 2/9(x - 0) = -2x/9 - 2$.

Задание 2.2. Найти уравнение касательной и нормали к данной функции в данной точке.

Вариант 1

a. $y = (x-2)e^x, \ x_0 = 0;$

b. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \pi/3;$

Вариант 2

a. $y = (x^2+4)e^x, \ x_0 = 0;$

b. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \pi/3;$

Вариант 3

a. $y = x + \sqrt{x^3},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t_0 = \pi/3;$

Вариант 4

a. $y = \sqrt[3]{x^2} - 20,\ x_0 = -8;$

b. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

Вариант 5

a. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}},\ x_0 = 4;$

b. $\begin{cases} x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}, \\ y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

Вариант 6

a. $y = 8\sqrt[4]{x} - 70,\ x_0 = 16;$

b. $\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases} \quad t_0 = -1;$

Вариант 7

a. $y = 2x^2 - 3x + 1,\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t), \end{cases} \quad t_0 = \pi/4;$

Вариант 8

a. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2},\ x_0 = 3;$

b. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases} \quad t_0 = 2;$

Вариант 9

a. $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x},\ x_0 = 64;$

b. $\begin{cases} x = 2\ln(\operatorname{ctg} t) + \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \end{cases} \quad t_0 = \pi/4;$

Вариант 10

a. $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - 2},\ x_0 = 2;$

b. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, \end{cases} \quad t_0 = 0;$

Вариант 11

a. $y = 2x^2 + 3,\ x_0 = -1;$

b. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t, \end{cases} \quad t_0 = \pi/2;$

Вариант 12

a. $y = \dfrac{x^{29} + 6}{x^4 + 1},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \end{cases} \quad t_0 = \pi/6;$

Вариант 13

a. $y = 2x + \dfrac{1}{x},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

Вариант 14

a. $y = \dfrac{-2(x^8+2)}{3(x^4+1)},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = \frac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \frac{3+2\ln t}{t}, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

Вариант 15

a. $y = \dfrac{x^5+1}{x^4+1},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^2}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}, \end{cases} \quad t_0 = 2;$

Вариант 16

a. $y = \dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \pi/6;$

Вариант 17

a. $y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}),\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = a(t\sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad t_0 = \pi/4;$

Вариант 18

a. $y = \dfrac{1}{3x+2},\ x_0 = 2;$

b. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}, \end{cases} \quad t_0 = -1;$

Вариант 19

a. $y = \dfrac{x}{x^2+1},\ x_0 = -2;$

b. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases} \quad t_0 = 2;$

Вариант 20

a. $y = \dfrac{x^2-3x+3}{3},\ x_0 = 3;$

b. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

Вариант 21

a. $y = \dfrac{2x}{x^2+1},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = t(1-\sin t), \\ y = t\cos t, \end{cases} \quad t_0 = 0;$

Вариант 22

a. $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}),\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1}, \end{cases} \quad t_0 = 2;$

Вариант 23

a. $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} \quad t_0 = \pi/4;$

Вариант 24

a. $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2,\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \end{cases} \quad t_0 = 1;$

Вариант 25

a. $y = \dfrac{1}{x^2-4},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases} \quad t_0 = \pi/4;$

Вариант 26

a. $y = (x^2+4)e^x,\ x_0 = 0;$

b. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t_0 = -\pi/3;$

Вариант 27

a. $y = (x-5)\sqrt{x},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg} t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t, \end{cases} \quad t_0 = \pi/4;$

Вариант 28

a. $y = (x+1)\sqrt{x},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t_0 = -2;$

Вариант 29

a. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+9},\ x_0 = 0;$

b. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 3^t, \end{cases} \quad t_0 = 0;$

Вариант 30

a. $y = \dfrac{\ln x}{x^2+1},\ x_0 = 1;$

b. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases} \quad t_0 = \pi/6.$

2.3. **Максимум и минимум функции на отрезке.** Согласно второй теореме Вейерштрасса непрерывная функция достигает своего максимального и минимального значения на компактном множестве, в частности на отрезке. Если функция дополнительно дифференцируема внутри отрезка, то максимум и минимум достигаются либо в точках экстремума, либо в одной из концевых точек отрезка.

Пример 2.3. Найти максимальное и минимальное значение функции на данном отрезке: $y(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3, \quad x \in [-1; 2]$.

Решение:

Вычислим производную: $y'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x^2 - 4x + 3)$. Имеем критические точки (нули производной): $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Поскольку $3 \notin [-1; 2]$, то ею мы пренебрегаем. Выясним значения функции на концах отрезка и в критической точке: $y(-1) = -2 - 12 - 18 + 3 = -29$; $y(2) = 16 - 48 + 36 + 3 = 7$; $y(1) = 2 - 12 - 18 + 3 = 11$. Отсюда максимальное значение функции $y_{max} = y(1) = 11$, минимальное значение функции $y_{min} = y(-1) = -29$.

Задание 2.3. Найти максимальное и минимальное значение функции на данном отрезке.

1. $y = x^4 - 8x^2 + 3, \quad x \in [-2; 2];$
2. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2, \quad x \in [-1; 2];$
3. $y = x + \sqrt{x}, \quad x \in [-2; 2];$
4. $y = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in [-2; 2];$
5. $y = x^3 - 12x + 7, \quad x \in [0; 3];$
6. $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x, \quad x \in [0; \pi/2];$
7. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, \quad x \in [-3; 1];$
8. $y = x - \sin x, \quad x \in [-\pi; \pi];$
9. $y = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}];$
10. $y = \cos 2x + 2x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}];$
11. $y = \operatorname{tg} x - x, \quad x \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}];$
12. $y = e^{2x} - e^{-2x}, \quad x \in [-2; 1];$
13. $y = x^3 - 18x^2 + 96x, \quad x \in [0; 9];$
14. $y = x^4 - 2x^2 + 5, \quad x \in [-2; 2];$
15. $y = x + 2\sqrt{x}, \quad x \in [0; 4];$
16. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad x \in [-1; 2];$
17. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2, \quad x \in [-1; 1];$

18. $y = \sqrt{100 - x^2}, \quad x \in [-6; 8];$

19. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}, \quad x \in [0; 1];$

20. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}, \quad x \in [0; 4];$

21. $y = 7 - 3x^3, \quad x \in [-1; 2];$

22. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x, \quad x \in [0; 2];$

23. $y = x^3 - 27x + 1, \quad x \in [0; 3];$

24. $y = x^4 - 4x, \quad x \in [-1; 2];$

25. $y = \sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x, \quad x \in [0; \pi/2];$

26. $y = x^4 - 2x^2 + 3, \quad x \in [0; 2];$

27. $y = \cos x + x, \quad x \in [0; \pi];$

28. $y = 2x^4 - x, \quad x \in [0; 1];$

29. $y = x^6 - \dfrac{3}{2}x^4, \quad x \in [-2; 0];$

30. $y = \cos x + \dfrac{x}{2}, \quad x \in [0; \pi/2].$

2.4. **Приближённые вычисления.** Формула для дифференциала $dy = y'(x_0)dx$ позволяет вычислять значения функции $y(x)$ в точках “близких” к точке x_0, если значение $y(x_0)$ вычисляется легко. Для этого дифференциал приравнивают к приращению функции и получают

$$\Delta y = y(x_0 + dx) - y(x_0) \approx dy = y'(x_0)dx,$$

$$y(x_0 + dx) \approx y(x_0) + y'(x_0)dx.$$

Здесь $y(x_0)$ известная величина, dx — малое (как правило в пределах от $-0,2$ до $0,2$) приращение аргумента. Порядок погрешности определяется величиной $(dx)^2$, поэтому последняя значащая цифра после запятой должна быть не менее, чем $(dx)^2$.

Пример 2.4. Вычислить приближённо (с помощью первого дифференциала) значение функции в данной точке: $y = \operatorname{arctg} x, \quad x = 1,02$.

Решение:

Имеем $x_0 = 1$; $dx = x - x_0 = 1,02 - 1 = 0,02$; $(dx)^2 = 0,0004$; $y(1) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 \approx 0,785$ (четвертая цифра не нужна). Вычислим производную $y'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, отсюда $y'(1) = 0,5$. Таким образом

$$y(1,02) = \operatorname{arctg}(1,02) \approx 0,785 + 0,5 \cdot 0,02 = 0,795.$$

Задание 2.4. Вычислить приближённо (с помощью первого дифференциала) значение функции в данной точке.

1. $y = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 8,03;$	2. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x},\ x_0 = 1,01;$
3. $y = x + \sqrt{5 - x^2},\ x_0 = 0,98;$	4. $y = \sqrt[4]{x - 2},\ x_0 = 18,03;$
5. $y = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 7,96;$	6. $y = \sqrt{x^2 + 5},\ x_0 = 1,97;$
7. $y = \dfrac{x + \sqrt{5 - x^2}}{2},\ x_0 = 0,98;$	8. $y = \sqrt[4]{x},\ x_0 = 15,57;$
9. $y = \arcsin x,\ x_0 = 0,08;$	10. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5},\ x_0 = 0,97;$
11. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}},\ x_0 = 1,58;$	12. $y = \sqrt{x^2 + x + 3},\ x_0 = 1,97;$
15. $y = x^{11},\ x_0 = 1,02;$	16. $y = \sqrt{1 + x + \sin x},\ x_0 = 0,01;$
17. $y = \sqrt[5]{x^2},\ x_0 = 1,02;$	18. $y = \sqrt[3]{x^2},\ x_0 = 1,03;$
19. $y = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = -0,01;$	20. $y = \sqrt[3]{3x + \cos x},\ x_0 = 0,01;$
21. $y = \ln(2 - x),\ x_0 = 0,96;$	22. $y = \sqrt[5]{x},\ x_0 = 32,04;$
23. $y = \sqrt{4x - 1},\ x_0 = 2,56;$	24. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}},\ x_0 = 1,01;$
25. $y = 2^{\sqrt{x}},\ x_0 = 4,36;$	26. $y = 1/\sqrt{x},\ x_0 = 4,16;$
27. $y = \operatorname{ctg}(\pi/2 - x),\ x_0 = 0,02;$	28. $y = \sqrt{4x + 1},\ x_0 = 1,98;$
29. $y = \sqrt{x^3},\ x_0 = 0,98;$	30. $y = \lg(1 + x),\ x_0 = 9,97.$

2.5. **Формула Маклорена.** Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 = 0$ и в этой точке n раз дифференцируема, тогда имеет место формула Маклорена (частный случай формулы

Тейлора) с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),$$

где выражение $o(x^n)$ является обозначением бесконечно малой функции $r(x)$, для которой

$$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n} = 0.$$

Отметим, что чётные функции раскладываются лишь по чётным степеням, а нечётные функции — лишь по нечётным степеням x. Пользоваться данным разложением удобно лишь для точек "достаточно близких" к нулю. Для разложения конкретной функций в ряд Маклорена зачастую удобно не вычислять все производные до заданного порядка, а использовать элементарные преобразования над известными разложениями элементарных функций в ряды Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}),$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + C_\alpha^2 x^2 + ... + C_\alpha^n x^n + o(x^n),$$

где $C_\alpha^n := \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$ — обобщённые биномиальные коэффициенты.

Пример 2.5. Найти формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано указанного порядка: а) $y(x) = \cos^2 x,\ n = 4$;
б) $y = \sqrt{1+2x},\ n = 3$;   в) $y = \operatorname{tg} x,\ n = 4$.

Решение:

а) имеем $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x) =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!}\Big) + o(x^5),$$

отсюда $\cos^2 x = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{3} + o(x^5)$;

б) $y = \sqrt{1+2x} = (1+2x)^{1/2} =$

$$= 1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(2x)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(2x)^3 + o(x^3) =$$

$= 1 + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3);$

в) имеем $y(0) = \operatorname{tg}(0) = 0, \quad y'(0) = \cos^{-2}(x)|_{x=0} = 1,$

$$y''(0) = 2\cos^{-3} x \sin x|_{x=0} = 0,$$

$$y'''(0) = 2(-3\cos^{-4} x(-\sin^2 x) + \cos^{-2} x)|_{x=0} = 2,$$

отсюда $\operatorname{tg} x = 0 + x + \dfrac{0}{2!}x^2 + \dfrac{2}{3!}x^3 + o(x^4) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4).$

Задание 2.5. Найти формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано указанного порядка.

1. $y = (2x^2 - 7)\ln(x+1),\ n = 5;$
2. $y = (3 - x^2)\ln(x+1)^2,\ n = 4;$
3. $y = x\cos x^2,\ n = 5;$
4. $y = x\sin x^3,\ n = 6;$
5. $y = (4x^3 + 5)e^{2x},\ n = 5;$
6. $y = 2^{x^2-3},\ n = 4;$
7. $y = (x-1)\sin 5x,\ n = 5;$
8. $y = (x+2)\cos 3x,\ n = 5;$
9. $y = (1+x^2)\ln(1 - 4x + x^2),\ n = 4;$
10. $y = \dfrac{x}{x^2-1},\ n = 4;$
11. $y = e^{x^2}\sin x,\ n = 4;$
12. $y = \ln(\cos x),\ n = 5;$
13. $y = (4x+3)e^{-x},\ n = 5;$
14. $y = xe^{2-3x},\ n = 5;$
15. $y = (2x^3+1)\cos x,\ n = 5;$
16. $y = (2x^3-1)\sin x,\ n = 5;$
17. $y = (4x+4)^5,\ n = 5;$
18. $y = (x^2-1)^4,\ n = 5;$
19. $y = x(2x^2+1)^4,\ n = 5;$
20. $y = (2x^2+x)^4,\ n = 5;$
21. $y = x\cos x\sin x,\ n = 5;$
22. $y = \dfrac{1}{1+x^2},\ n = 6;$
23. $y = \sqrt{x+4},\ n = 5;$
24. $y = \sqrt[3]{x+8},\ n = 4;$
25. $y = \sin^2 3x,\ n = 5;$
26. $y = \cos^2 2x,\ n = 5;$
27. $y = \dfrac{1}{x}\sin(3x^2),\ n = 5;$
28. $y = e^{x/2}\sin x,\ n = 4;$
29. $y = (1-\sin x)^3,\ n = 4;$
30. $y = (1+\cos x)^4,\ n = 4.$

3. Анализ и построение графиков функций

Полное исследование свойств функции проводится по следующей схеме:

I. Исследование элементарными методами.

(1) Определяется область определения и по возможности множество значений функции.
(2) Находятся точки пересечения с осями координат.
(3) Находятся промежутки положительности и отрицательности функции.
(4) Выясняется является ли функция четной или нечетной.
(5) Выясняется является ли функция ограниченной.
(6) Выясняется является ли функция периодической.

II. Исследование с помощью пределов.

(7) Изучается характер поведения функции в граничных точках области определения (находятся разрывы функции и их вид).
(8) Если область определения функции не ограничена, изучается поведение функции при $x \to +\infty$ и (или) $x \to -\infty$ (находятся асимптоты функции и их вид).

III. Исследование с помощью производной.

(9) Находятся точки экстремума, промежутки возрастания и убывания (с помощью первой производной).
(10) Находятся промежутки выпуклости функции и точки перегиба (с помощью второй производной).

IV. Построение графика функции с указанием особых точек.

Перед построением графика рекомендуется изобразить асимптоты, точки экстремума и перегиба. При необходимости вычислить значения функции в дополнительных точках.

Пример 3.1. Исследовать функцию $y = x + 1/x$ и построить эскиз ее графика.

Решение:

1. Область определения функции $\mathcal{D}(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (множество значений такое же $E(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$).

2. Уравнение $x + 1/x = 0$ корней не имеет, поэтому график не пересекает осей координат.

3. Функция положительна на промежутке $(0, +\infty)$ и отрицательна на промежутке $(-\infty, 0)$.

4. Имеем $y(-x) = (-x) - 1/(-x) = -x - 1/x = -y(x)$, т.е. данная функция — нечетная.

5. Функция не является периодической, так как не периодична область определения.

6. Функция не является ограниченной, т.к. не ограничено множество значений.

7. В окрестности точки 0 имеем $\lim\limits_{x \to 0+0} (x + 1/x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to 0-0} (x + 1/x) = -\infty$. Таким образом, в точке $x = 0$ имеется неустранимый разрыв второго рода.

8. Из предыдущего пункта следует, что прямая $x = 0$ — двусторонняя вертикальная асимптота. Так как

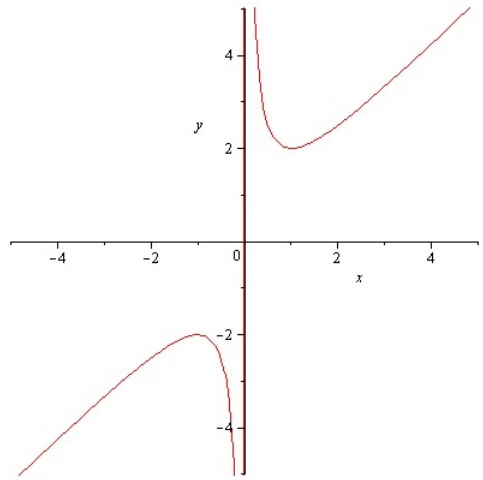
$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1/x}{x} = 1, \qquad b = \lim_{x \to \infty} ((x + 1/x) - x) = 0,$$

то прямая $y = x$ — двусторонняя наклонная асимптота.

9. Находим производную $y'(x) = 1 - 1/x^2$ и решаем уравнение $y'(x) = 1 - 1/x^2 = 0$. Его корни $\{-1, 1\}$ — критические точки функции. Находим интервалы знакопостоянства производной. Имеем $y'(x) > 0$ на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$; $y'(x) < 0$ на промежутках $(-1, 0)$ и $(0, 1)$. Следовательно функция $y(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$, убывает на промежутках $[-1, 0)$ и $(0, 1]$. Так как производная меняет знак в критических точках, то каждая из них является точкой экстремума, а именно точка $x = -1$ — точка локального максимума, а точка $x = 1$ — локального минимума. Вычисляем экстремумы: $y(-1) = -2$ — локальный максимум, $y(1) = 2$ — локальный минимум.

10. Находим вторую производную $y''(x) = 2/x^3$. На промежутке $(-\infty, 0)$ она отрицательна, а на промежутке $(0, +\infty)$ — положительна. Отсюда следует, что функция $y(x)$ имеет выпуклость вниз на промежутке $(-\infty, 0)$ и выпуклость вверх на промежутке $(0, +\infty)$.

График функции имеет следующий вид:



Задание 3.1. Провести полное исследование функции и построить график.

Вариант 1

a. $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;

b. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$;

Вариант 2

a. $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;

b. $y = x^3 e^{-x}$;

Вариант 3

a. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$;

b. $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$;

Вариант 4

a. $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$;

b. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{2}$;

Вариант 5

a. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

b. $f(x) = \dfrac{1}{4x} + x^2$;

Вариант 6

a. $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$;

b. $f(x) = x^2 e^{-x}$;

Вариант 7

a. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$;

b. $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sqrt[3]{(x+1)^2}$;

Вариант 8

a. $f(x) = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$;

b. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

Вариант 9

a. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2 x}$;

b. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;

Вариант 10

a. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$;

b. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} - x + 1$;

Вариант 11

a. $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$;

b. $f(x) = \dfrac{4x^3 - 1}{4x}$;

Вариант 12

a. $f(x) = \dfrac{1-2x}{(1-x)^2}$;

b. $f(x) = 2\operatorname{arctg} x - x$;

Вариант 13

a. $f(x) = -x^3 e^x$;

b. $f(x) = \dfrac{x^2}{1-2x}$;

Вариант 14

a. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

b. $f(x) = \dfrac{x^4}{(1-x)^3}$;

Вариант 15

a. $f(x) = -\dfrac{x^3}{2(1-x)^2}$;

b. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2} - 2x}{4}$;

Вариант 16

a. $f(x) = -(x^3 e^{-x} + 1)$;

b. $f(x) = \dfrac{x^4}{4(x+1)^3}$;

Вариант 17

a. $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x-1)}$;

b. $f(x) = -x^2 e^{-x}$;

Вариант 18

a. $f(x) = \dfrac{x^2}{4-2x}$;

b. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} - x - 1$;

Вариант 19

a. $f(x) = \sqrt[3]{(4-x)(x+2)^2}$;

b. $f(x) = -2xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

Вариант 20

a. $f(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{1+x^2}}$;

b. $f(x) = \sqrt[3]{x^2-2x+1} - x - 1$;

Вариант 21

a. $f(x) = -1 - x^2e^{-x}$;

b. $f(x) = -\dfrac{x^4}{4(1+x)^3}$;

Вариант 22

a. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x(x-2)}}$;

b. $f(x) = \dfrac{x^3+5x^2+14x+7}{2(x+1)^2}$;

Вариант 23

a. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$;

b. $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2}$;

Вариант 24

a. $f(x) = \sqrt[3]{6x^2-x^3}$;

b. $f(x) = \dfrac{1-2x}{(1-x)^2}$;

Вариант 25

a. $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$;

b. $f(x) = \operatorname{arctg} x + x$;

Вариант 26

a. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

b. $f(x) = \dfrac{x^2}{4-2x}$;

Вариант 27

a. $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;

b. $f(x) = xe^{-x}$;

Вариант 28

a. $f(x) = -\dfrac{x^3}{2(1-x)^2}$;

b. $f(x) = e^{-x^2}$;

Вариант 29

a. $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;

b. $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$;

Вариант 30

a. $f(x) = x^2e^{-x}$;

b. $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.

Учебное издание

Войтицкий В. И., Коваленко А. И.

Производная и её применения

Учебно-методическое пособие для студентов

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать ________ г.
Формат 60x84/16. Усл. п. л. 2, 09.
Тираж: печать по требованию. Заказ № ____.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая.

Издательский дом ФГАОУ ВО "КФУ имени В. И. Вернадского".
295051, Республика Крым, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7,
тел.: +7 978 823 14 29, e-mail: print@cfuv.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ФГАОУ ВО "КФУ имени В. И. Вернадского".
295051, Республика Крым, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7,
тел.: +7 978 823 14 29, e-mail: print@cfuv.ru