

М.И. Белов  
С.В. Сорокин

# ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Учебное пособие

Издание второе, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов  
Российской Федерации по агроинженерному образованию  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению «Агроинженерия»

Москва  
РИОР  
ИНФРА-М

УДК 621.01(075.8)  
ББК 22.21я73  
Б43

А в т о р ы:

*Белов М. И.* — д-р техн. наук, профессор. Является автором трех учебных пособий с грифом УМО, более 60 статей в научных рецензируемых журналах, 12 изобретений и полезных моделей, а также разработчиком сайта с курсами по теоретической механике и теории механизмов и машин;

*Сорокин С.В.* — канд. техн. наук, доцент. Является автором 80 печатных работ, в том числе учебного пособия, а также автором 10 изобретений и полезных моделей и разработчиком курса по теории механизмов и машин.

Н а у ч н ы й к о н с у л ь т а н т:

*Ерохин М. Н.* — академик РАН, д-р техн. наук, профессор.

Р е ц е н з е н т ы:

*Воробьев Е.И.* — д-р техн. наук, профессор кафедры технической механики ФГОУ ВПО «Российский государственный аграрный заочный университет»;

*Мачнев В.А.* — д-р техн. наук, профессор кафедры основ конструирования механизмов машин ФГОУ ВПО «Пензенская ГСХА».

**Белов М.И., Сорокин С.В.**

**Б43**

Теория механизмов и машин: учеб пособие / М.И. Белов, С.В. Сорокин. – 2-е изд. – М.: РИОР: ИНФРА-М, 2020. – 322 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – DOI: <https://doi.org/10.12737/1742-5>

ISBN 978-5-369-01742-5 (РИОР)

ISBN 978-5-16-013598-5 (ИНФРА-М, print)

ISBN 978-5-16-102923-7 (ИНФРА-М, online)

Учебное пособие содержит основные положения теории механизмов и машин, включая главу о манипуляторах роботов и тесты с заданиями по каждой главе.

Предназначено студентам, обучающимся по направлению «Агроинженерия». Может быть использовано при изучении теории механизмов и машин в вузах технического профиля.

УДК 621.01(075.8)  
ББК 22.21я73

ISBN 978-5-369-01742-5 (РИОР)  
ISBN 978-5-16-013598-5 (ИНФРА-М, print)  
ISBN 978-5-16-102923-7 (ИНФРА-М, online)

© Белов М.И.,  
Сорокин С.В.

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие.....</b>	<b>8</b>
<b>1. Основные понятия о механизмах.....</b>	<b>9</b>
1.1. Назначение механизма.....	9
1.2. Основные определения.....	9
1.2.1. Звенья и элементы.....	9
1.2.2. Кинематические пары и классификация пар.....	11
1.2.3. Кинематическая цепь и механизм.....	16
1.2.4. Динамические элементы и динамические пары.....	17
1.3. Классификация и обзор механизмов.....	19
1.3.1. Признаки классификации.....	19
1.3.2. Плоские рычажные механизмы.....	20
1.3.3. Плоские механизмы с высшими парами.....	23
1.3.4. Механизмы для передачи вращений.....	32
1.4. Примеры решения задач.....	36
<b>2. Структура механизмов.....</b>	<b>38</b>
2.1. Анализ движений звеньев. Формулы Чебышева и Сомова – Малышева.....	38
2.2. Избыточные связи и локальные подвижности.....	41
2.3. Число степеней свободы механизмов с контурными избыточными связями.....	45
2.4. Число степеней свободы механизма с многоконтурной цепью....	50
2.5. Аналитическое определение числа степеней свободы.....	52
2.6. Простейшие группы самоустанавливающегося механизма.....	56
2.7. Структурные группы Ассура.....	59
2.8. Алгоритм структурного анализа.....	60
2.9. Примеры структурного анализа.....	61
<b>3. Кинематика рычажных механизмов.....</b>	<b>70</b>
3.1. План положений и кинематические диаграммы.....	70
3.2. Аналитические методы исследования.....	74

3.3. Графоаналитические методы исследования.....	78
3.3.1. План скоростей и теорема подобия.....	78
3.3.2. План ускорений и теорема подобия.....	85
3.4. Передаточное отношение карданного механизма.....	90
<b>4. Расчет зубчатых механизмов.....</b>	<b>92</b>
4.1. Основная теорема зацепления.....	92
4.2. Эвольвента и параметры эвольвентного зацепления.....	95
4.2.1. Определения эвольвенты и эвольвентного зацепления.....	95
4.2.2. Основная и делительная окружности, профильный угол.....	95
4.2.3. Начальная окружность, линия зацепления, передаточное отношение.....	97
4.2.4. Шаг зубьев, толщина зуба, ширина впадины, окружности впадин и вершин.....	100
4.2.5. Модуль зубьев.....	101
4.2.6. Реечное станочное зацепление и изготовление колеса методом обкатки.....	103
4.2.7. Рабочий участок профиля зуба.....	105
4.3. Расчет эвольвентного зацепления с нулевыми колесами.....	106
4.3.1. Условие зацепления без бокового зазора.....	106
4.3.2. Коэффициент перекрытия.....	108
4.3.3. Коэффициент скольжения.....	109
4.3.4. Коэффициент удельного давления.....	109
4.3.5. Алгоритм расчета параметров нулевой передачи.....	109
4.4. Передаточное отношение.....	112
4.4.1. Число степеней свободы.....	112
4.4.2. Ступень и передаточное отношение ступени.....	113
4.4.3. Передаточное отношение многократного механизма.....	114
4.4.4. Графический способ определения передаточного отношения многократного механизма.....	116
4.4.5. Передаточное отношение планетарного механизма.....	119
4.4.6. Графический способ определения передаточного отношения планетарного механизма.....	123
4.5. Структурный анализ зубчатого механизма.....	124

4.6. Условия корректного проектирования.....	125
4.6.1. Условия зацепления без подреза зубьев.....	126
4.6.2. Условия соосности.....	126
4.6.3. Условия соседства сателлитов.....	126
4.6.4. Условия сборки.....	128
4.6.5. Условия вращения сателлитов.....	129
4.7. Кинематика автомобильного дифференциала.....	130
<b>5. Расчет кулачковых механизмов.....</b>	<b>134</b>
5.1. Структурный анализ плоских кулачковых механизмов.....	134
5.2. Фазы движения толкателя.....	136
5.3. Кинематика ползунного толкателя.....	137
5.4. Условие движения ползунного толкателя.....	141
5.5. Расчет профиля кулачка.....	144
5.5.1. Центральный кулачковый механизм.....	144
5.5.2. Кулачковый механизм со смещенным толкателем.....	147
5.6. Силовой расчет.....	150
5.7. Алгоритм расчета кулачкового механизма.....	153
5.8. Пример расчета кулачкового механизма.....	155
<b>6. Силовой расчет рычажных механизмов.....</b>	<b>159</b>
6.1. Основные положения.....	159
6.2. Силы инерции и принцип Даламбера.....	159
6.3. Реакции в кинематических парах.....	162
6.4. Статическая определимость кинематических цепей.....	163
6.5. Определение реакций в кинематических парах.....	164
6.6. Определение уравновешивающей силы.....	168
<b>7. Движение плоского механизма.....</b>	<b>171</b>
7.1. Основные положения и обозначения.....	171
7.2. Уравнение движения механизма.....	172
7.3. Решение уравнения движения.....	174
7.4. Установившееся движение.....	174
7.4.1. Коэффициент неравномерности движения механизма.....	176

7.4.2. Назначение маховика и определение его момента инерции.....	176
7.4.3. Расчет маховика по диаграмме Виттенбауэра.....	183
<b>8. Уравновешивание и балансировка.....</b>	<b>188</b>
8.1. Основные определения и задача уравновешивания.....	188
8.2. Уравновешивание вращающегося звена.....	191
8.2.1. Основные обозначения.....	191
8.2.2. Условия уравновешивания.....	191
8.2.3. Расчет противовесов аналитическим способом.....	194
8.2.4. Расчет противовесов графоаналитическим способом.....	196
8.3. Балансировка.....	200
<b>9. Манипуляторы и промышленные роботы.....</b>	<b>206</b>
9.1. Основные определения.....	206
9.2. Схема манипулятора и промышленного робота.....	208
9.3. Схемы манипуляторов сельскохозяйственных роботов.....	212
9.4. Число степеней свободы и структура манипулятора.....	218
9.5. Кинематика манипуляторов.....	224
9.5.1. Прямая задача.....	224
9.5.2. Закон движения, скорость и ускорение схвата.....	230
9.5.3. Обратная задача и элементы динамики манипулятора.....	235
<b>10. Трение в кинематических парах.....</b>	<b>242</b>
10.1. Виды трения.....	242
10.2. Трение в поступательной паре.....	243
10.3. Трение во вращательной паре.....	245
10.4. Трение в высшей паре.....	247
<b>11. Ременная передача.....</b>	<b>249</b>
11.1. Основные определения и обозначения.....	249
11.2. Кинематика ременной передачи.....	250
11.3. Динамика шкива и ремня.....	252
11.4. Алгоритм расчета.....	256
11.5. Анализ тяговых характеристик.....	258
<b>12. Фрикционная передача.....</b>	<b>261</b>

12.1. Основные определения и обозначения.....	261
12.2. Кинематика фрикционной передачи.....	262
12.3. Динамика колес.....	253
12.4. Алгоритм расчета.....	264
12.5. Анализ характеристик передачи.....	266
<b>13. Мальтийский механизм.....</b>	<b>269</b>
13.1. Структурный анализ плоских мальтийских механизмов.....	270
13.2. Фазы движения мальтийского креста.....	271
13.3. Кинематика мальтийского креста.....	274
13.3.1. Крест с радиальными пазами.....	274
13.3.2. Крест со смещенными пазами.....	276
13.4. Динамика мальтийского креста.....	279
13.5. Алгоритм расчета мальтийского механизма.....	280
13.6. Пример расчета.....	283
<b>14. Тесты.....</b>	<b>288</b>
14.1. Тест по главе 1.....	288
14.2. Тест по главе 2.....	290
14.3. Тест по главе 3.....	294
14.4. Тест по главе 4.....	297
14.5. Тест по главе 5.....	303
14.6. Тест по главе 6.....	307
14.7. Тест по главе 7.....	310
14.8. Тест по главе 8.....	312
14.9. Тест по главе 9.....	314
14.10. Тест по главе 10.....	316
<b>Библиографический список.....</b>	<b>320</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебное пособие по теории механизмов и машин предназначено для студентов (бакалавров), специализирующихся на разработке, эксплуатации и техническом обслуживании машин и оборудования АПК. Оно отличается компактностью и вместе с тем содержит все основные положения теории механизмов и машин, предусмотренные Государственным образовательным стандартом по направлению «Агроинженерия», и дополнительные важные темы. Предложены новые методы аналитического расчета кулачковых и мальтийских механизмов, ременных и фрикционных передач. В пособие включены алгоритмы аналитического расчета механизмов, актуальные в настоящее время при широком использовании вычислительных программ. Это делает учебное пособие полезным для использования студентами технических вузов с другим профилем подготовки.

Во втором издании исправлены найденные неточности, переработаны разделы по структуре механизмов, кулачковым механизмам, уравновешиванию роторов, добавлены разделы по мальтийским механизмам, ременным и фрикционным передачам. Электронные версии лекций, лабораторных работ, практических занятий, курсовых работ размещены на сайте.

Главы 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13 подготовлены М.И. Беловым с учетом предложений и замечаний С.В. Сорокина, главы 2, 6, 8, 10 и приложение подготовлены С.В. Сорокиным и доработаны М.И. Беловым с С.В. Сорокиным. Глава 14 разработана совместно.



# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О МЕХАНИЗМАХ

## 1.1. Назначение механизма

*Механизм предназначен для передачи механической энергии между образующими его телами путем преобразования движений тел.*

С понятием механизма тесно связано понятие *передачи*, под которой понимается устройство для передачи энергии от двигателя на расстояние.

Механизм – неотъемлемая часть машины и машинного агрегата в цепи устройств, соединяющих источник энергии с исполнительным рабочим органом, являющимся потребителем энергии.

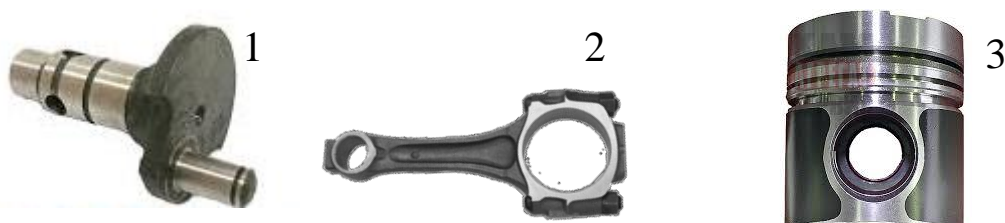
*Машина* – техническое устройство, выполняющее преобразование энергии, материалов и информации с целью повышения качества и производительности труда человека. Различают энергетические, рабочие и информационно-управляющие машины. Особые, энергосиловые машины – это двигатель и генератор. Двигатель предназначен для преобразования немеханической энергии, например энергии горючей смеси, в механическую работу. Генератор преобразует механическую энергию в энергию другого вида, например в электрическую.

*Машинным агрегатом* называется техническая система, состоящая из одной или нескольких машин, соединенных последовательно или параллельно. В машинных агрегатах агропромышленного комплекса двигатель рассматривается как источник механической энергии.

## 1.2. Основные определения

### 1.2.1. Звенья и элементы

*Звеном механизма называется твердое тело, предназначенное для преобразования движения механизма (рис. 1.1).*



**Рис. 1.1. Звенья механизма: кривошип 1; шатун 2; ползун 3**

Гибкие тела (ремни, тросы, цепи) в состоянии растяжения, упругие тела (пружины), сжатые жидкость и воздух в шлангах не являются звеньями и служат динамическими элементами механизма (рис. 1.2).



**Рис. 1.2. Динамические элементы механизма: ремень 1, цепь 2, пружина 3, жидкость в шланге 4**

*Звено механизма, принимаемое за неподвижное, называется стойкой. Стойка – необходимое звено механизма. Под движением механизма понимают движение его подвижных звеньев относительно стойки.*

*Из подвижных звеньев различают входные и выходные звенья.*

*Входным называется звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев.*

*Выходным называется звено, совершающее движение, для которого предназначен механизм.*

Звенья, не являющиеся входными и выходными, называются соединительными. Обычно в механизме имеется одно входное и одно выходное звено.

Число независимых обобщенных координат, величины которых однозначно определяют положение механизма относительно стойки, называется числом степеней свободы механизма.

Звенья, которым приписываются независимые обобщенные координаты, называются начальными.

В наиболее изученных механизмах с одной степенью свободы и, следовательно, с одной обобщенной координатой имеется одно начальное звено.

### 1.2.2. Кинематические пары и классификация пар

Первым этапом образования механизма является соединение двух звеньев.

*Кинематической парой называется соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающих относительные движения.*

Кинематическую пару образуют два звена.

Одно звено кинематической пары служит геометрической связью для другого звена.

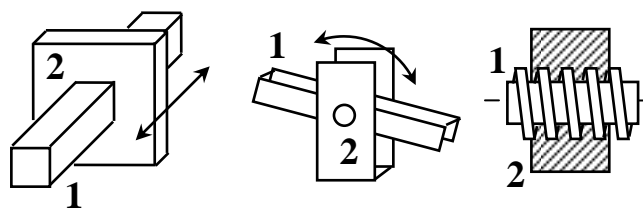
Геометрическая связь накладывает ограничения на относительное движение звена, независимо от действующих на звено сил и закона движения звена. Тем самым движущееся звено пары передает движение другому звену пары, независимо от действующих на него сил.

Известно, что положение свободного твердого тела в пространстве однозначно определяется шестью независимыми параметрами (независимыми обобщенными координатами). Звено, будь оно свободным, имело бы шесть степеней свободы, то есть шесть независимых простейших движений: три поступательных вдоль трех взаимно перпендикулярных осей и три вращательных вокруг этих осей.

На движение звена пары накладывает ограничение другое звено пары, выступающее в роли механической связи. В зависимости от формы поверхностей контакта двух звеньев механическая связь эквивалентна одной, двум, трем, четырем или пяти аналитическим (геометрическим) связям. Каждая аналитическая связь или просто связь описывается одним уравнением, в которое входят независимые обобщенные координаты звена. Отдельно следует рассматривать стойку, на которую наложено шесть связей. Стойка имеет ноль степеней свободы.

**Кинематические пары группируются по числу степеней свободы в относительном движении звеньев или по классу, равному числу аналитических связей, наложенных одним звеном на относительные движения другого звена пары.** Простейшими являются кинематические пары пятого класса, в которых одно звено пары накладывает на другое звено пять связей, то есть одно звено имеет одну степень свободы в движении относительно другого звена. В таких парах звено

может совершать поступательное, вращательное или винтовое движение относительно другого звена (рис. 1.3).

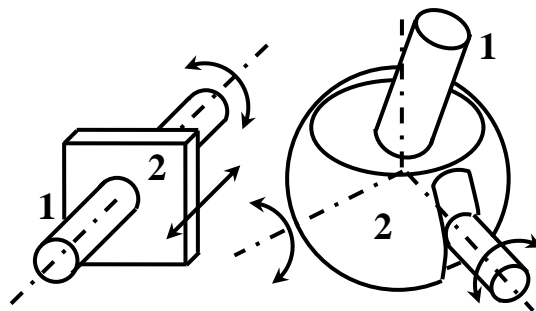


**Рис. 1.3. Поступательная, вращательная и винтовая пара из звеньев 1 и 2**

Кинематическая пара, образованная звеньями, совершающими относительное вращательное, поступательное вдоль оси или винтовое движение, называется одноподвижной вращательной, поступательной или винтовой парой соответственно.

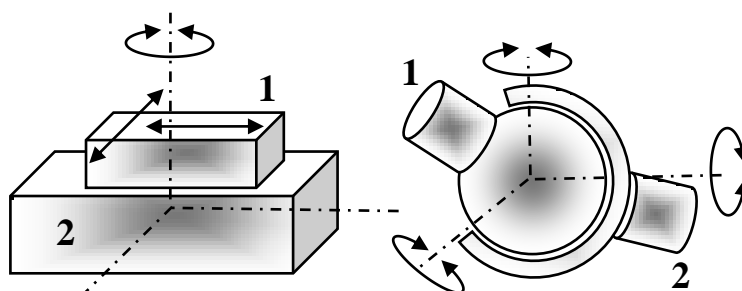
Кинематическая пара четвертого класса образована двумя звеньями, каждое из которых имеет две степени свободы в движении относительно другого звена. Относительное движение звена состоит из поступательного вдоль оси и вращательного вокруг оси другого звена или из двух вращательных движений вокруг осей другого звена (рис. 1.4).

Кинематическая пара третьего класса образована двумя звеньями, каждое из которых имеет три степени свободы в движении относительно другого звена. Плоскостная пара образована двумя звеньями, соприкасающимися своими плоскостями. Она допускает относительные поступательные движения одного звена вдоль двух взаимно перпендикулярных осей другого звена, а также вращательное движение вокруг оси, перпендикулярной плоскости (рис. 1.5, слева). Сферическая пара допускает вращения одного звена вокруг трех перпендикулярных осей другого или препятствует трем поступательным движениям звена (рис. 1.5, справа).



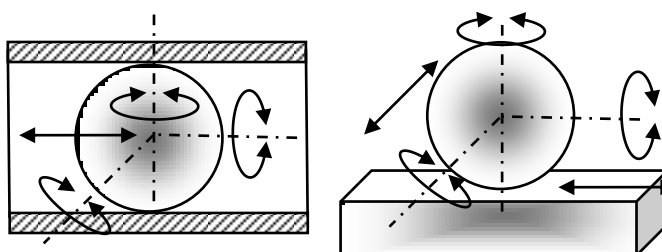
**Рис. 1.4. Кинематические пары четвертого класса из звеньев 1 и 2**

Кинематические пары второго и первого классов в механизмах встречаются редко. Шар и труба, в которой шар установлен без зазора, образуют пару второго класса (рис. 1.6). Одно звено ограничивает поступательные движения другого звена вдоль двух взаимно перпендикулярных и перпендикулярных поверхности трубы осей.



**Рис. 1.5. Плоскостная и сферическая пара третьего класса из звеньев 1 и 2**

Шар и плоскость, на которой установлен шар, образуют пару первого класса. Одно звено ограничивает поступательное движение другого звена вдоль оси, перпендикулярной плоскости.



**Рис. 1.6. Кинематическая пара второго (слева) и первого (справа) класса**

Разделение кинематических пар на группы по классам необходимо для расчета числа степеней свободы механизма.

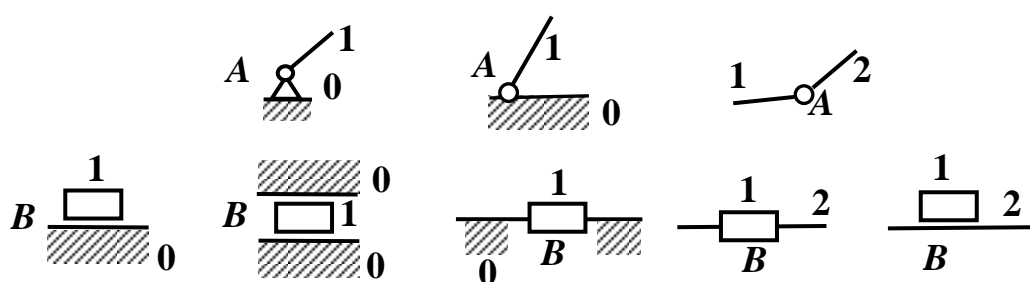
Звенья кинематической пары соприкасаются по поверхности (рис. 1.3 – 1.5), по линии (рис. 1.6, слева) или в точке (рис. 1.6, справа).

*Кинематическая пара, в которой соприкосновение звеньев осуществляется по поверхности, называется низшей, по незамкнутой линии или в точке – высшей.*

Наряду с классификацией по классу **кинематические пары разделяются на низшие и высшие.**

Низшие пары обладают большим запасом прочности и высокой надежностью, так как сила взаимодействия между звеньями распределяется по поверхности. В высших парах ввиду деформаций контакт осуществляется по узкому участку поверхности или по малому пятну поверхности, и контактные напряжения велики.

На схемах звенья обозначаются отрезком прямой или плоской фигурой с указанием номера арабской цифрой, к стойке добавляется штриховка. Обозначения кинематических пар регламентировано государственными стандартами, пара идентифицируется заглавной латинской буквой. Одноподвижные пары нашли наибольшее распространение (рис. 1.7).



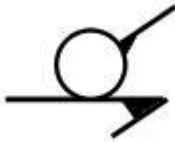
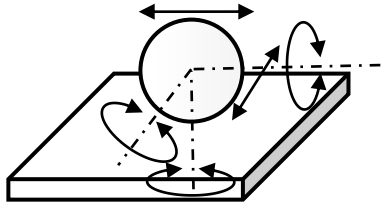

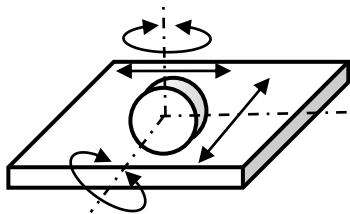

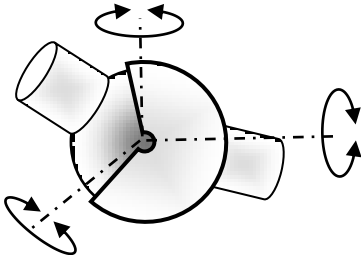

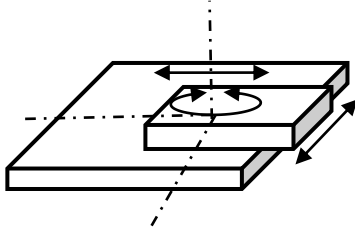
**Рис. 1.7. Вращательная пара A (вверху) и поступательная пара B (внизу), образованная стойкой 0 и звеном 1 или подвижными звеньями 1, 2**

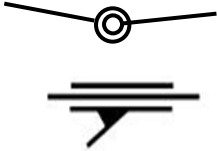


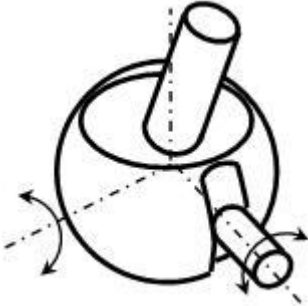
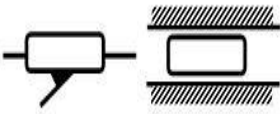
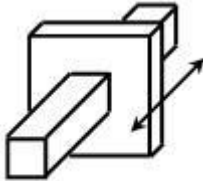

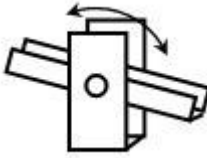

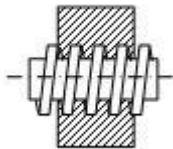
Одноподвижная вращательная пара называется цилиндрическим шарниром. Сферическая пара называется шаровым шарниром.

Типовые кинематические пары пяти классов приведены в таблице 1.1. Прямыми стрелками показаны допускаемые направления век-

торов скоростей точек звена при поступательном движении относительно другого звена пары. Круговыми стрелками показаны допускаемые направления вращения звена вокруг оси, связанной с другим звеном пары. Класс  $k$  кинематической пары и число  $n$  степеней свободы пары связаны равенством  $k + n = 6$ .

### 1.1. Характеристики кинематических пар

Класс	Число степеней свободы	Наименование пары	Условное обозначение	Пояснение
I	5	Шар – плоскость		
II	4	Цилиндр – плоскость		
III	3	Шаровой шарнир		
III	3	Плоскостная пара		

Класс	Число степеней свободы	Наименование пары	Условное обозначение	Пояснение
IV	2	Цилиндрическая пара		
IV	2	Сферическая с пальцем		
V	1	Поступательная пара		
V	1	Вращательная пара		
V	1	Винтовая пара		

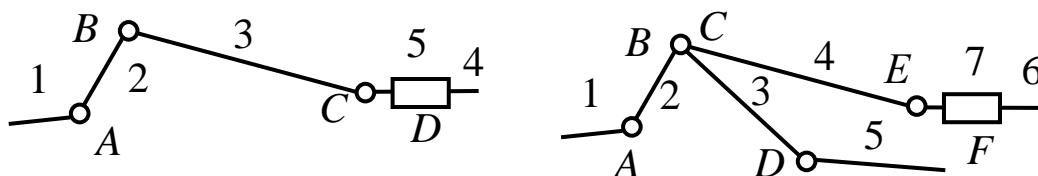
### 1.2.3. Кинематическая цепь и механизм

*Кинематическая цепь – это система звеньев, образующих между собой кинематические пары.*

Кинематические цепи делятся на простые и сложные. Простая кинематическая цепь состоит из звеньев, в которых каждое звено со-



единено с одним или двумя звеньями (рис. 1.8). Сложная кинематическая цепь содержит звенья, соединенные с тремя звеньями и более. Как показано на рисунке 1.8 (справа), звено 3 образует кинематическую пару  $B$  со звеном 2, пару  $C$  со звеном 4 и пару  $D$  со звеном 5.

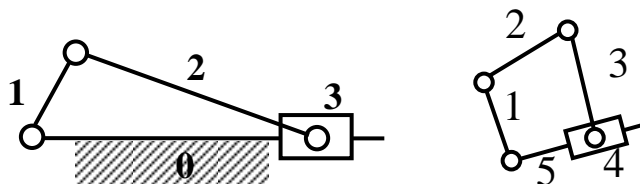


**Рис. 1.8.** Простая (слева) и сложная (справа) открытая кинематическая цепь

Замкнутый контур – это совокупность звеньев, каждое из которых соединено с двумя звеньями и более (рис. 1.9).

Кинематическая

цепь называется открытой или незамкнутой, если звенья, входящие в нее, не образуют замкнутых контуров. Кинематическая цепь называется замкнутой, если она содержит звенья, образующие замкнутый контур.



**Рис. 1.9.** Замкнутые контуры

Кинематическая цепь, содержащая стойку, называется механизмом.

*Кинематическая цепь, содержащая стойку, называется механизмом.*

#### 1.2.4. Динамические элементы и динамические пары

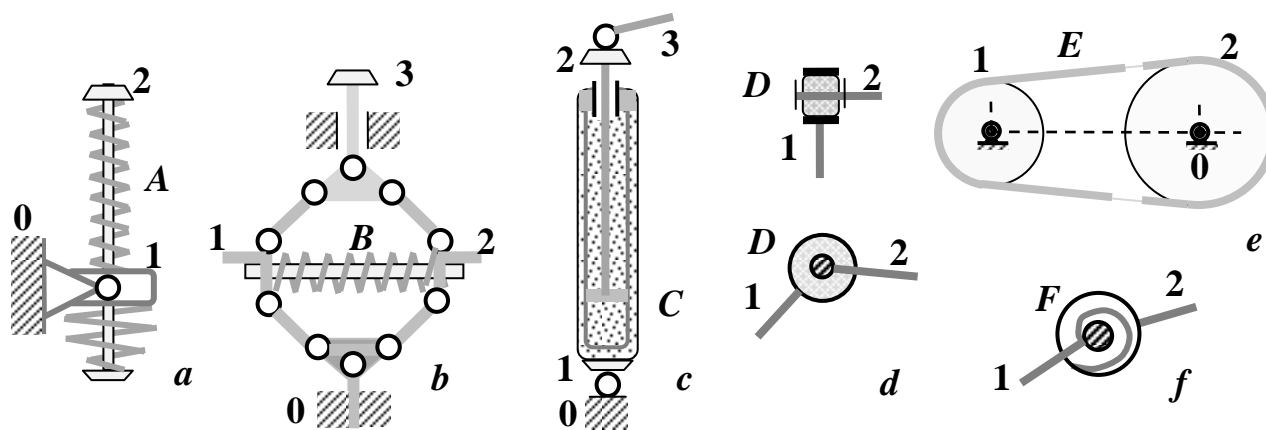
Механизм состоит из звеньев. Звено кинематической пары ограничивает движение другого звена пары, независимо от его закона движения.

В отдельных случаях в состав механизма наряду со звеньями входят нетвердые или динамические элементы, соединяющие два

звена и предназначенные для коррекции или передачи движений между этими звеньями. Динамическими элементами служат упругие тела, а также жидкость и газ, заключенные в шлангах.

*Соединение пары звеньев динамическим элементом образует динамическую пару.*

Динамическим элементом служит пружина между звеньями 1, 2, образующими кинематическую поступательную пару и динамическую пару в продольном амортизаторе (рис. 1.10, *a*), пружина в поперечном амортизаторе (рис. 1.10, *b*), масло в гидроцилиндре 1, образующем поступательную кинематическую пару и динамическую пару с поршнем 2 (рис. 1.10, *c*), упругое кольцо между втулкой звена 1 и шипом звена 2, образующими кинематическую вращательную пару и динамическую пару (рис. 1.10, *d*), ремень в ременной передаче, который соединяет два шкива, образующие кинематические вращательные пары со стойкой и динамическую пару между собой (рис. 1.10, *e*), пружина в механизме баланса часов (рис. 1.10, *f*).



**Рис. 1.10.** Образованные звеньями 1, 2 динамические пары: пружинные *A*, *B*, *F* (*a*, *b*, *f*), гидравлическая *C* (*c*), упругая *D* (*d*), ременная *E* (*e*)

В отличие от кинематической пары *ограничения*, накладываемые динамической парой на относительные движения звеньев пары, зависят от сил, действующих на звенья.

Добавление в механизм нетвердых элементов и динамических пар не изменяет чисел степеней свободы кинематических пар и механизма в целом. Динамические пары вносят существенные коррективы в методы кинематического и динамического расчета механизма.

### 1.3. Классификация и обзор механизмов

#### 1.3.1. Признаки классификации

*Классификацией механизмов называется разделение их на группы и классы по общности заданных признаков.*

Одним из признаков, характеризующих механизм, служит семейство механизма, или число общих связей, наложенных на каждое звено [1].

Пространственные механизмы, кинематические пары которых допускают шесть простейших движений в совокупности движений звеньев, не имеют общих связей.

Рассмотрим механизм, звенья которого соединяются с помощью одноподвижных вращательных и поступательных пар (рис. 1.9, слева). Связи, наложенные на каждое подвижное звено, допускают только плоскопараллельное движение звена, для определенности параллельно неподвижной плоскости  $Oxy$ . Следовательно, независимо от действующих сил, каждое звено не может совершать три «общие» простейшие движения, а именно: движение вдоль оси  $Oz$ , поворот вокруг оси  $Ox$ , поворот вокруг оси  $Oy$ . Такое движение определяется тремя независимыми обобщенными координатами: координатами полюса по осям  $Ox$ ,  $Oy$  и углом поворота вокруг оси, проходящей через полюс перпендикулярно плоскости  $Oxy$ . Такой механизм относится к третьему семейству.

Сферическим называется движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Если все звенья механизма имеют общую неподвижную точку, то механизм относится к третьему семейству, так как

связями не допускаются три «общие» простейшие движения каждого звена, а именно: движения вдоль трех взаимно перпендикулярных осей.

Плоскопараллельное движение можно рассматривать как частный случай сферического движения тела, если считать, что общая неподвижная точка удалена в бесконечность.

Плоский механизм с поступательными парами относится к четвертому семейству, так как наряду с ограничениями плоскопараллельного движения связи не допускают вращения каждого звена вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения.

Практическое воплощение нашла структурная классификация, основанная на родственных методах кинематического и силового расчета. В соответствии с ней *все механизмы делятся на четыре основные группы: пространственные и плоские механизмы с низшими парами, пространственные и плоские механизмы с высшей парой.*

*Механизмы с низшими парами называются рычажными.*

*Рычажные механизмы, содержащие только вращательные пары, называются шарнирными.*

### **1.3.2. Плоские рычажные механизмы**

Плоские рычажные механизмы являются механизмами третьего семейства. Их звенья образуют кинематические пары пятого и четвертого класса и совершают плоскопараллельные движения относительно некоторой неподвижной плоскости.

*Звено в виде изогнутого шипа, образующее вращательную пару со стойкой и совершающее полный оборот вращения вокруг неподвижной оси, называется кривошипом.*

*Звено, образующее вращательную пару со стойкой и совершающее неполный оборот вращения вокруг неподвижной оси, называется коромыслом.*

*Звено, образующее поступательную пару со стойкой, называется ползуном.*

Звено, не образующее кинематическую пару со стойкой, называется шатуном.

Подвижное звено, не образующее кинематическую пару со стойкой и образующее поступательную пару с другим подвижным звеном, называется камнем.

Звено, образующее вращательную или поступательную пару со стойкой и поступательную пару с камнем, называется кулисой.

Структурной схемой механизма называется графическое изображение механизма с помощью принятых условных обозначений звеньев и пар без указания размеров.

Простейшим из плоских рычажных механизмов является двухзвенный механизм (рис. 1.11). Он состоит из стойки 0 и подвижного звена 1, образующих одноподвижную пару A. Механизм с вращательной парой применяется в турбинах, электродвигателях, электрогенераторах, центробежных насосах, вентиляторах. Двухзвенный механизм с поступательной парой встречается в паровом насосе и поршневых машинах.

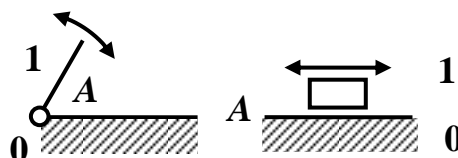


Рис. 1.11. Механизм с вращательной (слева) и поступательной (справа) парой

Широкое распространение в приводах машин нашли четырехзвенные плоские рычажные механизмы. На рисунке 1.12 показаны схемы кривошипно-ползунного и кривошипно-коромыслового механизма.

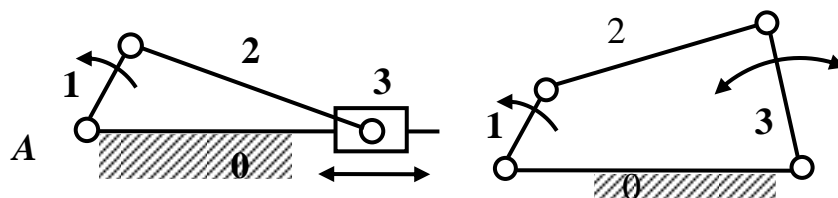


Рис. 1.12. Кривошипно-ползунный (слева) и кривошипно-коромысловый (справа) механизм

Кривошипно-ползунный механизм предназначен для преобразования движения кривошипа 1 в поступательное движение ползуна 3 через шатун 2, служащий соединительным звеном. Применяется в поршневых двигателях, компрессо-

рах, насосах, прессах, пресс-подборщиках и других устройствах. Кривошипно-коромысловый механизм предназначен для преобразования движения кривошипа 1 во вращательное движение коромысла 3. Встречается в приводе рабочих органов очистки зерноуборочных комбайнов, сеноворошилок, тестомесильных машин, подъемных кранов.

К четырехзвенным рычажным механизмам с одной поступательной парой *A* относятся кулисные механизмы (рис. 1.13).

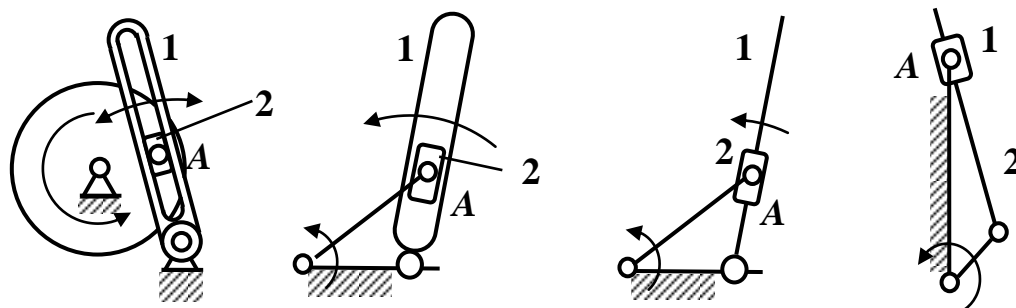


Рис. 1.13. Схемы кулисных механизмов с кулисой 1 и камнем 2

Одним из звеньев такого механизма является кулиса, образующая вращательную пару со стойкой и поступательную пару с другим подвижным звеном (каменем). Кулиса выполняется в виде вращающегося тела с пазом, вращающегося стержня, качающейся втулки; камень — в виде перемещающейся в пазу кулисы ползушки, насаженной на стержень кулисы втулки, скользящего в качающейся втулке стержня (рис. 1.13).

Мысленный перенос оси вращения кулисы в бесконечность приводит к синусному механизму, в котором кулиса образует поступательную пару со стойкой (рис. 1.14). Закон поступательного движения кулисы четырехзвенного синусного механизма определяется длиной и угловой скоростью вращения кривошипа.

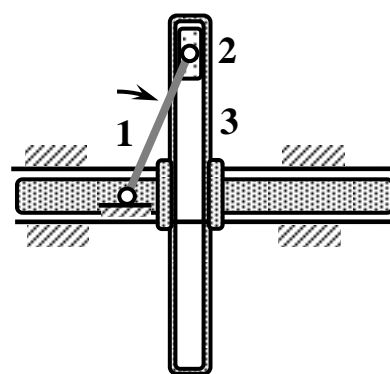


Рис. 1.14. Кривошип 1, камень 2, кулиса 3

Кулисные механизмы используются в поршневых установках, строгальных станках, насосах.

Из четырехзвенных рычажных механизмов отметим механизм И.Кардана, состоящий из двух ползунов 1, 2, соединенных между собой шатуном в виде стержня-линейки 3 (рис. 1.15). На его основе построен механизм эллипсографа: точка шатуна движется по траектории, описываемой уравнением эллипса.

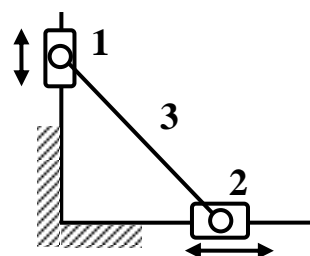


Рис. 1.15. Механизм эллипсографа

Развитием четырехзвенных механизмов служат шестизвенные рычажные механизмы. Шестизвенный рычажный механизм привода грохота картофелеуборочного комбайна состоит из кривошипа 1, шатуна 2, шатуна 3, коромысла 4, коромысла 5 и стойки в виде рамы 0 (рис. 1.16).

Он предназначен для преобразования вращательного движения начального звена (кривошипа) в сложное движение выходного звена 3, жестко связанного с решетом. Эффективный режим отделения клубней картофеля от примесей достигается установкой рациональных геометрических и кинематических параметров начального звена и соединительных звеньев.

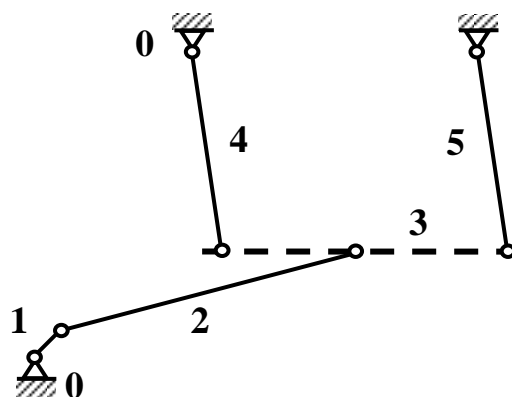


Рис. 1.16. Механизм грохота

### 1.3.3. Плоские механизмы с высшими парами

К механизмам с высшими парами относятся кулачковые, зубчатые и синусные механизмы с высшей парой.

Плоский механизм с высшими парами не является механизмом третьего семейства. Механизмы третьего семейства содержат пары У-го и ІУ-го класса.

Кулачком называется подвижное звено, предназначенное для передачи движения другому звену своим профилем переменной кривизны.

Выходное звено, приходящее в движение от кулачка, называется толкателем.

Механизм, содержащий кулачок и толкатель, называется кулачковым.

Кулачковый механизм представляется наиболее простым техническим решением в тех случаях, когда ведомому звену необходимо обеспечить заданный закон движения и/или заданные кинематические характеристики. Простейший плоский кулачковый механизм состоит из трех звеньев: кулачка, толкателя и стойки (рис. 1.17).

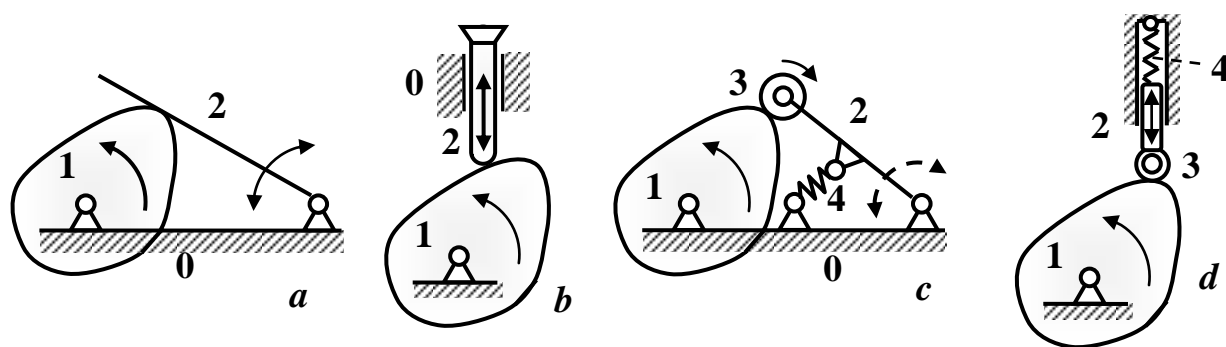


Рис. 1.17. Кулачковый механизм (0 – стойка, 1 – кулачек, 2 – толкатель, 3 – ролик, 4 – пружина)

Кулачок образует вращательную пару со стойкой и высшую пару с толкателем. Кулачок является ведущим звеном, а толкатель – ведомым. Движение кулачка аналогично движению кривошипа. В кулачковых механизмах с коромысловым толкателем (рис. 1.17, a) движение толкателя аналогично движению коромысла, с заостренным толкателем – движению ползуна (рис. 1.17, b).

Для уменьшения потерь энергии, обусловленных трением, к толкателю присоединяется дополнительное звено – ролик 3, вращающийся вокруг оси, связанной с толкателем (рис. 1.17, c, d). Ролик образует с кулачком высшую пару, а с толкателем – вращательную пару.



Работоспособность кинематической пары «кулачок – толкатель» обеспечивается за счет прижима толкателя к кулачку с помощью пружины. Такой способ соединения кулачка и толкателя называется силовым замыканием высшей пары.

На рисунке 1.18 *a* показан кулачковый механизм, в котором движение ролика 3 и, следовательно, толкателя 2 ограничено пазом 4 кулачка 1. Ролик движется по дорожкам паза кулачка. Такой способ соединения кулачка и толкателя называется геометрическим замыканием высшей пары.

Заданный закон движения ведомого звена обеспечивается профилем паза кулачка. Профилирование кулачка, или построение профиля кулачка — одна из основных задач разработки кулачкового механизма.

Кулачковым механизмом с плоским толкателем называется такой механизм, в котором толкатель совершает поступательное движение, и кулачок контактирует с разными точками толкателя. На рисунке 1.18 *b* показан круглый кулачок, выполненный в виде эксцентрика. Толкатель движется поступательно и представляет собой рамку с параллельными направляющими, геометрически ограничивающими его движение относительно кулачка.

Закон движения толкателя зависит от геометрических параметров профиля (поверхности) кулачка. Наибольшее распространение нашли плоские кулачковые механизмы, в которых кулачок совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, а толкатель — поступательное или вращательное движение относительно стойки. Простейшие кулачковые механизмы состоят из кулачка, толкателя, стойки и во многих случаях ролика (рис. 1.18, 1.19).

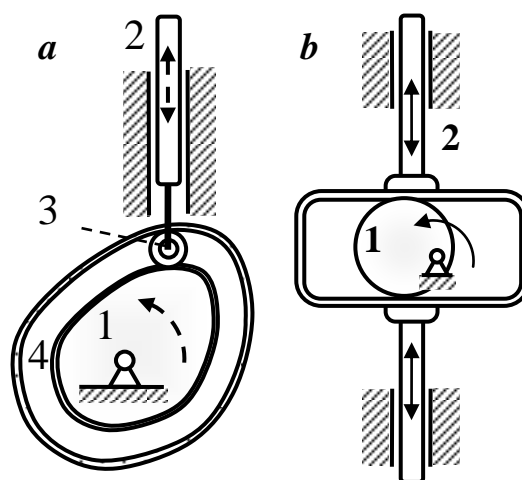


Рис. 1.18. Кулачковые механизмы с геометрическим замыканием высшей пары

Различают кулачковые механизмы с силовым и геометрическим замыканием высшей пары, образуемой кулачком и толкателем.

Силовое замыкание обеспечивается активной силой, прижимающей толкатель к кулачку, например, силой тяжести толкателя или силой упругости пружины.

Геометрическое замыкание обеспечивается двусторонней геометрической связью, которой для толкателя является паз кулачка, а для кулачка – рамка толкателя.

Разновидностью кулачкового механизма с геометрическим замыканием служит двухкулачковый механизм ковочной машины (рис. 1.19). Два кулачка 1 и 2 с замкнутыми профилями установлены на одном валу. Движение ползуну 3 передается через ролики 4, 5, установленные на рамке толкателя. Движение толкателя в одну сторону передается кулачком 1 через ролик 4, в противоположную сторону – кулачком 2 через ролик 5.

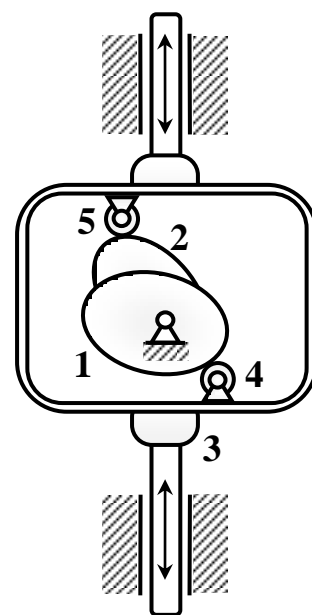


Рис. 1.19. Двухкулачковый механизм

Плоские кулачковые механизмы различаются по виду движений кулачка и толкателя: 1) в механизмах с ползунным толкателем кулачок совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси стойки, а толкатель – возвратно-поступательное движение относительно стойки; 2) в механизмах с коромысловым толкателем кулачок совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, а толкатель – возвратно-вращательное движение относительно стойки; 3) в механизмах с ползунным кулачком и ползунным толкателем кулачок и толкатель совершают возвратно-поступательные движения; 4) в механизмах с ползунным кулачком и коромысловым толкателем кулачок совершает возвратно-поступательное, а толкатель – возвратно-вращательное движения.

Различаются механизмы с остроконечным (рис. 1.17 *b*), роликовым (рис. 1.17 *d*) и тарельчатым или плоским (рис. 1.18 *b*) толкателями.

Механизмы с остроконечным и роликовым толкателями подразделяются на центральные и нецентральные. В центральных механизмах центр вращения кулачка находится на прямой, вдоль которой направлен вектор скорости острия толкателя, в нецентральных механизмах центр вращения кулачка установлен со смещением от прямой, вдоль которой направлен вектор скорости острия толкателя.

Наряду с традиционными кулачковыми механизмами, в которых кулачок и толкатель являются подвижными звеньями, существуют кулачковые механизмы с неподвижным толкателем. В таких механизмах кулачок совершает плоскопараллельное движение, обусловленное геометрическим профилем толкателя. Кулачковые механизмы с неподвижным толкателем 0, рамка 2 которого в виде правильного треугольника (рис. 1.20 *a*) или шестиугольника (рис. 1.20 *b*) служит двусторонней геометрической связью для кулачка 1 с двухсегментным и криволинейным пятиугольным профилем соответственно. При скольжении концов кулачка в плоскости по границам рамки траекторией центра 3 кулачка является окружность и правильный шестиугольник соответственно.

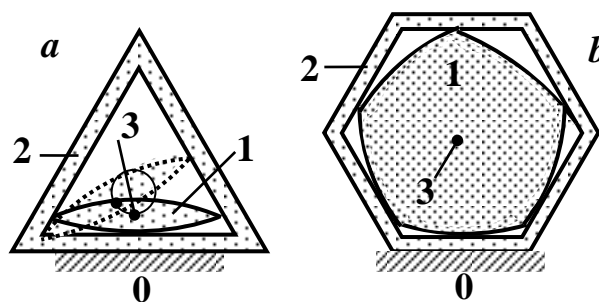


Рис. 1.20. Кулачковый механизм с подвижным центром 3 кулачка 1

Кулачковые механизмы отличаются большим разнообразием. Они применяются в двигателях внутреннего сгорания, приводах рабочих органов и гидростатической трансмиссии ходовой части сельскохозяйственных машин, топливных насосах, швейных машинах.

Модификацией кулачкового механизма является трехзвенный синусный механизм с ведущим толкателем (рис. 1.21).

Модификацией кулачкового механизма является трехзвенный синусный механизм с ведущим толкателем (рис. 1.21).

Модифицированный механизм состоит из стойки 0, кривошипа-толкателя 1 в виде диска с выступающим цилиндрическим шипом (цевкой), кулачка 2 с прямолинейным или криволинейным пазом. кулачок образует с толкателем кинематическую пару II-го класса. Для уменьшения трения в кинематической паре II-го класса цевка выполняется в виде ролика, образующего вращательную пару с толкателем, и высшую пару с кулачком.

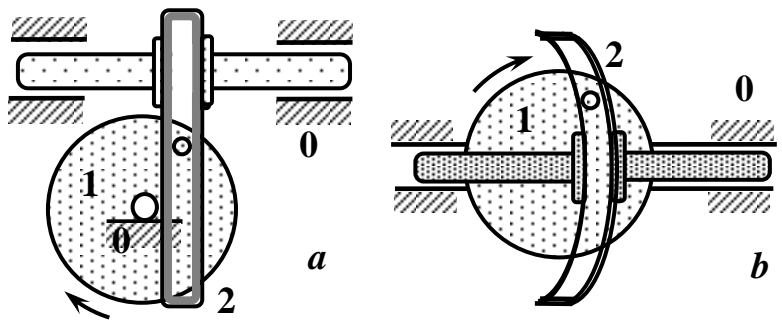


Рис. 1.21. Синусные механизмы с прямолинейной (а) и криволинейной (b) направляющей

*Зубчатым называется механизм, предназначенный для передачи движений зубчатыми звеньями.*

Простейший зубчатый механизм состоит из двух зубчатых колес и стойки (рис. 1.22). Его можно рассматривать как модификацию кулачкового механизма с коромысловым толкателем. Зубчатые колеса простейшего механизма образуют со стойкой вращательные пары, а между собой – высшую пару. На структурной схеме зубчатого механизма колеса изображаются окружностями и отрезками прямой.

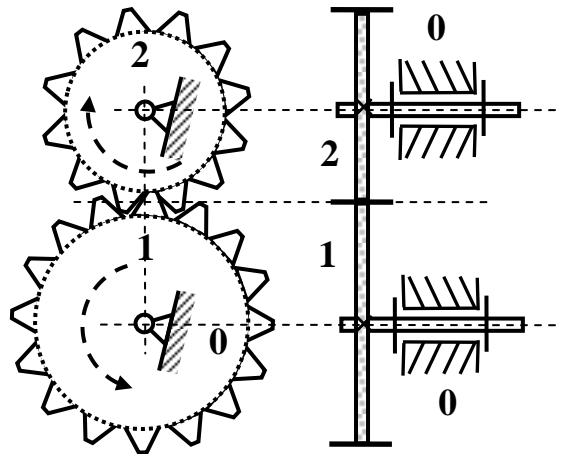


Рис. 1.22. Зубчатый механизм с колесами 1, 2 и стойкой 0

Зубчатые механизмы различаются по расположению геометрических осей зубчатых колес в зацеплении.

*Зубчатые колеса в зацеплении с параллельными осями называются цилиндрическими, с пересекающимися осями – коническими, с перекрещивающимися осями – гиперболоидальными (рис. 1.23).*

Зубчатые механизмы с цилиндрическими и коническими колесами являются механизмами первого семейства, поскольку высшей парой служит пара II-го класса с общей связью, предотвращающей относительное вращение звеньев вокруг оси, перпендикулярной осям вращения колес.

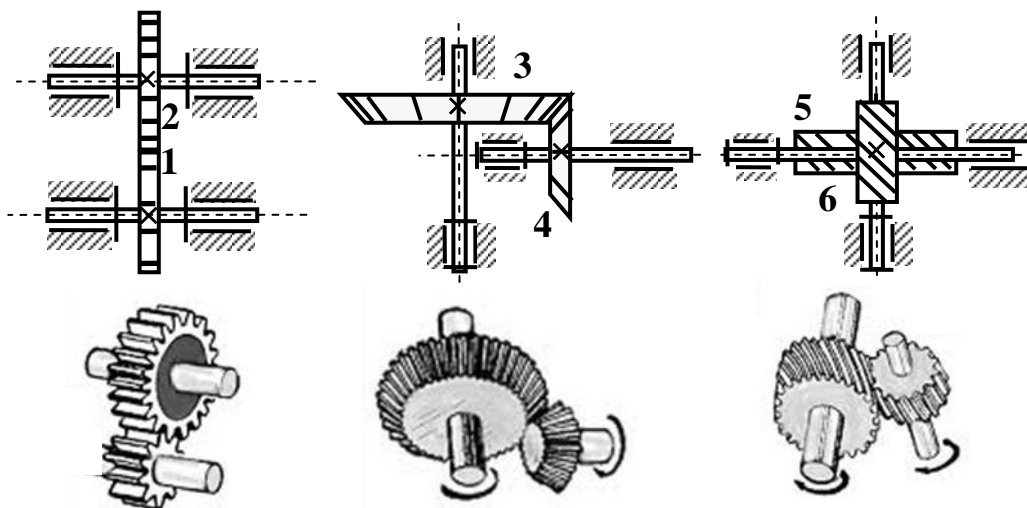


Рис. 1.23. Зубчатый механизм с цилиндрическими колесами 1, 2, коническими колесами 3, 4 и косозубыми колесами 5, 6

Зубчатые механизмы с цилиндрическими, коническими и гиперболическими колесами можно рассматривать как расширение плоских механизмов, так как каждое звено совершает плоскопараллельное движение.

Различают способы зацепления пары зубчатых колес: внешнее, внутреннее и реечное зацепление (рис. 1.24).

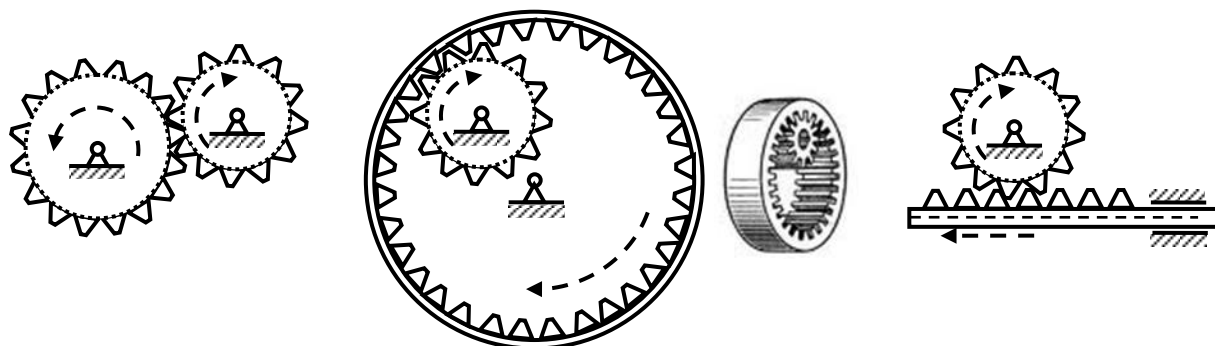


Рис. 1.24. Внешнее (слева), внутреннее (в центре) и реечное (справа) зацепления

Признаком внешнего зацепления является вращение соприкасающихся колес в противоположных направлениях, внутреннего – в одном направлении.

Сложные зубчатые механизмы делятся на многократные и планетарные.

Зубчатый механизм называется многократным, если он получен соединением простейших зубчатых механизмов. Оси колес многократного механизма неподвижны.

Ступенью многократного механизма называется пара колес в зацеплении.

Многократные механизмы могут быть рядовыми или ступенчатыми (рис. 1.25). В рядовом механизме на одном валу закреплено одно колесо. В ступенчатом

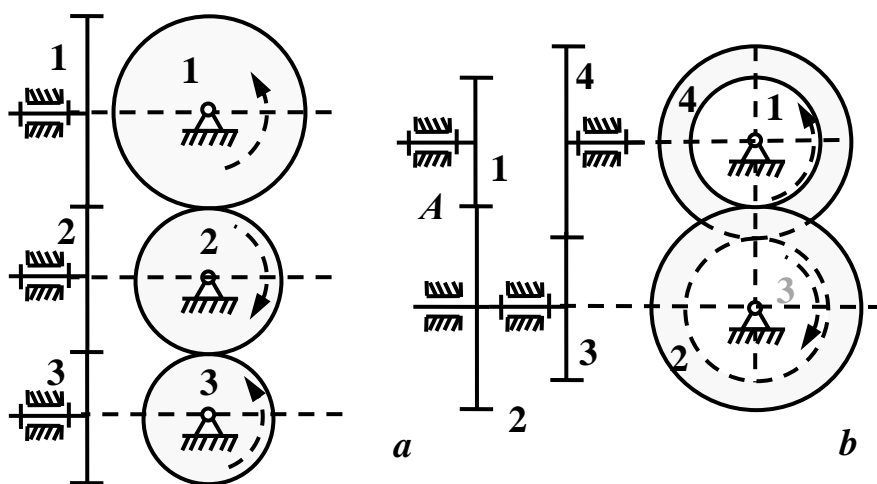


Рис. 1.25. Рядовой (a) и ступенчатый (b) зубчатые механизмы

механизме на одном валу закреплено два и более колес, а на входном и выходном валах – по одному.

Планетарным называется зубчатый механизм, содержащий колеса, закрепленные на валах с движущимися относительно стойки осями.

Звено, несущее вал колеса с подвижной осью, называется водилом или поводком.

Насаженные на вал с подвижной осью зубчатые колеса называются сателлитами.

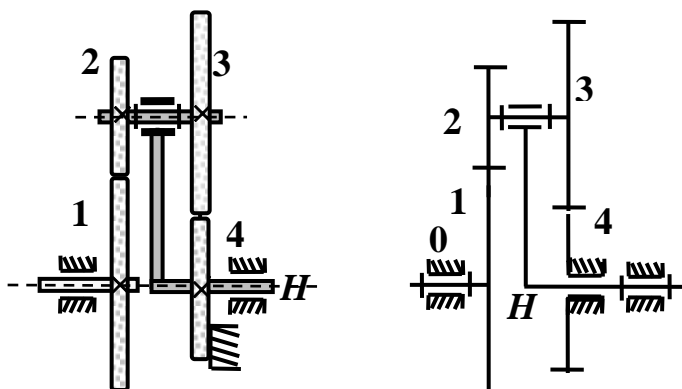


Рис. 1.26. Схема планетарного механизма

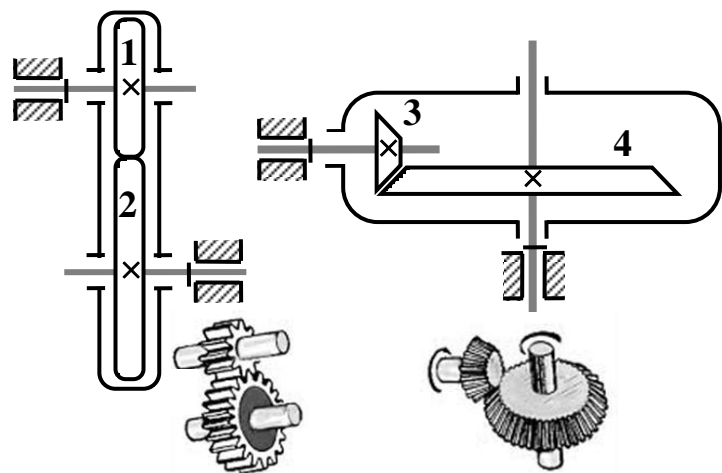
На рисунке 1.26 показан

простейший планетарный механизм, в котором входным звеном служит водило. Вал, на котором жестко установлены сателлиты 2, 3, соединяется с водилом  $H$  через шарикоподшипники. Он совершает два вращения: вращение вокруг собственной оси и вращение вокруг оси вращения водила. Колеса 1, 4, образуют высшие пары с сателлитами и называются центральными или солнечными. Колесо 4 жестко связано со стойкой и называется опорным. После освобождения колеса 4 от жесткой связи со стойкой планетарный механизм становится дифференциалом. В дифференциальных механизмах происходит преобразование двух вращательных движений в третье или разложение одного вращательного движения на два вращательных движения.

*Ступенью планетарного механизма называется совокупность поочередно соприкасающихся колес, содержащая два колеса с неподвижными осями.*

На базе зубчатых механизмов построены редукторы (мультипликаторы), предназначенные для уменьшения (увеличения) угловой скорости вращения ведомого вала (рис. 1.27).

Коробка скоростей с зубчатыми колесами, или механическая коробка передач автомобиля позволяет изменять передаточное отношение механизма в пределах дискретного набора и включает реверсивный механизм, предназначенный для изменения направления вращения выходного вала.



**Рис. 1.27. Редуктор с цилиндрическими 1, 2 и коническими 3, 4 колесами**

Зубчатые механизмы нашли широкое применение в автомобилях, сельскохозяйственных, транспортных машинах. Механические коробки передач и автомобильные дифференциалы – неперенные атрибуты управляемых мобильных машин.

### 1.3.4. Механизмы для передачи вращений

Наряду с зубчатыми механизмами для передачи вращений предназначены ременные, фрикционные, цепные передачи, червячные, карданные, мальтийские и другие механизмы.

*Фрикционной называется передача, в которой передача движения между колесами осуществляется за счет трения между ними.*

Фрикционная передача служит для передачи энергии между колесами преобразованием вращательных движений. В простом случае она состоит из двух вращающихся колес и стойки. Различают фрикционные передачи с цилиндрическими и коническими колесами.

Цилиндрические колеса установлены на валах с параллельными осями вращения, конические колеса – на валах с пересекающимися осями (рис. 1.28).

В отличие от зубчатых механизмов фрикционные передачи имеют существенный недостаток: передаваемая ими мощность невелика. Это обусловлено тем, что максимальный пере-

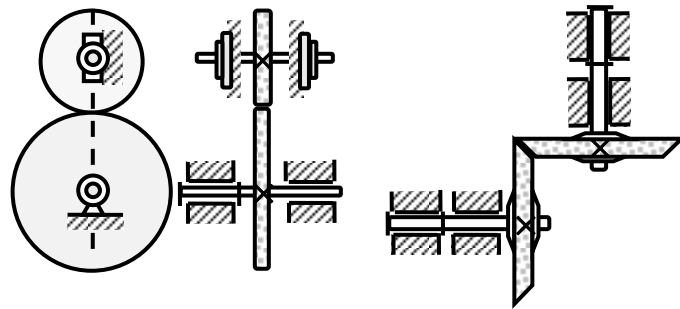


Рис. 1.28. Фрикционная передача с цилиндрическими (слева) и коническими (справа) колесами

даваемый момент сил трения-скольжения между соприкасающимися колесами относительно их осей зависит от поджатия колес и коэффициента трения-скольжения между ними. Колесо фрикционной передачи можно рассматривать как звено только в паре со стойкой. В паре с другим колесом оно является нетвердым элементом механизма. Два колеса фрикционной передачи образуют динамическую пару. Фрикционные механизмы обеспечивают непрерывность вращений ведущего и ведомого дисков при условии прижима дисков и отсутствия проскальзывания между ними.



На рисунке 1.29 валы дисков входного звена 1 и выходного звена 2 связаны через прижимной ролик 3.

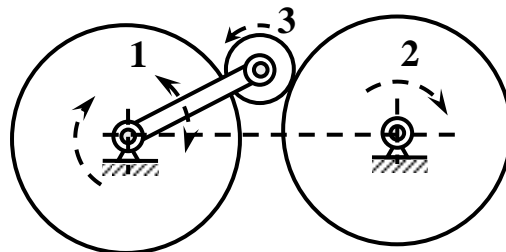


Рис. 1.29. Механизм с фрикционными передачами

Ременные передачи принципиально не отличаются от фрикционных. Они применяются в том случае, когда ведущий и ведомый валы удалены один от другого на большое расстояние, и фрикционная передача становится громоздкой. Ременная передача состоит из ведущего шкива 1, насаженного на вал двигателя, ведомого шкива 2, расположенного на некотором расстоянии от первого, и бесконечного гибкого ремня 3, натянутого на шкивы (рис. 1.30). Шкивы являются звеньями, образующими вращательные пары со стойкой. Ремень служит нетвердым элементом механизма. Два шкива образуют динамическую пару.

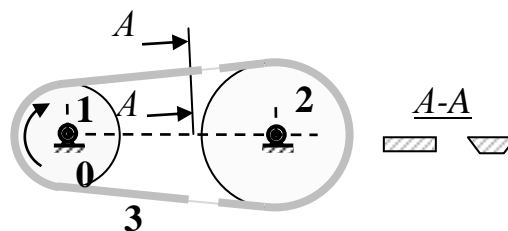


Рис. 1.30. Ременная передача

В автоматических коробках передач автомобилей все большее применение находят вариаторы скорости, сконструированные на базе клиноременных передач. Плавное изменение передаточного отношения вариатора достигается плавным сдвигом стенок *A* ведущего 1 и ведомого 2 конусообразных шкивов вдоль осей вращения (рис. 1.31). При таком сдвиге ремень 3 под действием сил натяжения смещается к центру одного шкива и от центра другого шкива внутри конусообразных направляющих шкивов.

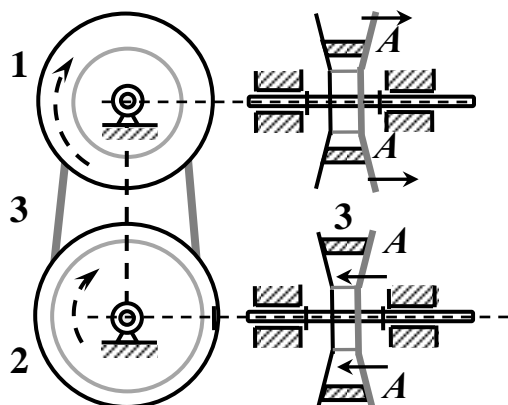


Рис. 1.31. Клиноременный вариатор

Простейшая цепная передача состоит из трех подвижных звеньев: ведущего 1 и ведомого 2 зубчатых колес и натянутой на них цепи 3 (рис. 1.32). Она применяется в тех случаях, когда ведущий и ведомый валы с параллельными осями удалены один от другого на большое расстояние, а ременная передача не обеспечивает требуемую мощность.

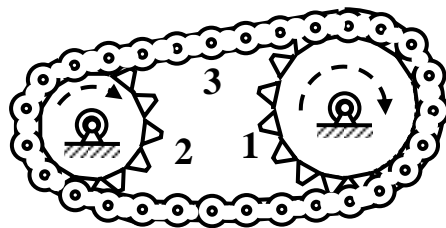


Рис. 1.32. Цепная передача

Червячные механизмы представляют собой сочетание зубчатых и винтовых механизмов и предназначены для передачи вращений между валами с перекрещивающимися в разных плоскостях осями под прямым и реже непрямым углом (рис. 1.33).

Ведущим звеном червячной передачи служит цилиндрический винт на валу 1, называемый червяком, ведомым – червячное колесо на валу 2. Звенья контактируют по линии и образуют высшую пару.

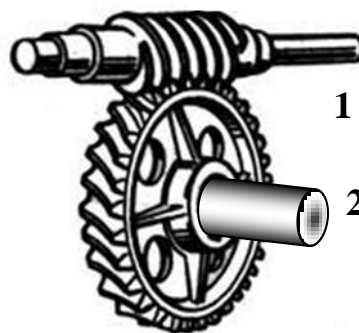


Рис. 1.33. Червячная передача

Передача является замедляющей. Обладая большим передаточным отношением, достигающим до 100, червячные механизмы эффективны в грузоподъемных механизмах и механизмах поворота руля.

Расчеты показывают, что обратная передача движения в червячных механизмах бывает невозможной и зависит от шагов винтовых поверхностей зубьев и коэффициента трения скольжения между зубьями.

Универсальным устройством для передачи вращательного движения без понижения и повышения угловой скорости на входе и выходе служит двойной карданный механизм (рис. 1.34). Он состоит из входного 1, карданного 2 и выходного 3 валов, образующих между собой низшие вращательные пары.

Достоинством указанного механизма является свобода ориентации входного и выходного валов. Его работоспособность не нарушается в условиях «плавающего» карданного вала, когда положение выходного вала изменяется.

При установке входного и выходного валов параллельно законы вращения валов одинаковые, и передаточное отношение механизма равно единице.

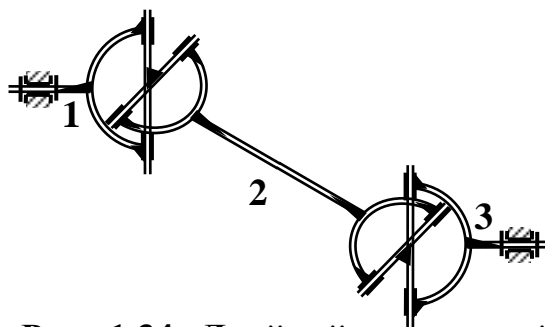


Рис. 1.34. Двойной карданный механизм

Синхронность вращения валов на входе и выходе не соблюдается при установке валов не параллельно и при неравных углах между осями валов и осью карданного вала.

Рычажные двухкривошипные механизмы позволяют передавать вращательные движения при совершении энергоемких операций.

На рисунке 1.35 показаны два плоских рычажных механизма, в которых расстояния между параллельными осями ведущего 1 и ведомого 2 валов не изменяются.

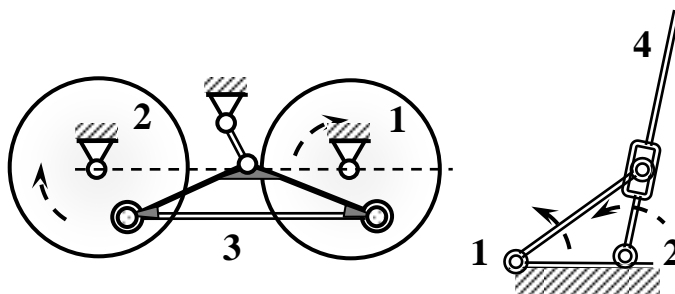


Рис. 1.35. Двухкривошипные механизмы

В первом механизме, построенном на базе параллелограммного механизма, спарник 3 (шатун) обеспечивает синхронное вращение спаренных колес на валах 1 и 2. В отличие от колес-кривошипов, связанных спарником, кривошип и кулиса-кривошип 4 в двухкривошипном механизме вращаются не синхронно.

Мальтийский механизм предназначен для преобразования непрерывного вращения ведущего звена (кривошипа) в однонаправленное прерывистое вращение с периодическими остановками ведомого зве-

на (креста). При вращении кривошипа 1 его палец (цевка) периодически входит в прорезь креста 2 и выходит из нее (рис. 1.36).

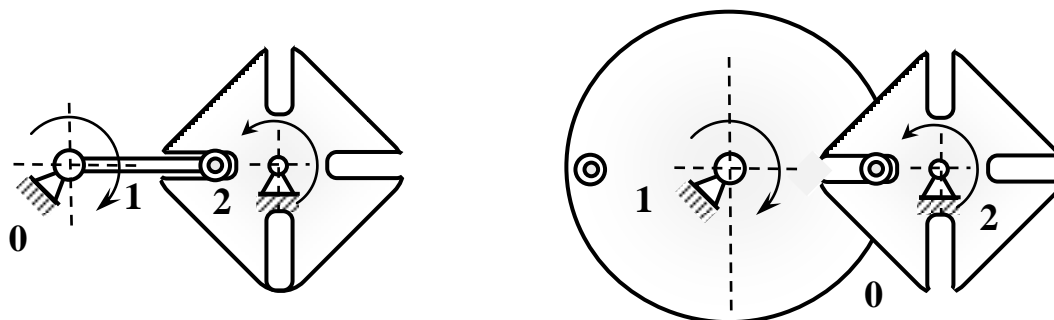


Рис. 1.36. Мальтийские механизмы (0 – стойка, 1 – кривошип, 2 – крест)

Мальтийский механизм представляет модификацию кулачкового механизма, в котором толкатель 1 служит ведущим звеном, а кулачок 2 с прямолинейными или криволинейными пазами – ведомым.

Варьирование числом пальцев на окружности кривошипа и числом прорезей в кресте позволяет подбирать требуемый режим вращения креста с остановками.

Мальтийские механизмы применяются в автоматических устройствах с периодическими остановками вращающегося звена, например, в шаговых транспортерах и автоматизированных линиях фасовочно-упаковочного оборудования АПК.

## 1.4. Примеры решения задач

*Пример 1.* На рисунке 1.37 показана схема механизма очистки зерноуборочного комбайна. Установить семейство, группу и тип механизма.

*Решение.* Все кинематические пары – одноподвижные:  $A, B, C, E, A, F, G, H, K, L$  – вращательные,  $D$  – поступательная. Следо-

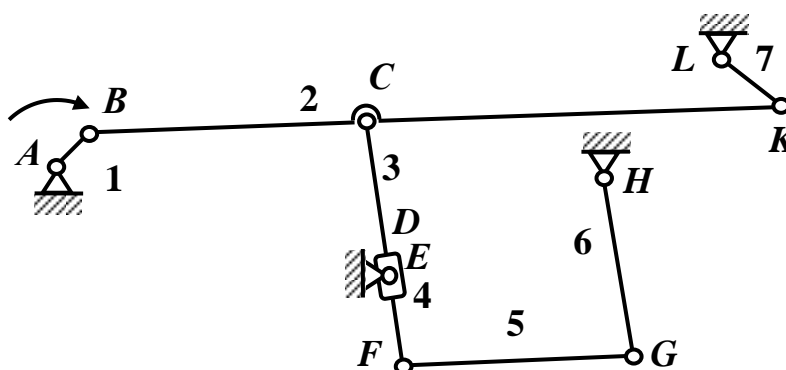


Рис. 1.37. Схема рычажного механизма

вательно, механизм относится к третьему семейству и является плоским рычажным.

Звено 1 совершает полный оборот вращения вокруг оси стойки, а звено 7 – неполный. Следовательно, механизм является кривошипно-коромысловым. Подвижные звенья 3 и 4 образуют поступательную пару. Так как звено 4 (качающаяся втулка) вращается вокруг неподвижной оси, то оно служит кулисой, а звено 3 – камнем. Следовательно, механизм также относится и к кулисным.

*Пример 2.* На рисунке 1.18 *b* показана схема колебательного механизма. Установить семейство, группу и тип механизма.

*Решение.* Движения звеньев 1, 2 плоскопараллельные. Звено 2 образует поступательную пару со стойкой 0 и высшую пару со звеном 1, совершающим полный оборот вращения вокруг стойки. Следовательно, механизм относится к плоским механизмам с высшей парой. Так как движение ползуна 2 зависит от профиля звена 1, то механизм является кулачковым с кулачком 1 и толкателем 2.

## 2. СТРУКТУРА МЕХАНИЗМОВ

### 2.1. Анализ движений звеньев.

#### Формулы Чебышева и Сомова – Малышева

Свободное тело имеет 6 степеней свободы. Это означает, что  $n$  подвижных звеньев механизма, будучи освобожденными от связей, имеют  $6n$  степеней свободы. Рассмотрим два свободных звена. Соединим их, получив систему в

виде кинематической цепи из двух звеньев, образующих одноподвижную пару  $A$  (рис. 2.1).

Присоединение к свободному звену 1 с шестью степенями свободы второго звена 2 добавляет к 6 степеням свободы системы из одного звена одну степень свободы присоединенного звена.

Действительно, положение звена 2 относительно звена 1 определяется одним обобщенным параметром: углом поворота  $\varphi$  в случае вращательной пары и перемещением  $x$  вдоль оси звена 1 в случае поступательной пары. Одноподвижная пара  $A$  (пара пятого класса) «отбирает» у присоединенного звена 2 пять степеней свободы из шести.

Если звено 1 присоединить к стойке с помощью одноподвижной пары, то у звена останется одна степень свободы и вместе со звеном 2 система двух звеньев с двумя кинематическими парами будет иметь две степени свободы.

Рассмотрим механизм, являющийся открытой кинематической цепью. Его образование представим так: первое звено присоединяем к стойке, второе звено – к первому, третье – ко второму или первому и в конце последнее звено – к одному из предыдущих. В таком механизме общее число  $n$  подвижных звеньев равно числу кинематических пар. Если бы звенья были свободны, то имели бы  $6n$  степеней свободы. При их соединении со стойкой и другими звеньями  $p_1$  одно-

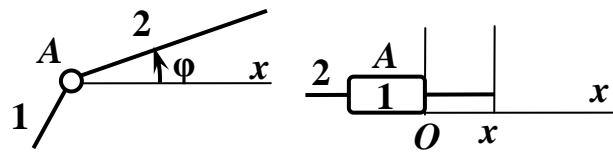


Рис. 2.1. Вращательная и поступательная пары  $A$

подвижных кинематических пар (пятого класса) «отбирают» у присоединенных  $p_1$  звеньев  $5p_1$  степеней свободы,  $p_2$  двухподвижных пар (четвертого класса) –  $4p_2$  степеней свободы,  $p_3$  трехподвижных пар (третьего класса) –  $3p_3$  степеней свободы,  $p_4$  четырехподвижных пар (второго класса) –  $2p_4$  и  $p_5$  пятиподвижных пар (первого класса) –  $p_5$ . Таким образом, число  $W$  степеней свободы механизма с открытой кинематической цепью можно рассчитать по формуле Сомова – Малышева [5]:

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5. \quad (2.1)$$

Если на каждое звено механизма наложено  $k$  общих связей, то число степеней свободы первого звена и каждого присоединяемого звена уменьшится на  $k$ ; и формула (2.1) примет следующий вид [1]:

$$W = (6 - k)n - (5 - k)p_1 - (4 - k)p_2 - (3 - k)p_3 - (2 - k)p_4 - (1 - k)p_5. \quad (2.2)$$

Такой механизм называется механизмом  $k$ -го семейства.

Плоский рычажный механизм относится к механизмам третьего семейства, так как соединения звенья не допускают относительные движения, приводящие к трем абсолютным простейшим движениям каждого звена: поступательному движению вдоль оси, перпендикулярной плоскости движения, и повороту вокруг двух пересекающихся осей в этой плоскости. Формула (2.2) для механизма третьего семейства примет вид

$$W = 3n - 2p_1 - p_2. \quad (2.3)$$

Равенство (2.3) было установлено Чебышевым при отсутствии высших пар ( $p_2 = 0$ ) и называется формулой Чебышева для расчета числа степеней свободы плоского механизма. Формулу (2.3) можно было бы вывести и так. Если подвижные звенья, совершающие плоскопараллельные движения, были бы свободны, то имели бы  $3n$  степеней свободы. По мере образования кинематических пар, то есть при наложении ограничений на возможные перемещения звеньев, каждая низшая пара «отнимет» две степени свободы, а высшая пара – одну степень свободы. Таким образом, число степеней свободы полученного механизма будет уменьшено на  $2p_1$  и  $p_2$ .

Механизмы с выходным звеном, применяемые в приводах рабочих органов машин, имеют замкнутую цепь звеньев со стойкой. Такие механизмы можно образовать из открытой кинематической цепи путем присоединения звена к стойке.

Четырехзвенный кривошипно-коромысловый механизм образуется путем присоединения звена 3 открытой цепи со звеньями 0, 1, 2, 3 и вращательными

парами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  к стойке 0 с помощью вращательной пары  $D$  (рис. 2.2).

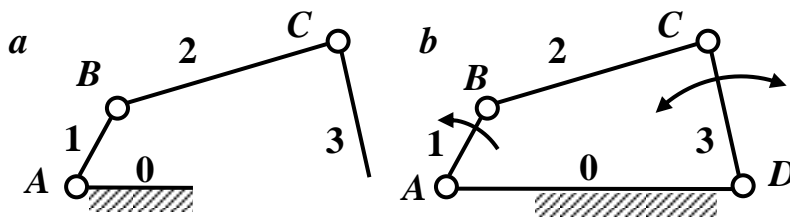


Рис. 2.2. Четырехзвенные механизмы с открытой (a) и замкнутой (b) кинематической цепью

Формула (2.1) справедлива для

механизмов любого семейства с открытой кинематической цепью, так как число подвижных звеньев равно числу кинематических пар. Например, механизм, схема которого изображена на рисунке 2.2 a, имеет три степени свободы и как механизм нулевого семейства, и как механизм третьего семейства:

$$n = 3, p_1 = 3; W = 6n - 5p_1 = 3; W = 3n - 2p_1 = 3.$$

Замкнем открытую кинематическую цепь с тремя степенями свободы относительно звена 0 вращательной парой  $D$  пятого класса, образуемой звеньями 3, 0 (рис. 2.2, b). Она «отнимет» у механизма (цепи) пять степеней свободы, оставив «-2 степени свободы», то есть превратит механизм в дважды статически неопределимую ферму, как и показывает расчет по формуле (2.1):

$$n = 3, p_1 = 4; W = 6n - 5p_1 = -2.$$

Применение формулы (2.1) к механизмам ненулевого семейства с замкнутой кинематической цепью требует дополнительного анализа.

Рассмотрим плоский кривошипно-коромысловый механизм с вращательными парами, являющийся механизмом третьего семейства. Для определения его числа степеней свободы служит формула (2.3):



$$n = 3, p_1 = 4; W = 3n - 2p_1 = 1.$$

Механизм имеет одну степень свободы, и положение его звеньев определяется одной независимой обобщенной координатой – углом поворота кривошипа 1.

Плоский механизм с замкнутым контуром – частный случай пространственного механизма. Анализ кинематических пар показывает, что плоскопараллельное движение звеньев механизма не изменится, если заменить вращательную пару  $B$  двухподвижной цилиндрической парой, а пару  $C$  – трехподвижной сферической парой (рис. 2.3). После замены новый кривошипно-коромысловый механизм становится пространственным механизмом и механизмом нулевого семейства. И для определения числа степеней свободы такого механизма служит формула (2.1):

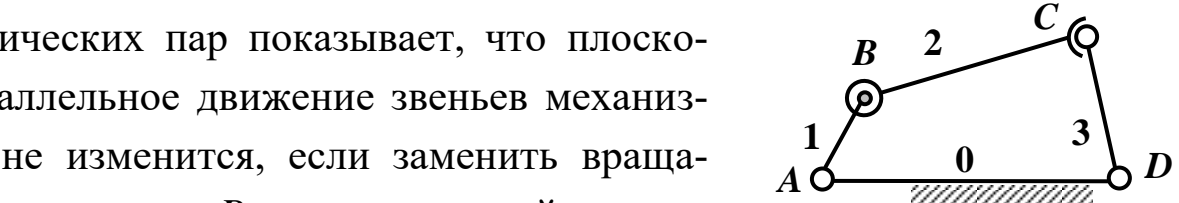


Рис. 2.3. Пространственный механизм

После замены новый кривошипно-коромысловый механизм становится пространственным механизмом и механизмом нулевого семейства. И для определения числа степеней свободы такого механизма служит формула (2.1):

$$n = 3, p_1 = 2, p_2 = 1, p_3 = 1; W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 = 1.$$

Данный расчет показывает, что формула (2.1) не позволяет определить число степеней свободы механизмов ненулевого семейства с замкнутой кинематической цепью.

## 2.2. Избыточные связи и локальные подвижности

*Избыточной, или пассивной называется связь, которая не оказывает влияния на движения выходных звеньев механизма и дублирует имеющиеся связи.*

Рассмотрим плоский (рис. 2.2,  $b$ ) и пространственный (рис. 2.3) кривошипно-коромысловый механизм. В пространственном механизме цилиндрическая пара  $B$  допускает относительные поступательные движения звеньев 1, 2 вдоль оси вращательной пары  $B$ , а сферическая пара допускает вращения звеньев 2, 3 вокруг двух осей, перпендикулярных оси вращательной пары  $C$  плоского механизма. Другими словами, в пространственном механизме добавлены три степени свободы за счет удаления трех связей, препятствующих этим про-

стейшим движениям. Такие связи являются избыточными, так как они не изменяют движений звеньев 1, 2 и выходного звена 3 и дублируют связи, наложенные стойкой на звенья 1, 3 через кинематические пары  $A$  и  $D$ . Математически это означает, что из 20 уравнений связей, число которых равно сумме классов всех кинематических пар, три уравнения можно получить из оставшихся семнадцати независимых уравнений связей. Четыре звена контура, включая стойку, до их соединений имеют 24 степени свободы, а после соединений и наложений на них 17 независимых связей – семь степеней свободы. Из семи степеней свободы шесть степеней имеет неизменяемый контур как твердое тело. Следовательно, на движение звеньев контура относительно звена 0 (стойки) остается одна степень свободы.

Данные избыточные связи появились при образовании замкнутой кинематической цепи или замкнутого контура. Поэтому они называются контурными избыточными связями.

**Контурные избыточные связи** возникают в механизмах, к точности движений звеньев которых предъявляются повышенные требования. Механизмы с такими связями требуют высокой точности изготовления и сборки звеньев. В плоском кривошипно-коромысловом механизме вращательные пары должны допускать вращения звеньев только вокруг параллельных осей. Перекосы осей вращательных пар при изготовлении и сборке такого механизма приведут к деформации звеньев и их возможному заклиниванию. Именно это и доказывает формула (2.1), предназначенная для расчета числа степеней свободы пространственных механизмов с произвольной ориентацией осей вращательных пар. Расчетное значение (-2) для кривошипно-коромыслового механизма, полученное по этой формуле, указывает на то, что при перекосе осей механизм после сборки с натягом превращается в дважды неопределимую ферму.

Современная тенденция в машиностроении заключается в проектировании механизмов без контурных избыточных связей. Такие механизмы Л. Н. Решетов предложил называть самоустанавливающимися

мися [12]. Замена вращательной пары  $B$  двухподвижной цилиндрической парой, а пары  $C$  – трехподвижной сферической парой превращает плоский кривошипно-коромысловый механизм в пространственный самоустанавливающийся.

Наряду с контурными существуют элементные и разделительные избыточные связи.

**Элементные избыточные связи** возникают при контакте между элементами звеньев кинематической пары по поверхности или линии. Их число не ограничено. Так, при соединении звеньев кинематической пары класса  $H$  по линии или по поверхности достаточно контакта одного звена с  $H$  точками другого звена. Например, движение звена 1, образующего со звеном 2 сферическую пару третьего класса, осуществимо при соприкосновении с тремя не находящимися в радиальной плоскости точками  $A, B, C$  звена 2 (рис. 2.4 *a*).

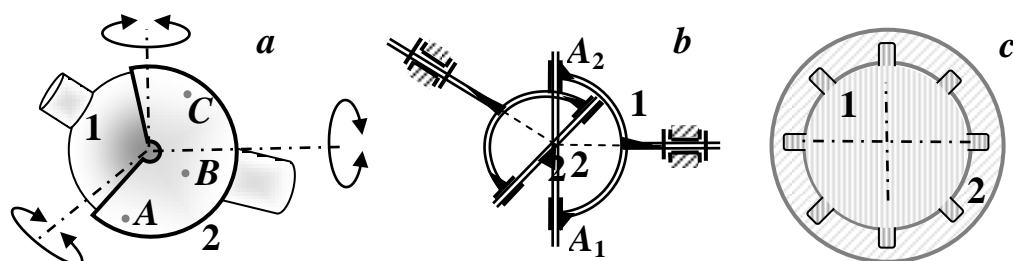


Рис. 2.4. Звенья 1, 2, образующие кинематическую пару с элементными (*a*) и разделительными (*b, c*) избыточными связями

Другие точки соприкосновения порождают элементные избыточные связи без ограничения количества. Такие связи полезны, поскольку позволяют уменьшить контактные напряжения и износ звеньев. При дефектах изготовления элементов звеньев число элементных избыточных связей увеличивают шлифовкой и приработкой при небольших нагрузках на звенья.

**Разделительные избыточные связи** возникают при дополнительном контакте звеньев кинематической пары с частями определенной поверхности или линии звена. Их число не ограничено, но конечно. Например, вращательная пара  $A$ , образованная вилок 1 и кре-

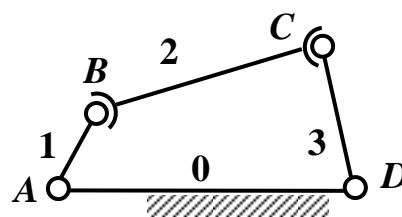
стовиной 2 карданного механизма, разделена на части  $A_1$  и  $A_2$ , соединяющие вилку с крестовиной (рис. 2.4 *b*). Часть  $A_1$  образована зубом вилки и концом крестовины. Часть  $A_2$ , образованная другим зубом вилки и другим концом крестовины, не добавляет новых ограничений на относительные движения звеньев 1, 2, но добавляет пять избыточных связей.

Шлицевое соединение валов 1 и 2, образующих поступательную пару, содержит ряд разделительных избыточных связей (рис. 2.4 *c*). Относительное поступательное движение валов становится определенным уже при одном шлице на валу 1 и одном зубе на валу 2. Каждый другой шлиц и входящий в него зуб порождают пять новых разделительных избыточных связей.

Разделительные избыточные связи позволяют снизить контактную нагрузку на звенья при их точном изготовлении. Дефекты изготовления звеньев превращают избыточные связи в дополнительные и могут привести к потере свободы и заклиниванию механизма.

*Локальной подвижностью называется простейшее относительное движение промежуточного звена, которое не оказывает влияния на движение выходных звеньев механизма и возможно при неподвижных других звеньях.*

Рассмотрим два пространственных кривошипно-коромысловых механизма нулевого семейства. Схема первого изображена на рисунке 2.3. В соответствии с формулой (2.1) он имеет одну степень свободы. Вторым отличается от первого тем, что вместо вращательной пары  $B$  имеет сферическую пару  $B$  (рис. 2.5).



**Рис. 2.5. Пространственный механизм**

Анализ показывает, что движение выходного звена 3 при такой замене пар не изменяется, и оно определяется одним параметром — углом поворота кривошипа 1. При этом число степеней свободы второго механизма в соответствии с формулой (2.1) стало равняться двум:

$$n = 3, p_1 = 2, p_2 = 0, p_3 = 2; W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 = 2.$$

Увеличение числа степеней свободы механизма произошло за счет допускаемого кинематическими парами  $B, C$  вращения промежуточного звена 2 вокруг своей оси. Это простейшее движение не влияет на движение выходного звена 3 и возможно при неподвижных звеньях 1, 3, то есть является локальной подвижностью.

Локальную подвижность имеет ролик кулачкового механизма с роликовым толкателем на рисунке 1.18. Установка ролика позволяет заменить силу трения-скольжения кулачка с толкателем силой трения-качения. Тем самым ввод локальных подвижностей позволяет снизить потери энергии на трение.

### **2.3. Число степеней свободы механизмов с контурными избыточными связями**

Пусть  $q$  – число контурных избыточных связей механизма ненулевого семейства. Эти связи не должны учитываться в формуле (2.1), так как они не изменяют движение выходного звена и числа степеней свободы механизма. Следовательно, для определения числа степеней свободы механизма с избыточными связями по формуле (2.1) из общего количества связей необходимо вычесть число  $q$  избыточных связей:

$$W = q + 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5. \quad (2.4)$$

Равенство (2.4) представляет усовершенствованную формулу Сомова-Малышева, справедливую для механизмов, кинематическая цепь которых содержит замкнутые контуры. Оно устанавливает связь между числом степеней свободы механизма и числом его контурных избыточных связей. Его используют для определения числа степеней свободы механизма, если известно число контурных избыточных связей, или для определения числа избыточных связей, если известно число степеней свободы механизма.

Механизмы, кинематическая цепь которых содержит замкнутые контуры, будем называть многоконтурными.

Число степеней свободы равно числу независимых обобщенных координат.

Напомним, что плоский кривошипно-коромысловый механизм (рис. 2.2, *b*) является одноконтурным механизмом третьего семейства с тремя подвижными звеньями ( $n = 3$ ) и четырьмя вращательными парами ( $p_1 = 4$ ). Для определения числа независимых обобщенных координат и числа степеней свободы одноконтурного плоского рычажного механизма служит формула Чебышева, а числа контурных избыточных связей – формула (2.4):

$$W = 3n - 2p_1 = 1; \quad q = W - 6n + 5p_1 = 3.$$

Таким образом, плоский кривошипно-коромысловый шарнирный механизм имеет три контурные избыточные связи.

Рассмотрим плоский одноконтурный трехзвенный механизм клинового пресса (рис. 2.6 *a*) с двумя движущимися звеньями ( $n = 2$ ). Он имеет две поступательные пары ( $p_1 = 2$ ), образуемые стойкой 0 и звеньями 1, 2 и одну

плоскостную пару ( $p_3 = 1$ ), образуемую звеньями 1, 2. Общими во всех кинематических парах служат две связи, не допускающие враще-

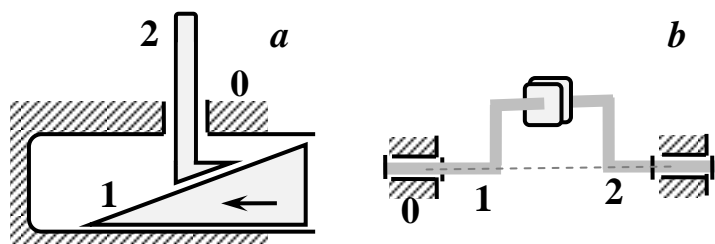


Рис. 2.6. Механизм клинового пресса (*a*) и вращательного привода (*b*)

ния звеньев вокруг двух перпендикулярных осей в плоскости, параллельной плоскости соприкосновения звеньев 1, 2.

В трехзвенном механизме вращательного привода (рис. 2.6 *b*) кривошип 1, 2 образуют со стойкой 0 вращательные пары, а между собой – плоскостную. Общими во всех кинематических парах служат две связи, не допускающие вращения звеньев вокруг оси, перпендикулярной осям вращения звеньев и движение звеньев вдоль этой оси. Таким образом, оба механизма относятся ко второму семейству.

Число степеней свободы данных одноконтурных механизмов найдем по формуле (2.2), а число контурных избыточных связей – по формуле (2.4):

$$W = 4n - 3p_1 - p_3 = 1; \quad q = W - 6n + 5p_1 + 3p_3 = 2.$$

Механизмы становятся самоустанавливающимися, если звенья 1, 2 соприкасаются в точке и образуют пару первого класса.

Число степеней свободы механизмов пресса и привода не изменится, если клинья образуют поступательную пару, а кривошип – вращательную пару. В этом случае механизмы имеют по три одноподвижные пары ( $p_1 = 3$ ) и представляют механизмы четвертого семейства. В механизме пресса наряду с указанными ограничениями связи не допускают вращение вокруг третьей оси и поступательное движение звеньев вдоль оси, перпендикулярной плоскости движения. В механизме привода наряду с указанными ограничениями связи не допускают вращение вокруг второй оси, перпендикулярной осям вращения кривошипов и поступательное движение вдоль этой оси. Добавленные две связи увеличивают число контурных избыточных связей механизмов на 2:

$$W = 2n - p_1 = 1; \quad q = W - 6n + 5p_1 = 4.$$

Простейший одноконтурный зубчатый механизм (рис. 1.20) с двумя цилиндрическими колесами ( $n = 2$ ) имеет две вращательные пары ( $p_1 = 2$ ) и одну четырехподвижную пару второго класса, образованную колесами, соприкасающимися по отрезку прямой ( $p_4 = 1$ ). Все кинематические пары не допускают вращения колес вокруг оси, перпендикулярной плоскости, в которой расположены прямые линии зацепления колес, то есть механизм является механизмом первого семейства ( $k = 1$ ), и число степеней свободы простейшего зубчатого механизма следует определять по формуле (2.2):

$$W = 5n - 4p_1 - p_4 = 1.$$

Как следует из равенства (2.4), простейший зубчатый механизм имеет одну контурную избыточную связь:

$$q = W - 6n + 5p_1 + 2p_4 = 1.$$

Устранение избыточной связи достигается заменой кинематической пары второго класса на пару первого класса с контактом зубчатых колес в точке.

Механизмы, на звенья которых наложены связи, не позволяющие каждому звену совершать поступательные движения вдоль трех неподвижных перпендикулярных осей, относятся к механизмам третьего семейства. Одноконтурный карданный механизм, содержащий только вращательные пары, относится к механизму третьего семейства ( $k = 3$ ). Он состоит из трех подвижных звеньев ( $n = 3$ ): вилок 1, 3 и крестовины 2 (рис. 2.7).

Крестовина совершает сферическое движение вокруг неподвижной точки пересечения неподвижных осей вращения вилок. Вилки образуют две вращательные пары  $A, B$  со стойкой и две вращательные пары  $C, D$  с крестовиной ( $p_1 = 4$ ).

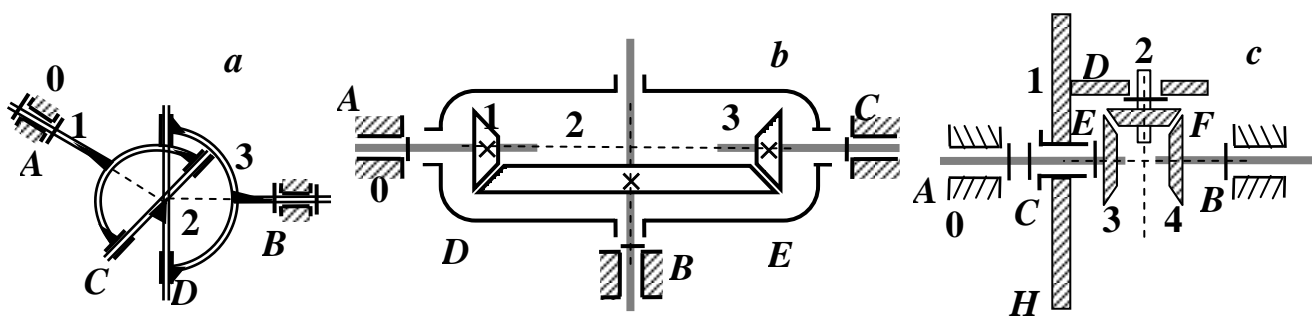


Рис. 2.6. Карданный механизм (а), конический редуктор (b) и дифференциал (с)

Число степеней свободы карданного механизма определим по формуле (2.2), а число контурных избыточных связей – по формуле (2.4):

$$W = 3n - 2p_1 = 1; q = W - 6n + 5p_1 = 3.$$

Для устранения трех избыточных связей в карданном механизме вращательные пары  $C, D, B$  следует заменить на цилиндрические пары.

Конический редуктор состоит из трех ( $n = 3$ ) конических колес 1, 2, 3, образующих со стойкой 0 три вращательные пары  $A, B, C$



( $p_1 = 3$ ) и две пары  $D, E$  второго класса ( $p_4 = 2$ ), образуемые зубчатыми колесами. Колеса соприкасаются по линии. Связи в кинематических парах не позволяют всем звеньям вращаться вокруг оси, перпендикулярной осям вращения колес, то есть конический редуктор является механизмом первого семейства ( $k = 1$ ). Число степеней свободы одноконтурного редуктора определим по формуле (2.2), а число контурных избыточных связей – по формуле (2.4):

$$W = 5n - 4p_1 - p_4 = 1; \quad q = W - 6n + 5p_1 + 2p_4 = 2.$$

Для устранения двух избыточных связей в коническом редукторе пары  $D, E$  должны быть пятиподвижными, то есть зубья колес пары соприкасаются в точке.

Дифференциал состоит из стойки 0 и четырех подвижных звеньев: водила 1, конического колеса (сателлита) 2 с подвижной осью вращения, конических колес 3, 4 на двух валах приводных колес автомобиля ( $n = 4$ ). Зубчатые колеса соприкасаются по линии. Дифференциал содержит шесть кинематических пар (табл. 2.2): четыре вращательные пары ( $p_1 = 4$ ) и две пары второго класса ( $p_4 = 2$ ).

## 2.2. Кинематические пары дифференциала и образующие их звенья

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
0, 3	0, 4	1, 3	1, 2	2, 3	2, 4
Вращательная	Вращательная	Вращательная	Вращательная	Пара 2-го класса	Пара 2-го класса

Связи в кинематических парах не позволяют всем звеньям вращаться вокруг оси, перпендикулярной осям вращения колес и водила, то есть дифференциал является механизмом первого семейства ( $k = 1$ ). Число степеней свободы дифференциала определим по формуле (2.2), а число контурных избыточных связей – по формуле (2.4):

$$W = 5n - 4p_1 - p_4 = 2; \quad q = W - 6n + 5p_1 + 2p_4 = 2.$$

Для устранения двух избыточных связей в дифференциале пары  $E, F$  должны быть пятиподвижными, то есть зубья колес пары соприкасаются в точке.

## 2.4. Число степеней свободы механизма с многоконтурной цепью

Число степеней свободы одноконтурного механизма определяется по формуле (2.2), в частности, для механизма третьего семейства – по формуле Чебышева. Применение же формулы (2.2) для расчета числа степеней свободы многоконтурного механизма ненулевого семейства может привести к ошибочному результату.

Рассмотрим механизм спарника, представляющий плоский двухконтурный параллелограммный механизм (рис. 2.7 а). Он состоит из стойки 0 и четырех подвижных звеньев ( $n = 4$ ): кривошипов 1, 3, 4 равной длины и шатуна 2, параллельного стойке. Звенья образуют шесть вращательных пар  $A, B, C, D, E, F$  ( $p_1 = 6$ ).

Механизм спарника получен из одноконтурного двухкривошипного (параллелограммного) механизма добавлением третьего кривошипа 4, вращающегося параллельно двум другим 1, 3 за счет соединения со звеньями 0, 2 в точках, расстояние между которыми не изменяется, и образования дополнительных вращательных пар  $E, F$ .

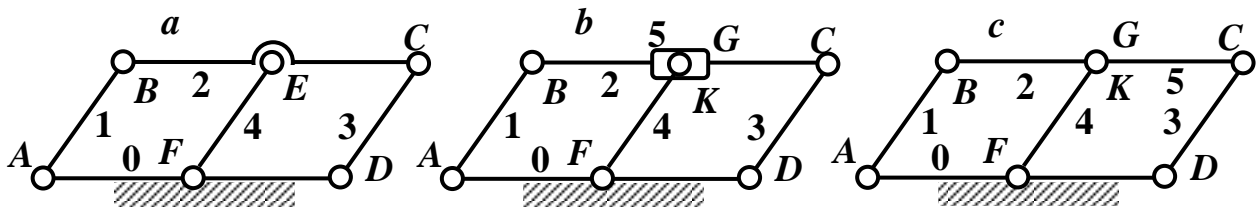


Рис. 2.7. Двухконтурные плоские параллелограммные механизмы

Механизм спарника относится к третьему семейству. Число степеней свободы механизма определим по формуле Чебышева (2.3):

$$W = 3n - 2p_1 = 0.$$

Полученный результат показывает, что механизм превращается в неподвижную статически определимую ферму; и он не корректен, так как добавление кривошипа 4 к двухкривошипному механизму не изменяет движение других звеньев. Следовательно, формула Чебышева не во всех случаях позволяет определять число степеней свободы многоконтурных механизмов.

Почему получен такой результат? Потому что формула Чебышева «не знает», что механизм – параллелограммный, а звено 4 имеет длину и установку, не нарушающие его движение. Изменение длины звена 4, и, следовательно, установки звена превратит механизм в ферму.

Найдем условие, при котором формула Чебышева позволяет определять число степеней свободы многоконтурных плоских механизмов, если механизмы получены последовательным добавлением замкнутых контуров. Из формулы Чебышева (2.3) следует, что добавление к плоскому механизму нового контура за счет новых  $m$  звеньев,  $p_{1m}$  одноподвижных и  $p_{2m}$  двухподвижных кинематических пар не изменяет число степеней свободы, если справедливо равенство

$$3m - 2p_{1m} - p_{2m} = 0. \quad (2.5)$$

Равенство (2.5) не выполняется при образовании нового контура за счет одного нового звена 4 ( $m = 1$ ) и двух новых вращательных пар  $E, F$  ( $p_{1m} = 2$ ) в механизме на рисунке 2.7 *a*. Таким образом, применять формулу Чебышева для расчета числа степеней свободы двухконтурного механизма спарника нельзя.

На рисунках 2.7 *b, c* кинематическая пара  $K$  образована звеньями 4, 5; пара  $G$  – 2, 5. Равенство (2.5) выполняется при образовании нового контура этих механизмов за счет двух новых звеньев 4, 5 ( $m = 2$ ) и трех новых одноподвижных пар  $F, K, G$  ( $p_{1m} = 3$ ). Число степеней свободы этих двухконтурных механизмов ( $n = 5, p_1 = 7$ ) можно найти по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_1 = 1.$$

Условие применимости формулы (2.2) для определения числа степеней свободы многоконтурных механизмов  $k$ -го семейства ( $1 < k < 6$ ) можно вывести аналогично из формулы (2.2):

$$(6 - k)m - (5 - k)p_{1m} - (4 - k)p_{2m} - \dots - p_{k-1m} = 0. \quad (2.6)$$

Равенство (2.5) следует из равенства (2.6), когда  $k = 3$ .

## 2.5. Аналитическое определение числа степеней свободы

Аналитический способ определения числа степеней свободы многоконтурного механизма можно применять в том случае, когда число степеней свободы нельзя рассчитать по формуле (2.2).

Применим его в примере анализа двухконтурного механизма спарника, содержащего стойку 0, четыре подвижные звенья: кривошипы 1, 3, 4 равной длины и шатун 2, параллельный стойке. Звенья образуют шесть вращательных пар  $A, B, C, D, E, F$  (рис. 2.8).

Пусть  $Oxyz$  – декартова система координат, связанная со стойкой, с началом в точке  $A$ ; все звенья механизма спарника движутся параллельно плоскости  $Oxy$ .

Рассмотрим звено с номером  $i$ . Выберем точку  $M$  звена (полюс звена) и проведем ось  $Mx_1$ , параллельную оси  $Ox$ , ось  $My_1$ , параллельную оси  $Oy$ , и ось  $Mz_1$ , параллельную оси  $Oz$ . Проведем два прямых отрезка, связанных со звеном: базовый отрезок  $MK$  в плоскости  $Mx_1y_1$  и осевой отрезок  $MN$  звена на оси  $Mz_1$ , перпендикулярный плоскости  $Oxy$ . Базовый отрезок  $MK$  звена движется в плоскости, параллельной плоскости  $Oxy$ , а осевой отрезок  $MN$  при движении остается перпендикулярным плоскости  $Oxy$ .

Положение  $i$ -го звена в пространстве определяется шестью независимыми координатами: 1) координатами  $x_M, y_M, z_M$  полюса звена, 2) углами  $\varphi_{ix}, \varphi_{iy}$ , образуемыми ортом осевого отрезка  $MN$  звена и осями  $Ox, Oy$  соответственно, 3) углом  $\varphi_{iz}$  поворота базового отрезка  $MK$  звена вокруг оси  $Mz_1$ , проходящей через осевой отрезок  $MN$ , с отсчетом от оси  $Mx_1$  (рис. 2.8 *b*).

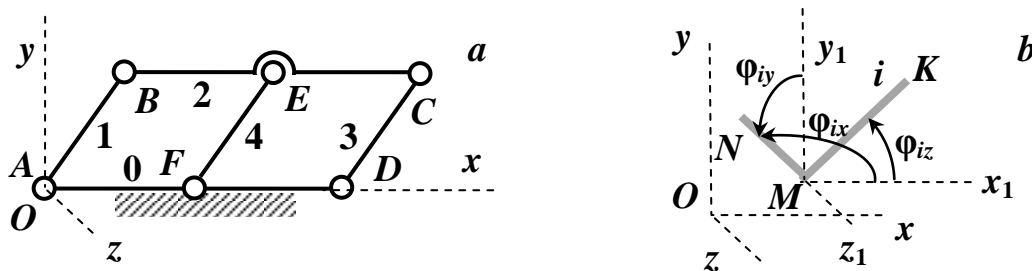


Рис. 2.8. Схема механизма спарника (a) и элемент  $KMN$  звена (b)

Таким образом, без учета связей закон движения имеющего номер  $i$  звена с полюсом  $M$  можно записать шестью функциями от времени  $t$ :

$$\begin{cases} x_M = x_M(t); y_M = y_M(t); z_M = z_M(t); \\ \varphi_{ix} = \varphi_{ix}(t); \varphi_{iy} = \varphi_{iy}(t); \varphi_{iz} = \varphi_{iz}(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

На первом этапе рассмотрим замкнутый контур  $ABCD$  механизма спарника.

Движение звена 1 определим движениями полюса в точке  $A$ , базового отрезка  $AB$  длиной  $l$  и перпендикулярного ему отрезка. На звено 1 наложено пять геометрических связей со стороны стойки, с которой звено 1 образует вращательную пару. По условиям, уравнения (2.7) для звена 1 ( $i = 1$ ) с учетом связей имеют вид

$$\begin{cases} x_A = 0; y_A = 0; z_A = 0; \\ \varphi_{1x} = \frac{\pi}{2}; \varphi_{1y} = \frac{\pi}{2}; \varphi_{1z} = \varphi_{1z}(t), \end{cases} \quad (2.8)$$

где  $\varphi_{1z}(t)$  – заданная или неизвестная функция угла поворота звена 1 вокруг оси  $A$ , допускаемого вращательной парой  $A$ .

Шесть равенств (2.8) определяют закон движение звена 1. Уравнения (2.8) содержат пять уравнений связей и шесть переменных  $x_A, y_A, z_A, \varphi_{1x}, \varphi_{1y}, \varphi_{1z}$ , из которых одна  $\varphi_{1z}$  – независимая.

Приняв за полюс звена 2 точку  $B$ , а за базовый отрезок – отрезок  $BC$  длиной  $L$ , запишем уравнения (2.7) для звена 2 ( $i = 2$ ) с учетом связей, наложенных на него звеном 1 через кинематическую пару  $B$ :

$$\begin{cases} x_B = x_A + l \cos \varphi_{1z}; y_B = y_A + l \sin \varphi_{1z}; z_B = z_A; \\ \varphi_{2x} = \frac{\pi}{2}; \varphi_{2y} = \frac{\pi}{2}; \varphi_{2z} = \varphi_{2z}(t), \end{cases} \quad (2.9)$$

где  $\varphi_{2z}(t)$  – функция угла поворота звена 2 вокруг оси  $B$ , допускаемого вращательной парой  $B$ .

Уравнения (2.9) содержат пять уравнений связей и шесть новых переменных  $x_B, y_B, z_B, \varphi_{2x}, \varphi_{2y}, \varphi_{2z}$ , из которых одна  $\varphi_{2z}$  – независимая.

Приняв за полюс звена 3 точку  $C$ , а за базовый отрезок – отрезок  $CD$  длиной  $l$ , запишем уравнения (2.7) для звена 3 ( $i = 3$ ) с учетом

связей, наложенных на него звеном 2 через кинематическую пару  $C$  и без учета связей, наложенных на него со стороны стойки через кинематическую пару  $D$ :

$$\begin{cases} x_C = x_B + L \cos \varphi_{2z}; y_C = y_B + L \sin \varphi_{2z}; z_C = z_B; \\ \varphi_{3x} = \frac{\pi}{2}; \varphi_{3y} = \frac{\pi}{2}; \varphi_{3z} = \varphi_{3z}(t), \end{cases} \quad (2.10)$$

где  $\varphi_{3z}(t)$  – функция угла поворота звена 3 вокруг оси  $C$ , допускаемого вращательной парой  $C$ .

Уравнения (2.10) содержат пять уравнений связей и шесть новых переменных  $x_C, y_C, z_C, \varphi_{3x}, \varphi_{3y}, \varphi_{3z}$ , из которых одна  $\varphi_{3z}$  – независимая.

Для замыкания контура в точке  $D$  необходимо учесть уравнения связей, накладываемых на точку  $D$  звена 3. Звено 3 накладывает на нее три связи:

$$x_D = x_C - l \cos \varphi_{3z}; y_D = y_C - l \sin \varphi_{3z}; z_D = z_C; \quad (2.11)$$

Уравнения (2.11) содержат три новые переменные  $x_D, y_D, z_D$  и три уравнения связей.

Стойка накладывает на звено 3 в точке  $D$  пять связей через кинематическую пару  $D$ :

$$\begin{cases} x_D = L; y_D = y_A; z_D = z_A; \\ \varphi_{3x} = \frac{\pi}{2}; \varphi_{3y} = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Уравнения (2.12) содержат пять уравнений связей без новых переменных.

Всего двадцать три уравнения связей в равенствах (2.8)..(2.12) содержат двадцать одну переменную, из которых три  $\varphi_{1z}, \varphi_{2z}, \varphi_{3z}$  – независимые. Анализ уравнений связей показывает, что последние три уравнения (три избыточные связи) можно получить из других уравнений: равенство  $z_D = z_A$  следует из равенств  $z_B = z_A, z_C = z_B, z_D = z_C$ ; последние два равенства дублируют те же в уравнениях (2.10). Оставшиеся двадцать независимых уравнений связей позволяют определить двадцать переменных из 21. Следовательно, одноконтурный механизм имеет три контурные избыточные связи и одну степень свободы. При этом  $\varphi_{2z} = 0; \varphi_{3z} = \varphi_{1z}$ .

Найдем число контурных избыточных связей при добавлении второго контура.

Движение звена 4 определим движениями полюса в точке  $E$ , базового отрезка  $EF$  длиной  $l$  и перпендикулярного ему отрезка. На звено 4 в точке  $E$  наложено пять геометрических связей со стороны звена 2, с которым звено образует вращательную пару. По условиям, уравнения (2.7) для звена 4 ( $i = 4$ ) с учетом связей в точке  $E$  и без учета связей в точке  $F$  имеют вид

$$\begin{cases} x_E = 0.5(x_B + x_C); y_E = 0.5(y_B + y_C); z_E = 0.5(z_B + z_C); \\ \varphi_{4x} = \frac{\pi}{2}; \varphi_{4y} = \frac{\pi}{2}; \varphi_{4z} = \varphi_{4z}(t), \end{cases} \quad (2.13)$$

где  $\varphi_{4z}(t)$  – функция угла поворота звена 4 вокруг оси  $E$ , допускаемого вращательной парой  $E$ .

Уравнения (2.13) содержат пять уравнений связей и шесть новых переменных  $x_E, y_E, z_E, \varphi_{4x}, \varphi_{4y}, \varphi_{4z}$ , из которых одна  $\varphi_{4z}$  – независимая.

Для замыкания второго контура в точке  $F$  необходимо учесть уравнения связей, накладываемых на точку  $F$  звена 4. Звено 4 накладывает на нее три связи:

$$x_F = x_E - l \cos \varphi_{4z}; y_F = y_E - l \sin \varphi_{4z}; z_F = z_E. \quad (2.14)$$

Уравнения (2.14) содержат три новые переменные  $x_F, y_F, z_F$  и три уравнения связей.

Стойка накладывает на звено 4 в точке  $F$  пять связей через кинематическую пару  $F$ :

$$\begin{cases} x_F = 0.5(x_A + x_D) = \frac{L}{2}; y_F = 0.5(y_A + y_D) = y_A; z_F = 0.5(z_A + z_D); \\ \varphi_{4x} = \frac{\pi}{2}; \varphi_{4y} = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Уравнения (2.15) содержат пять уравнений связей без новых переменных.

Всего добавленные тринадцать уравнений связей в равенствах (2.13)..(2.15) содержат девять добавленных переменных. Анализ добавленных уравнений связей показывает, что четыре уравнения (четыре избыточные связи) можно получить из других уравнений: ра-

венство  $z_F = 0.5(z_A + z_D)$  в системе уравнений (2.15) следует из равенств  $z_B = z_A$ ,  $z_D = z_C$ ,  $z_E = 0.5(z_B + z_C)$ ,  $z_F = z_E$  в уравнениях (2.9), (2.11), (2.13), (2.14). Последние два равенства в системе уравнений (2.15) дублируют те же в уравнениях (2.13). Четвертое уравнение избыточных связей получим из системы уравнений (2.14):

$$(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 = l^2.$$

Оно дублирует первые два равенства в системах (2.15), (2.13), (2.11), (2.9), если учесть, что  $\varphi_{3z} = \varphi_{1z}$ . Действительно,

$$0.25[(x_B - x_A) + (x_C - x_D)]^2 + [(y_B - y_A) + (y_C - y_D)]^2 = l^2$$

Оставшиеся девять независимых уравнений связей из тринадцати позволяют определить все девять добавленных переменных. Следовательно, второй контур «не изменил» число степеней свободы механизма и «добавил» четыре контурные избыточные связи.

## 2.6. Простейшие группы самоустанавливающегося механизма

Добавление замкнутого контура в кинематическую цепь служит источником возникновения новых или дополнительных контурных избыточных связей.

*Группой самоустанавливающихся звеньев является кинематическая цепь, включение которой в механизм не изменяет число степеней свободы и число контурных избыточных связей механизма.*

Пусть  $m$  – число звеньев группы;  $p_{1m}, p_{2m}, p_{3m}, p_{4m}, p_{5m}$  – число кинематических пар группы пятого, четвертого, третьего, второго и первого класса или одно, двух, трех, четырех и пятиподвижных соответственно.

Из формулы Сомова-Малышева (2.1) следует, что добавление к механизму замкнутого контура за счет группы самоустанавливающихся звеньев не изменяет число степеней свободы и число контурных избыточных связей, если справедливо равенство

$$6m - 5p_{1m} - 4p_{2m} - 3p_{3m} - 2p_{4m} - p_{5m} = 0. \quad (2.16)$$

Если равенство (2.16) не соблюдается, то группа присоединяемых заданными кинематическими парами звеньев вносит дополнительно



$q_m$  избыточных связей или, если присоединяемые звенья не входят в какой-либо замкнутый контур, добавляет  $W_m$  степеней свободы:

$$q_m = 5p_{1m} + 4p_{2m} + 3p_{3m} + 2p_{4m} + p_{5m} - 6m; \quad (2.17)$$

$$W_m = 6m - 5p_{1m} - 4p_{2m} - 3p_{3m} - 2p_{4m} - p_{5m}. \quad (2.18)$$

Простейшие группы состоят из двух звеньев и трех кинематических пар (табл. 2.3).

### 2.3. Простейшие группы самоустанавливающегося механизма

Наименование	Группы
Группы звеньев 1, 2 с вращательной (A), цилиндрической (B) и сферической (C) парами	
Группы звеньев 1, 2 с поступательной (D), цилиндрической (B) и сферической (C) парами	

Простейшие группы присоединяются к звеньям исходного механизма элементами концевых пар (обозначены точечными линиями).

Рассмотрим плоский механизм привода кормораздатчика (рис. 2.9). Определим состав его звеньев: 0 – неподвижное звено; 1 – ведущее звено (кривошип); 2, 4 – шатуны; 3 – коромысло; 5 – ведомое звено (ползун). Таким образом, число  $n$  подвижных

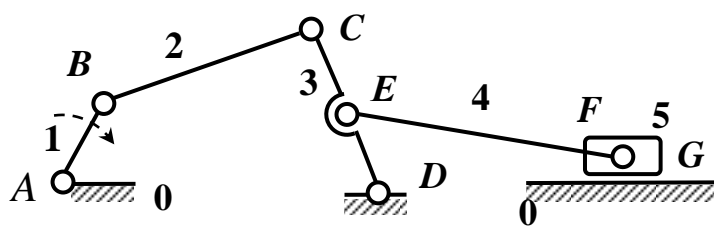


Рис. 2.9. Схема плоского механизма

звеньев равно 5. Анализ кинематических пар рекомендуется проводить по таблице 2.4.

Число одноподвижных (низших) пар равно семи ( $p_1 = 7$ ), другие пары отсутствуют. По формуле Чебышева (2.3) для механизма третьего семейства находим, что число степеней свободы исходного плоского механизма равно 1:  $W = 3n - 2p_1 = 1$ .

2.4. Образующие звенья, обозначения и наименования пар  
(В – вращательная, П – поступательная)

0, 1	1, 2	2, 3	3, 0	3, 4	4, 5	5, 0
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<b>В</b>	<b>В</b>	<b>В</b>	<b>В</b>	<b>В</b>	<b>В</b>	<b>П</b>

Механизм кормораздатчика можно образовать из начального механизма с открытой цепью, содержащего стойку и кривошип, и двух групп звеньев, каждая из которых добавляет к механизму замкнутый контур.

В соответствии с формулой (2.17) присоединение к начальному механизму группы звеньев 2, 3 ( $m = 2$ ) с вращательными парами *B*, *C*, *D* ( $p_{1m} = 3$ ) вносит три избыточные связи:

$$q_m = 5p_{1m} - 6m = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 3.$$

Аналогично присоединение к новому механизму группы звеньев 4, 5 ( $m = 2$ ) с вращательными парами *E*, *F*, *G* ( $p_{1m} = 3$ ) вносит дополнительные три избыточные связи:  $q_m = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 3$ .

Чтобы избавиться от избыточных связей, механизм кормораздатчика с одной степенью свободы можно образовать из начального механизма с открытой цепью и двух простейших групп самоустанавливающихся звеньев, приводящих к созданию двух замкнутых контуров (рис. 2.10).

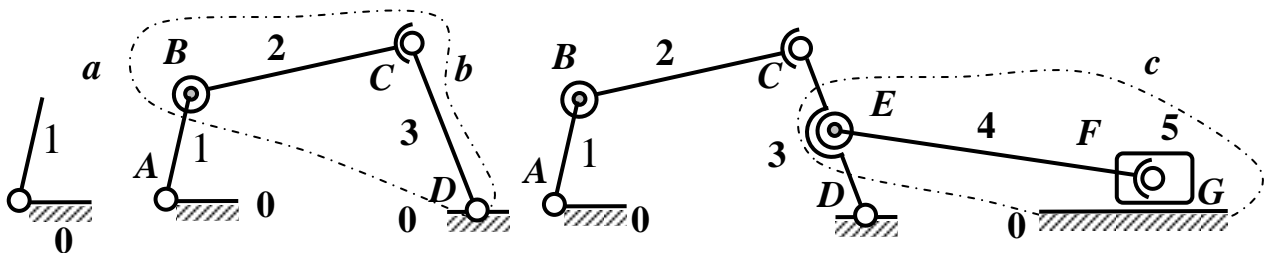


Рис. 2.10. Исходный (а), одноконтурный (b), двухконтурный (с) механизм

В самоустанавливающемся механизме кормораздатчика кинематические одноподвижные пары *B*, *E* заменены на двухподвижные цилиндрические, а кинематические пары *C*, *F* – на трехподвижные сферические.

## 2.7. Структурные группы Ассура

*Структурной группой Ассура называется неделимая кинематическая плоская цепь, состоящая из звеньев с поступательными и вращательными парами, которая при соединении со стойкой образует неизменяемую систему.*

В соответствии с формулой (2.3), приняв  $W = 0$ ,  $p_2 = 0$ , получаем следующее математическое условие отнесения кинематической цепи к структурной группе:

$$3n - 2p_1 = 0,$$

где  $n$  – число звеньев группы,  $p_1$  – число вращательных и поступательных пар группы.

Механизмом первого класса первого порядка, или начальным механизмом называется простейший механизм, который состоит из одного подвижного звена и стойки, образующих одноподвижную пару.

При структурном анализе и синтезе плоских рычажных механизмов используют принцип наслоения структурных групп: всякий механизм может быть получен путем последовательного присоединения структурных групп к звеньям механизмов первого класса и структурных групп. При этом первая группа присоединяется к стойке и ведущему звену, все остальные присоединяются к любым звеньям.

По предложению И.И. Артоболевского класс группы равен числу кинематических пар, входящих в замкнутый контур, образованный внутренними кинематическими парами. Группы класса II как исключение содержат одну внутреннюю пару. Их классифицируют так: «ВВВ» – с тремя вращательными парами  $B, C, D$ ; «ВВП» – с вращательными парами  $B, C$  и поступательной  $D$ ; «ВПВ» – с вращательными парами  $B, D$  и поступательной  $C$ , «ВПП» – с вращательной парой  $B$  и поступательными  $C, D$ , «ПВП» – с поступательными парами  $B, D$  и вращательной парой  $C$  (табл 2.5).

Внутренней парой группы класса II является пара  $C$ , а внешними парами, элементы которых присоединяют звенья – пары  $B$  и  $D$ . Для группы класса III внутренними парами служат  $C, D, F$ , внешними –  $B$ ,

*E, G*. В оборудовании АПК наибольшее распространение нашли группы класса II.

### 2.5. Простые структурные группы со звеньями 1, 2, 3, 4 и парами *B..G*

Класс группы	Число $n$ звеньев	Число $p_1$ пар	Схема группы с вращательными (в) и поступательными (п) парами
II	2	3	
III	4	6	
IV	4	6	

### 2.8. Алгоритм структурного анализа

Структурный анализ применим к плоским рычажным механизмам и предназначен для выбора методики кинематического и динамического расчетов. Алгоритм структурного анализа механизма реализуют в следующей последовательности:

- 1) вычерчивают структурную схему механизма, то есть графическое изображение механизма с использованием условных изображений звеньев и кинематических пар без указания размеров;
- 2) устанавливают наименования и нумерацию звеньев, входящих в состав механизма: стойка 0, ведущее звено 1, звено 2, ... ;

- 3) обозначают кинематические пары большими латинскими буквами  $A, B, C, D, \dots$  при перемещении по схеме механизма от ведущего звена к ведомому и составляют таблицу анализа кинематических пар, в которой указывают обозначения пар, номера звеньев, типы пар;
- 4) определяют число степеней свободы механизма по формуле (2.3);
- 5) выделяют механизм (механизмы) класса I;
- 6) кинематическую цепь без начального механизма расчленяют на структурные группы Ассура;
- 7) определяют класс каждой структурной группы;
- 8) составляют формулу строения механизма;
- 9) определяют класс механизма по наивысшему классу входящих в него групп.

## 2.9. Примеры структурного анализа

*Пример 1.* Двухцилиндровый четырехтактный двигатель, состоящий из двух кривошипно-ползунных механизмов, параллельно соединенных с коленчатым валом, применяют в тракторах (рис. 2.11).

За начальное положение коленчатого вала принято  $OB_0$ , после его первого оборота оно обозначено  $OB_1$  и за цикл –  $OB_2$ . В изучаемом положении в цилиндре с поршнем 3 происходит такт впуска топливно-воздушной смеси и такт ее сжатия в цилиндре с поршнем 5. Такты расширения горючей смеси в цилиндрах с поршнями 3 и 4 происходят при повороте коленчатого вала на угол  $180^\circ..360^\circ$  и  $360^\circ..540^\circ$  соответственно. При этом ведущим звеном будет один из поршней. При повороте вала на угол  $0^\circ..180^\circ$  и  $540^\circ..720^\circ$  поршни двигаются по инерции за счет накопленной за время тактов расширения кинетической энергии коленчатого вала с маховиком. Таким образом, за четыре такта работы двигателя происходит два рабочих хода поршней и два такта холостого хода. На холостом ходу ведущим звеном можно считать коленчатый вал (кривошип).

Четырехцилиндровые двигатели автомобилей обеспечивают рабочий ход одного из поршней в каждом такте.

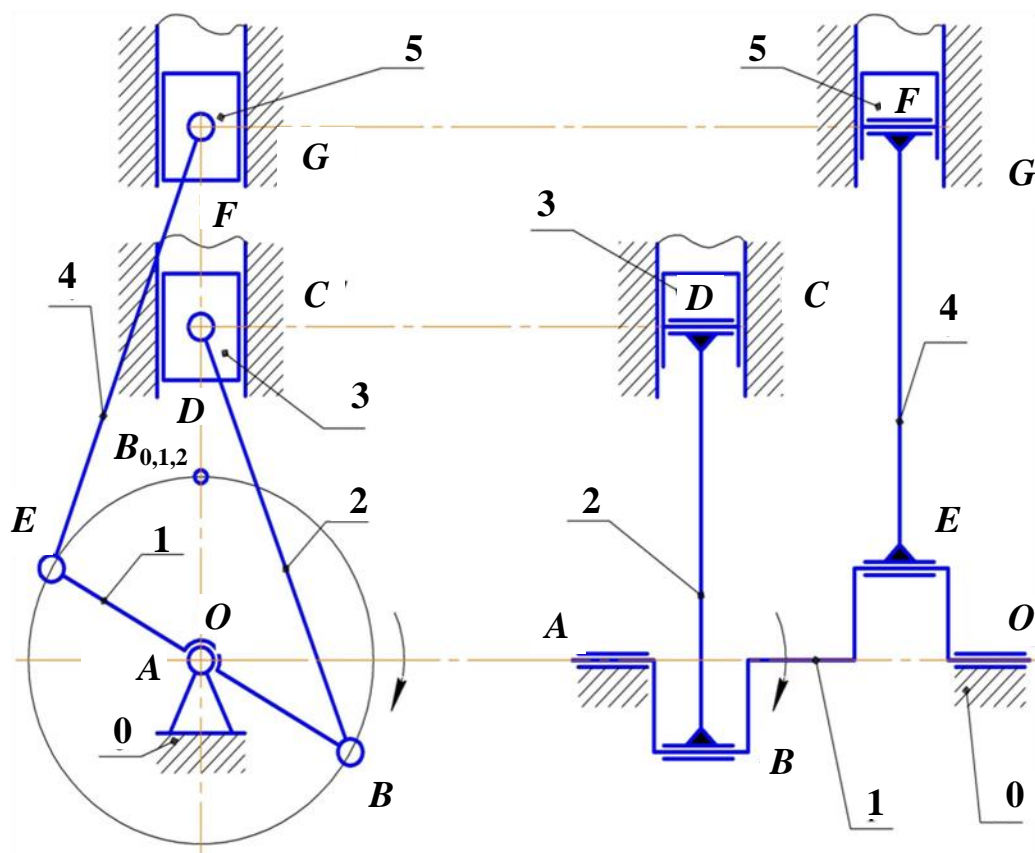


Рис. 2.11. Структурная схема механизма

Проведем структурный анализ механизма.

Этап 1. Определяем состав звеньев механизма: 0 – стойка; 1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – ползун (поршень, ведущее звено); 4 – шатун; 5 – ползун (ведущее звено).

Этап 2. Составляем таблицу кинематических пар с указанием обозначений, названий (В – вращательная, П – поступательная) и номеров образуемых их звеньев (табл. 2.6).

2.6. Обозначения и наименования кинематических пар

A	B	C	D	E	F	G
0, 1	1, 2	0, 3	2, 3	1, 4	4, 5	5, 0
В	В	П	В	В	В	П

Этап 3. По формуле (2.3) находим число степеней свободы исследуемого плоского механизма:  $W = 3n - 2p_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$ .

Этап 4. В зависимости от такта выделяем механизм первого класса, состоящий из стойки 0 и ползуна 3 с кинематической парой C или из стойки 0 и ползуна 5 с кинематической парой G или из стойки 0 и кривошипа 1 с парой A (рис. 2.12).

Этап 5. Расчленяем механизм на механизм класса I и две структурные группы класса II. Состав структурных групп зависит от такта. Когда ведущим звеном служит ползун 3, первая группа содержит звенья 2, 1 с внутренней кинематической парой B и присоединяемыми внешними парами D, A. Вторая группа состоит из звеньев 4, 5 с парами E, F, G. Когда ведущим звеном служит ползун 5, первая группа содержит звенья 4, 1 с внутренней кинематической парой E и присоединяемыми внешними парами F, A. Вторая группа состоит из звеньев 2, 3 с парами B, D, C. Когда ведущим звеном служит кривошип 1, первая группа содержит звенья 2, 3 с внутренней кинематической парой D, а вторая – из звеньев 4, 5 с внутренней парой F.

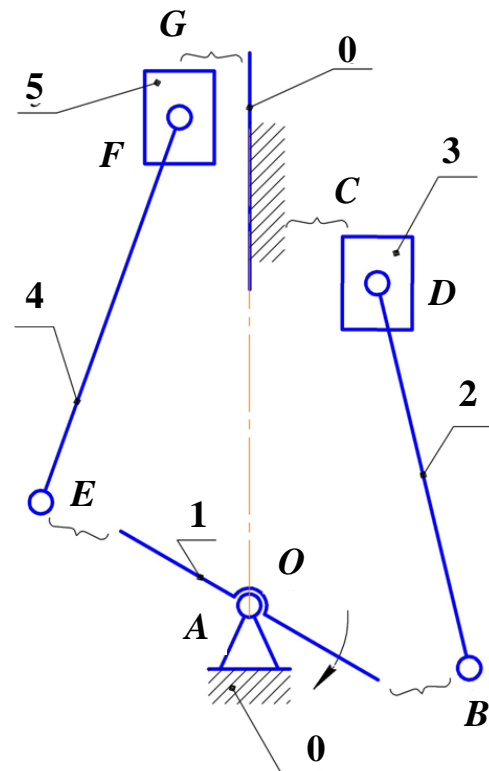


Рис. 2.12. Структурные группы

содержит звенья 4, 1 с внутренней кинематической парой E и присоединяемыми внешними парами F, A. Вторая группа состоит из звеньев 2, 3 с парами B, D, C. Когда ведущим звеном служит кривошип 1, первая группа содержит звенья 2, 3 с внутренней кинематической парой D, а вторая – из звеньев 4, 5 с внутренней парой F.

Этап 6. Составляем формулу строения:

1) механизм кл. I (0 – 3) + группа кл. II (2 – 1) + группа кл. II (4 – 5);

2) механизм кл. I (0 – 5) + группа кл. II (4 – 1) + группа кл. II (2 – 3);

3) механизм кл. I (0 – 1) +  $\begin{cases} \text{группа кл. II (2 – 3)} \\ \text{группа кл. II (4 – 5)} \end{cases}$

Таким образом, данный механизма относится к классу II.

*Пример 2.* Строгальный станок приводится в движение плоским рычажным механизмом с заданной структурной схемой (рис. 2.13 а).

Проведем структурный анализ механизма.

Этап 1. Определяем состав звеньев механизма: 0 – стойка; 1 – кривошип (ведущее звено); 2 – камень (шатун); 3 – кулиса (коромысло); 4 – шатун; 5 – ползун (ведомое звено).

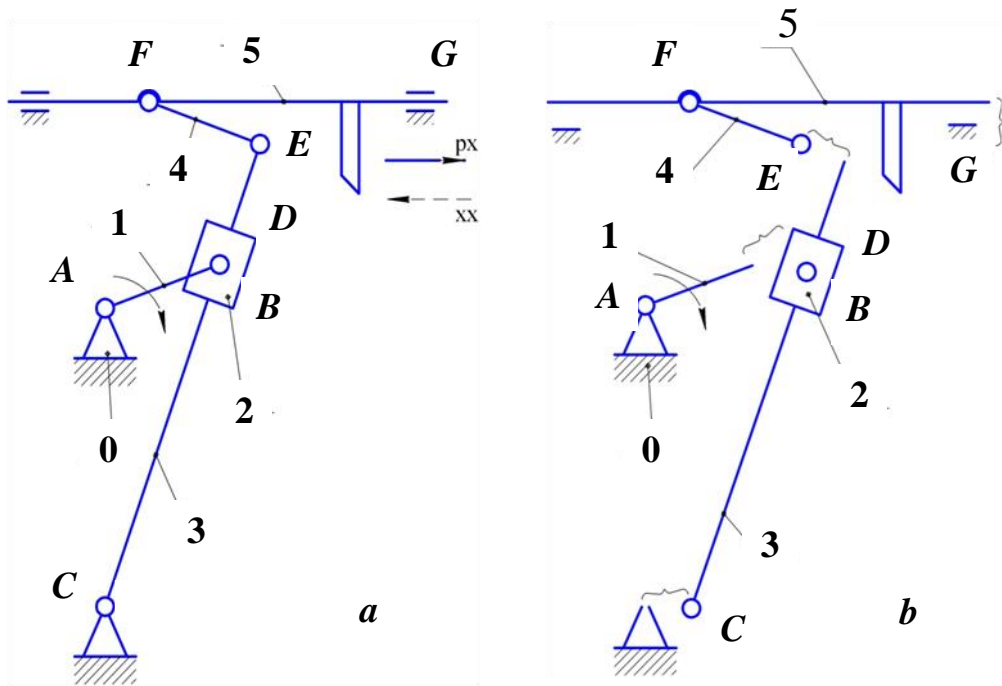


Рис. 2.13. Структурная схема (a) и структурные группы (b)

Этап 2. Составляем таблицу кинематических пар с указанием обозначений, названий (В – вращательная, П – поступательная) и номеров образуемых их звеньев (табл. 2.7).

**2.7. Обозначения и наименования кинематических пар**

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
0, 1	1, 2	0, 3	2, 3	3, 4	4, 5	5, 0
В	В	В	П	В	В	П

Этап 3. По формуле (2.3) находим число степеней свободы исследуемого плоского механизма:  $W = 3n - 2p_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$ .

Этап 4. Выделяем механизм первого класса, состоящий из стойки 0 и кривошипа 1, которые образуют кинематическую пару *A* (рис. 2.13 *b*).



Этап 5. Расчленим механизм на механизм класса I и две структурные группы Ассра. Первая группа содержит звенья 2, 3 с внутренней кинематической парой  $D$  и присоединяемыми внешними парами  $B, C$ . Вторая группа состоит из звеньев 4, 5 с парами  $E, F, G$ .

Этап 6. Составляем формулу строения:

Механизм кл. I ( $0 - 1$ ) + группа кл. II ( $2 - 3$ ) + группа кл. II ( $4 - 5$ ).

Таким образом, данный механизма относится к классу II.

*Пример 3.* Грохот зерноуборочного комбайна предназначен для очистки зерна от примесей колебательным движением решета. Его привод осуществляется плоским рычажным механизмом (рис. 2.14 *a*).

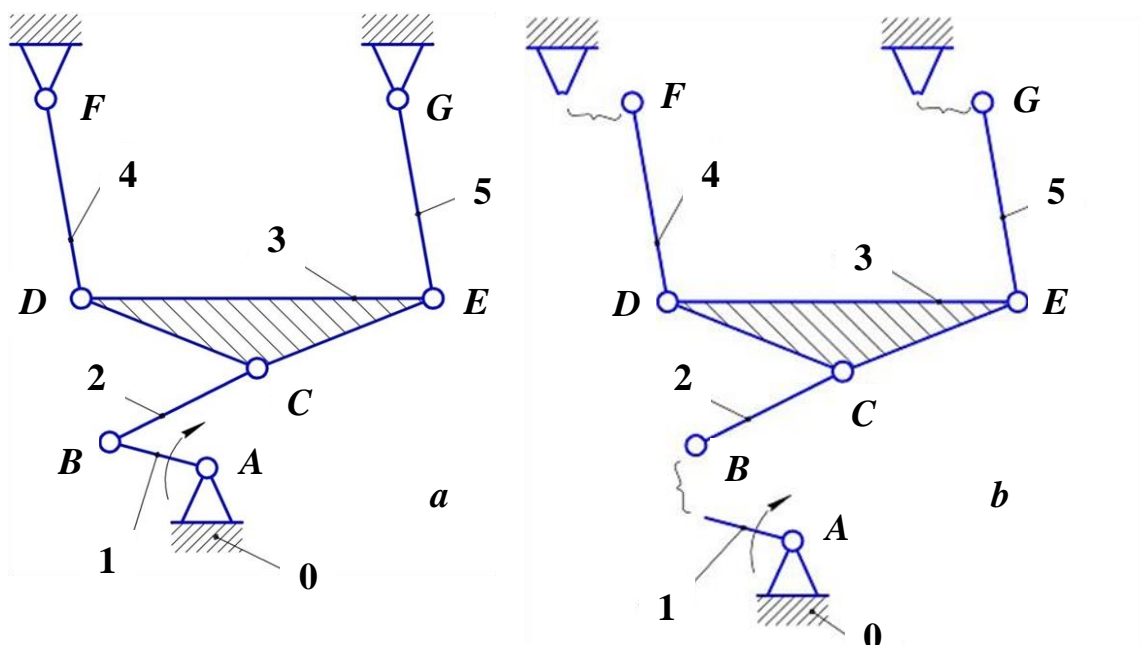


Рис. 2.14. Структурная схема (*a*) и группа Ассра (*b*)

Проведем структурный анализ механизма.

Этап 1. Определяем состав звеньев механизма: 0 – стойка; 1 – ведущее звено (кривошип); 2 – шатун; 3 – шатун (решето, ведомое звено); 4 – коромысло; 5 – коромысло.

Этап 2. Составляем таблицу кинематических пар с указанием обозначений, названий ( $B$  – вращательная,  $\Pi$  – поступательная) и номеров образуемых их звеньев (табл. 2.8).

## 2.8. Обозначения и наименования кинематических пар

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
0, 1	1, 2	0, 3	2, 3	3, 4	4, 5	5, 0
В	В	В	П	В	В	П

Этап 3. По формуле (2.3) находим число степеней свободы исследуемого плоского механизма:  $W = 3n - 2p_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$ .

Этап 4. Выделяем механизм первого класса, состоящий из стойки 0 и кривошипа 1, которые образуют кинематическую пару *A* (рис. 2.14 *b*).

Этап 5. Расчленим механизм на механизм класса I и структурную группу класса III. Группа класса III состоит из четырех звеньев с номерами 2, 3, 4, 5 и шести кинематических пар *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*. Характерным признаком структурной группы класса III является наличие базисного звена 3, имеющего в качестве трех поводков звенья 2, 4, 5.

Этап 6. Составляем формулу строения:

Механизм кл. I (0 – 1) + группа кл. III (2 – 3 – 4 – 5).

Механизм привода грохота относится к механизму класса III.

*Пример 4.* Укладчик штучных продуктов предназначен для захвата, переноса и укладки продукта, подаваемого транспортером  $T_1$  в тару на транспортере  $T_2$  упаковочной машины (рис. 2.15 *a*).

Вакуумный захват, установленный на шатуне 4, захватывает продукт над транспортером  $T_1$ , перемещается с ним к таре на транспортере  $T_2$  и после укладки в тару возвращается обратно. Требуемое перемещение захвата реализуют два независимых друг от друга серводвигателя, роторы которых передают движение на ползуны 1 и 2. Холостой ход осуществляется при реверсировании этих двигателей. Привод захвата осуществляется плоским рычажным механизмом.

Проведем структурный анализ механизма.

Этап 1. Определяем состав звеньев механизма: 0 – стойка; 1 – ползун (ведущее звено); 2 – ползун (ведущее звено); 3 – шатун; 4 – шатун.

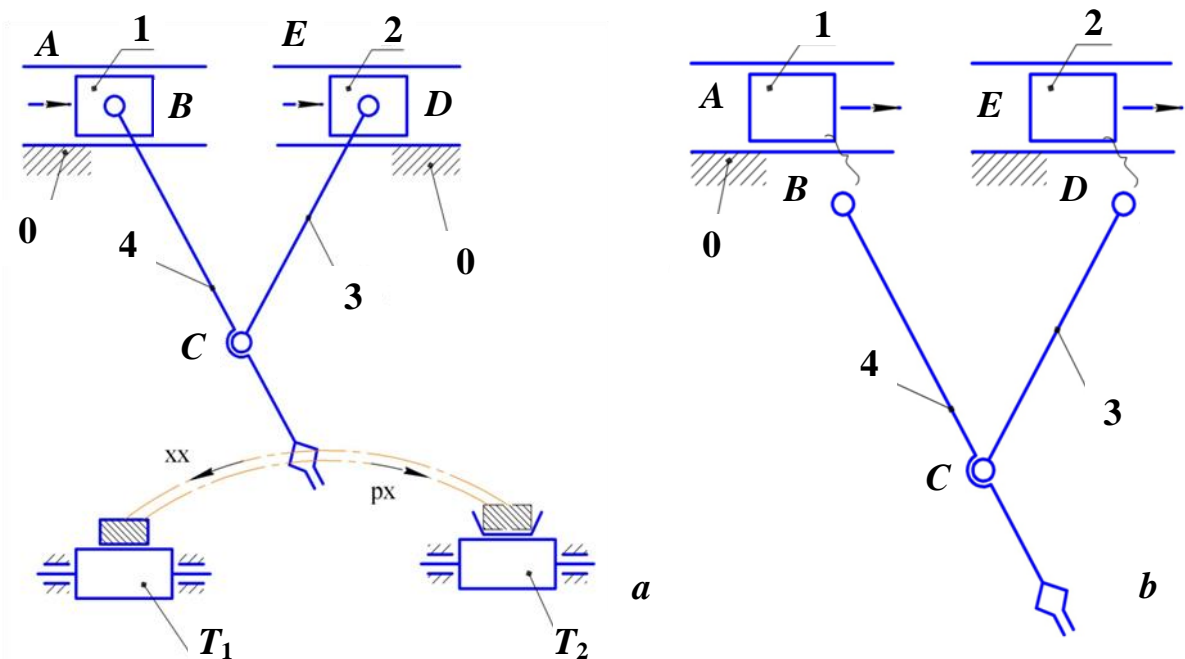


Рис. 2.15. Структурная схема (a) и группы Ассура (b)

Этап 2. Составляем таблицу кинематических пар с указанием обозначений, названий (В – вращательная, П – поступательная) и номеров образуемых их звеньев (табл. 2.9).

### 2.9. Обозначения и наименования кинематических пар

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
0, 1	1, 4	3, 4	2, 3	0, 2
П	В	В	В	П

Механизм содержит четыре подвижных звена, пять низших пар.

Этап 3. По формуле (2.3) находим число степеней свободы исследуемого плоского механизма:  $W = 3n - 2p_1 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$ .

Этап 4. Выделяем два механизма первого класса: первый состоит из стойки 0, ползуна 1 и поступательной пары *A*, второй – из стойки 0, ползуна 2 и поступательной пары *E* (рис. 2.15 *b*).

Этап 5. Расчлняем механизм на два механизма класса I и структурную группу класса II. Структурная группа класса II состоит из

двух звеньев 3, 4 и трех кинематических пар  $B, C, D$  (рис. 2.15  $b$ ).  
 Число степеней свободы механизма упаковщика равно 2.

Этап 6. Составляем формулу строения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Механизм кл. I (0-1)} \\ \text{Механизм кл. I (0-2)} \end{array} \right\} + \text{группа кл. II (3-4)}.$$

*Пример 5.* Формирование пакета для дозирования и упаковки сыпучих продуктов основано на продольной и двух поперечных термо-сварочных операциях (рис. 2.16).

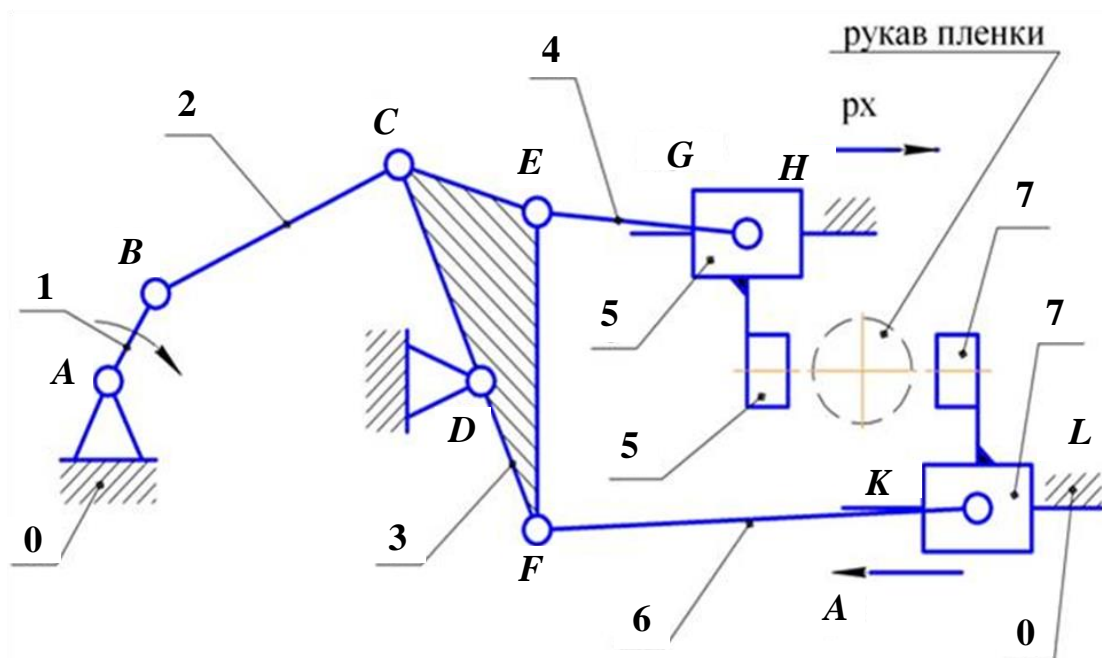


Рис. 2.16. Структурная схема

Асинхронный, частотно-регулируемый двигатель равномерно вращает кривошип 1 шарнирного четырехзвенника, включающего шатун 2 и треугольное коромысло 3, качающееся вокруг оси  $D$ . К последнему присоединены шатуны 4 и 6, связанные с ползунами 5 и 7, снабженными сварочными губками. При сближении ползунов осуществляется рабочий ход (рх) и выполняется сварка шва.

Проведем структурный анализ механизма.

Этап 1. Определяем состав звеньев механизма: 0 – стойка; 1 – ведущее звено (кривошип); 2 – шатун; 3 – коромысло; 4 – шатун; 5 – ползун, 6 – шатун, 7 – ползун.

Этап 2. Составляем таблицу кинематических пар с указанием обозначений, названий (В – вращательная, П – поступательная) и номеров образуемых их звеньев (табл. 2.10).

### 2.10. Обозначения и наименования кинематических пар

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>K</i>	<i>L</i>
0, 1	1, 2	2, 3	0, 3	3, 4	3, 6	4, 5	0, 5	6, 7	0, 7
В	В	В	В	В	В	В	П	В	П

Этап 3. По формуле (2.3) находим число степеней свободы исследуемого плоского механизма:  $W = 3n - 2p_1 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 1$ .

Этап 4. Выделяем механизм первого класса, состоящий из стойки 0 и кривошипа 1, которые образуют кинематическую пару *A* (рис. 2.17).

Этап 5. Расчленим механизм на механизм класса I и три структурные группы Ассур. Первая группа содержит звенья 2, 3 с внутренней кинематической парой *C* и присоединяемыми внешними парами *B*, *D*. Вторая группа состоит из звеньев 4, 5 с парами *E*, *H*, *G*. Третья группа состоит из звеньев 6, 7 с парами *F*, *K*, *L*.

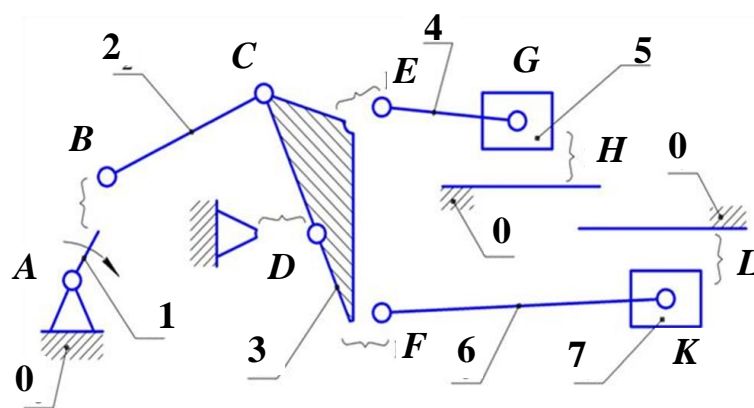


Рис. 2.17. Структурные группы

Этап 6. Составляем формулу строения:  
 Механизм кл. I (0 – 1) + группа кл. II (2 – 3) + группа кл. II (4 – 5).  
 Таким образом, данный механизма относится к классу II.

$$\text{Механизм кл. I (0-1) + группа кл. II (2-3) + } \begin{cases} \text{группа кл. II (4-5)} \\ \text{группа кл. II (6-7)} \end{cases}$$

### 3. КИНЕМАТИКА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Кинематическое исследование механизма состоит в определении положения, скорости и ускорения именованных точек звеньев в заданные моменты времени. Оно проводится аналитическими и графоаналитическими методами. Достоинством аналитических методов является точность, достоинствами графоаналитических методов – простота и наглядность.

#### 3.1. План положений и кинематические диаграммы

*Графическое изображение механизма, вычерчиваемое с соблюдением геометрических пропорций и с использованием условных обозначений звеньев и кинематических пар, называется кинематической схемой механизма.*

*Планом положений плоского механизма с одной степенью свободы называется графическое изображение в принятом масштабе именованных звеньев и точек при заданных положениях начального звена.*

Масштаб  $\mu_l$  длин, применяемый при разработке кинематической схемы, задается изначально или определяется по формуле

$$\mu_l = \frac{L}{l}, \quad (3.1)$$

где  $L, l$  – соответственно натуральная длина звена (м) и заданная длина отрезка, изображающего звено на схеме (мм).

Размерность масштаба  $\mu_l$  длин такова:  $[\mu_l] = \text{м/мм}$ .

Кинематическое исследование осуществимо тогда, когда известны положения входного звена, размеры звеньев и масштаб длин.

Рассмотрим механизм очистки зерноуборочного комбайна, преобразующий вращательное движение кривошипа 1 в требуемое движение шатуна 5, представляющего собой решето (рис. 3.1). При вращении кривошипа с постоянной угловой скоростью кинематические характеристики любой точки механизма изменяются периодически, при этом период равен времени одного оборота кривошипа.

Кинематическим циклом механизма называется совокупность положений механизма за время, равное одному периоду.

Построение плана положений механизма очистки относительно рамы комбайна (стойки) в кинематическом цикле представим в виде алгоритма.

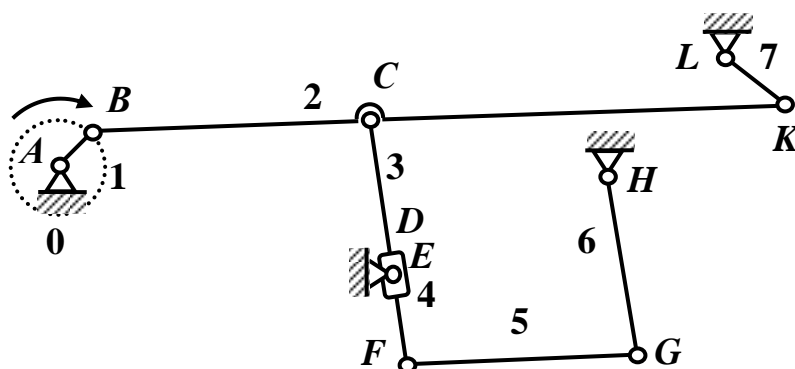


Рис. 3.1. Кинематическая схема механизма

1. Устанавливаем длины  $L_{AB}$ ,  $L_{BK}$ ,  $L_{CF}$ ,  $L_{FG}$ ,  $L_{HG}$ ,  $L_{KL}$  звеньев

1, 2, 3, 5, 6, 7; расстояние  $L_{BC}$  между шарнирами  $B$  и  $C$ ; неизменяемые смещения по горизонтали  $X_E$ ,  $X_H$ ,  $X_L$  и вертикали  $Y_E$ ,  $Y_H$ ,  $Y_L$  шарниров  $E$ ,  $H$ ,  $L$  относительно стойки:  $L_{AB} = 0,11$  м;  $L_{BK} = 1,14$  м;...  $Y_L = 0,30$  м.

2. Задаем масштаб  $\mu_l$  длин:  $\mu_l = 0,01 \frac{\text{М}}{\text{ММ}}$ .

3. В плоскости кинематической схемы задаем систему координат  $Ox$ , жестко связанную со стойкой (рис. 3.2).

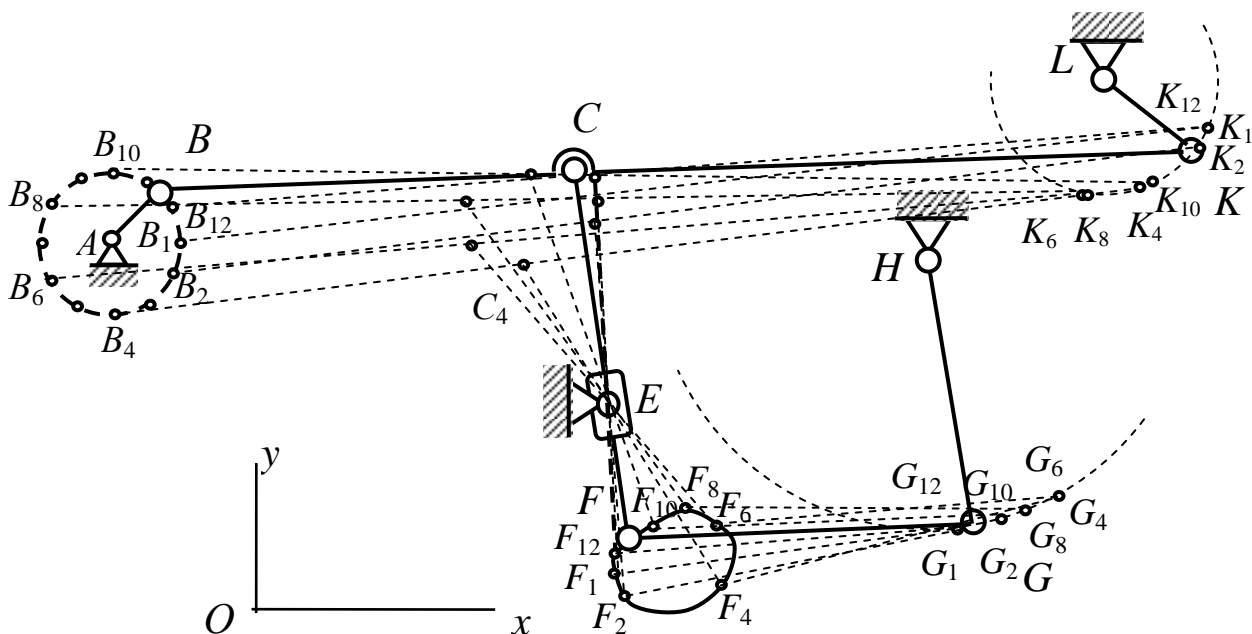


Рис. 3.2. План положений механизма

4. Вычисляем длины отрезков  $AB$ ,  $BK$ ,  $CF$ ,  $FG$ ,  $HG$ ,  $LK$ ,  $BC$ ,  $x_E$ ,  $x_H$ ,  $x_L$  и вертикали  $y_E$ ,  $y_H$ ,  $y_L$  изображающих соответственно звенья 1, 2, 3,

5, 6, 7, участка  $BC$  звена 2 между шарнирами  $B$  и  $C$ , а также неизменяемые смещения по горизонтали  $X_E, X_H, X_L$  и вертикали  $Y_E, Y_H, Y_L$  центров шарниров  $E, H, L$  относительно стойки:

$$AB = L_{AB}/\mu_l = 0,11/0,01 = 11 \text{ мм};$$

$$BK = L_{BK}/\mu_l = 1,14/0,01 = 114 \text{ мм};$$

$$\dots; y_L = Y_L/\mu_l = 0,3/0,01 = 30 \text{ мм}.$$

5. Выбираем неподвижную точку  $A$  и в некотором положении кривошипа  $AB$  вычерчиваем кинематическую схему.

6. Обозначаем 12 положений  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{12}$  пальца  $B$  кривошипа в кинематическом цикле через равный интервал времени  $\Delta t$  (рис. 3.2).

7. В каждом из двенадцати положений точки  $B$  методом засечек по очереди определяем положения точек  $K, C, F, G$ :

1) точка  $K$  находится на пересечении окружностей радиусом  $BK$  с центром в точке  $B$  и радиусом  $LK$  с центром в точке  $L$ ;

2) точка  $C$  делит отрезок  $BK$  в соотношении  $\frac{BC}{BK} = \frac{LBC}{LBK}$ ;

3) точка  $F$  находится на прямой, проходящей через точки  $C$  и  $E$ , на расстоянии  $CF$ ;

4) точка  $G$  находится на пересечении окружностей радиусом  $FG$  с центром  $F$  и радиусом  $HG$  с центром  $H$ .

8. Строим приближённую траекторию точки  $F$  выходного звена (шатунная кривая) путем плавного соединения последовательных положений точки в каждом положении кривошипа. План положений позволяет оценить скорость и ускорение именованной точки  $F$  с помощью кинематических диаграмм.

9. В каждом из двенадцати положений кривошипа фиксируем время  $t$  и измеряем координаты  $x_F, y_F$  точки  $F$  (рис. 3.3).

10. Задаем масштаб  $\mu_t$  времени так,

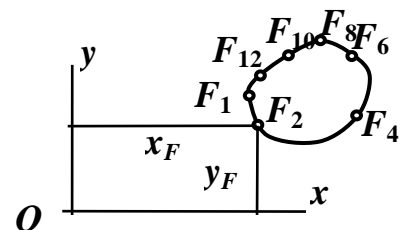


Рис. 3.3. Координаты точки  $F$  в положении  $F_2$



чтобы отрезок длиной  $d$  мм, например  $d = 100$  мм, соответствовал времени  $T$  кинематического цикла (с):  $\mu_t = \frac{T}{d} \frac{с}{мм}$ .

11. В декартовых системах координат  $Ox x_F$  и  $Ox y_F$  с осями абсцисс  $Ox$  (рис. 3.4) отображаются точки с координатами  $x$ ,  $x_F$  и  $x$ ,  $y_F$  соответственно для каждого положения кривошипа из двенадцати, где  $x = \frac{t}{\mu_t}$ . Строим приближённые графики зависимостей координат  $x_F$  и  $y_F$  от времени плавным соединением точек.

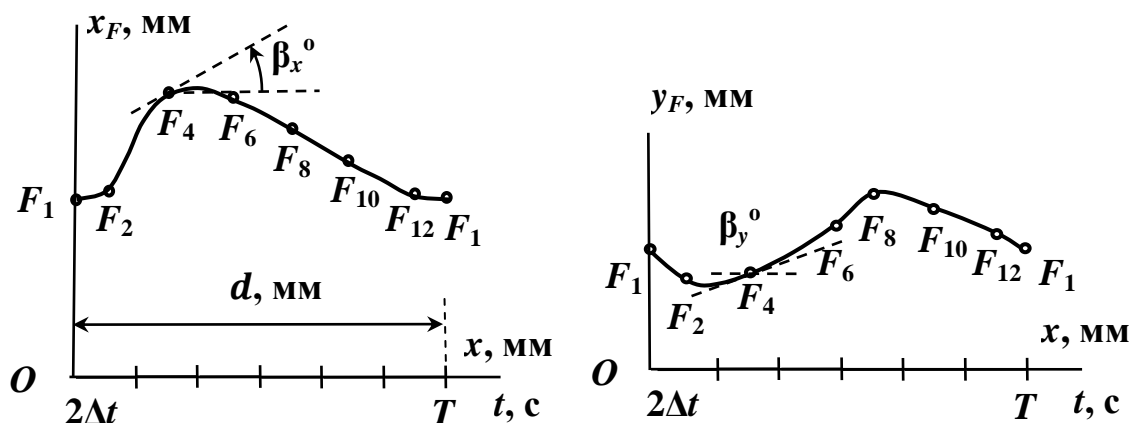


Рис. 3.4. Диаграммы координат точки  $F$  на схеме

12. В точках кривых на обоих графиках в момент времени, соответствующий каждому из двенадцати положений кривошипа, проводим касательные к кривым и измеряем углы  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ , образуемые касательными и осью  $Ot$  (рис. 3.4). Углы считаем положительными, если они отсчитываются от оси  $Ot$  против хода стрелки часов.

13. В момент времени, соответствующий каждому из двенадцати положений кривошипа, после измерения углов  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  вычисляем проекции  $v_x$ ,  $v_y$  скорости точки  $F$  шатуна на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и величину  $v$  скорости (м/с):

$$v_x = \frac{d(\mu_l x_F)}{dt} = \frac{\mu_l}{\mu_t} \frac{dx_F}{dx} = \frac{\mu_l}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta_x; \quad v_y = \frac{d(\mu_l y_F)}{dt} = \frac{\mu_l}{\mu_t} \frac{dy_F}{dx} = \frac{\mu_l}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta_y;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

14. Строим диаграммы проекций скорости точки  $F$ , аналогичные диаграммам координат на рисунке 3.4. В декартовых системах координат  $Oxx_F$  и  $Oxy_F$  отображаем точки с координатами  $x, x_F$  и  $x, y_F$  соответственно для каждого положения кривошипа из двенадцати:

$$x = \frac{t}{\mu_t}; \quad x_F = \frac{v_x}{\mu_v}; \quad y_F = \frac{v_y}{\mu_v}.$$

Масштаб  $\mu_v$  ([м/с]/мм), задаем аналогично масштабу  $\mu_t$ .

Приближённые графики зависимостей координат  $x_F$  и  $y_F$  от времени строим плавным соединением точек.

15. По диаграммам проекций скорости точки  $F$  определяем проекции  $a_x, a_y$  ускорения на оси  $Ox, Oy$  и величину  $a$  ускорения точки  $F$  (м/с<sup>2</sup>):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\mu_v}{\mu_t} \frac{dx_F}{dx} = \frac{\mu_v}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta_x; \quad v_y = \frac{\mu_v}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta_y; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

### 3.2. Аналитические методы исследования

Аналитические методы кинематического исследования механизма актуальны, когда стоит задача точного расчета кинематических параметров. Положение плоского рычажного механизма с одной степенью свободы можно определить одной независимой переменной или обобщенной координатой. Ведущим звеном в таких механизмах служит кривошип или ползун, а обобщенной координатой – угол поворота кривошипа или дуговая координата полюса ползуна. Функции зависимостей геометрических параметров выходного звена от обобщенной координаты называются функциями положения.

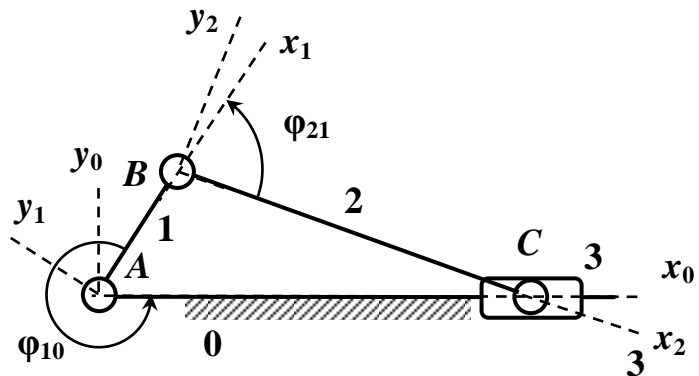
Известны две разновидности аналитических методов: метод преобразования координат (метод Ю. В. Морошкина) и метод замкнутого векторного контура [10].

Достоинством метода Ю. В. Морошкина является его применимость к пространственным механизмам, к открытым цепям и замкнутым контурам, а также простота алгоритмизации вычислительных

процедур. Применение метода рассмотрим на двух простых примерах.

*Пример 1.* Найдем функции положения ползуна 3, а также скорость и ускорение центра  $C$  центрального кривошипно-ползунного механизма с кривошипом 1 длины  $r$  и шатуном 2 длины  $l$  как функций от угла поворота кривошипа (рис. 3.5).

*Решение.* Суть метода Ю. В. Морошкина удобно представить в виде следующих шагов:



**Рис. 3.5. Кривошипно-ползунный механизм**

1) замкнутые цепи механизма, если такие имеются, мысленно размыкаем; в данном случае последнее звено 3 и центр  $C$  ползуна освобождаем от стойки;

2) со стойкой и каждым звеном связываем правые системы декартовых координат; в данном случае со стойкой 0 связываем систему координат  $Ax_0y_0$  с осями  $Ax_0$ ,  $Ay_0$ ; со звеном 1 связываем систему координат  $Ax_1y_1$  с осью  $Ax_1$ , направленной вдоль оси звена 1, а со звеном 2 –  $Bx_2y_2$  с осью  $Bx_2$ , направленной вдоль оси звена 2;

3) составляем уравнения для определения координат точки  $C$  относительно стойки в системе координат  $Ax_0y_0$ ;

4) добавляем уравнения связи, или условия замкнутости цепи; в данном случае цепь замкнута, и координата точки  $C$  по оси  $Ay_0$  равна нулю.

Запишем шаги 1 – 4 в аналитическом виде.

Пусть  $\varphi_{10}$  – обобщенная координата или угол между осями  $Ax_0$  и  $Ax_1$ , отсчитываемый от второй оси к первой против хода стрелки часов;

$\varphi_{21}$  – угол между осями  $Ax_1$  и  $Bx_2$ , отсчитываемый от второй оси к первой против хода стрелки часов.

Чтобы найти положение точки  $C$  относительно стойки, сначала найдем ее координаты  $x_{2C}$ ,  $y_{2C}$  относительно шатуна в системе координат  $Bx_2y_2$ , затем  $x_{1C}$ ,  $y_{1C}$  — относительно кривошипа в системе  $Ax_1y_1$  и, наконец,  $x_{0C}$ ,  $y_{0C}$  относительно стойки в системе  $Ax_0y_0$ . Очевидно,

$$x_{2C} = l; \quad y_{2C} = 0. \quad (3.2)$$

Учитывая, что система координат  $Ax_1y_1$  повернута относительно  $Bx_2y_2$  на угол  $\varphi_{21}$  и сдвинута по оси  $Ax_1$  на длину кривошипа, между координатами точки в обеих системах имеют место соотношения

$$\begin{cases} x_{1C} = r + x_{2C} \cos \varphi_{21} + y_{2C} \sin \varphi_{21}; \\ y_{1C} = -x_{2C} \sin \varphi_{21} + y_{2C} \cos \varphi_{21}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Аналогичные соотношения существуют между координатами точки в системах координат  $Ax_1y_1$  и  $Ax_0y_0$ :

$$\begin{cases} x_{0C} = x_{1C} \cos \varphi_{10} + y_{1C} \sin \varphi_{10}; \\ y_{0C} = -x_{1C} \sin \varphi_{10} + y_{1C} \cos \varphi_{10}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Подставляя  $x_{2C}$ ,  $y_{2C}$  из равенств (3.2) в (3.3), а затем  $x_{1C}$ ,  $y_{1C}$  из равенств (3.3) в (3.4), получим:

$$\begin{cases} x_{0C} = (r + l \cos \varphi_{21}) \cos \varphi_{10} - l \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{10}; \\ y_{0C} = -(r + l \cos \varphi_{21}) \sin \varphi_{10} - l \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{10}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Два уравнения (3.5) содержат три неизвестные, или функции  $x_{0C}$ ,  $y_{0C}$ ,  $\varphi_{21}$  от обобщенной координаты  $\varphi_{10}$ . Для решения задачи необходимо учесть связи, наложенные на точку  $C$  выходного звена. В данном случае имеется одна связь:

$$y_{0C} = 0. \quad (3.6)$$

Подставляя  $y_{0C}$  из равенства (3.6) в (3.5) и  $\sin(\varphi_{10} + \varphi_{21})$  из второго равенства системы (3.5) в первое, найдем искомую функцию положения ползуна:

$$x_{0C} = r \cos \varphi_{10} + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_{10}}.$$

Теперь можно найти закон движения шатуна: для этого подставляем  $x_{0C}$ ,  $y_{0C}$  в уравнения (3.4) и определяем аналитические выражения функций  $x_{1C}$ ,  $y_{1C}$ , а затем из уравнений (3.3) — функции  $\varphi_{21}$ .

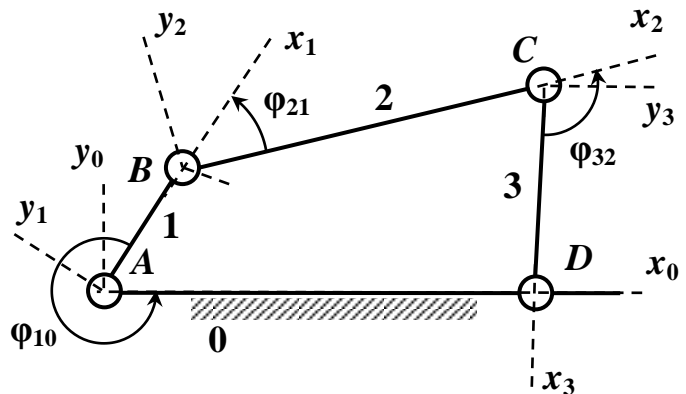
Пусть  $\omega$  — угловая скорость кривошипа. Скорость  $v_C$  и ускорение  $a_C$  ползуна можно определить по формулам

$$v_C = \frac{dx_{0C}}{dt} = \frac{dx_{0C}}{d\varphi_{10}} \frac{d\varphi_{10}}{dt} = -\omega \left[ r \sin \varphi_{10} + \frac{r^2 \sin(2\varphi_{10})}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_{10}}} \right];$$

$$a_C = \frac{dv_C}{d\varphi_{10}} \frac{d\varphi_{10}}{dt} = \omega \frac{dv_C}{d\varphi_{10}}.$$

**Пример 2.** В кривошипно-коромысловом механизме кривошип 1 длины  $r$  приводит в движение шатун 2 длины  $l$  и коромысло 3 длины  $L$  (рис. 3.6). Найдем функцию положения коромысла и его угловые скорость и ускорение как функции от угла поворота кривошипа при заданных положениях точек  $A$  и  $D$ .

*Решение.* Выбираем четыре системы декартовых координат: систему координат  $Ax_0y_0$ , связанную со стойкой, систему координат  $Ax_1y_1$ , связанную со звеном 1, систему координат  $Bx_2y_2$ , связанную со звеном 2, и систему координат  $Cx_3y_3$ , связанную со звеном 3. Оси  $Ax_1$ ,  $Bx_2$  и  $Cx_3$  подвижных систем координат направим вдоль осей звеньев 1, 2, 3.



**Рис. 3.6. Кривошипно-коромысловый механизм**

Пусть  $\varphi_{10}$  – обобщенная координата или угол между осями  $Ax_0$  и  $Ax_1$ , отсчитываемый от второй оси к первой против хода стрелки часов;  $\varphi_{21}$ ,  $\varphi_{32}$  – углы между осями  $Ax_1$ ,  $Bx_2$  и  $Bx_2$ ,  $Cx_3$ , отсчитываемые от второй оси к первой против хода стрелки часов.

Чтобы найти положение точки  $D$  после отсоединения коромысла от стойки, сначала найдем ее координаты  $x_{3C}$ ,  $y_{3C}$  относительно коромысла в системе координат  $Cx_3y_3$ , затем  $x_{2C}$ ,  $y_{2C}$  относительно шатуна в системе  $Bx_2y_2$ , затем  $x_{1C}$ ,  $y_{1C}$  относительно кривошипа в системе  $Ax_1y_1$  и, наконец,  $x_{0C}$ ,  $y_{0C}$  относительно стойки в системе  $Ax_0y_0$ .

По условию,

$$x_{3D} = L; \quad y_{3D} = 0. \quad (3.7)$$

Так как система координат  $Bx_2y_2$  повернута относительно  $Cx_3y_3$  на угол  $\varphi_{32}$  и сдвинута по оси  $Bx_2$  на длину шатуна, координаты точки  $D$  в обеих системах связаны такими соотношениями:

$$\begin{cases} x_{2D} = l + x_{3D} \cos \varphi_{32} + y_{3D} \sin \varphi_{32}; \\ y_{2D} = -x_{3D} \sin \varphi_{32} + y_{3D} \cos \varphi_{32}. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} x_{1D} = r + x_{2D} \cos \varphi_{21} + y_{2D} \sin \varphi_{21}; \\ y_{1D} = -x_{2D} \sin \varphi_{21} + y_{2D} \cos \varphi_{21}. \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} x_{0D} = x_{1D} \cos \varphi_{10} + y_{1D} \sin \varphi_{10}; \\ y_{0D} = -x_{1D} \sin \varphi_{10} + y_{1D} \cos \varphi_{10}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Подставляя  $x_{3D}$ ,  $y_{3D}$  из равенств (3.7) в (3.8),  $x_{2D}$ ,  $y_{2D}$  из равенств (3.8) в (3.9), а затем  $x_{1D}$ ,  $y_{1D}$  из равенств (3.9) в (3.10), получим:

$$\begin{cases} x_{0D} = r \cos \varphi_{10} + l \cos(\varphi_{21} + \varphi_{10}) + L \cos(\varphi_{32} + \varphi_{21} + \varphi_{10}); \\ y_{0D} = -r \sin \varphi_{10} - l \sin(\varphi_{21} + \varphi_{10}) - L \sin(\varphi_{32} + \varphi_{21} + \varphi_{10}). \end{cases}$$

Чтобы решить задачу, необходимо учесть связи, наложенные на точку  $D$  выходного звена:

$$\begin{cases} x_{0D} = a \\ y_{0D} = 0, \end{cases}$$

где  $a$  – заданное расстояние между опорами кривошипа и коромысла.

Из полученных уравнений можно найти аналитические выражения для  $\varphi_{21}$ ,  $\varphi_{32}$  как функций от обобщенной координаты  $\varphi_{10}$ , то есть по закону движения кривошипа найти законы движений шатуна и коромысла.

### 3.3. Графоаналитические методы исследования

#### 3.3.1. План скоростей и теорема подобия

*Планом скоростей называется масштабное графическое изображение векторов скоростей именованных точек механизма относительно стойки с началом в одной точке, называемой полюсом плана.*

План скоростей "привязан" к конкретному положению механизма, задаваемому кинематической схемой. Разным положениям соответствуют разные планы.

Рассмотрим пример построения плана скоростей.

На рисунке 3.7 в масштабе  $\mu_l$  изображена кинематическая схема пятизвенного плоского рычажного механизма с одной степенью свободы в положении, когда

кривошип 1 образует с вертикальной осью  $Oy$  угол  $\varphi$ . При заданных размерах звеньев и угловой скорости  $\omega$  кривошипа требуется построить план скоростей именованных точек  $C$ ,  $E$  шатуна 2 и  $G$  ползуна 5 (табл. 3.1).

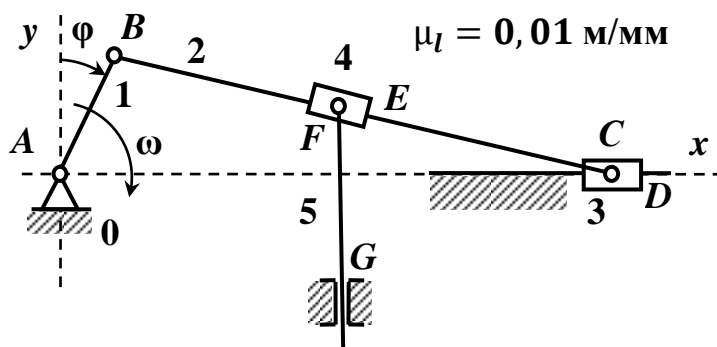


Рис. 3.7. Рычажный механизм

### 3.1. Наименования и обозначения исходных данных

Масштаб длины, м/мм	Угловая скорость кривошипа, рад/с	Угол поворота кривошипа, град	Длина кривошипа на схеме, мм	Длина шатуна на схеме, мм	Длина участка $BE$ шатуна на схеме, мм
$\mu_l$	$\omega$	$\varphi$	$AB$	$BC$	$BE$

В данном положении механизма центр  $F$  ползушки 4 совпадает с точкой  $E$  шатуна, а точка  $C$  шатуна и центра ползуна 3 – с точкой  $D$  стойки 0.

Введем следующие обозначения:

$\vec{v}_B, v_B$  – вектор и величина вектора скорости точки  $B$  шатуна относительно стойки, м/с;

$\vec{v}_C, v_C$  – вектор и величина вектора скорости точки  $C$  шатуна относительно стойки, м/с;

$\vec{v}_E, v_E$  – вектор и величина вектора скорости точки  $E$  шатуна относительно стойки, м/с;

$\vec{v}_F, v_F$  и  $\vec{v}_G, v_G$  – вектор и величина вектора скорости точек  $F$  и  $G$  ползуна 5 относительно стойки, м/с;

$\vec{v}_{BC}, v_{BC}$  – вектор и величина вектора скорости точки  $C$  шатуна относительно точки  $B$  шатуна как полюса, м/с;

$\vec{v}_{EF}, v_{EF}$  – вектор и величина вектора скорости точки  $F$  ползуна 5 относительно шатуна, м/с.

На плане векторы скорости точек в масштабе изображаются направленными отрезками с началом в полюсе плана, который на чертеже обозначается латинской буквой  $p$ .

Масштабом  $\mu_v$  называется численное значение скорости в метрах в секунду, изображаемой на плане отрезком длиной один миллиметр. Единица измерения масштаба  $\mu_v = \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$ .

Конец вектора скорости именованной точки на плане и именованная точка на кинематической схеме обозначаются одинаковыми буквами, первая – малой, вторая – заглавной (табл. 3.2).

### 3.2. Обозначения расчетных величин в натуре и на плане

$\vec{v}_B$	$v_B, \text{ м/с}$	$\vec{v}_C$	$v_C, \text{ м/с}$	$\vec{v}_E$	$v_E, \text{ м/с}$	$\vec{v}_G$	$v_G, \text{ м/с}$
$\vec{pb}$	$pb, \text{ мм}$	$\vec{pc}$	$pc, \text{ мм}$	$\vec{pe}$	$pe, \text{ мм}$	$\vec{pg}$	$pg, \text{ мм}$

План скоростей может быть построен только в порядке наслоения групп Ассура: сначала необходимо определить скорости всех точек звеньев группы, примыкающей к начальному механизму, начиная с конечных и включая точки присоединения к следующей группе, затем – точек присоединенной группы и так далее.

По определению, векторы скорости точки механизма на кинематической схеме и на плане параллельны:

$$\vec{pb} \parallel \vec{v}_B; \vec{pc} \parallel \vec{v}_C; \vec{pe} \parallel \vec{v}_E; \dots$$

Представим примерный алгоритм построения плана скоростей.

1. Построение начинаем с вычерчивания кинематической схемы механизма в заданном положении и заполнения таблицы 3.3.

### 3.3. Исходные данные кинематической схемы механизма

$\mu_l, \text{ м/мм}$	$\omega, \text{ рад/с}$	$\varphi, ^\circ$	$AB, \text{ мм}$	$BC, \text{ мм}$	$BE, \text{ мм}$
<b>0,01</b>	<b>40</b>	<b>30</b>	<b>10</b>	<b>40</b>	<b>15</b>

2. На втором этапе задаем масштаб плана. Для этого сначала вычисляем скорость точки  $B$  кривошипа по формуле

$$v_B = \omega \mu_l AB = 4 \text{ м/с.}$$



Масштаб задаем таким, чтобы скорость точки  $B$  на плане изображалась отрезком длины 20 мм:

$$\mu_v = \frac{v_B}{20} = \frac{4}{20} = 0,2 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

3. На плане скоростей изображаем вектор  $\overrightarrow{pb}$  длины 20 мм, параллельный вектору  $\vec{v}_B$ , то есть перпендикулярный отрезку  $AB$  на кинематической схеме и направленный так, чтобы соответствовать круговой стрелке, изображающей угловую скорость кривошипа (рис. 3.8).

$$\mu_v = 0,2 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$$



Рис. 3.8. План скорости точки  $B$

4. В первой группе Ассура, состоящей из звеньев 2, 3 и трех пар, устанавливаем следующую концевую точку  $C$ , скорость которой можно определить.

Точки  $B$  и  $C$  принадлежат одному звену. Формулу распределения скоростей точек тела звена 2 при плоскопараллельном движении запишем так [2]:

$$\underline{\underline{\vec{v}_C}} = \underline{\underline{\vec{v}_B}} + \underline{\vec{v}_{BC}}, \quad (3.11)$$

где  $\vec{v}_{BC}$  – вектор скорости точки  $C$  относительно точки  $B$  (полюса), направленный перпендикулярно отрезку  $BC$ .

Скорость точки  $C$  шатуна, являющейся и центром ползуна, направлена по горизонтальной оси  $Ox$ .

В формуле (3.11) вектор, известный по величине и направлению, подчеркнут дважды, а известный только по величине или только по направлению – один раз.

Разделив обе части равенства (3.11) на масштаб  $\mu_v$ , приходим к векторному уравнению в отрезках:

$$\frac{\overrightarrow{pc}}{\parallel Ox} = \frac{\overrightarrow{pb}}{\perp BC} + \frac{\overrightarrow{bc}}{\perp BC}. \quad (3.12)$$

Вектор  $\vec{bc}$  в уравнении (3.12) изображает вектор  $\vec{v}_{BC}$  в масштабе.

Векторное уравнение (3.12) имеет две неизвестные: величину вектора  $\vec{pc}$  и величину вектора  $\vec{bc}$ . Теоретически это уравнение разрешимо, так как оно эквивалентно двум скалярным уравнениям, полученным из векторного проецированием обеих частей равенства на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

В методе планов векторное уравнение (3.12) решается графическим способом. По условию, искомый вектор  $\vec{pc}$  параллелен оси  $Ox$ . Поэтому его конец  $c$  находится на прямой 1, проходящей через полюс  $p$  параллельно оси  $Ox$  на кинематической схеме (рис. 3.9). Конец  $c$  искомого вектора  $\vec{bc}$  находится на прямой 2, проходящей через начало  $b$  вектора перпендикулярно отрезку  $BC$  кинематической схемы. Пересечение прямых 1 и 2 указывает положение точки  $c$ .

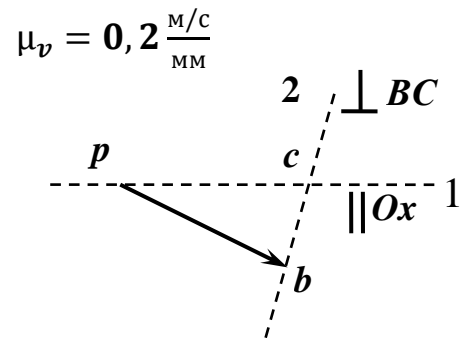


Рис. 3.9. Прямые 1 и 2

5. Из формулы  $v_{BC} = \omega_2 \mu_l BC$  определяем величину угловой скорости  $\omega_2$  шатуна:

$$\omega_2 = \frac{\mu_v bc}{\mu_l BC}. \quad (3.13)$$

В формуле (3.13)  $bc$  означает число, равное длине отрезка  $bc$  в миллиметрах, измеренное на плане скоростей (рис. 3.10).

Изображаем угловую скорость вращения шатуна вокруг точки  $B$  круговой стрелкой с центром в полюсе  $B$ . Направление круговой стрелки должно соответствовать направлению вектора  $\vec{bc}$ , приложенного к точке  $C$  на кинематической схеме.

6. Положение конца  $e$  вектора  $\vec{pe}$  находим из теоремы подобия:

стороны треугольника, образованного тремя точками звена на кинематической схеме и повернутого на 90 градусов по ходу круговой стрелки, изображающей угловую скорость звена, параллельны треугольнику, образованному концами векторов этих точек на плане скоростей:  $\triangle BCE \sim \triangle bce$ .

Теорема подобия вытекает из теоремы о распределении скоростей точек плоской фигуры, совершающей движение в своей плоскости. Действительно, справедливы равенства

$$v_{BC} = \omega_2 \mu_l BC; \quad v_{BE} = \omega_2 \mu_l BE.$$

Отсюда

$$\frac{v_{BE}}{v_{BC}} = \frac{BE}{BC}.$$

По определению,

$$v_{BE} = \mu_v be; \quad v_{BC} = \mu_v bc$$

и, следовательно,

$$\frac{v_{BE}}{v_{BC}} = \frac{be}{bc}.$$

Из теоремы подобия следует, что точка  $e$  находится на отрезке  $bc$ :

$$\frac{be}{bc} = \frac{BE}{BC}.$$

7. Во второй группе Ассур, состоящей из звеньев 4, 5 и трех пар, устанавливаем следующую точку  $F$ , принадлежащую звену 4 и звену 5, скорость которой можно определить.

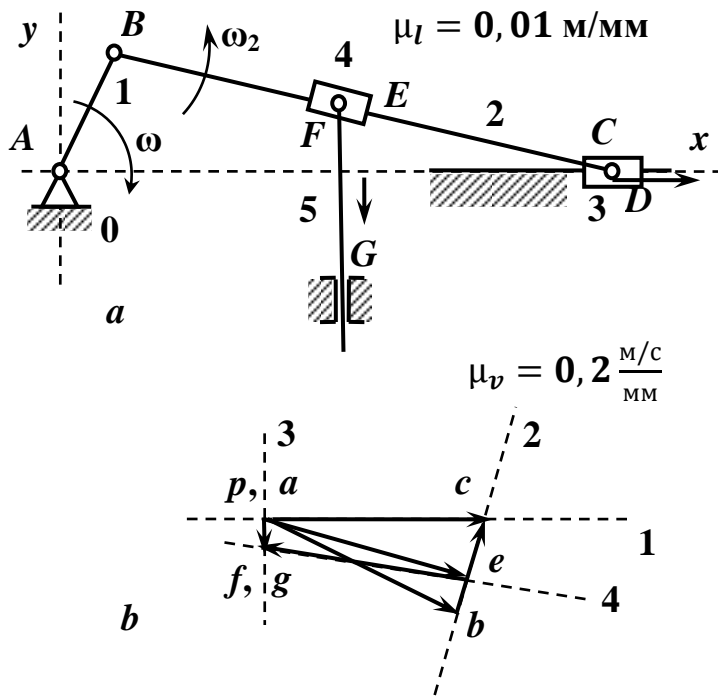


Рис. 3.10. Кинематическая схема (а) и план скоростей (b)

Абсолютное движение точки  $F$  состоит из переносного и относительного движений.

По теореме о сложении скоростей, абсолютная скорость  $\vec{v}_F$  точки  $F$  складывается из скорости  $\vec{v}_E$  точки  $E$  шатуна (переносной скорости) и скорости  $\vec{v}_{EF}$  точки  $F$  относительно шатуна (относительной скорости):

$$\underline{\vec{v}_F} = \underline{\vec{v}_E} + \underline{\vec{v}_{EF}}.$$

В данном положении точки  $E$  и  $F$  совпадают.

Так как звено 5 совершает поступательное движение вдоль оси  $Oy$ , то направление скорости точки  $F$  известно. Ползушка 4 движется поступательно относительно шатуна, то есть вектор относительной скорости точки  $F$  направлен вдоль продольной оси шатуна.

После деления обеих частей последнего векторного равенства на масштаб  $\mu_v$  векторное уравнение в отрезках записывается так:

$$\frac{\overrightarrow{pf}}{\|Oy} = \frac{\overrightarrow{pe}}{\|BC} + \frac{\overrightarrow{ef}}{\|BC}.$$

Отсюда следует, что точка  $f$  находится на прямой 3, проходящей через полюс  $p$  и параллельной оси  $Oy$ , и на прямой 4, проходящей через точку  $e$  и параллельной отрезку  $BC$  (рис. 3.10 *b*).

8. Векторы скорости точек  $F$  и  $G$  звена 5, движущегося поступательно, равны. Следовательно, точки  $f$  и  $g$  на плане совпадают.

9. По определению,

$$v_B = \mu_v pb; v_C = \mu_v pc; v_E = \mu_v pe; v_F = \mu_v pf; v_G = \mu_v pg.$$

Последние равенства позволяют вычислить значения искомых скоростей точек  $B, C, E, F, G$  по измеренным длинам отрезков  $pb, pc, pe, pf, pg$  в миллиметрах. Отметим, что точка  $A$  неподвижна. Поэтому положение конца вектора ее скорости на плане совпадает с полюсом ( $pa = 0$ ).

### 3.3.2. План ускорений и теорема подобия

*Планом ускорений называется графическое изображение векторов ускорений именованных точек механизма относительно стойки в масштабе с началом в одной точке, называемой полюсом плана ускорений.*

План ускорений "привязан" к конкретному положению механизма, задаваемому кинематической схемой, и может быть построен, если построен план скоростей.

Введем следующие обозначения:

$\vec{a}_B, a_B$  – вектор и величина вектора ускорения точки  $B$ ,  $\text{м/с}^2$ ;

$\vec{a}_C, a_C$  – вектор и величина вектора ускорения точки  $C$ ,  $\text{м/с}^2$ ;

$\vec{a}_E, a_E$  – вектор и величина вектора ускорения точки  $E$ ,  $\text{м/с}^2$ ;

$\vec{a}_F, a_F$  и  $\vec{a}_G, a_G$  – вектор и величина вектора ускорения точек  $F$  и  $G$  ползуна 5,  $\text{м/с}^2$ ;

$\vec{a}_{BC}, a_{BC}$  – вектор и величина вектора ускорения точки  $C$  шатуна относительно точки  $B$  шатуна как полюса,  $\text{м/с}^2$ ;

$\vec{a}_{EF}, a_{EF}$  – вектор и величина вектора ускорения точки  $F$  относительно шатуна,  $\text{м/с}^2$ .

На плане векторы ускорения точек в масштабе изображаются направленными отрезками с началом в полюсе плана, который на чертеже обозначается греческой буквой  $\pi$ .

*Масштабом  $\mu_a$  называется численное значение ускорения в метрах в секунду за секунду, изображаемого на плане отрезком длиной один миллиметр.*

Единица измерения масштаба –  $\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$ .

Конец вектора ускорения именованной точки на плане и именованная точка на кинематической схеме обозначаются одинаковыми буквами: первая – малая со штрихом, вторая – заглавная (табл. 3.4).

### 3.4. Обозначения расчетных величин в натуре и на плане

$\vec{a}_B$	$a_B, \text{мм}$	$\vec{a}_C$	$a_C, \text{мм}$	$\vec{a}_E$	$a_E, \text{мм}$	$\vec{a}_G$	$a_G, \text{мм}$
$\vec{\pi b'}$	$\pi b', \text{мм}$	$\vec{\pi c'}$	$\pi c', \text{мм}$	$\vec{\pi e'}$	$\pi e', \text{мм}$	$\vec{\pi g'}$	$\pi g', \text{мм}$

План ускорений может быть построен только в порядке наслоения групп Ассура. По определению, векторы ускорения точки механизма на кинематической схеме и на плане параллельны:

$$\overline{\pi b'} \parallel \vec{a}_B; \quad \overline{\pi c'} \parallel \vec{a}_C; \quad \overline{\pi e'} \parallel \vec{a}_E \dots$$

Продолжим примерный алгоритм построением плана ускорений.

1. Задаем масштаб  $\mu_a$  плана ускорений. Для этого сначала вычисляем ускорение точки  $B$  кривошипа по формуле

$$a_B = \omega^2 \mu_l AB = 160 \text{ м/с}^2.$$

При равномерном вращении кривошипа касательное ускорение точки  $B$  равно нулю. Поэтому ускорение точки  $B$  равно нормальному ускорению точки и направлено от точки  $B$  к точке  $A$ . Чтобы ускорение точки  $B$  на плане изображалась отрезком длины 20 мм, масштаб  $\mu_a$  вычисляем по формуле

$$\mu_a = \frac{a_B}{20} = 8 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

2. На плане ускорений изображаем вектор  $\overline{\pi b'}$  длины 20 мм, параллельный вектору  $\vec{a}_B$ , то есть параллельный отрезку  $AB$  на кинематической схеме и направленный от точки  $B$  к точке  $A$  (рис. 3.11).

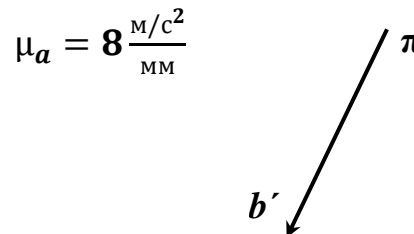


Рис. 3.11. План ускорений точки  $B$

3. Формулу распределения ускорений точек тела звена 2

при плоскопараллельном движении запишем так [2]:

$$\underline{\vec{a}_C} = \underline{\vec{a}_B} + \underline{\vec{a}_{BC}},$$

где  $\vec{a}_{BC}$  – вектор ускорения точки  $C$  относительно точки  $B$  (полюса).

При остановленной точке  $B$  точка  $C$  может двигаться только по окружности радиуса  $BC$ , и ускорение  $\vec{a}_{BC}$  складывается из нормального ускорения  $\vec{a}_{BC}^n$ , направленного параллельно отрезку  $BC$  от точки  $C$  к полюсу  $B$ , и касательного  $\vec{a}_{BC}^t$ , направленного перпендикулярно отрезку  $BC$ :

$$\underline{\underline{\vec{a}_C}} = \underline{\underline{\vec{a}_B}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BC}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BC}^\tau}}. \quad (3.14)$$

Ускорение точки  $C$  шатуна, являющейся и центром ползуна, направлено по горизонтальной оси  $Ox$ , так как траектория точки  $C$  – прямая линия. Поскольку угловая скорость  $\omega_2$  шатуна в данном положении определена по формуле (3.13), нормальное ускорение  $\vec{a}_{BC}^n$  точки  $C$  в движении относительно полюса  $B$  известно и по направлению, и по величине:

$$a_{BC}^n = \omega_2^2 \mu_l BC.$$

Разделив обе части равенства (3.14) на масштаб  $\mu_a$ , приходим к векторному уравнению в отрезках:

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{\pi c'} \\ \parallel Ox \end{array} = \begin{array}{c} \overrightarrow{\pi b'} \\ \parallel \overleftarrow{AB} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{b'n} \\ \parallel \overleftarrow{BC} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{nc'} \\ \perp BC \end{array}, \quad (3.15)$$

где  $\overrightarrow{b'n} = \frac{\vec{a}_{BC}^n}{\mu_a}$ ;  $\overrightarrow{nc'} = \frac{\vec{a}_{BC}^\tau}{\mu_a}$ .

4. Для определения положения точки  $n$  вычерчиваем вектор  $\overrightarrow{b'n}$  с началом в точке  $b'$ , направленный по прямой 1, параллельной отрезку  $BC$  по вектору  $\overrightarrow{CB}$  (рис. 3.12).

5. Векторное уравнение (3.15) имеет две неизвестные: величины векторов  $\overrightarrow{\pi c'}$  и  $\overrightarrow{nc'}$ . Конец  $c'$  вектора  $\overrightarrow{\pi c'}$  находится на прямой 2, проходящей через полюс  $\pi$  параллельно оси  $Ox$ , а вектора  $\overrightarrow{nc'}$  – на прямой 3, проходящей через точку  $n$  перпендикулярно отрезку  $BC$  (рис. 3.12 б).

6. Определение вектора  $\vec{a}_{BC}^\tau$  в масштабе позволяет найти величину и направление углового ускорения  $\varepsilon_2$  шатуна из формулы  $a_{BC}^\tau = \varepsilon_2 \mu_l BC$ :

$$\varepsilon_2 = \frac{\mu_a nc'}{\mu_l BC}.$$

Направление круговой стрелки, изображающей угловое ускорение  $\varepsilon_2$  вращения шатуна вокруг точки  $B$ , должно соответствовать направлению вектора  $\overrightarrow{nc'}$ , приложенного к точке  $C$  кинематической схемы.

7. Положение конца  $e'$  вектора  $\overrightarrow{pe'}$  находим из теоремы подобия: *треугольник, образованный тремя точками звена на кинематической схеме, подобен треугольнику, образованному концами векторов этих точек на плане ускорений, и при обходе обоих треугольников по ходу стрелки часов последовательность расположения сходственных букв одинаковая:  $\Delta BCE \sim \Delta b'c'e'$ .*

Из теоремы подобия, вытекающей из теоремы о распределении ускорений точек плоской фигуры, совершающей движение в своей плоскости, следует, что точка  $e'$  находится на отрезке  $b'c'$  и

$$\frac{b'e'}{b'c'} = \frac{BE}{BC}.$$

8. В соответствии с теоремой Кориолиса абсолютное ускорение  $\vec{a}_F$  складывается из переносного ускорения  $\vec{a}_E$ , которым является ускорение точки  $E$  шатуна, ускорения  $\vec{a}_{EF}^k$  Кориолиса, обусловленного движением точки  $F$  относительно шатуна, и относительного ускорения  $\vec{a}_{EF}$  точки  $F$  относительно шатуна:

$$\underline{\vec{a}_F} = \underline{\vec{a}_E} + \underline{\vec{a}_{EF}^k} + \underline{\vec{a}_{EF}}. \quad (3.16)$$

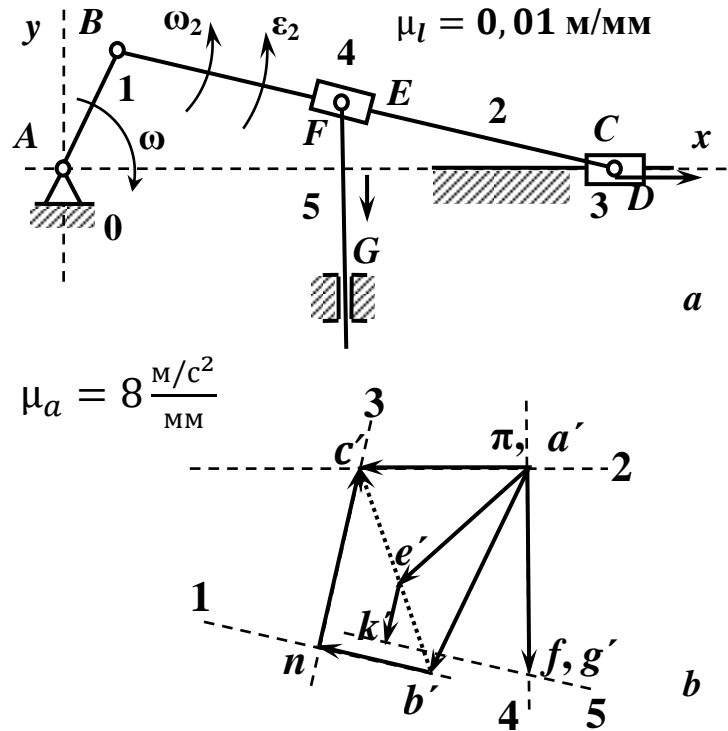


Рис. 3.12. Кинематическая схема (a) и план ускорений (b)



Ускорение точки  $F$  параллельно оси  $Oy$ , так как движение точки прямолинейное вдоль оси. Ускорение точки  $E$  известно, так как найдено положение точки  $e'$ . Ускорение Кориолиса определяем расчетным путем по данным, полученным при построении плана скоростей:

$$a_{EF}^k = 2\omega_2 v_{EF}.$$

Так как движение точки  $F$  относительно шатуна прямолинейное, то вектор  $\vec{a}_{EF}$  параллелен отрезку  $BC$ . Векторное уравнение (3.16) в отрезках после деления обеих частей на масштаб примет вид

$$\frac{\overline{pf'}}{\|Oy\|} = \frac{\overline{pe'}}{\|Oy\|} + \frac{\overline{e'k}}{\perp ef} + \frac{\overline{kf'}}{\|BC\|}, \quad (3.17)$$

где  $e'k = 2\omega_2 \frac{\mu_v}{\mu_a} ef$ ; отрезок  $ef$  на плане скоростей измеряется в миллиметрах.

Чтобы найти точку  $k$  конца вектора ускорения Кориолиса в масштабе, от точки  $e'$  надо отложить отрезок длины  $e'k$ .

Для построения отрезка  $e'k$  вектор  $\vec{ef}$  на плане скоростей поворачиваем вокруг точки  $e$  на  $90^\circ$ . Направление поворота по ходу или против хода стрелки часов указывает круговая стрелка, изображающая угловую скорость  $\omega_2$  шатуна. Начало повернутого вектора  $\vec{ef}$  помещаем в точку  $e'$ , а его длину изменяем на расчетную длину  $e'k$ .

Из уравнения (3.17) следует, что точка  $f'$  находится на прямой 4, проходящей через полюс  $\pi$  и параллельной оси  $Oy$ , и на прямой 5, проходящей через точку  $k$  и параллельной отрезку  $BC$ .

9. Определяем положение точки  $g'$ . Векторы ускорений точек  $F$  и  $G$  звена 5, движущегося поступательно, равны. Следовательно, точки  $f'$  и  $g'$  на плане совпадают.

10. По определению,

$$a_B = \mu_a pb'; \quad a_C = \mu_a pc'; \quad a_E = \mu_a pe'; \quad a_F = \mu_a pf'; \quad a_G = \mu_a pg'.$$

Так как точка  $A$  неподвижна, то положение конца вектора ее скорости на плане совпадает с полюсом ( $pa' = 0$ ).

### 3.4. Передаточное отношение карданного механизма

Карданный механизм предназначен для передачи вращательного движения между валами. Простейший карданный механизм включает стойку 0 и шарнир Гука, образованный тремя подвижными звеньями: вилками 1, 2 и крестовиной 3 (рис. 3.13).

Пересечением осей вращения трех звеньев служит неподвижная точка  $O$ , принадлежащая всем звеньям, то есть расстояние от произвольной точки любого звена до центра  $O$  остается неизменным. Каждая из кинематических пар не допускает трех поступательных движений звеньев вдоль трех взаимно перпендикулярных осей, и простейший карданный механизм относится к механизму третьего семейства с одной степенью свободы.

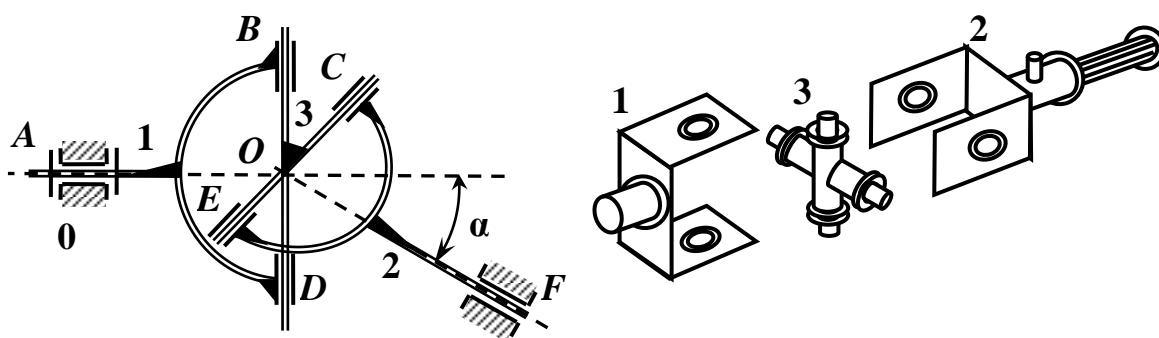


Рис. 3.13. Простейший карданный механизм

Вал 1 образует со стойкой одноподвижную вращательную пару  $A$ , а вал 2 – цилиндрическую пару  $F$ . Крестовина 3 образует с валом 1 через вилку две цилиндрические пары  $B$  и  $D$ , а с валом 2 – цилиндрические пары  $C$  и  $E$ . Связи, вносимые парами  $E$  и  $D$ , являются избыточными и служат для повышения жесткости конструкции.

Пусть неподвижные оси валов 1 и 2 расположены в вертикальной плоскости и  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – угловая скорость вала 1 и вала 2 (рад/с);  $\alpha$  – постоянный угол, образуемый осями валов 1 и 2 (рад);  $\varphi$  – угол поворота вала 1 из положения, когда вилка на валу расположена в вертикальной плоскости.

Передаточным отношением  $u_{12}$  механизма называется отношение угловых скоростей ведущего и ведомого звеньев. Можно доказать, что связь передаточного отношения карданного механизма с углами  $\alpha$ ,  $\varphi$  определяется следующей формулой:

$$u_{12} = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}{\cos \alpha}.$$

Данное равенство показывает, что передаточное отношение простейшего карданного механизма изменяется от минимального значения, равного  $\cos \alpha$ , когда  $\varphi = 0$  рад, до максимального значения, равного  $\frac{1}{\cos \alpha}$ , когда  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  рад.

Соединение двух простейших карданных механизмов 2 и 4 карданным валом 3 образует карданную передачу или двойной карданный механизм (рис. 3.14).

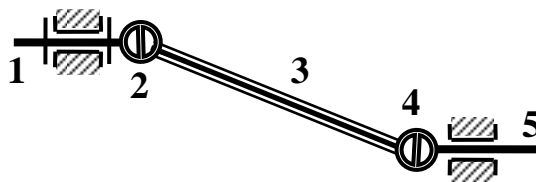


Рис. 3.14. Карданная передача

Практическое применение находят спаренные карданные механизмы, у которых оси ведущего 1 и ведомого 5 валов параллельны, а вилки на карданном валу 3 установлены симметрично. Угловые скорости ведущего и ведомого валов такого механизма равны, то есть передаточное отношение равно единице, независимо от угла поворота ведущего вала.

Сложный карданный механизм состоит из нескольких последовательно соединенных спаренных механизмов.

## 4. РАСЧЕТ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

### 4.1. Основная теорема зацепления

Введем следующие обозначения:

$\omega_1, \omega_2$  – угловые скорости находящихся в зацеплении звеньев 1, 2, вращающихся вокруг параллельных неподвижных осей  $O_1, O_2$  (рис. 4.1);

$v_1, v_2$  – величины векторов  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  скоростей точек  $K$  звеньев 1, 2 в точке касания;

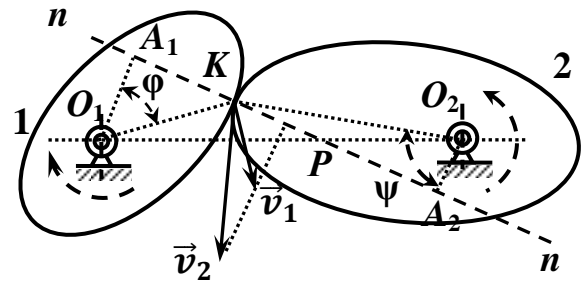


Рис. 4.1. Звенья 1, 2 в зацеплении

$n-n$  – общая нормаль к граничным линиям звеньев 1, 2, проходящая через точку  $K$  касания звеньев в плоскости их вращения.

По теореме о сложении скоростей

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{12},$$

где  $\vec{v}_{12}$  – вектор скорости точки  $K$  звена 2 относительно звена 1.

Вектор  $\vec{v}_{12}$  перпендикулярен нормали  $n-n$ , так как предполагается, что точка  $K$  звена 2 не вдавливается в звено 1. Величина вектора  $\vec{v}_{12}$  есть величина скорости движения (скольжения) точки  $K$  звена 2 относительно звена 1. Чем она больше, тем больше затраты энергии на трение между звеньями.

Проецируя обе части последнего векторного уравнения на нормаль  $n-n$ , получим следующее равенство:

$$v_2 \cos \psi = v_1 \cos \varphi, \quad (4.1)$$

где  $\varphi, \psi$  – углы, образуемые векторами  $\vec{v}_1, v_2$  с нормалью  $n-n$ , равные соответственно углу между радиусом  $O_1K$  и перпендикуляром  $O_1A_1$  к нормали и углу между радиусом  $O_2K$  и перпендикуляром  $O_2A_2$  к нормали.

Поскольку

$$v_1 = \omega_1 \cdot O_1K; v_2 = \omega_2 \cdot O_2K; \cos \varphi = \frac{O_1A_1}{O_1K}; \cos \psi = \frac{O_2A_2}{O_2K},$$

то равенство (4.1) можно записать так:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2A_2}{O_1A_1}. \quad (4.2)$$

*Точка пересечения нормали, проходящей через точку касания звеньев в плоскости вращения, и прямой линии, соединяющей центры вращения звеньев, называется полюсом зацепления.*

Пусть  $P$  – полюс зацепления звеньев 1, 2. Из подобия прямоугольных треугольников  $O_1A_1P$  и  $O_2A_2P$  следует, что

$$\frac{O_2A_2}{O_1A_1} = \frac{O_2P}{O_1P}.$$

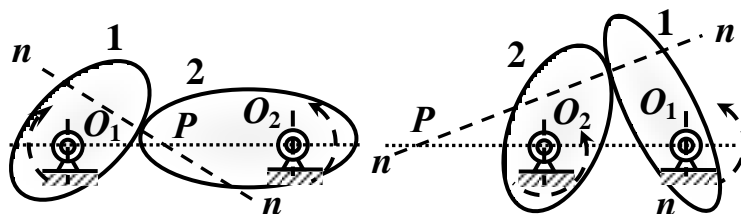
С учетом последнего равенства соотношение (4.2) примет вид

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}. \quad (4.3)$$

Равенство (4.3) является математическим выражением основной теоремы зацепления, или теоремы Виллиса: *нормаль, проведенная через точку касания звеньев в плоскости вращения, пересекает линию центров в точке, отстоящей от центров на расстояниях, обратно пропорциональных угловым скоростям вращения звеньев.*

При внешнем зацеплении, когда звенья вращаются в противоположных направлениях, полюс находится на отрезке между центрами вращения (рис. 4.11).

При внутреннем зацеплении и при вращении звеньев в одну сторону полюс находится вне отрезка с центрами вращений на концах и, как можно убедиться, ближе к центру звена, вращающегося с большей угловой скоростью.



**Рис. 4.11.** Внешнее (слева) и внутреннее (справа) зацепления звеньев 1 и 2

Угловая скорость креста мальтийского механизма – непостоянна. Скорость достигает максимума в положении пальца на линии центров (рис. 4.12).

Профили звеньев в зацеплении, допускающие вращения звеньев, называются взаимно огибающими. В мальтийском механизме такими являются внешняя окружность пальца кривошипа и прямой отрезок прорези креста.

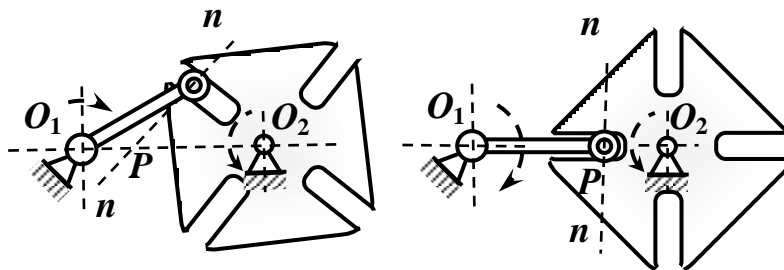


Рис. 4.12. Положения полюса  $P$  зацепления

Основная теорема зацепления относится к взаимно огибающим профилям звеньев, обеспечивающим вращение ведомого звена под действием нормальной силы.

Фрикционная передача не подпадает под основную теорему зацепления, поскольку вращение ведомого звена происходит под действием касательной силы. Простейшая фрикционная передача, состоящая из стойки и двух круглых колес 1, 2, функционирует только при условии поджатия колес и отсутствии полного проскальзывания между ними (рис. 4.13). Сила трения, благодаря которой происходит сцепление ведущего колеса с ведомым, является касательной составляющей реакции ведущего колеса.

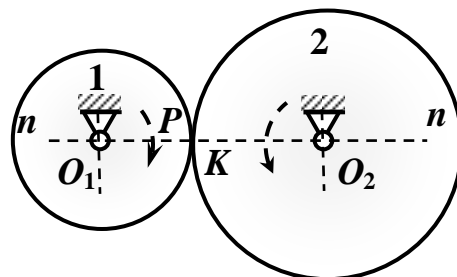


Рис. 4.13. Фрикционная передача

Так как линия центров совпадает с нормалью к профилям колес, проходящей через точку  $K$  их касания, то положение полюса  $P$  зацепления не определено. Положение полюса можно найти, если известны скорость точки  $K$  ведущего звена 1 и коэффициент проскальзывания. Полюс зацепления находится на отрезке  $O_1K$ . Он совпадает с точкой  $K$  при отсутствии проскальзывания и с точкой  $O_1$  – при полном проскальзывании.

## 4.2. Эвольвента и параметры эвольвентного зацепления

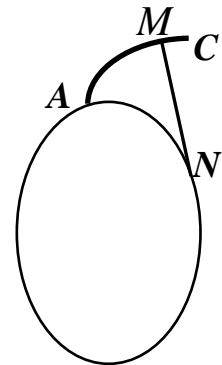
Безостановочное вращение ведущего и ведомого колес может быть достигнуто их зубчатыми профилями, выполненными так, чтобы по окончании касания одной пары зубьев в контакте находилась другая пара.

В данном разделе рассматриваются цилиндрические зубчатые колеса и считается, что оси вращения колес параллельны и, если не оговорено, неподвижны.

### 4.2.1. Определения эвольвенты и эвольвентного зацепления

*Эвольвентой кривой называется развертка этой кривой в виде линии, которую описывает конец нерастяжимой гибкой нити при сматывании с кривой без скольжения.*

Пусть  $A$  – точка кривой, в которой первоначально находится конец  $M$  нити, намотанной на кривую (рис. 4.14). При сматывании натянутой нити с кривой без скольжения конец  $M$  нити описывает эвольвенту  $AC$ , а сматываемый прямолинейный участок нити в каждый момент является отрезком  $NM$ , направленным по касательной к кривой в точке  $N$ .



**Рис. 4.14.**  
Эвольвента  
и эволюта

*Кривая, с которой сматывается нить, называется эволютой.*

В дальнейшем будем считать, что эволютой является окружность.

*Зацепление называется эвольвентным, если профили зубьев колес в зацеплении очерчены по эвольвенте окружности.*

### 4.2.2. Основная и делительная окружности, профильный угол

Эвольвента окружности является траекторией  $AC$  конца  $M$  гибкой нерастяжимой нити, сматываемой без проскальзывания с окружности (рис. 4.15).

Окружность, с которой сматывается нить, конец которой вычерчивает эвольвенту, называется основной.

Пусть конец  $M$  растянутой нити находится в положении  $C$  эвольвенты, а начало – в точке  $N$  окружности. Прямолинейный отрезок  $NM$  растянутой нити касается окружности, и его можно считать стержнем, точка  $N$  которого имеет нулевую скорость и является мгновенным центром скоростей стержня. Следовательно, вектор скорости точки  $M$  нити в положении  $C$  направлен перпендикулярно стержню  $NM$  и в то же время по касательной  $St$  к траектории  $AC$  движения точки  $M$ . Таким образом касательная  $NM$  к основной окружности является нормалью к эвольвенте  $AC$ .

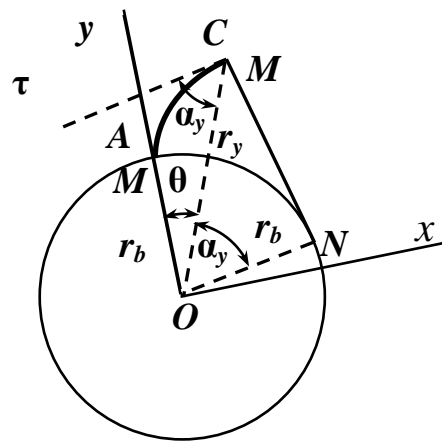


Рис. 4.15. Эвольвента  $AC$  окружности

$r_b$  – принятое обозначение радиуса основной окружности;

$r_y$  – принятое обозначение расстояния от некоторой точки эвольвенты до центра основной окружности.

Угол  $\alpha_y$ , образуемый радиусом  $OM$  с началом в центре  $O$  основной окружности и касательной  $Mt$ , является переменной величиной и называется профильным углом.

Профильный угол, значение которого равно  $20^\circ$ , обозначается буквой  $\alpha$ .

Окружность с центром в точке  $O$ , проходящая через точку эвольвенты, для которой профильный угол равен  $\alpha$ , называется делительной окружностью.

Пусть  $Oxy$  – неподвижная система декартовых координат с центром  $O$  и осью  $Oy$ , проходящей через точку  $A$ ;  $\theta$  – угол, образуемый отрезком  $OM$  длины  $r_y$  и осью  $Oy$ .

Координаты  $x, y$  точки  $M$  эвольвенты выражаются равенствами

$$x = r_y \sin \theta; \quad y = r_y \cos \theta.$$

В прямоугольном треугольнике  $OBC$



$$r_y = r_b / \cos \alpha_y.$$

Как следствие последнего выражения, радиус  $r$  делительной окружности определяется радиусом основной окружности:

$$r = r_b / \cos \alpha \quad (4.4)$$

Длина  $NC$  размотанной нити, находящейся на дуге  $AN$  основной окружности до разматывания, очевидно, равна длине этой дуги, то есть

$$r_b \operatorname{tg} \alpha_y = r_b (\theta + \alpha_y), \text{ или } \theta = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y.$$

Координаты точки эвольвенты с учетом выражений для  $r_y$  и  $\theta$  можно переписать так:

$$x = \frac{r_b}{\cos \alpha_y} \sin(\operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y); \quad y = \frac{r_b}{\cos \alpha_y} \cos(\operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y). \quad (4.5)$$

Два равенства (4.5) доказывают, что уравнение эвольвенты полностью определяется радиусом основной окружности, а профильный угол можно рассматривать как параметр при задании этого уравнения в параметрическом виде. Исключая этот параметр, мы можем найти зависимость между  $y$  и  $x$  в явном виде.

### 4.2.3. Начальная окружность, линия зацепления, передаточное отношение

Рассмотрим два цилиндрических прямозубых колеса 1, 2, границы зубьев которых в плоскости вращения очерчены эвольвентами основных окружностей с радиусами  $r_{b1}, r_{b2}$  (рис. 4.16).

Пусть  $\omega_1, \omega_2$  – угловые скорости ведущего колеса 1 и ведомого 2 соответственно;  $K$  – точка касания зубьев колес в плоскости вращения. При вращении колес точка  $K$  касания зубьев перемещается. Во избежание остановок колес в момент окончания контакта одной пары зубьев в контакте должна находиться следующая пара.

По определению, существует общая касательная к эвольвентам, проходящая через точку  $K$  в плоскости вращения.

По свойству эвольвент прямая, проходящая через точку  $K$  перпендикулярно общей касательной, будет служить общей нормалью к

обеим эвольвентам и общей касательной к основным окружностям с точками касания  $N_1$  и  $N_2$ . Так как отрезок  $N_1N_2$  не зависит от положения точки  $K$ , а зависит только от неизменяемых радиусов и положений основных окружностей, то при вращении колес точка  $K$  зацепления перемещается по отрезку  $N_1N_2$  прямой.

Точка  $P$  пересечения отрезка  $N_1N_2$  на нормали к эвольвентам и отрезка  $O_1O_2$  на линии центров, по определению, есть полюс зацепления.

*Прямая, проходящая через полюс и касающаяся основных окружностей колес в зацеплении, называется линией зацепления.*

Поскольку отрезки  $N_1N_2$  и  $O_1O_2$  не зависят от положения точки  $K$ , положение полюса зацепления также не зависит от положения точки  $K$  и, следовательно, от угла поворота колес. На основании основной теоремы зацепления

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}. \quad (4.6)$$

Из теоремы зацепления следует, что *отношение угловых скоростей пары зубчатых колес равно отношению угловых скоростей пары колес фрикционной передачи без скольжения, радиусы которых равны соответственно расстояниям от центров зубчатых колес до полюса зацепления.* В этом смысле зубчатая и фрикционная передачи эквивалентны.

*Окружности пары колес фрикционной передачи, эквивалентной зубчатой, называются начальными, или полюсными.*

Если  $r_{w1}$ ,  $r_{w2}$  – радиусы начальных первого и второго колес в зацеплении, соотношение (4.6) можно записать и так:

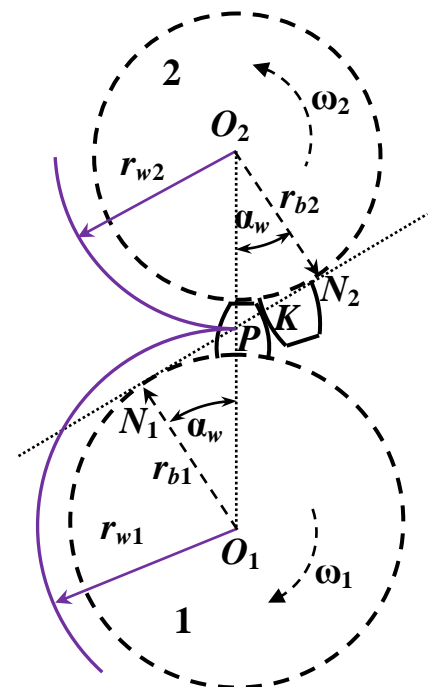


Рис. 4.16. Зубья колес 1 и 2 в зацеплении

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}.$$

Передачным отношением  $u_{12}$  называется отношение угловых скоростей ведущего 1 и ведомого 2 колес:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Учитывая определение передаточного отношения и подобие прямоугольных треугольников  $O_1N_1P$  и  $O_2N_2P$ , равенству (4.6) можно придать вид

$$u_{12} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} \quad \text{или} \quad u_{12} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}. \quad (4.7)$$

Выражения (4.7) справедливы, когда оси колес неподвижны. Они показывают, что

1) передаточное отношение эвольвентного зацепления полностью определяется радиусами основных окружностей и не зависит ни от расстояния между осями колес, ни от углов поворота колес;

2) для определения передаточного отношения эвольвентного зацепления зубчатую передачу можно заменить фрикционной, понимая под зубчатыми колесами круглые колеса, радиусы которых равны радиусам начальных окружностей, контактирующих без проскальзывания в полюсе зацепления.

Угол  $\alpha_w$ , образуемый линией зацепления  $N_1N_2$  и перпендикуляром к линии центров  $O_1O_2$ , называется углом зацепления. Он равен углу между линией центров и перпендикулом  $O_1N_1$  или  $O_2N_2$  к линии зацепления.

Профильный угол – геометрический параметр профиля зуба. Он определяется радиусом основной окружности колеса и расстоянием от ее центра до точки эвольвенты зуба колеса.

Угол зацепления – геометрический параметр зацепления двух зубчатых колес. Он определяется радиусами основных окружностей колес и расстоянием между их центрами в плоскости вращения. С увеличением межосевого расстояния угол зацепления увеличивается.

Из прямоугольных треугольников  $O_1N_1P$  и  $O_2N_2P$  следует, что

$$r_{w1} = r_{b1} / \cos \alpha_w; \quad r_{w2} = r_{b2} / \cos \alpha_w. \quad (4.8)$$

Сравнивая выражения для радиусов  $r_{w1}$ ,  $r_{w2}$  начальных окружностей колес с выражением (4.4) для радиусов  $r_1$ ,  $r_2$  делительных окружностей, заключаем, что начальные и делительные окружности совпадают, когда угол  $\alpha_w$  зацепления равен стандартному профильному углу  $\alpha$ .

#### 4.2.4. Шаг зубьев, толщина зуба, ширина впадины, окружности впадин и вершин

*Шагом зубьев, или шагом зацепления называется расстояние между передними или задними частями профилей соседних зубцов, измеряемое по дуге делительной окружности.*

Шаг  $p$  зубьев равен длине дуги  $AB$  делительной окружности (рис. 4.17). Он складывается из толщины  $s$  зуба и ширины  $e$  впадины по делительной окружности:

$$p = s + e.$$

Различают колеса нулевые ( $s = p/2$ ), корригированные положительные ( $s > p/2$ ) и корригированные отрицательные ( $s < p/2$ ).

*Окружность, на которой находятся наименее (наиболее) удаленные от оси вращения точки зуба, называется окружностью впадин (вершин).*

Радиусы окружностей впадин и вершин обозначаются буквами  $r_f$  и  $r_a$ .

Пусть  $z$  – число зубьев колеса. Дуговой угол зубьев  $\frac{2\pi}{z}$  – величина, не зависящая от параметров зуба. Этот угол можно использовать для расчета шагов зубьев по начальной окружности  $p_w$ , окружности впадин  $p_f$  и окружности вершин  $p_a$ :

$$\frac{p}{r} = \frac{p_w}{r_w} = \frac{p_f}{r_f} = \frac{p_a}{r_a} = \frac{2\pi}{z}. \quad (4.9)$$

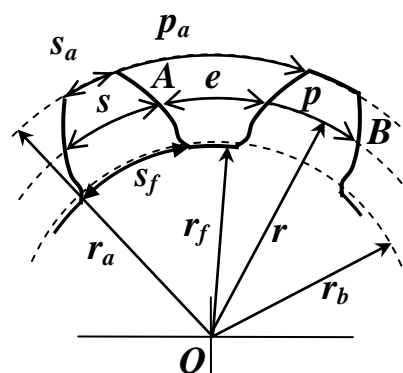


Рис. 4.17. Зубья в плоскости вращения

Толщина головки зуба по окружности вершин обозначается буквой  $s_a$ , толщина ножки по окружности впадин – буквой  $s_f$ .

#### 4.2.5. Модуль зубьев

Геометрические параметры зубчатых колес, находящихся в эвольвентном зацеплении, должны удовлетворять ряду условий. Если систему отсчета связать с одним из двух взаимодействующих колес, например с первым, то начальная окружность второго колеса в этой системе катится без скольжения по начальной окружности первого.

Таким образом, одно из условий, которому должны удовлетворять колеса в зацеплении, состоит в следующем; во избежание заклинивания шага зубьев по начальным окружностям колес должны быть равными (рис. 4.18).

Пусть  $z$  – число зубьев колеса,  $r$  – радиус делительной окружности,  $p$  – шаг зубьев колеса по делительной окружности. Из формул (4.9) следует, что

$$p = p_w \frac{r}{r_w}$$

или, учитывая выражения (4.4) для  $r$  и (4.8) для  $r_w$ ,

$$p = p_w \frac{\cos \alpha_w}{\cos \alpha}.$$

Последнее выражение доказывает, что из равенства шагов зубьев колес в зацеплении по начальным окружностям следует равенство шагов зубьев по делительным окружностям.

Таким образом, у колес в зацеплении шага зубьев по делительным окружностям равны.

Унификация колес, пригодных к зацеплению, производится по шагу  $p$  зубьев по делительным окружностям (рис. 4.19). Из формул (4.9) следует, что

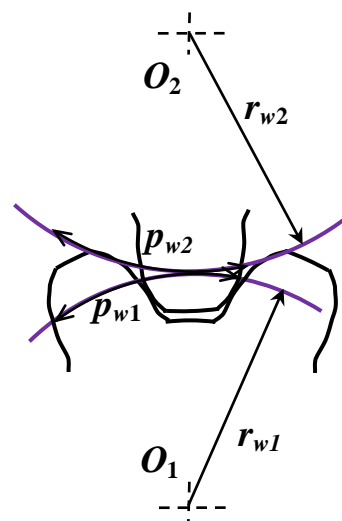


Рис. 4.18. Начальные окружности

$$r = \frac{p z}{\pi 2}. \quad (4.10)$$

Поскольку  $\pi$  – иррациональное число, то значение радиуса делительной окружности, найденное по формуле (4.10), при рациональных значениях шага  $p$  зубьев окажется иррациональным.

Во избежание неудобств изготовления колес с иррациональными геометрическими размерами стандартизации подвергается величина  $\frac{p}{\pi}$ , которая называется модулем зубьев и обозначается буквой  $m$ .

По определению,

$$p = \pi \cdot m, \quad (4.11)$$

и формула (4.10) принимает вид

$$r = m \frac{z}{2}. \quad (4.12)$$

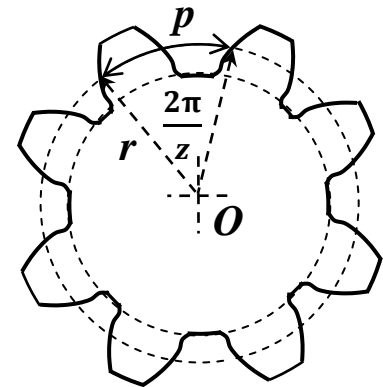
Как следует из равенства (4.12), стандартный модуль зубьев – это часть диаметра делительной окружности, приходящаяся на один зуб.

Геометрические размеры колеса принято выражать через модуль  $m$ . Модуль  $m$  зубьев колеса измеряется в миллиметрах и регламентирован государственными стандартами (табл.4.1).

**Таблица 4.1. Стандартные модули  $m$  в диапазоне от 4 до 100 мм**

<b>1-й ряд</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>16</b>	<b>20</b>	<b>25</b>	<b>32</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>60</b>	<b>80</b>	<b>100</b>
<b>2-й ряд</b>	<b>4,5</b>	<b>5,5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>11</b>	<b>14</b>	<b>18</b>	<b>22</b>	<b>28</b>	<b>36</b>	<b>45</b>	<b>55</b>	<b>70</b>	<b>90</b>	<b>–</b>

*Модули зубьев колес в зацеплении равны.* Это следует из определения модуля зубьев формулой (4.11), равенства шагов зубьев колес в зацеплении по делительным окружностям и равенства шагов зубьев колес в зацеплении по начальным окружностям.



**Рис. 4.19. Дуговой угол зуба**

#### 4.2.6. Реечное станочное зацепление и изготовление колеса методом обкатки

Принцип изготовления зубчатых колес методом обкатки состоит в вырезании зубьев колеса из цилиндрической заготовки зубьями рабочего колеса 1 при качении начальной окружности заготовки по начальной окружности неподвижного рабочего колеса (рис. 4.20).

Радиус цилиндра заготовки равен радиусу вершин  $r_{a2}$ . Радиусы  $r_{w1}$ ,  $r_{w2}$  начальных окружностей рабочего колеса и заготовки устанавливаются расчетным путем.

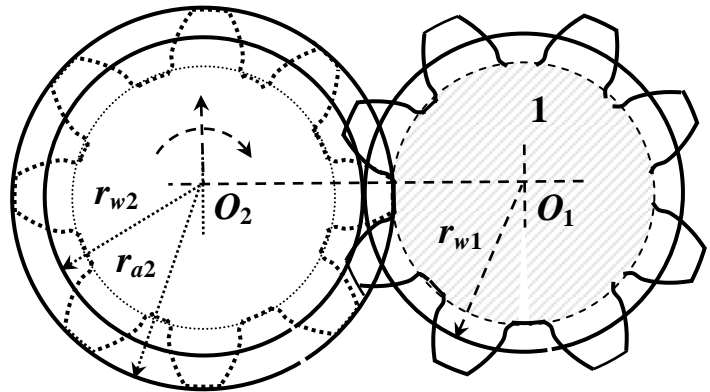


Рис. 4.20. Нарезание зубьев

Для изготовления цилиндрических колес с эвольвентным профилем стандартного модуля  $m$  методом огибания в практике используется реечный инструмент (рейка), представляющий собой в пределах рабочего колеса бесконечно большого радиуса с шагом  $p$ , равным  $\pi m$  (рис. 4.21).

В пределах при переходе от колеса к рейке с шагом  $p$  зубьев эвольвентные части профилей зубьев инструмента становятся прямолинейными, расположенными к оси зуба под стандартным углом  $\alpha$  ( $\alpha = 20^\circ$ ).

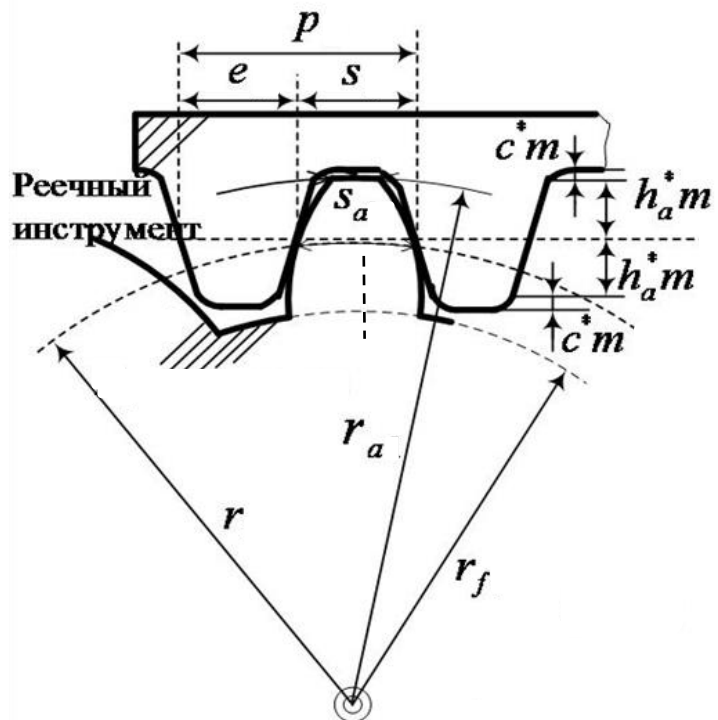


Рис.4.21. Станочное зацепление

Средней (делительной) прямой инструмента называется прямая, на которой толщина зуба рейки равна

ширине впадины или половине шага зубьев рейки. Высота прямолинейного профиля, образующего с осью зуба угол  $\alpha$ , соответствует стандарту и равна  $2h_a^*m$ , где  $h_a^*$  – коэффициент высоты зуба ( $h_a^* = 1$ ).

Наряду с прямолинейным участком профиль инструмента у впадин и вершин зуба имеет криволинейные переходные участки радиусом, равным  $\rho_f^* m$ , где  $\rho_f^*$  – коэффициент радиуса кривизны переходной кривой, равный 0,38. Высота каждой из двух неэвольвентных частей профиля зуба инструмента равна  $c^*m$ , где  $c^*$  – коэффициент радиального зазора ( $c^* = 0,25$ ).

При нарезании нулевого колеса берется цилиндрическая заготовка радиуса  $r_a$  вершин, рассчитываемого по формуле

$$r_a = m \left( \frac{z}{2} + h_a^* \right).$$

Заготовка устанавливается так, чтобы между ней и впадинами инструмента существовал зазор  $c^*m$ , то есть неэвольвентная часть основания зуба инструмента «не участвует» в нарезке зубьев заготовки.

Нарезание зубьев методом огибания состоит в перемещении цилиндрической заготовки колеса так, чтобы делительная окружность радиуса  $r$  ( $r = m \frac{z}{2}$ ) на заготовке катилась без скольжения по средней прямой инструмента. При этом часть заготовки вне впадин рейки срезается режущими кромками инструмента.

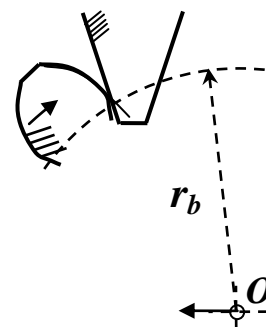
За счет неэвольвентной части вершины зуба инструмента высотой  $c^*m$  на заготовке образуются впадины с переходной дугой окружности радиуса  $\rho_f^* m$  от эвольвентного профиля зуба к окружности впадин. После нарезки высота эвольвентной части зуба колеса равна  $2h_a^*m$ , а полная высота зуба от окружности впадин до вершин равна  $2h_a^*m + c^*m$ .

При сборке передач с нулевыми колесами, нарезанными рейкой, взаимодействующие колеса устанавливаются так, что между впадинами одних и вершинами других обеспечивался радиальный зазор



$c^*m$ , то есть незвольвентные участки профилей зубьев не вступали во взаимодействие.

Теоретическими исследованиями доказано, что при нарезке нулевых колес с числом зубьев меньше 17 происходит подрез зубьев у оснований (рис. 4.22). При подрезе толщина зуба на окружности впадин становится меньше толщины зуба на основной окружности, что приводит к его ослаблению. Во избежание подреза при нарезке колес с числом зубьев менее 17 делительную окружность заготовки катят по полоидной прямой рейки, смещенной параллельно от средней линии инструмента на расстояние  $x \cdot m$  к вершинам зубьев рейки, где  $x$  – коэффициент смещения.



**Рис. 4.22.**  
**Подрез зуба**

Колесо, нарезанное инструментом, настроенным на ненулевое смещение, называется корригированным. При положительном смещении шаг зуба колеса по делительной окружности останется неизменным; толщина  $s$  зуба по делительной окружности, равная ширине впадины инструмента по полоидной прямой, увеличится.

#### 4.2.7. Рабочий участок профиля зуба

Пусть  $N_1, N_2$  – точки касания линии зацепления с основными окружностями колес 1, 2 (рис. 4.23). Линия зацепления пересекает окружности вершин колес 2 и 1 в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Эвольвентные участки профилей зубьев колес не пересекают линию зацепления вне отрезка  $N_1N_2$ , так как точки профилей не могут быть ближе к осям колес, чем радиусы основных окружностей. Поэтому зацепление неработоспособно, если какая-либо из точек  $A, B$  окажется вне отрезка  $N_1N_2$ .

Будем считать, что точки  $A, B$  не выходят за пределы отрезка  $N_1N_2$ . Точки профилей зубьев удалены от каждой из осей вращения колес не далее вершин зубьев. Это значит, что на участках  $AN_1$  и  $BN_2$  линии зацепления касаний колес не происходит.

Отрезок  $AB$  линии зацепления, являющийся геометрическим местом точек касания взаимодействующих колес в плоскости вращения, называется активной частью линии зацепления. Если ведущее колесо 1 вращается по ходу стрелки часов, то в точке  $A$  колеса входят в зацепление, а в точке  $B$  – выходят из зацепления.

При заданном направлении вращения усилие передает рабочий участок  $ST$  переднего профиля зуба колеса 1 в плоскости вращения, а воспринимает – рабочий участок заднего профиля колеса 2. Рабочий участок  $ST$  зуба колеса 1 расположен между концентрическими окружностями с центром на оси колеса и радиусами, равными расстояниям от центра до точек  $B$  и  $A$ . Только точки рабочего участка пересекают активную часть  $AB$  линии зацепления.

Аналогично можно найти рабочий участок зуба колеса 2, находящийся между концентрическими окружностями с центром на оси колеса 2.

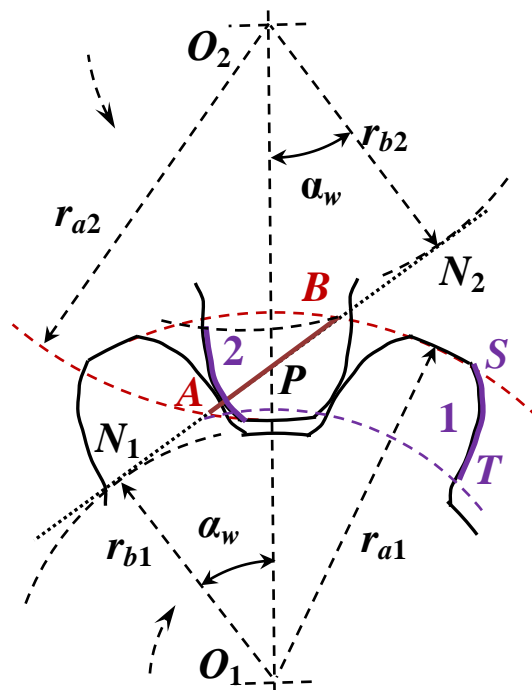


Рис. 4.23. Линия зацепления в плоскости вращения колес

### 4.3. Расчет эвольвентного зацепления с нулевыми колесами

#### 4.3.1. Условие зацепления без бокового зазора

Эвольвентное зацепление эквивалентно фрикционной передаче с колесами, радиусы которых равны радиусам начальных окружностей зубчатых колес.

Если систему отсчета связать с одним из двух взаимодействующих колес, то в этой системе начальная окружность другого колеса катится без скольжения по начальной окружности исходного колеса.

При проектировании зубчатых передач исходят из зацепления без бокового зазора (рис. 4.24). Это означает, что толщина зуба одного колеса по начальной окружности равна ширине впадины другого колеса по начальной окружности.

Передача, в которой начальные окружности колес совпадают с делительными окружностями, называется нулевой.

В нулевых колесах толщина зуба и ширина впадины по делительной окружности равны половине шага зуба. Поэтому условие зацепления без бокового зазора для нулевых колес и нулевой передачи можно записать так:

$$s_2 = e_1 = s_1 = e_2 = \frac{p}{2},$$

где  $s_1, s_2$  и  $e_1, e_2$  – толщины и впадины зубьев колес 1, 2 по делительным окружностям;  $p$  – шаг зубьев колес 1, 2.

В нулевой передаче с нулевыми колесами, установленными без бокового зазора, расстояние  $a_w$  между осями колес определяют выражением

$$a_w = r_1 + r_2$$

или с учетом равенства (4.12)

$$a_w = m \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad (4.13)$$

где  $z_1, z_2$  – число зубьев колес 1, 2.

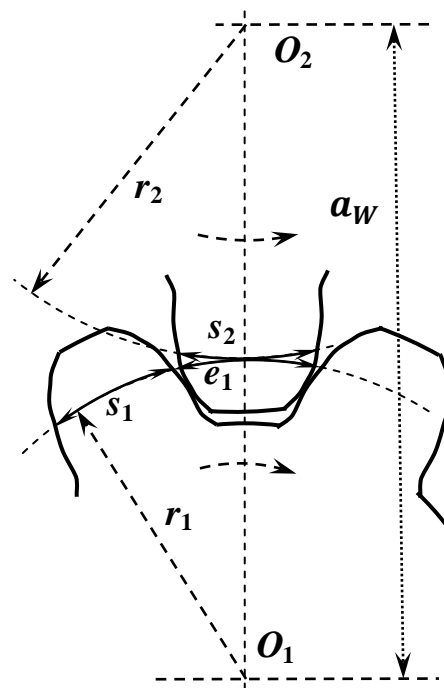


Рис. 4.24. Зацепление без бокового зазора

### 4.3.2. Коэффициент перекрытия

Непрерывность вращения колес в зубчатой передаче обеспечивается непрерывным касанием зубьев.

Пусть  $A, B$  – точки входа в зацепление и выхода из зацепления зуба колеса 1;  $A_1, B_1$  – точки рабочего профиля зуба колеса 1 на основной окружности в моменты входа и выхода из зацепления

(рис. 4.25). Во избежание прерывания движения и ударов зуб должен выходить из зацепления после входа в зацепление следующего зуба. Это означает, что время нахождения одного зуба в зацеплении должно превышать время поворота колеса на дуговой угол зуба. Математически это означает, что путь, проходимый точкой зуба колеса 1 на основной окружности за время зацепления, равный длине дуги  $\overline{B_1A_1}$ , превышает шаг зубьев колеса 1 по основной окружности.

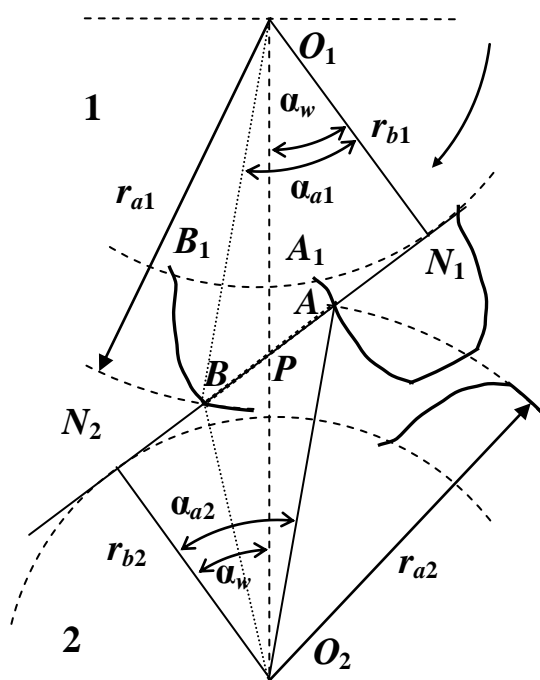


Рис. 4.25. Точки  $A$  и  $B$  линии зацепления

Отношение пути, проходимого точкой зуба колеса на основной (начальной) окружности за время зацепления зуба, к шагу зубьев колеса на основной (начальной) окружности называется коэффициентом перекрытия. Можно доказать справедливость следующей формулы для расчета коэффициент  $\varepsilon$  перекрытия [5]:

$$\varepsilon = \frac{z_1}{2\pi} (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + \frac{z_2}{2\pi} (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w), \quad (4.14)$$

где  $\alpha_{a1}, \alpha_{a2}$  – профильные углы зубьев колес 1, 2 на окружности вершин;

$\alpha_w$  – угол зацепления, равный в рассматриваемом случае стандартному профильному углу  $\alpha$ ;

$z_1, z_2$  – число зубьев колес 1, 2.

### 4.3.3. Коэффициент скольжения

Коэффициенты скольжения вводят для оценки износа зубьев, обусловленного скольжениями колес в относительных движениях. Используя обозначения из предыдущего подраздела, приведем окончательные формулы для коэффициентов  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  скольжения колес 1, 2 в точках  $A$  и  $B$  касания (рис. 4.25):

$$\lambda_1 = \frac{z_2[\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_W]}{(z_1 + z_2)\operatorname{tg} \alpha_W - z_2 \operatorname{tg} \alpha_{a2}} \left[ 1 + \frac{z_1}{z_2} \right]; \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_W}{\operatorname{tg} \alpha_{a2}} \left[ 1 + \frac{z_1}{z_2} \right]; \quad (4.15)$$

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_W}{\operatorname{tg} \alpha_{a1}} \left[ 1 + \frac{z_1}{z_2} \right]; \quad \lambda_2 = \frac{z_1[\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_W]}{(z_1 + z_2)\operatorname{tg} \alpha_W - z_1 \operatorname{tg} \alpha_{a1}} \left[ 1 + \frac{z_1}{z_2} \right]. \quad (4.16)$$

Чем больше коэффициент скольжения, тем больше износ зуба колеса в данной точке.

### 4.3.4. Коэффициент удельного давления

Коэффициент удельного давления позволяет оценить среднюю кривизну эвольвентных профилей зуба в точке контакта. При прочих равных условиях, чем меньше средняя кривизна и, как следствие, больше приведенный радиус кривизны, тем меньше контактные напряжения.

В полюсе зацепления коэффициент  $\vartheta_p$  удельного давления между колесами 1, 2 с учетом обозначений из подраздела 4.4.2 определяют по формуле

$$\vartheta_p = \frac{2(z_1 + z_2)}{z_1 z_2 \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha_W}. \quad (4.17)$$

### 4.3.5. Алгоритм расчета параметров нулевой передачи

Введем следующие обозначения:

$z_1, z_2$  – число зубьев ведущего и ведомого колес соответственно в зацеплении;

$m$  – модуль зубьев, мм;

$\alpha$  – профильный угол зуба ( $\alpha = 20^\circ$ ), рад;

$h_a^*, c^*$  – коэффициенты высоты зуба и радиального зазора;

$r_1, r_2$  – радиусы делительных окружностей ведущего и ведомого колес соответственно в зацеплении, мм;

$r_{b1}, r_{b2}$  – радиусы начальных окружностей ведущего и ведомого колес соответственно в зацеплении, мм;

$\alpha_w$  – угол зацепления, рад;

$r_{w1}, r_{w2}$  – радиусы начальных окружностей ведущего и ведомого колес соответственно в зацеплении, мм;

$r_{f1}, r_{f2}$  – радиусы окружностей впадин ведущего и ведомого колес соответственно, мм;

$r_{a1}, r_{a2}$  – радиусы окружностей вершин ведущего и ведомого колес соответственно, мм;

$\alpha_{a1}, \alpha_{a2}$  – профильные углы зубьев ведущего и ведомого колес соответственно на окружностях вершин, рад;

$s_1, s_2$  и  $s_{a1}, s_{a2}$  – толщины зубьев на делительных окружностях и на окружностях вершин ведущего и ведомого колес соответственно, мм;

$s_{a1}^*, s_{a2}^*$  – относительные толщины зубьев на окружностях вершин ведущего и ведомого колес соответственно;

$\varepsilon, \vartheta_p$  – соответственно коэффициенты перекрытия и удельного давления;

$\lambda_{1max}, \lambda_{2max}$  – соответственно наибольшие коэффициенты скольжения для ведущего и ведомого колес.

Представим алгоритм расчета параметров нулевой зубчатой передачи с нулевыми колесами.

1. Задаем исходные данные  $z_1, z_2, m, \alpha, h_a^*, c^*$ :

$$z_1 \geq 17; z_2 \geq 17; \alpha = 20^\circ; h_a^* = 1; c^* = 0,25.$$

2. Вычисляем радиусы делительных окружностей колес по формуле (4.12):

$$r_1 = m \frac{z_1}{2}; \quad r_2 = m \frac{z_2}{2}.$$

3. Вычисляем радиусы основных окружностей колес по формуле (4.4):

$$r_{b1} = r_1 \cos \alpha ; \quad r_{b2} = r_2 \cos \alpha .$$

4. Из определения нулевой передачи устанавливаем радиусы начальных окружностей колес:

$$r_{w1} = r_1 ; r_{w2} = r_2 .$$

5. Из равенств (4.8) и в пунктах 3, 4 определяем угол  $\alpha_w$  зацепления:

$$\alpha_w = \alpha .$$

6. Вычисляем расстояние  $a_w$  между осями ведущего и ведомого колес:

$$a_w = r_{w1} + r_{w2} = r_1 + r_2 .$$

7. Определяем радиусы окружностей впадин нулевых колес:

$$r_{f1} = r_1 - h_a^* m - c^* m ; \quad r_{f2} = r_2 - h_a^* m - c^* m .$$

8. Определяем радиусы окружностей вершин нулевых колес:

$$r_{a1} = r_1 + h_a^* m ; \quad r_{a2} = r_2 + h_a^* m .$$

9. Вычисляем профильные углы зубьев на окружностях вершин (рис. 4.25):

$$\cos \alpha_{a1} = \frac{r_{b1}}{r_{a1}} ; \quad \cos \alpha_{a2} = \frac{r_{b2}}{r_{a2}} .$$

10. Вычисляем толщину зубьев на делительных окружностях как половину шага из формулы (4.11):

$$s_1 = \frac{\pi m}{2} ; \quad s_2 = \frac{\pi m}{2} .$$

11. Вычисляем толщину зубьев на окружностях вершин по следующим формулам (без вывода):

$$s_{a1} = r_{a1} \left[ \frac{s_1}{r_1} + 2 (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) - 2 (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \alpha_{a1}) \right] ;$$

$$s_{a2} = r_{a2} \left[ \frac{s_2}{r_2} + 2 (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) - 2 (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \alpha_{a2}) \right] .$$

12. Вычисляем относительную толщину зубьев на окружностях вершин:

$$s_{a1}^* = \frac{s_{a1}}{m} ; \quad s_{a2}^* = \frac{s_{a2}}{m} .$$

13. Вычисляем коэффициент перекрытия по формуле (4.14):

$$\varepsilon = \frac{z_1}{2\pi} (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + \frac{z_2}{2\pi} (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w) .$$

14. Вычисляем наибольшие коэффициенты скольжения по формулам (4.15), (4.16), достигаемые на ножках зубьев:

$$\lambda_{1max} = \frac{z_2[\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w]}{(z_1 + z_2)\operatorname{tg} \alpha_w - z_2 \operatorname{tg} \alpha_{a2}} \left[ 1 + \frac{z_1}{z_2} \right];$$

$$\lambda_{2max} = \frac{z_1[\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w]}{(z_1 + z_2)\operatorname{tg} \alpha_w - z_1 \operatorname{tg} \alpha_{a1}} \left[ 1 + \frac{z_1}{z_2} \right].$$

15. Вычисляем коэффициент удельного давления по формуле (4.17):

$$\vartheta_p = \frac{2(z_1 + z_2)}{z_1 z_2 \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha_w}.$$

16. Проверяем следующие условия:

$$\varepsilon > 1; \quad 0,25 < s_{a1}^* < 0,4; \quad 0,25 < s_{a2}^* < 0,4.$$

## 4.4. Передаточное отношение

### 4.4.1. Число степеней свободы

Сложные цилиндрические зубчатые механизмы делятся на многократные и планетарные механизмы. Напомним: *многократным называется зубчатый механизм, состоящий из простых зубчатых механизмов, оси колес которых неподвижны относительно стойки. Планетарным называется зубчатый механизм, содержащий хотя бы одно колесо, ось которого движется относительно стойки.*

Низшей кинематической парой цилиндрических зубчатых механизмов называется соединение двух звеньев, образующих неподвижную вращательную пару пятого класса, высшей кинематической парой – соединение колес в зацеплении, образующих пару второго класса.

Цилиндрические зубчатые механизмы относятся к механизмам первого семейства ( $k = 1$ ), поскольку все кинематические пары не допускают вращения колес вокруг оси, перпендикулярной осям вращения колес. Ограничение относительного движения колеса вдоль общей нормали, накладываемое высшей парой, не служит ограниче-



нием движения вдоль общей нормали относительно стойки, так как соединение колес подвижное.

Число  $W$  степеней свободы зубчатых механизмов с цилиндрическими колесами найдем по формуле (2.2) и  $k = 1$ :

$$W = 5n - 4p_1 - p_4, \quad (4.18)$$

где  $n$  – число вращающихся звеньев;  $p_1, p_4$  – число пар пятого и второго класса или число низших и высших пар соответственно.

#### 4.4.2. Степень и передаточное отношение ступени

Многократные механизмы могут быть рядовыми или ступенчатыми.

*Степью называют неделимую совокупность передающих движение вращающихся звеньев, в которой два звена имеют неподвижные относительно стойки оси вращения и одну степень свободы в относительном движении.*

*Передаточным отношением  $u_{ij}$  ступени зубчатого механизма называют отношение угловых скоростей  $\omega_i$  и  $\omega_j$  ведущего (входного) звена с номером  $i$  и ведомого (выходного) звена с номером  $j$  ступени:*

$$u_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}. \quad (4.19)$$

Рассмотрим частный случай, когда ступень образована двумя колесами с номерами  $i, j$ .

Пусть  $z_i, z_j$  и  $p_{wi}, p_{wj}$  – число зубьев и шаги по начальным окружностям колес с номерами  $i, j$  соответственно. Если колеса с номерами  $i, j$  находятся в зацеплении, то  $p_{wi} = p_{wj}$ , и равенство (4.19) можно записать в виде равенства (4.7):

$$u_{ij} = \frac{r_{wj}}{r_{wi}} \text{ или } u_{ij} = \frac{2\pi r_{wj}}{2\pi r_{wi}} \text{ или } u_{ij} = \frac{p_{wj}z_j}{p_{wi}z_i} \text{ или } u_{ij} = \frac{z_j}{z_i}.$$

Отсюда

$$u_{ij} = \pm \frac{z_j}{z_i}, \quad (4.20)$$

где знак плюс соответствует внутреннему зацеплению, при котором направления вращения колес совпадают, и знак минус – внешнему зацеплению, при котором направления вращения колес противоположны.

#### 4.4.3. Передаточное отношение многократного механизма

Передаточным отношением  $u_{1n}$  зубчатого механизма с одной степенью свободы называется отношение угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_n$  ведущего (входного) колеса с номером 1 и ведомого (выходного) колеса с номером  $n$ , оси вращения которых неподвижны относительно стойки:

$$u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}. \quad (4.21)$$

Для нахождения передаточного отношения механизм разбивается на ступени. Методом математической индукции можно доказать, что число степеней свободы рядового механизма равно 1, а передаточное

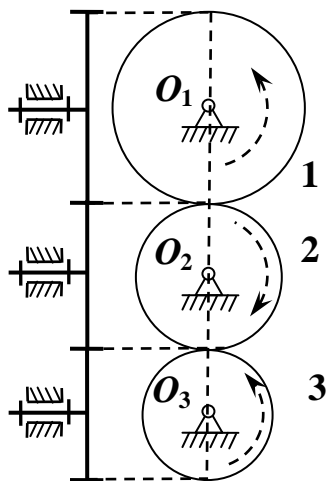


Рис. 4.26. Рядовой механизм

отношение  $u_{1n}$  многократного механизма, содержащего  $n$  колес с неподвижными осями, равно произведению передаточных отношений последовательно соединенных ступеней, составляющих механизм:

$$u_{1n} = u_{12}u_{23}u_{34} \dots u_{(n-1)n}. \quad (4.22)$$

Многократные зубчатые механизмы подразделяются на рядовые и ступенчатые.

Рядовой механизм представляет собой последовательность передающих вращения колес с одним колесом на каждом валу (рис. 4.26).

В соответствии с определением ступенью рядового механизма будем считать пару колес в зацеплении.

Рядовой механизм на рисунке 4.26 имеет три подвижных звена ( $n = 3$ ), три низшие кинематические пары – соединения валов колес со

стойками ( $p_1 = 3$ ), две высшие пары – зацепления колес ( $p_4 = 2$ ) и в соответствии с формулой (4.18) одну степень свободы:

$$W = 5n - 4p_1 - p_4 = 1.$$

Данный рядовой механизм содержит «две ступени» и для расчета его передаточного отношения можно воспользоваться формулами (4.20), (4.21), (4.22):

$$u_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 \omega_3} = u_{12} u_{23} = \left[ -\frac{z_2}{z_1} \right] \left[ -\frac{z_3}{z_2} \right] = (-1)^2 \frac{z_3}{z_1} = \frac{z_3}{z_1}.$$

Показатель второй степени равен числу внешних зацеплений.

Передаточное отношение рядового механизма обратно пропорционально отношению чисел зубьев колес на ведущем (входном) и ведомом (выходном) валах, а промежуточные колеса влияют только на направление вращения выходного вала.

Ступенчатый механизм представляет собой совокупность передающих вращения колес, установленных так, что на ведущем (входном) и ведомом (выходном) валах с неподвижными осями установлено одно колесо, а на промежуточных валах – более одного колеса.

На рис. 4.27 показана схема двухступенчатого редуктора. Он имеет три подвижных звена, то есть три вала с колесами ( $n = 3$ ), три низшие кинематические пары, то есть соединения валов со

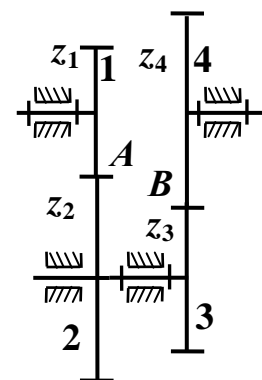


Рис. 4.27. Редуктор

стойкой ( $p_1 = 3$ ), две высшие пары, то есть соединения колес по линиям  $A, B$  ( $p_4 = 2$ ), и в соответствии с формулой (4.18) одну степень свободы:

$$W = 5n - 4p_1 - p_4 = 1.$$

Первую ступень образует пара колес 1, 2, вторую – пара колес 3, 4.

Передаточное отношение этого редуктора определяется по формуле (4.22), в которой  $u_{23} = 1$ . Действительно, так как колеса 2 и 3 находятся на одной оси и  $\omega_2 = \omega_3$ , то

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\omega_2 \omega_3 \omega_4} = \frac{\omega_1 \omega_3}{\omega_2 \omega_4} = u_{12} u_{34}, \quad (4.23)$$

где  $u_{12} = \left[ -\frac{z_2}{z_1} \right]$ ,  $u_{34} = \left[ -\frac{z_4}{z_3} \right]$ .

#### 4.4.4. Графический способ определения передаточного отношения многократного механизма

Передаточное отношение можно определить графическим способом с помощью методов треугольников скоростей и плана угловых скоростей.

Пусть даны геометрические размеры колес 1, 2, 3 и угловая скорость ведущего колеса рядового механизма:

$$r_{w1} = 200 \text{ мм}; \omega_1 = 100 \text{ рад/с};$$

$$r_{w2} = 120 \text{ мм}; r_{w3} = 100 \text{ мм}.$$

Вычерчиваем кинематическую схему рядового механизма в линейном масштабе  $\mu_R$  с указанием осей  $O_1, O_2, O_3$  вращения колес, полюсов  $A, B$  зацепления колес 1, 2 и 2, 3 (4.28, *a*). Для этого назначим линейный масштаб:

$$\mu_R = 5 \text{ мм/мм}.$$

Вычисляем радиусы

начальных окружностей колес в масштабе:

$$O_1A = r_{w1} / \mu_R = 40 \text{ мм}; O_2A = 24 \text{ мм}; O_3B = 20 \text{ мм}.$$

Для построения треугольников скоростей проводим базисную прямую перпендикулярно осям вращения колес. Отмечаем характерные точки  $O_1, O_2, O_3, A, B$  на базисной прямой, которыми служат проекции на нее одноименных точек (4.28 *b*).

Строим графики скоростей точек колеса 1 в масштабе с осью абсцисс на базисной прямой. Для этого

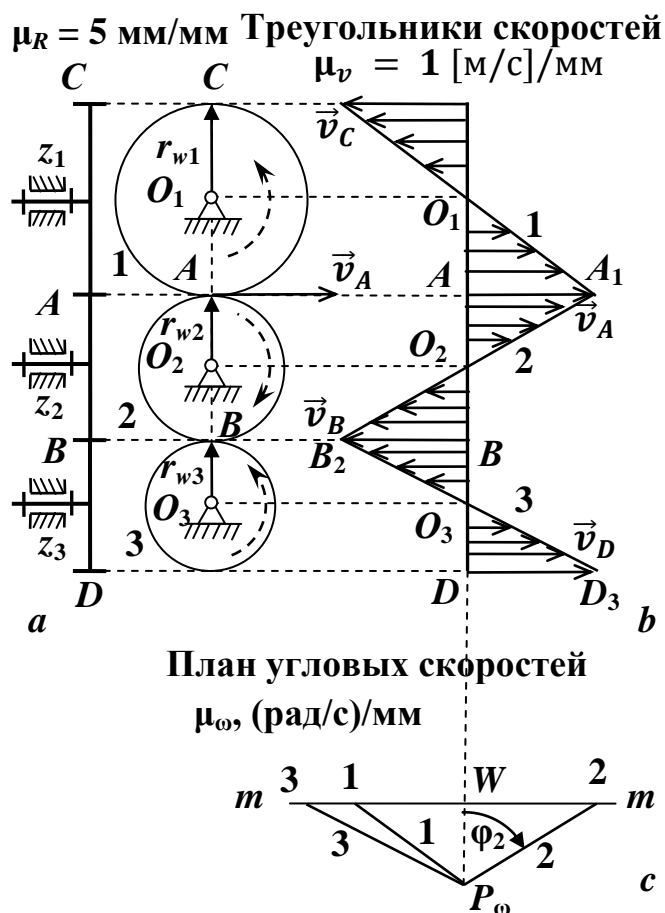


Рис. 4.28. Кинематическая схема (*a*), треугольники скоростей (*b*) и план угловых скоростей (*c*)

1) вычисляем скорость  $v_A$  точки  $A$ :

$$v_A = \frac{\omega_1 r_{w1}}{1000} = 20 \text{ м/с};$$

2) назначаем масштаб  $\mu_v$  скорости:

$$\mu_v = 1 \text{ [м/с]/мм};$$

3) вычисляем длину отрезка  $AA_1$ , изображающего вектор  $\vec{v}_A$  скорости точки  $A$ , по следующей формуле:

$$AA_1 = \frac{v_A}{\mu_v} = 20 \text{ мм.}$$

4) откладывает отрезок  $AA_1$  от точки  $A$  на базисной прямой перпендикулярно прямой.

Для построения треугольника скоростей колеса достаточно найти две точки графика. Скорость точки  $A$  начальной окружности колеса 1 известна, скорость точки  $O_1$  оси колеса 1 также известна и равна нулю. График скоростей точек колеса 1 в масштабе изображаем прямой  $O_1A_1$  с номером 1. Треугольник  $AO_1A_1$  называют треугольником скоростей точек колеса 1 на радиусе  $O_1A$ .

Точка  $A$  служит характерной точкой и колеса 2. Характерной точкой колеса 3 служит точка  $B$ , скорость которой равна скорости точки  $A$ . Аналогично строим треугольники скоростей всех колес механизма с учетом направлений их вращений.

С использованием треугольников скоростей можно определить угловые скорости колес.

Выберем произвольную точку  $P_\omega$ , которую назовем полюсом плана угловых скоростей, произвольный отрезок  $P_\omega W$ , параллельный базисной прямой, и прямую  $mt$ , проходящую через точку  $W$  перпендикулярно отрезку  $P_\omega W$ , измеряемому в миллиметрах (рис. 4.28 *с*). Проведем через полюс прямые 1, 2, 3, параллельные прямым 1, 2, 3 треугольников скоростей колес 1, 2, 3. Точки 1, 2, 3 пересечения прямых 1, 2, 3 с прямой  $mt$  образуют отрезки  $W1$ ,  $W2$ ,  $W3$ , равные угловым скоростям колес в масштабе  $\mu_\omega$  со знака плюс или минус. Действительно, из треугольника  $O_2AA_1$  скоростей колеса 2 следует равенство

$$\frac{AA_1}{O_2A} = \frac{v_A/\mu_v}{r_{W2}/\mu_R} = \frac{0,001 \text{ м/мм} \cdot r_{W2} \cdot \omega_2/\mu_v}{r_{W2}/\mu_R} = 0,001 \frac{\omega_2 \mu_R}{\mu_v}.$$

Из подобия треугольников  $O_2AA_1$  и  $P_\omega W2$  и с учетом предыдущего равенства найдем, что  $\frac{AA_1}{O_2A} = \frac{W2}{P_\omega W} = 0,001 \frac{\omega_2 \mu_R}{\mu_v}$ ,

или

$$\omega_2 = \mu_\omega \cdot W2. \quad (4.24)$$

где  $\mu_\omega = \frac{\mu_v}{0,001 \cdot \mu_R \cdot P_\omega W}$ ;  $W2$  – длина отрезка, мм.

Аналогично можно найти, что

$$\omega_1 = \mu_\omega \cdot W1; \omega_3 = \mu_\omega \cdot W3. \quad (4.25)$$

В формулах (4.24), (4.25)  $\mu_\omega$  – коэффициент масштаба угловых скоростей колес, [рад/с]/мм;  $W2$ ,  $W1$ ,  $W3$  – длины отрезков на плане угловых скоростей со знаком плюс или минус.

Угол, образуемый полюсным отрезком  $P_\omega W$  и отрезками  $P_\omega 1$ ,  $P_\omega 2$ ,  $P_\omega 3$  с отсчетом от отрезка  $P_\omega W$ , связан с величиной и направлением угловой скорости вращения колеса.

Если направление по ходу стрелки часов выбрано положительным направлением отсчета угла, то на рисунке 4.23 угловая скорость колеса 2 и  $W2$  – положительные величины, а угловые скорости колес 1, 3 и  $W1$ ,  $W3$  – отрицательные величины.

Из равенств (4.25) следует, что

$$u_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{W1}{W3}. \quad (4.26)$$

Формула (4.26) позволяет оценить передаточное отношение зубчатого механизма графическим способом после измерения длин отрезков  $W1$ ,  $W3$  на плане. В данном случае значения величин  $W1$ ,  $W3$  отрицательные. Следовательно, передаточное отношение – положительная величина и направления вращения крайних колес совпадают.

Как следует из равенства (4.20), передаточное отношение не зависит от угловой скорости ведущего колеса. Значение угловой скорости можно брать произвольным, если не стоит задача расчета скоростей точек колес по треугольникам скоростей.

Методики оценки передаточного отношения ступенчатого и рядового механизмов графическим способом аналогичны.

Характерными точками, в которых определяются скорости, служат полюсы зацепления (точки  $A, B$ ) и точки  $O_1, O_2$  неподвижных осей колес (рис. 4.29 *a*). Сначала строятся треугольники скоростей колес 1 и 2. Затем на прямой 2 треугольника колеса 2 отчается отрезок  $B_1C_1$  треугольника скоростей колеса 3, точка  $B_1$  которого идентифицирует конец вектора  $\vec{v}_B$  скорости полюса  $B$  в масштабе.

С помощью плана угловых скоростей (рис. 4.29 *b*) определяем передаточное отношение редуктора:

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{W1}{W4}$$

В последней формуле значения величин  $W1, W4$  отрицательные. Следовательно, передаточное отношение – положительная величина, и вращения ведущего и ведомого валов направлены одинаково.

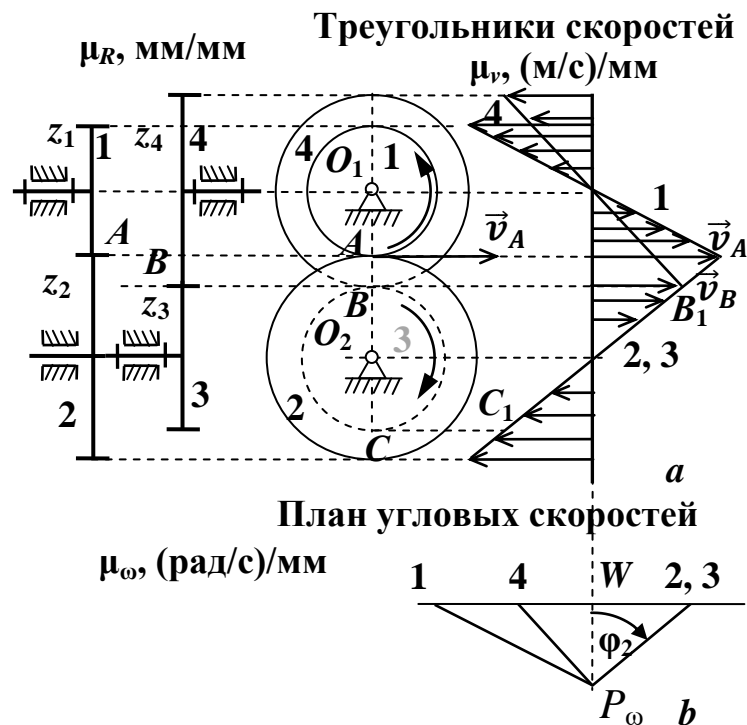


Рис. 4.29. Треугольники скоростей (*a*) и план угловых скоростей (*b*)

#### 4.4.5. Передаточное отношения планетарного механизма

В состав планетарного зубчатого механизма с цилиндрическими колесами входит один или несколько простейших планетарных механизмов (эпициклических передач), валы которых на входе и выходе соосны. Простейший планетарный механизм является одноступенчатым. Ступень состоит из трех или четырех колес, два из которых установлены на валах с неподвижными осями (рис. 4.30).

Вращающееся звено, несущее вал с подвижной осью и называемое водилом, на схеме принято обозначать латинской буквой  $H$ .

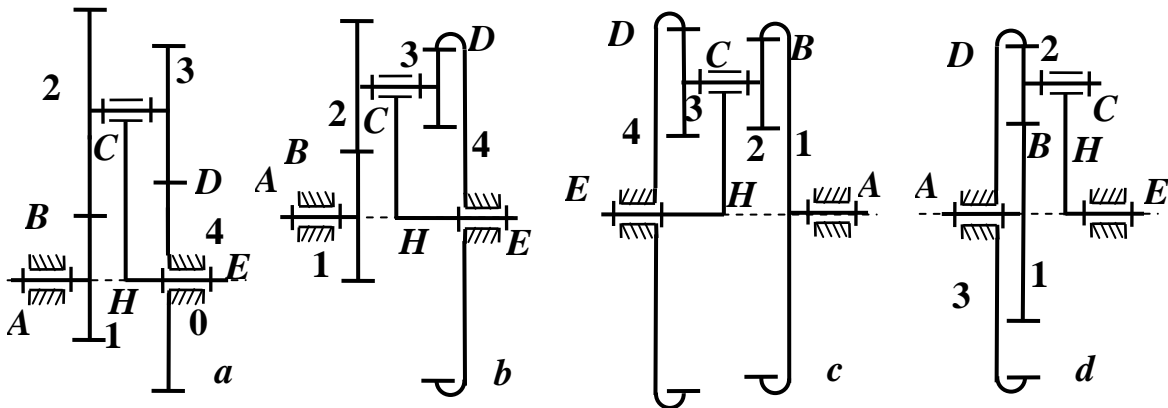


Рис. 4.30. Схемы простейших планетарных механизмов

Простейший планетарный механизм имеет три подвижных звена, три низшие и две высшие кинематические пары (табл. 4.2).

#### 4.2. Обозначения и наименования кинематических пар

$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
0, 1	1, 2-3	$H$ , 2-3	2-3, 4	$H$ , 0
$B$	Высшая	$B$	Высшая	$B$

Подвижными звеньями служат вал с колесом 1, вал с колесами 2, 3 или с колесом 2, вал водила  $H$  ( $n = 3$ ). Вращательные пары  $A$ ,  $C$ ,  $E$  образованы каждым из трех валов и стойкой ( $p_1 = 3$ ). Две высшие пары  $B$ ,  $D$  образованы двумя парами колес в зацеплении ( $p_4 = 2$ ). Число степеней свободы простейшего планетарного механизма равно 1:

$$W = 5n - 4p_1 - p_4 = 1.$$

Найдем передаточное отношение  $u_{1H}$  простейшего планетарного механизма (рис 4.30  $a$ ). Ведущим (входным) служит вал, на котором установлено колесо 1, ведомым (выходным) – вал водила  $H$  с неподвижной осью вращения. Во втулке водила установлен вал с колесами 2, 3, вращающийся вокруг оси водила.



Пусть  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_H$  – угловые скорости колес 1, 2, 3, 4 и водила  $H$  соответственно.

По условию,

$$\omega_2 = \omega_3; \omega_4 = 0. \quad (4.27)$$

По определению,

$$u_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H}. \quad (4.28)$$

Свяжем систему отсчета жестко с водилом. В новой системе отсчета вал с колесами 2, 3 вращается вокруг неподвижной оси во втулке водила, а колесо 4 вращается вокруг своей неподвижной оси и оси водила. Таким образом, простейший механизм в новой системе отсчета превращается из планетарного в ступенчатый механизм с неподвижными осями  $O_1, O_2, O_3$  вращения колес (рис. 4.31 а).

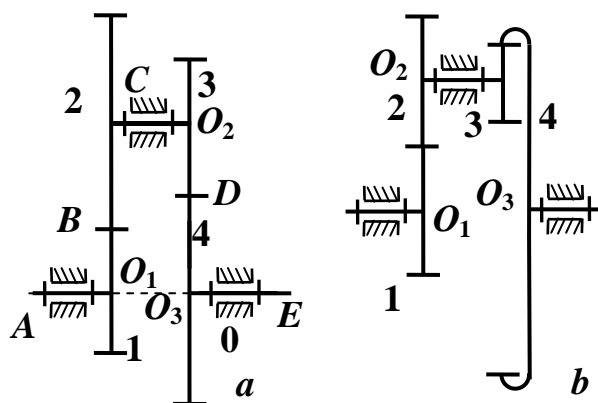


Рис. 4.31. Замещающие механизмы

*Простейший планетарный механизм с условно остановленным водилом и подвижным опорным колесом называется приведенным или замещающим механизмом.*

*Замещающий механизм имеет две ступени. Первая образована колесами 1, 2 с неподвижными осями  $O_1, O_2$ , вторая – парой колес 3, 4 с неподвижными осями  $O_1, O_3$ .*

Замещающий механизм имеет две ступени. Первая образована колесами 1, 2 с неподвижными осями  $O_1, O_2$ , вторая – парой колес 3, 4 с неподвижными осями  $O_1, O_3$ .

Угловую скорость колеса и передаточное отношение в подвижной системе отсчета, вращающейся вместе с водилом, будем обозначать с верхним индексом  $H$ .

В соответствии с теоремой о сложении угловых скоростей

$$\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H; \omega_4^H = \omega_4 - \omega_H = -\omega_H; \omega_H^H = 0.$$

Передаточное отношение  $u_{14}^H$  замещающего механизма с колесом 1 на входе и колесом 4 на выходе определяется так:

$$u_{14}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_4^H}$$

или с учетом последних равенств

$$u_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = -\frac{\omega_1}{\omega_H} + 1.$$

Полученное уравнение позволяет записать формулу (4.28) в таком виде:

$$u_{1H} = 1 - u_{14}^H, \quad (4.29)$$

где в соответствии с равенством (4.23)

$$u_{14}^H = u_{12}^H u_{34}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right).$$

Аналогично выводится формула для передаточного отношения механизма с внешним и внутренним зацеплениями колес (рис. 4.30 *b*):

$$u_{1H} = 1 - u_{14}^H = 1 - u_{12}^H u_{34}^H = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(\frac{z_4}{z_3}\right).$$

Формулу для передаточного отношения простейшего планетарного механизма (рис. 4.30 *c*), в котором ведущим звеном служит водило, можно записать так:

$$u_{H1} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = 1/u_{1H},$$

где с учетом равенства (4.29)

$$u_{1H} = 1 - u_{14}^H = 1 - u_{12}^H u_{34}^H = 1 - \left(\frac{z_2}{z_1}\right) \left(\frac{z_4}{z_3}\right).$$

Аналогично выводится формула для передаточного отношения простейшего механизма с одним сателлитом на валу (рис. 4.30 *d*):

$$u_{1H} = 1 - u_{13}^H = 1 - u_{12}^H u_{23}^H = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \frac{z_3}{z_2} = 1 + \frac{z_3}{z_1}.$$

Если обозначить  $i$  – номер ведущего колеса,  $j$  – номер опорного (неподвижного) колеса, то формулу (4.29) для передаточного отношения простейшего планетарного механизма с водилом на выходе в общем случае можно записать так:

$$u_{iH} = 1 - u_{ij}^H. \quad (4.30)$$

Формула для передаточного отношения простейшего механизма с водилом на входе и колесом с номером  $i$  на выходе записывается так:

$$u_{Hi} = 1/(1 - u_{ij}^H). \quad (4.31)$$

#### 4.4.6. Графический способ определения передаточного отношения планетарного механизма

Оценим передаточное отношение простейшего планетарного механизма (рис. 4.32 а) графическим способом с учетом пояснений, данных в параграфе 4.5.4.

Он имеет подвижные колеса 1, 2-3, водило  $H$ , опорное колесо 4, неподвижные оси  $O_1, O_H$  вращения колеса 1 и водила, подвижную ось  $O_2$  вращения вала с колесами 2, 3.

Характерными точками, в которых определяются скорости, служат полюсы зацепления  $A$  колес 1, 2 и  $B$  колес 3, 4, а также точки  $O_1$  и  $O_H$  на неподвижных осях колеса 1 и водила. Сначала строим треугольник скоростей колеса 1 по точкам  $O_1, A_1$  концов векторов скоростей его точек  $O_1, A$ , затем –

звена, содержащего сателлиты 2 и 3 на подвижной оси по точкам  $A_1, B_1$  концов векторов скоростей его точек  $A, B$  (рис. 4.32 б). Принимаем во внимание, что в полюсе  $B$  зацепления с неподвижным колесом 4 скорость точки  $B$  колеса 3 равна нулю: ось с полюсом  $B$  является мгновенной осью вращения колеса 3. Тем самым для построения треугольника скоростей водила замечаем, что скорость его точки  $O_H$  равна нулю, а скорости одноименных точек  $O_2$  водила и подвижной оси звена с сателлитами совпадают.

С помощью плана угловых скоростей (рис. 4.32 с) определяем передаточное отношение редуктора:

$$u_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{W1}{WH}.$$

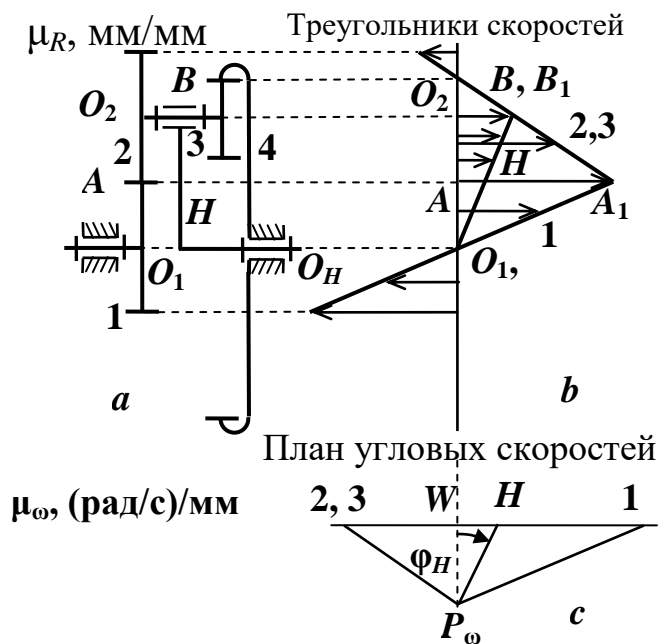


Рис. 4.32. План угловых скоростей

## 4.5. Структурный анализ зубчатого механизма

Структурный анализ механизма проводят по заданной структурной схеме и при известном количестве зубьев колес (рис. 4.33).

Этап 1. Определяем состав звеньев механизма: стойка 0; ведущее цилиндрическое колесо 1 с неподвижной осью вращения; вал с цилиндрическими колесами 2, 3 и неподвижной осью вращения; вал с цилиндрическими колесами 4, 5 и неподвижной осью вращения; вал с цилиндрическими колесами 6, 7 (сателлитами) и подвижной осью вращения; опорное (неподвижное) цилиндрическое колесо 8; водило  $H$ .

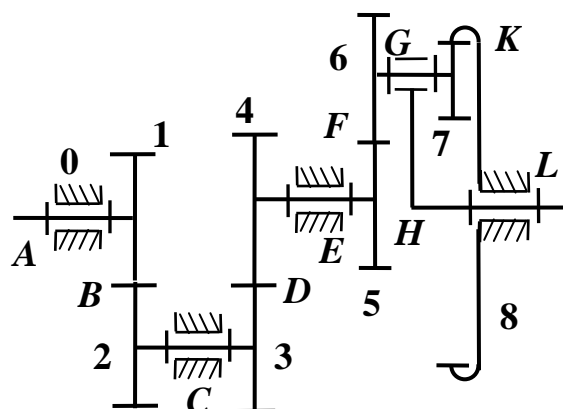


Рис. 4.33. Структурная схема механизма

Этап 2. Отмечаем числа  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8$ , зубьев колес 1..8.

Этап 3. Составляем таблицу кинематических пар с указанием обозначений, названий ( $B$  – вращательная пара,  $B2$  – высшая пара, пара второго класса) и номеров образуемых их звеньев (табл. 4.3).

### 4.3. Обозначения и наименования кинематических пар

$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$K$	$L$
0, 1	1, 2	0, 2-3	3, 4	0, 4-5	5, 6	$H$ , 6-7	7, 8	0, 8
$B$	$B2$	$B$	$B2$	$B$	$B2$	$B$	$B2$	$B$

Механизм содержит пять подвижных звеньев 1, 2-3, 4-5, 6-7,  $H$  ( $n = 5$ ), пять низших пар  $A, C, E, G, L$  ( $p_1 = 5$ ), четыре пары  $B, D, F, K$  второго класса ( $p_4 = 4$ ).

Этап 4. По формуле (2.2) для механизма первого семейства находим число  $W$  степеней свободы:

$$W = 5n - 4p_1 - p_4 = 1.$$

Этап 5. Выделяем ведущее звено (колесо 1) и выходное звено (водило  $H$ ) механизма.

Этап 6. Расчленим механизм на ступени от входного звена. Первая ступень образована колесами 1, 2 с колесом 1 на входе и колесом 2 на выходе. Вторая ступень образована колесами 3, 4 с колесом 3 на входе и колесом 4 на выходе. Третья планетарная ступень, содержащая два звена с неподвижными осями вращения, образована колесами 5, 6, 7, 8 и водилом.

Этап 7. Составляем структурную схему заменяющего механизма для планетарной ступени (рис. 4.31 *b*).

Этап 8. Выделяем ступени заменяющего механизма от входного колеса 5 до выходного 8. Первая ступень образована колесами 5, 6 с колесом 5 на входе и колесом 6 на выходе. Вторая ступень образована колесами 7, 8 с колесом 7 на входе и колесом 8 на выходе.

Этап 9. Вычисляем передаточные отношения  $u_{56}^H, u_{78}^H$  каждой ступени заменяющего механизма и  $u_{58}^H$  заменяющего механизма по формуле (4.22):

$$u_{58}^H = u_{56}^H u_{78}^H = \left[ -\frac{z_6}{z_5} \right] \left[ \frac{z_8}{z_7} \right].$$

Этап 10. Вычисляем передаточные отношения  $u_{12}, u_{34}, u_{5H}$  каждой ступени механизма, в том числе планетарной ступени с входным колесом 5 и опорным колесом 8 по формуле (4.30):

$$u_{12} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad u_{34} = -\frac{z_4}{z_3}; \quad u_{5H} = 1 - u_{58}^H = 1 + \frac{z_6 z_8}{z_5 z_7}.$$

Этап 11. Вычисляем передаточное отношение  $u_{1H}$  механизма по формуле (4.22):

$$u_{1H} = u_{12} \cdot u_{34} \cdot u_{5H}.$$

#### 4.6. Условия корректного проектирования

Во избежание дисбаланса и заклинивания планетарные механизмы с нулевыми цилиндрическими прямозубыми эвольвентными колесами должны удовлетворять условиям зацепления без подреза зубьев, соосности, соседства сателлитов, сборки и передачи момента пары.

### 4.6.1. Условия зацепления без подреза зубьев

Нулевые колеса, нарезанные без подреза зубьев, с коэффициентом высоты зуба, равным единице, не должны заклиниваться в зацеплении. Теоретически доказано, что при внешнем зацеплении колес условие отсутствия заклинивания с подрезом состоит в том, что минимальное число зубьев каждого колеса не должно быть меньше 17 [5]. При внутреннем зацеплении число внутренних зубьев колеса в зацеплении не должно быть меньше 85, внешних – не меньше 20, а разность между числами внутренних и внешних зубьев – не меньше 8.

### 4.6.2. Условия соосности

Условие соосности простейшего планетарного механизма выводят из условия зацепления сателлитов с центральными колесами. Оно состоит в том, что оси подвижного и опорного центральных колес, а также неподвижная ось водила расположены на одной прямой. Отсюда можно вывести соотношение, которому должны удовлетворять числа зубьев  $z_1, z_2, z_3, z_4$  колес 1, 2, 3, 4 (рис. 4.34).

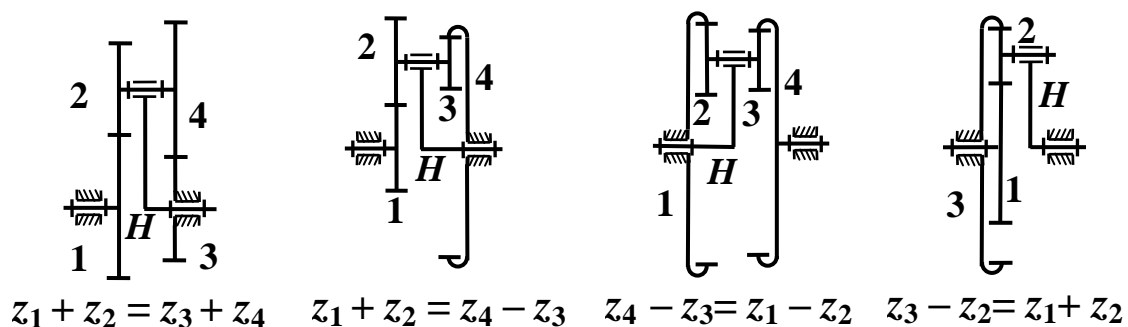


Рис. 4.34. Условия соосности простейших планетарных механизмов

### 4.6.3. Условия соседства сателлитов

Условие соседства проверяется тогда, когда водило несет три вала с сателлитами и более. Условие состоит в том, что окружности

вершин двух соседних сателлитов в плоскости вращения с центрами  $A, B$  не пересекаются (рис. 4.35).

Пусть  $r_{w1}, r_{w2}, r_{w3}, r_{w4}$  – радиусы начальных окружностей колес 1, 2, 3, 4;

$r_{a2}, r_{a3}$  – радиусы окружностей вершин сателлитов 2, 3.

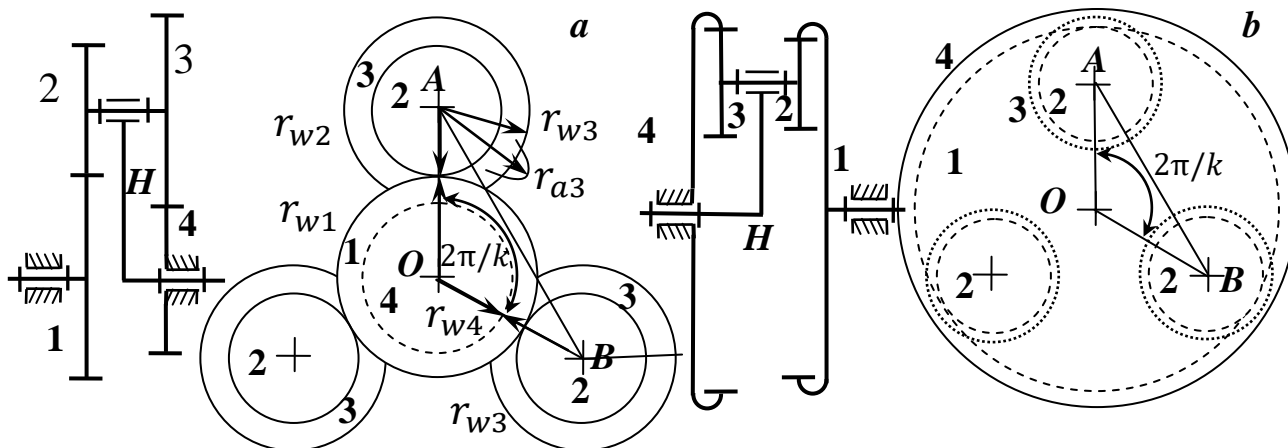


Рис. 4.35. Колеса с внешним (а) и внутренним (б) зацеплением

Условия соседства при внешних зацеплениях колес 1 и 2, а также 3 и 4 запишем так (рис. 4.35 а):

$$AB > 2r_{a2} ; AB > 2r_{a3}$$

или

$$(r_{w1} + r_{w2})\sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > r_{a2} ; (r_{w3} + r_{w4})\sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > r_{a3}, \quad (4.32)$$

где  $k$  – число валов с сателлитами.

Аналогичные условия справедливы и при внутреннем зацеплении колес (рис. 4.35 б):

$$(r_{w1} - r_{w2})\sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > r_{a2} ; (r_{w4} - r_{w3})\sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > r_{a3}. \quad (4.33)$$

Используя результаты параграфа 4.4.5, условия (4.32), (4.33) соседства сателлитов в планетарном механизме с нулевыми колесами и коэффициентом высоты зуба, равным 1, записываются так:

$$\sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > \begin{cases} \frac{z_2+2}{z_1+z_2} \text{ и } \frac{z_3+2}{z_3+z_4} & \text{— при внешнем зацеплении;} \\ \frac{z_2+2}{z_1-z_2} \text{ и } \frac{z_3+2}{z_4-z_3} & \text{— при внутреннем зацеплении,} \end{cases}$$

где  $z_1, z_4$  – число зубьев центральных колес 1, 4;  
 $z_2, z_3$  – число зубьев сателлитов 2, 3;  
 $k$  – число валов с сателлитами.

#### 4.6.4. Условия сборки

Сборка планетарного механизма осуществима, если зубья всех сателлитов точно входят во впадины центральных колес. Вопрос не актуален, если при установке сателлиты связаны не жестко, а связываются жестко после сборки. Вопрос актуален, когда водило несет несколько валов с двумя сателлитами на каждом.

Рассмотрим редуктор Давида с нулевыми колесами (рис. 4.36).

Пусть  $k$  – число валов.

После установки сателлитов 2, 3 на одном валу с подвижной осью  $A$  положение центрального колеса 4 с неподвижной осью  $O$  становится фиксированным. Чтобы не центрировать механизм и не ставить противовесов, вал с осью вращения  $B$  соседней пары сателлитов 5, 6 должен занимать положение, в котором прямые  $OA$  и  $OB$  в плоскости вращения водила образуют угол  $2\pi/k$ .

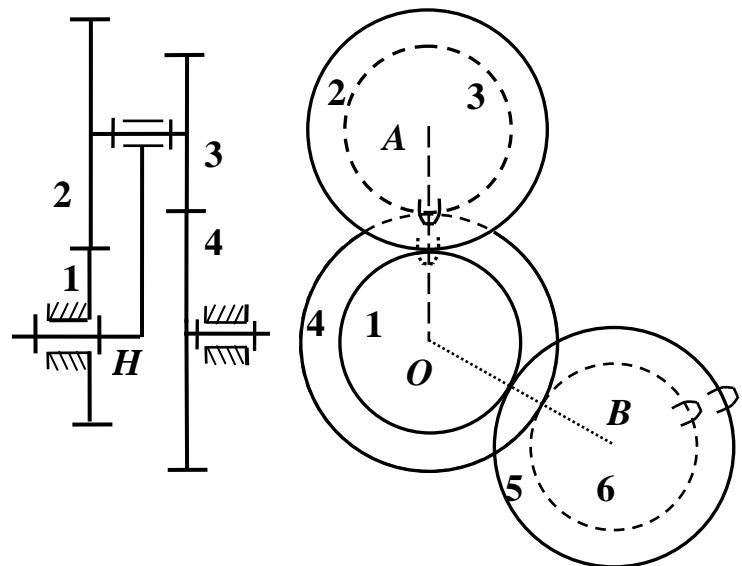


Рис. 4.36. Редуктор Давида

Пусть  $z_1, z_2, z_3, z_4$  – число зубьев колес 1, 2, 3, 4.

Можно доказать, что необходимое и достаточное условие сборки редуктора с  $k$  валами, несущими пары сателлитов, имеет вид

$$\frac{z_1 z_3 - z_2 z_4}{k} = n,$$

где  $n$  – целое положительное или отрицательное число, включая 0.



Полученное условие сборки справедливо для механизмов *a*, *c* (рис. 4.30). Для механизма *b* условие сборки имеет вид

$$\frac{z_1 z_3 + z_2 z_4}{k} = n.$$

Редуктор Джемса, схема *d* которого показана на рисунке 4.30, представляется частным случаем механизма *b*, если в последнем положить  $z_2 = z_3$ .

#### 4.6.5. Условия вращения сателлитов

Вращение сателлита относительно водила происходит под действием пары сил, момент которых равен моменту силы относительно оси сателлита. Если плечо силы относительно оси равно нулю, то момент силы также равен нулю. Такая ситуация может возникнуть в простейших планетарных редукторах, когда ведущим (входным) звеном служит не водило, а шестерня 1, а ведомым (выходным) – водило.

Рассмотрим редуктор Давида, который превращается в мультипликатор, когда водило служит не входным, а выходным звеном, и радиус входного колеса 1 превышает радиус опорного колеса (рис. 4.37).

Звено с сателлитами 2, 3 вращается относительно мгновенной оси вращения, образованной точками зацепления колес 3 и 4, под действием силы  $\vec{F}$ , приложенной в точке *M* линии зацепления колес 1 и 2.

Точка *M* приложения силы  $\vec{F}$  перемещается от точки *A* на окружности вершин колеса 2 к точке *C* на окружности вершин колеса 1 по линии зацепления *AC* через полюс зацепления *B*. Мгновенный центр (ось) вращения перемещается от точки *E* на окружности вершин колеса 3 к точке *K* на окружности

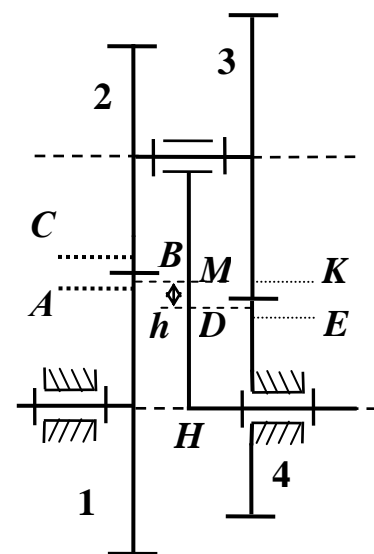


Рис. 4.37. Схема редуктора Давида

вершин колеса 4 по линии зацепления  $EK$  через полюс  $D$  зацепления. Если плечо  $h$  силы относительно мгновенной оси вращения в какой-то момент станет нулевым, то произойдет мгновенное заклинивание.

Можно доказать, что для нормальных колес с числом зубьев больше семнадцати условие вращения сателлитов без мгновенного заклинивания приводится к такому виду:

$$\begin{cases} z_1 > z_4 + 5, & \text{если } z_1 \geq z_4; \\ z_4 > z_1 + 13, & \text{если } z_1 < z_4, \end{cases}$$

где  $z_1, z_4$  – число зубьев ведущего и опорного колес.

Аналогично можно найти условия вращения сателлитов без мгновенного заклинивания в планетарном механизме  $c$  на рисунке 4.30, когда ведущим (входным) звеном служит колесо 1, а ведомым (выходным) – водило:

$$\begin{cases} z_1 > z_4 + 5, & \text{если } z_1 \geq z_4; \\ z_4 > z_1 + 13, & \text{если } z_1 < z_4. \end{cases}$$

Полученные условия не зависят от числа зубьев сателлитов.

Отметим, что вращающий момент передается в любом случае, если ведущим (входным) звеном планетарных механизмов служит водило.

#### 4.7. Кинематика автомобильного дифференциала

Автомобильный дифференциал предназначен для преобразования вращательного движения двигателя во вращательные движения валов ведущих колес автомобиля. В автомобилях с задним приводом энергия от двигателя передается к колесам главной передачей, состоящей из конических ведущего 1 и ведомого 2 зубчатых колес, и дифференциалом, состоящим из водила, жестко связанного с колесом 2, двух конических сателлитов 3, 4, не связанных между собой, и конических зубчатых колес 5, 6, установленных на валах задних колес 7, 8 (рис. 4.37).

Дифференциал состоит из пяти подвижных звеньев ( $n = 5$ ), образующих пять кинематических пар пятого класса ( $p_1 = 5$ ) и четыре пары второго класса ( $p_4 = 4$ ) (табл. 4.4).

#### 4.4. Образующие звенья и класс кинематической пары дифференциала

0, 5	2, 5	2, 3	2, 4	0, 6	3, 5	3, 6	4, 5	4, 6
V	V	V	V	V	II	II	II	II

В разделе 2.3 рассмотрен одноконтурный дифференциал с двумя степенями свободы, рассчитанными по формуле (2.2) для механизма 1-го семейства ( $k = 1$ ). В дифференциале автомобиля к одноконтурному дифференциалу добавлен второй замкнутый контур за счет присоединения сателлита 4 ( $m = 1$ ), образующего одну кинематическую пару пятого класса ( $p_{1m} = 1$ ) с колесом 2 и две кинематические пары второго класса ( $p_{4m} = 2$ ) с коническими колесами 5, 6. Условие (2.6) применимости формулы (2.2) для определения числа степеней свободы двухконтурного дифференциала не выполняется:

$$5m - 4p_{1m} - p_{4m} = -1.$$

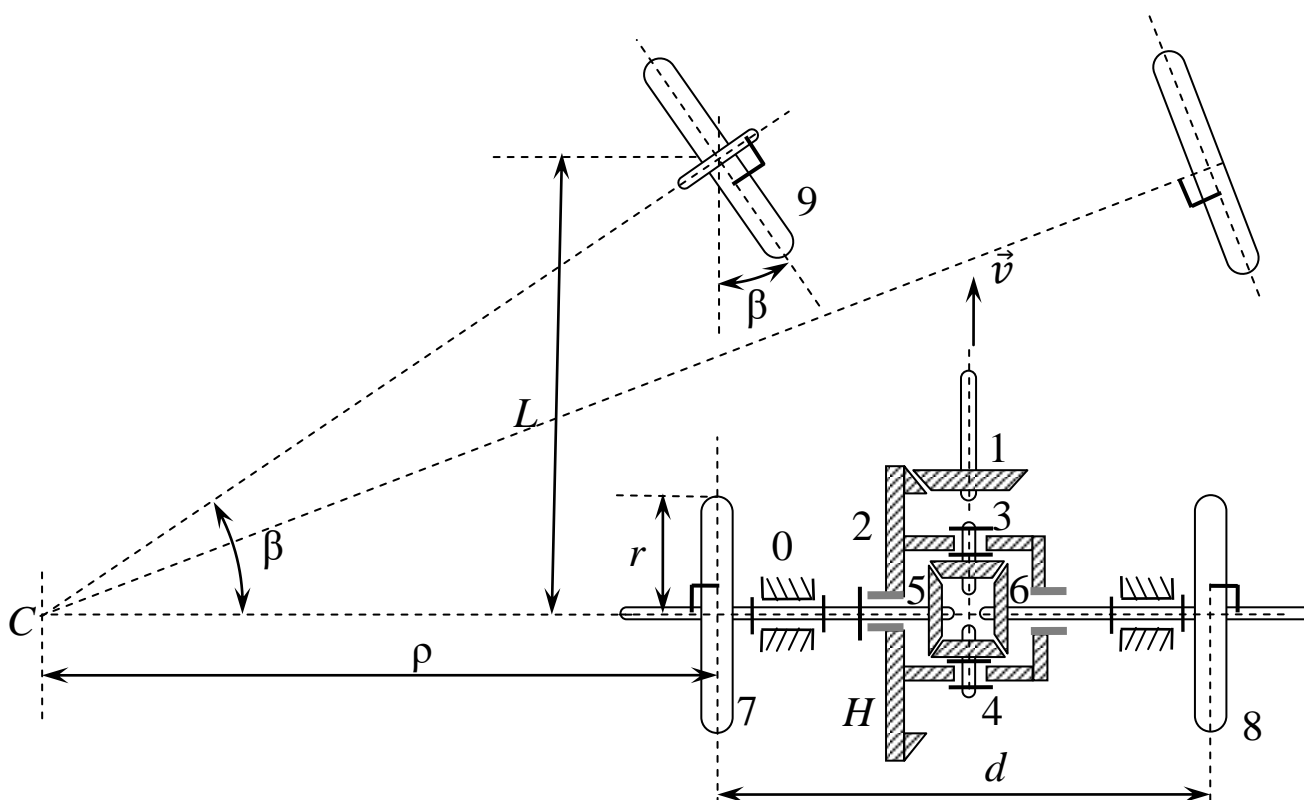


Рис. 4.37. Дифференциал привода задних колес

Установка сателлита 4 не изменяет движения звеньев дифференциала и добавляет одну избыточную связь. Двухконтурный дифференциал имеет две степени свободы и, как следует из формулы (2.4), три избыточные связи.

Звенья 2, 5, 6 вращаются вокруг параллельных осей [2]. Угловые скорости колес 5, 6 относительно водила 2 равны по величине и противоположны по направлению, то есть

$$\omega_5 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_6,$$

или

$$\omega_5 + \omega_6 = 2\omega_2. \quad (4.34)$$

При движении автомобиля по горизонтальной плоскости с повернутым на фиксированный угол передним колесом 9 кузов и колеса вращаются вокруг мгновенной оси  $C$  вращения, являющейся неподвижной вертикальной осью. Полагая, что ведущие колеса 7, 8 автомобиля катятся без проскальзывания по шероховатой поверхности, между угловыми скоростями  $\omega_5$ ,  $\omega_6$  имеет место зависимость

$$\frac{\omega_5 r}{\rho} = \frac{\omega_6 r}{\rho + d},$$

или

$$\frac{\omega_5}{L} = \frac{\omega_6}{L + d \operatorname{tg} \beta}, \quad (4.35)$$

где  $r$  – радиус заднего колеса;  $\rho$  – радиус окружности, по которой движется центр заднего колеса, ближнего к оси  $C$ ;  $d$  – расстояние между центрами задних колес;  $L$  – база автомобиля;  $\beta$  – угол поворота переднего колеса, ближнего к оси  $C$ .

Таким образом, как следует из уравнений (4.34), (4.35), при заданном угле  $\beta$  поворота угловая скорость колеса главной передачи однозначно определяет угловые скорости ведущих колес 7, 8 автомобиля (колес 5, 6):

$$\omega_7 = \omega_5 = \frac{2L\omega_2}{2L + d \operatorname{tg} \beta}; \quad \omega_8 = \omega_6 = \frac{2(L + d \operatorname{tg} \beta)\omega_2}{2L + d \operatorname{tg} \beta}.$$

Другими словами, при фиксированном угле поворота переднего колеса автомобиля дифференциал превращается в планетарный редуктор.

Каждое из колес автомобиля совершает сложное движение: вращение вокруг мгновенной оси, образованной точками касания колеса и плоскости, и вращение вокруг мгновенной оси  $S$  вращения. Центры колес автомобиля с фиксированным углом поворота руля движутся по окружностям с центром на оси  $S$ .

## 5. РАСЧЕТ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

### 5.1. Структурный анализ плоских кулачковых механизмов

Кулачковый механизм состоит из стойки, кулачка и толкателя. Ведущим звеном такого механизма служит кулачок, а ведомым – толкатель. Кулачок образует со стойкой вращательную пару. Толкатель, образующий вращательную пару со стойкой, называется коромысловым (рис. 5.1 *a*). Толкатель, образующий поступательную пару со стойкой, называется ползунным (рис. 5.1 *b*). Ползунные толкатели разделяют на толкатели с заостренным концом и плоские (рис. 1.18 *b*).

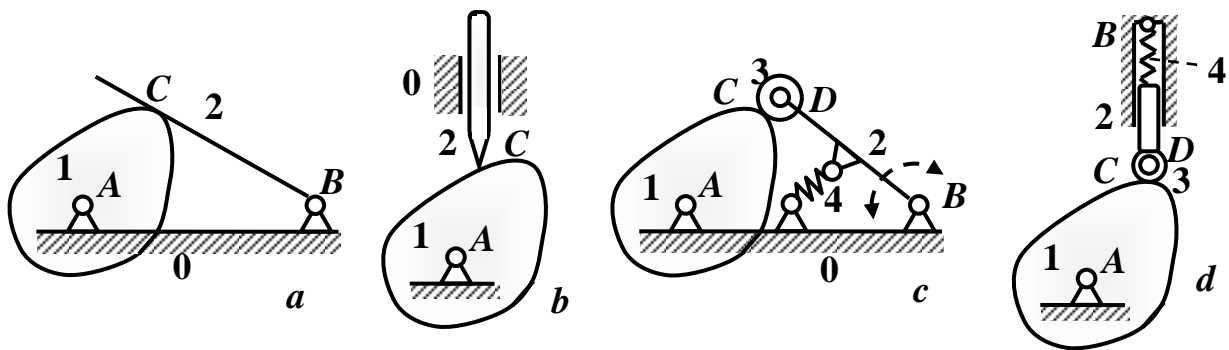


Рис. 5.1. Кулачковый механизм (0 – стойка, 1 – кулачек, 2 – толкатель, 3 – ролик, 4 – пружина)

Трехзвенный кулачковый механизм содержит два подвижных звена ( $n = 2$ ) и три кинематические пары: одноподвижную пару *A*, образованную кулачком 1 и стойкой 0; одноподвижную пару *B*, образованную толкателем 2 и стойкой 0; четырехподвижную или пятиподвижную пару *C*, образованную кулачком и толкателем (табл. 5.1).

#### 5.1. Кинематические пары кулачкового механизма, образующие пары звенья и классы кинематических пар

Толкатель без ролика			Роликовый толкатель			
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
0, 1	0, 2	1, 2	0, 1	0, 2	1, 3	2, 3
V	V	II или I	V	V	II	V

Кулачок образует пару первого класса с заостренным толкателем и пару второго класса с коромысловым и плоским толкателем. В первом случае механизм содержит две одноподвижные пары ( $p_1 = 2$ ) и одну пятиподвижную пару ( $p_5 = 1$ ). Во втором случае механизм содержит две одноподвижные пары ( $p_1 = 2$ ) и одну четырехподвижную пару ( $p_4 = 1$ ). При этом взаимодействие между кулачком и толкателем не отличается от взаимодействия зубьев цилиндрических колес, и кулачковый механизм с парой второго класса относится к механизмам первого семейства ( $k = 1$ ).

Число  $W$  степеней свободы трехзвенного плоского кулачкового механизма с заостренным толкателем определим по формуле Сомова-Малышева:

$$W = 6n - 5p_1 - p_5 = 1.$$

Число  $W$  степеней свободы одноконтурного трехзвенного плоского кулачкового механизма с коромысловым или плоским толкателем определим по формуле (2.2) для механизма первого семейства:

$$W = 5n - 4p_1 - p_4 = 1.$$

В соответствии с формулой (2.4) кулачковый механизм с заостренным толкателем не имеет избыточных связей, а с плоским толкателем имеет одну контурную избыточную связь.

Толкатель в движении относительно кулачка скользит по его рабочей поверхности. Для снижения потерь энергии на трение к толкателю присоединяют цилиндрический ролик, заменяющий трение скольжения на трение качения (рис. 5.1 *c, d*; 1.19).

Четырехзвенный кулачковый механизм с роликом 3 содержит три подвижных звена ( $n = 3$ ), три одноподвижные пары ( $p_1 = 3$ ) с учетом вращательной пары  $D$ , образуемой роликом и толкателем, и одну четырехподвижную пару ( $p_4 = 1$ ), образуемую роликом и кулачком (табл. 5.1).

По формуле (2.2) для механизмов первого семейства находим число степеней свободы плоского кулачкового механизма с роликовым толкателем:

$$W = 5n - 4p_1 - p_4 = 2.$$

Кулачковый механизм с роликовым толкателем имеет две степени свободы, то есть два независимых простейших движения: вращение кулачка и вращение ролика. Допускаемое связями вращение ролика не влияет на движение выходного звена (толкателя) и возможно при остановленных других звеньях, то есть оно служит локальной подвижностью.

В соответствии с формулой (2.4) кулачковый механизм с роликовым толкателем имеет одну контурную избыточную связь.

## 5.2. Фазы движения толкателя

Рассмотрим плоский механизм с кулачком 1 и ползунным роликовым толкателем 2 (рис. 5.2). Будем считать, что кулачок вращается по ходу стрелки часов.

Закон движения кулачка определяется зависимостью угла  $\varphi$  поворота кулачка от времени  $t$ :

$$\varphi = \varphi(t).$$

Пусть угол  $\varphi$  поворота увеличивается в направлении хода стрелки часов. За начальное примем положение ближнего стояния толкателя в момент начала его удаления от оси вращения кулачка (рис. 5.2). По определению, в начальный момент  $t_0$  угол поворота кулачка с отсчетом от оси, соединяющей центры вращения кулачка и ролика в начальном положении, равен 0:  $\varphi(t_0) = 0$ .

Движение толкателя за один оборот вращения кулачка состоит из четырех фаз: удаления, дальнего стояния, сближения и ближнего стояния.

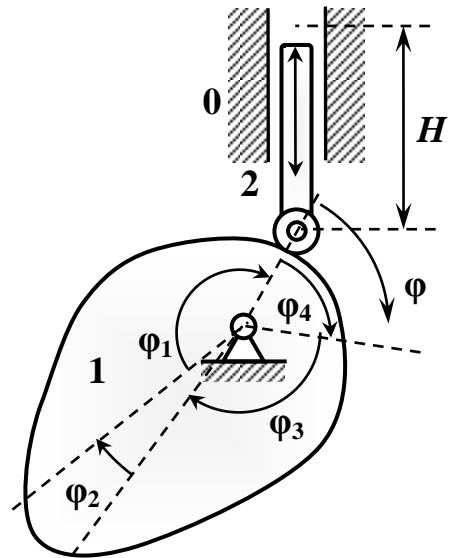


Рис. 5.2. Фазы движения толкателя



Пусть  $t_1, t_2, t_3, t_4$  – моменты окончания первой, второй, третьей и четвертой фазы соответственно. Каждой фазе соответствует угол  $\varphi$  поворота, называемый фазовым углом. Фазовый угол  $\varphi_1$  соответствует фазе удаления, на которой толкатель перемещается на расстояние  $H$ , удаляясь от оси вращения кулачка. Углы  $\varphi_2, \varphi_4$  соответствуют фазам дальнего и ближнего стояния, на которых толкатель не движется. Угол  $\varphi_3$  соответствует фазе сближения, на которой толкатель перемещается на расстояние  $H$ , приближаясь к оси вращения кулачка.

По определению,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi(t_1) - \varphi(t_0); \varphi_2 = \varphi(t_2) - \varphi(t_1); \\ \varphi_3 &= \varphi(t_3) - \varphi(t_2); \varphi_4 = \varphi(t_4) - \varphi(t_3); \varphi(t_4) = 2\pi. \end{aligned}$$

### 5.3. Кинематика ползунного толкателя

Закон поступательного движения толкателя задается двумя способами: 1) в естественном виде как функция перемещения  $s$  от времени  $t$  или от угла  $\varphi$  поворота кулачка; 2) в виде диаграммы перемещения, то есть графика зависимости перемещения  $s$  от угла  $\varphi$  поворота кулачка (рис. 5.3).

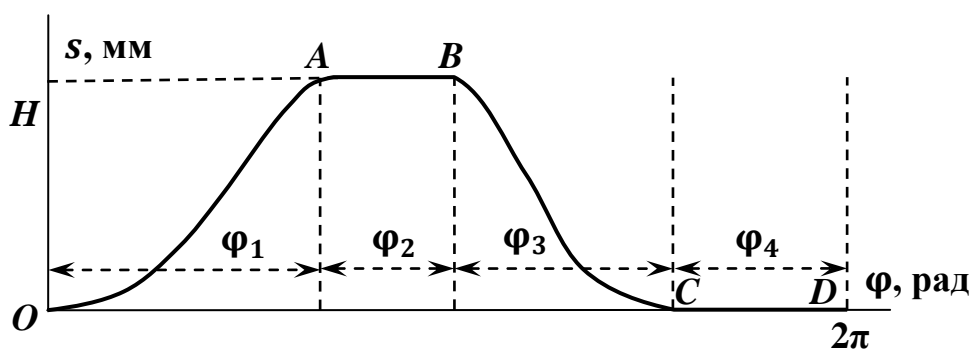


Рис. 5.3. Диаграмма перемещения толкателя

Закон движения толкателя должен обеспечить, во-первых, заданную величину  $H$  хода, во-вторых, безударный ход толкателя и, в-третьих, минимальные потери энергии на трение кулачка с толкателем без заклинивания движения. Первые две задачи решают заданием диаграммы ускорений толкателя. Третью задачу решают подбором

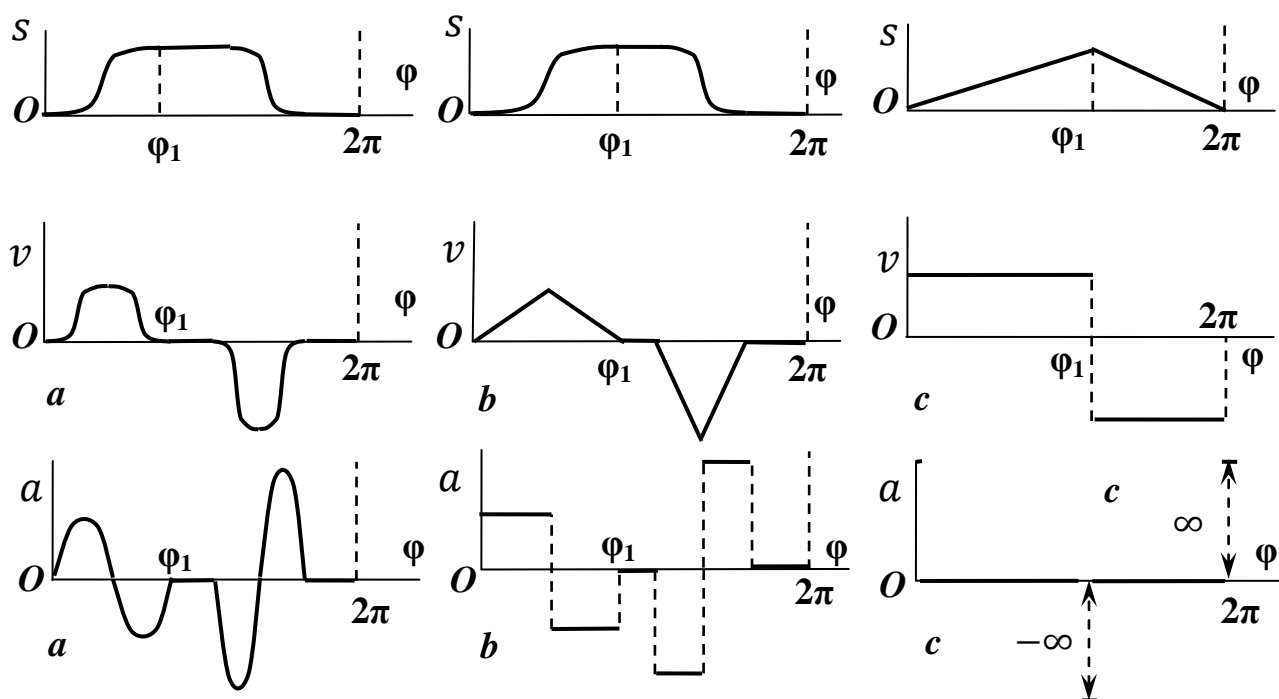
профиля кулачка таким образом, чтобы максимальная сила трения не превышала некоторого предела.

Различают следующие движения толкателя за время одного оборота кулачка:

1) безударное движение, когда ускорение изменяется без скачков (рис. 5.4 *a*);

2) движение с мягким ударом, когда в некоторых положениях имеются конечные скачки ускорения, не приводящие к скачкам скорости (рис. 5.4 *b*);

3) движение с жестким ударом, когда в некоторых положениях скорость скачкообразно изменяется на конечную величину, что приводит к скачкам ускорения на бесконечную величину (рис. 5.4 *c*).



**Рис. 5.4.** Изменения пути  $S$ , скорости  $v$ , ускорения  $a$  толкателя при безударном движении (*a*), мягком ударе (*b*) и жестком ударе (*c*)

Жесткие удары возникают при движении толкателя на фазах удаления и сближения, то есть в противоположных направлениях, с постоянной скоростью. Такие удары приводят к скачкам сил инерции толкателя теоретически до бесконечно больших величин и разрушению кинематической пары, образованной толкателем и кулачком.

Приращение скорости или перемещения толкателя при повороте кулачка на некоторый угол равно площади фигуры, ограниченной графиком ускорения или соответственно скорости и осью абсцисс. Площадь фигуры положительная, когда график расположен над осью абсцисс, и отрицательная – под осью абсцисс. Например, за время фазы удаления, когда угол поворота кулачка изменяется от 0 до  $\varphi_1$ , приращение скорости толкателя равно нулю, то есть площади фигур, ограниченных графиком ускорения над осью абсцисс и под осью абсцисс, равны (рис. 5.4). То же относится и к фазе сближения. За время одного оборота кулачка приращение перемещения толкателя равно нулю, то есть площади фигур, ограниченных графиком скорости над осью абсцисс и под осью абсцисс, равны.

Рассмотрим четыре вида законов движения толкателя с ходом  $H$  при постоянной угловой скорости кулачка.

1. Косинусоидальный закон движения обеспечивает движение толкателя без ударов (рис. 5.5):

$$s(\varphi) = H \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

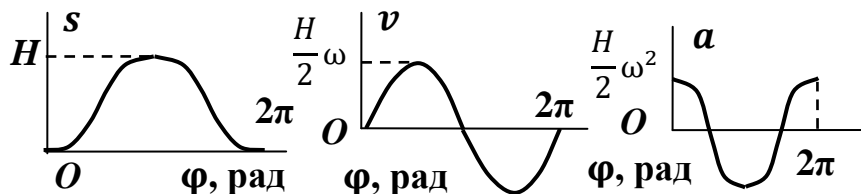


Рис. 5.5. Графики перемещения  $s$ , скорости  $v$  и ускорения  $a$  центра ролика

2. Косинусоидальный закон движения толкателя с фазами стояния обеспечивает переход к следующей фазе движения с мягкими ударами без скачков скорости (рис. 5.6):

$$s = \begin{cases} s_1(\varphi) = H \sin^2 \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1}, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \\ H, & \varphi_1 < \varphi \leq \varphi_1 + \varphi_2 \\ s_3(\varphi) = H \sin^2 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(\varphi - \varphi_1 - \varphi_2)}{2\varphi_3} \right], & \varphi_1 + \varphi_2 < \varphi \leq \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \\ 0, & \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 < \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

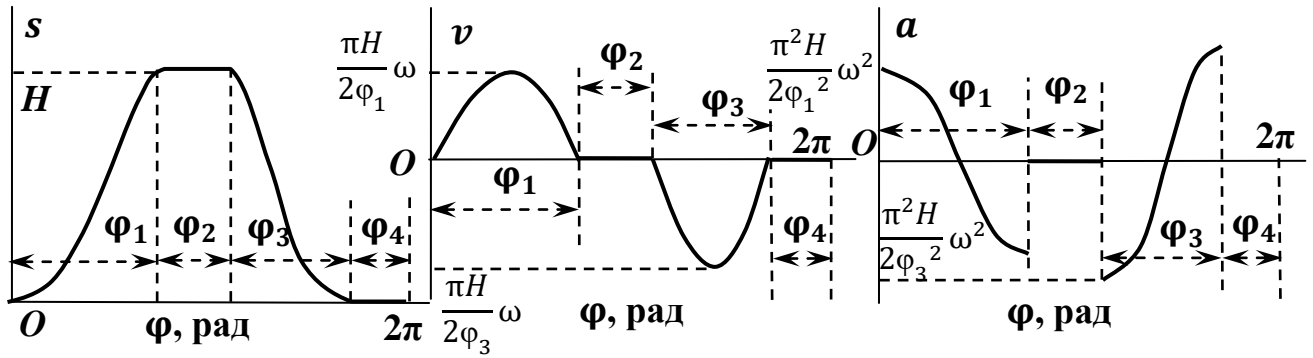


Рис. 5.6. Зависимости перемещения  $s$ , скорости  $v$  и ускорения  $a$  центра ролика от угла  $\varphi$  поворота кулачка

3. Синусоидальный закон движения толкателя с фазами стояния обеспечивает движения без ударов (рис. 5.7):

$$s = \begin{cases} s_1(\varphi) = H \left( \frac{\varphi}{\varphi_1} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi\varphi}{\varphi_1} \right), & 0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \\ H, & \varphi_1 < \varphi \leq \varphi_1 + \varphi_2 \\ s_3(\varphi) = H \left( -\frac{\varphi - \varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_3} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi(\varphi - \varphi_1 - \varphi_2)}{\varphi_3} \right), & \varphi_1 + \varphi_2 < \varphi \leq \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \\ 0, & \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 < \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

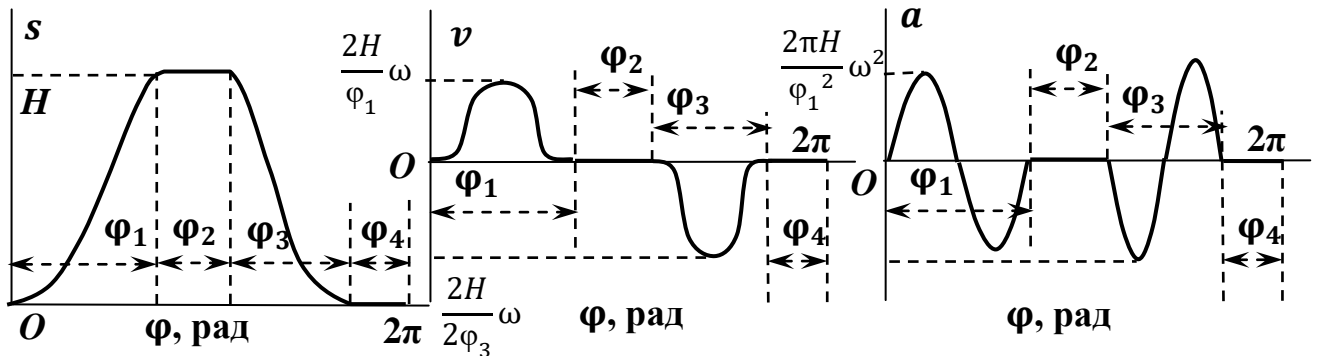


Рис. 5.7. Зависимости перемещения  $s$ , скорости  $v$  и ускорения  $a$  центра ролика от угла  $\varphi$  поворота кулачка

4. Параболический закон движения толкателя характеризуется постоянством ускорений на фазах удаления и сближения и мягкими ударами при смене фазы (рис. 5.8):

$$s = \begin{cases} s_1(\varphi) = \frac{2H}{\varphi_1^2} \varphi^2, & 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_1}{2} \\ s_1(\varphi) = H - \frac{2H}{\varphi_1^2} (\varphi - \varphi_1)^2, & \frac{\varphi_1}{2} < \varphi \leq \varphi_1 \\ H, & \varphi_1 < \varphi \leq \varphi_1 + \varphi_2 \\ s_3(\varphi) = -\frac{2H}{\varphi_3^2} (\varphi - \varphi_1 - \varphi_2)^2, & \varphi_1 + \varphi_2 < \varphi \leq \varphi_1 + \varphi_2 + \frac{\varphi_3}{2} \\ s_3(\varphi) = -H + \frac{2H}{\varphi_3^2} (\varphi - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)^2, & \varphi_1 + \varphi_2 + \frac{\varphi_3}{2} < \varphi \leq \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \\ 0, & \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 < \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

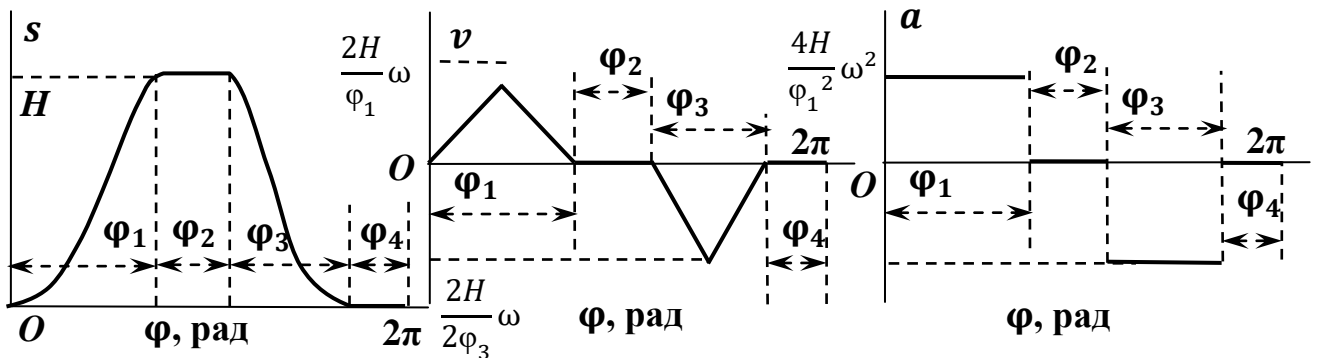


Рис. 5.8. Зависимости перемещения  $s$ , скорости  $v$  и ускорения  $a$  центра ролика от угла  $\varphi$  поворота кулачка

#### 5.4. Условие движения ползунного толкателя

Рассмотрим плоский кулачковый механизм с ползунным роликовым толкателем (рис. 5.9).

Пусть  $Oxy$  – неподвижная ортогональная декартова система координат с началом в центре вращения кулачка и осью  $Oy$ , параллельной вектору скорости центра ролика;  $v$  – скорость центра ролика;  $P$  – полезная сила сопротивления, действующая на ролик;  $R, F$  – соответственно сила давления кулачка на ролик и трения кулачка с роликом;  $N, T$  – соответственно сила давления стойки на

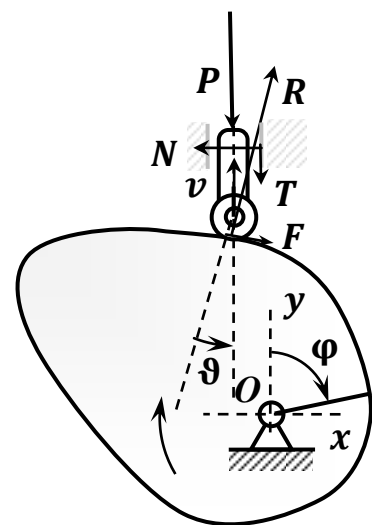


Рис. 5.9. Действующие на толкатель силы ( $\vartheta > 0$ )

толкатель и трения стойки с толкателем;  $\mu$  – коэффициент трения скольжения толкателя со стойкой.

Углом давления называется острый угол  $\vartheta$ , образуемый внешней нормалью к поверхности кулачка в точке касания с роликом и вектором скорости центра ролика при удалении от центра кулачка. Угол давления будем считать положительным при кратчайшем повороте внешней нормали к вектору скорости против хода стрелки часов и отрицательным – по ходу стрелки часов.

При малом сопротивлении качению ролика силой трения  $F$  можно пренебречь. Пусть сила инерции толкателя значительно меньше силы сопротивления  $P$ . Запишем уравнения движения центра масс толкателя при удалении от центра кулачка в аналитическом виде, проецируя силы на оси координат  $Ox$ ,  $Oy$ :

$$\begin{cases} R \sin \vartheta - N = 0 \text{ при } \vartheta \geq 0 \text{ или } R \sin \vartheta + N = 0 \text{ при } \vartheta < 0 \\ R \cos \vartheta - P - T = 0. \end{cases}$$

Найдем  $R$ , исключая из уравнений  $N$  и учитывая, что  $T = \mu N$ :

$$R = \frac{P}{(\cos \vartheta - \mu |\sin \vartheta|)}. \quad (5.1)$$

Во избежание заклинивания толкателя при движении на фазе удаления величина  $R$  реакции не может быть бесконечно большой или меньше нуля:

$$\cos \vartheta > \mu |\sin \vartheta|.$$

Отсюда условие движения роликового ползунного толкателя на стадии удаления можно записать так:

$$|\operatorname{tg} \vartheta| < \frac{1}{\mu}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим ролик с центром  $B$  и точкой  $A$  касания с кулачком (рис. 5.10 *a*).

Пусть  $y_0$  – координата центра ролика по оси  $Oy$  в положении ближнего стояния;

$s$  – перемещение толкателя из положения ближнего стояния;

$r_0$  – радиус ролика;

$s$  – смещение толкателя;

$\rho$  – расстояние от центра вращения до точки  $A$  кулачка;

$\varphi$  – угол поворота кулачка;

$\delta$  – острый угол между полярным радиусом точки  $A$  и нормалью

$An$  к профилю в точке;

$\vec{v}_A, \vec{v}_B$  – вектор скорости соответственно точки  $A$  и  $B$  ролика;

$\vec{v}_{Ak}$  – вектор скорости точки  $A$  кулачка;

$\vec{v}_{BA}, \vec{v}_{Ar}$  – вектор скорости точки  $A$  ролика в движении соответственно относительно центра (полюса)  $B$  ролика и кулачка.

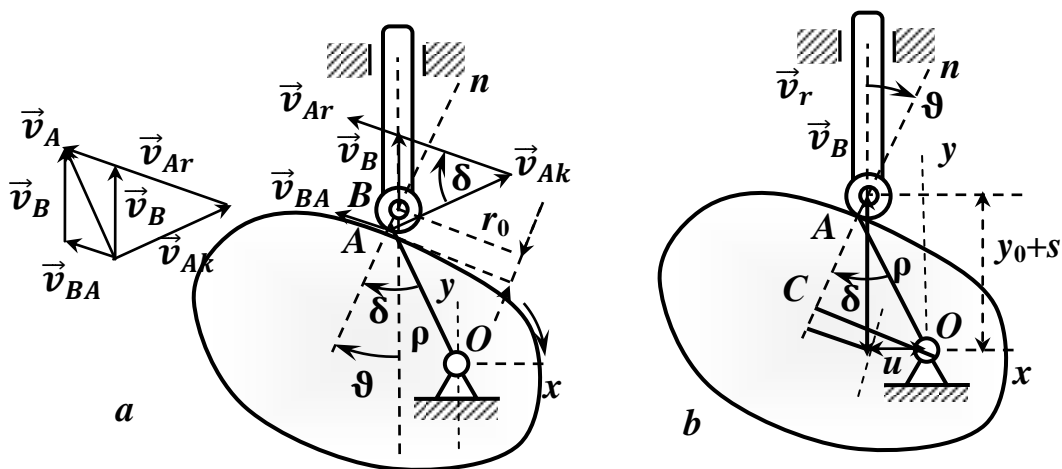


Рис. 5.10. К расчету условий движения толкателя

Точка  $A$  ролика движется вместе с центром  $B$  и относительно центра:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{BA}.$$

С другой стороны движение точки  $A$  ролика состоит из движения относительно кулачка и переносного движения вместе с кулачком:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{Ak} + \vec{v}_{Ar}.$$

Из последних двух формул следует следующее равенство:

$$\vec{v}_B + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_{Ak} + \vec{v}_{Ar}. \quad (5.3)$$

Спроецируем обе части векторного равенства (5.3) на нормаль  $An$  к профилю кулачка в точке  $A$ , учитывая, что векторы  $\vec{v}_{BA}$  и  $\vec{v}_{Ar}$  перпендикулярны нормали:

$$v_B \cos \vartheta = v_{Ak} \sin \delta \quad \text{или} \quad \frac{ds}{dt} \cos \vartheta = \rho \frac{d\varphi}{dt} \sin \delta$$

или

$$\frac{ds}{d\varphi} \cos \vartheta = \rho \sin \delta. \quad (5.4)$$

Из треугольника  $AOC$  с отрезком  $OC$ , перпендикулярным нормали  $An$ , найдем (рис. 5.6 *b*)

$$\rho \sin \delta = [y_0 + s(\varphi)] \sin \vartheta + u \cos \vartheta.$$

Заменяя правую часть равенства (5.4) последним выражением, найдем формулу для определения угла давления:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\frac{ds}{d\varphi} - u}{y_0 + s(\varphi)}. \quad (5.5)$$

Угол давления не зависит от радиуса ролика.

## 5.5. Расчет профиля кулачка

### 5.5.1. Центральный кулачковый механизм

Рассмотрим центральный плоский кулачковый механизм с роликовым ползунным толкателем (рис. 5.11). Будем различать конструктивный и центровый профили кулачка. Ролик катится по конструктивному профилю кулачка, центр ролика движется по центровому профилю. При вращении кулачка его конструктивный профиль касается ролика, а центровый (мысленный) профиль пересекает центр ролика. Определим уравнение конструктивного профиля или просто профиля кулачка по заданной зависимости перемещения толкателя от угла поворота кулачка.

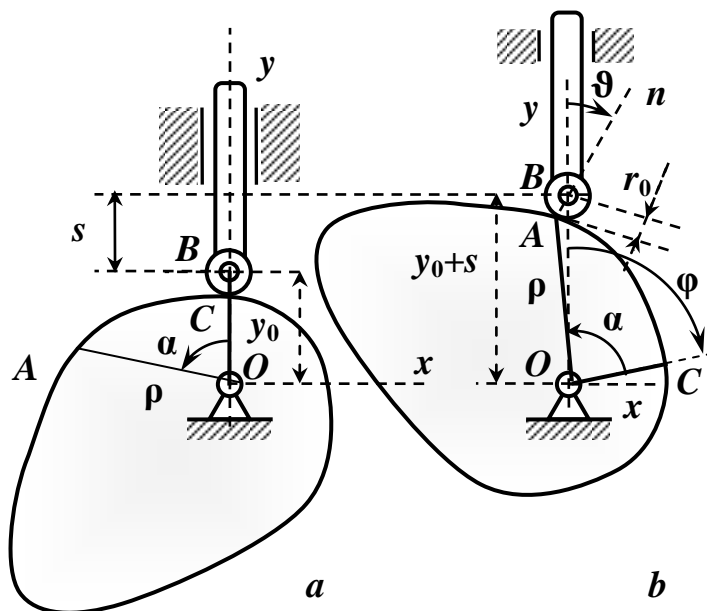


Рис. 5.11. К расчету профиля кулачка

Введем следующие обозначения:



$Oxy$  – неподвижная ортогональная декартова система координат с началом в центре вращения кулачка и осью  $Oy$ , по которой движется центр ролика;

$\rho, \alpha$  – полярные координаты точек профиля кулачка в полярной системе координат на плоскости  $Oxy$  с полюсом  $O$  и полярной осью  $Oy$ ;

$y_0$  – координата центра ролика по оси  $Oy$  в положении ближнего стояния, м;

$\varphi$  – угол поворота кулачка с отсчетом от оси  $Oy$  по ходу стрелки часов, рад ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ );

$s$  – перемещение толкателя из положения ближнего стояния, м;

$r_0$  – радиус ролика, м;

$\vartheta$  – угол давления.

Примем, что угол поворота кулачка в положении ближнего стояния толкателя равен нулю и возрастает при вращении кулачка по ходу стрелки часов.

Полагаем, что заданы:

1)  $r_0, y_0, \mu$ ;

2) неотрицательная периодическая функция зависимости перемещения толкателя от угла поворота кулачка на участке  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ :

$$s = s(\varphi), s(2\pi) = s(0).$$

Закон движения толкателя зададим как закон движения центра ролика с координатой  $y$  по оси  $Oy$ :

$$y = y_0 + s(\varphi). \quad (5.6)$$

Найдем уравнения профиля кулачка в полярных координатах в положении ближнего стояния толкателя. Полярный угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $Oy$  в направлении против хода стрелки часов.

Уравнение профиля запишем так:

$$\rho = f(\alpha), \quad (5.7)$$

где  $f(\alpha)$  – искомая функция от  $\alpha$ .

Уравнение (5.7) будем искать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \rho = f_1(\varphi) \\ \alpha = f_2(\varphi). \end{cases}$$

где  $\varphi$  – параметр,  $f_1(\varphi)$ ,  $f_2(\varphi)$  – искомые функции от  $\varphi$ .

Пусть  $B$  – центр ролика. В положении ближнего стояния толкателя отметим на профиле две точки: точку  $C$  в точке касания профиля кулачка с роликом и точку  $A$ , полярный угол которой равен  $\alpha$ , а полярный радиус равен  $\rho$ . Отметим, что точка  $C$  расположена на оси  $Oy$  и ее полярный угол равен нулю.

Повернем кулачок на такой угол  $\varphi$ , чтобы точка  $A$  стала точкой касания с роликом (рис. 5.11 *b*). При этом отрезок  $OC$  кулачка вместе с точкой  $C$  повернется на угол  $\varphi$ . Таким образом, после поворота угол, образуемый лучами с отрезками  $OA$  и  $OC$  остался равным  $\alpha$ , а угол между осью  $Oy$  с центром ролика  $B$  и отрезком  $OC$  равен  $\varphi$ . Разным точкам  $A$  профиля кулачка с разными полярными координатами однозначно соответствует свой угол поворота кулачка или значение параметра  $\varphi$ .

В треугольнике  $OAB$  длины сторон и углы определены:

$$\begin{aligned} OA &= \rho, AB = r_0, OB = y_0 + s(\varphi); \\ \text{угол } ABO &= \vartheta, \text{ угол } AOB = \alpha - \varphi. \end{aligned}$$

Запишем теоремы синуса и косинуса в таком виде:

$$\begin{cases} r_0 \sin \vartheta = \rho \sin(\alpha - \varphi) \\ r_0 \cos \vartheta = y_0 + s(\varphi) - \rho \cos(\alpha - \varphi). \end{cases} \quad (5.8)$$

Два уравнения (5.8), в которых переменной служит угол поворота  $\varphi$ , содержит три неизвестные: полярные радиус  $\rho$ , угол  $\alpha$  профиля и угол  $\vartheta$  давления.

Для определения трех неизвестных к системе уравнений (5.8) достаточно добавить уравнение (5.5), в котором смещение толкателя принять нулевым. Систему трех уравнений запишем так:

$$\begin{cases} r_0 \sin \vartheta = \rho \sin(\alpha - \varphi) \\ r_0 \cos \vartheta = y_0 + s(\varphi) - \rho \cos(\alpha - \varphi) \\ \text{tg } \vartheta = \frac{\frac{ds}{d\varphi}}{y_0 + s(\varphi)}. \end{cases} \quad (5.9)$$

При заданной функции  $s(\varphi)$  перемещения толкателя от угла поворота кулачка система уравнений (5.9) имеет аналитическое решение:

$$\begin{cases} \alpha = \varphi + \operatorname{arctg} \frac{r_0 \sin \vartheta}{y_0 + s(\varphi) - r_0 \cos \vartheta} \\ \rho = \sqrt{[y_0 + s(\varphi)]^2 + r_0^2 - 2r_0[y_0 + s(\varphi)] \cos \vartheta}, \end{cases} \quad (5.10)$$

где

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\frac{ds}{d\varphi}}{y_0 + s(\varphi)}. \quad (5.11)$$

Задача построения профиля кулачка свелась к расчету полярных координат профиля по формулам (5.10) и заданным значениям параметра  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ .

Угол давления в точке профиля кулачка с полярными координатами  $\rho$ ,  $\alpha$  и параметром  $\varphi$  определяется по формуле (5.11).

### 5.5.2. Кулачковый механизм со смещенным толкателем

Рассмотрим плоский кулачковый механизм со смещенным роликовым ползунным толкателем (рис. 5.12). Определим уравнения конструктивного профилей кулачка по заданной зависимости перемещения толкателя от угла поворота кулачка.

Введем следующие обозначения:

$Oxy$  – неподвижная ортогональная декартова система координат с началом в центре вращения кулачка и осью  $Oy$ , параллельной прямолинейной траектории центра ролика толкателя;

$y_0$  – координата центра ролика по оси  $Oy$  в положении ближнего стояния, м;

$u$  – смещение (эксцентриситет) толкателя или абсолютное значение координаты центра ролика по оси  $Ox$ , м;

$\rho$ ,  $\alpha$  – полярные координаты точек в полярной системе координат на плоскости  $Oxy$  с полюсом  $O$  и полярной осью, проходящей через центр ролика в положении ближнего стояния;

$\alpha_0$  – угол между осью  $Oy$  и полярной осью, проходящей через центр ролика в положении ближнего стояния, рад;

$\varphi$  – угол поворота кулачка с отсчетом от полярной оси, проходящей через центр ролика в положении ближнего стояния, по ходу стрелки часов, рад ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ );

$s$  – перемещение толкателя из положения ближнего стояния, м;

$r_0$  – радиус ролика, м;

$\vartheta$  – угол давления.

Примем, что угол поворота кулачка в положении ближнего стояния толкателя равен нулю и возрастает при вращении кулачка по ходу стрелки часов. Считаем, что заданы следующие величины:

- 1)  $r_0, y_0, u, \mu$ ;
- 2) угол  $\alpha_0$ :  $\alpha_0 = \arctg \frac{u}{y_0}$ ;

3) неотрицательная периодическая функция зависимости перемещения толкателя от угла поворота кулачка на участке  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ :

$$s = s(\varphi), s(2\pi) = s(0).$$

Уравнение профиля запишем так:

$$\rho = f(\alpha),$$

где  $f(\alpha)$  – искомая функция от  $\alpha$ .

Уравнение профиля будем искать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \rho = f_1(\varphi) \\ \alpha = f_2(\varphi). \end{cases}$$

где  $\varphi$  – параметр,  $f_1(\varphi), f_2(\varphi)$  – искомые функции от  $\varphi$ .

Пусть  $B$  – центр ролика. В положении ближнего стояния толкателя отметим на профиле точку  $C$  в точке касания профиля кулачка с

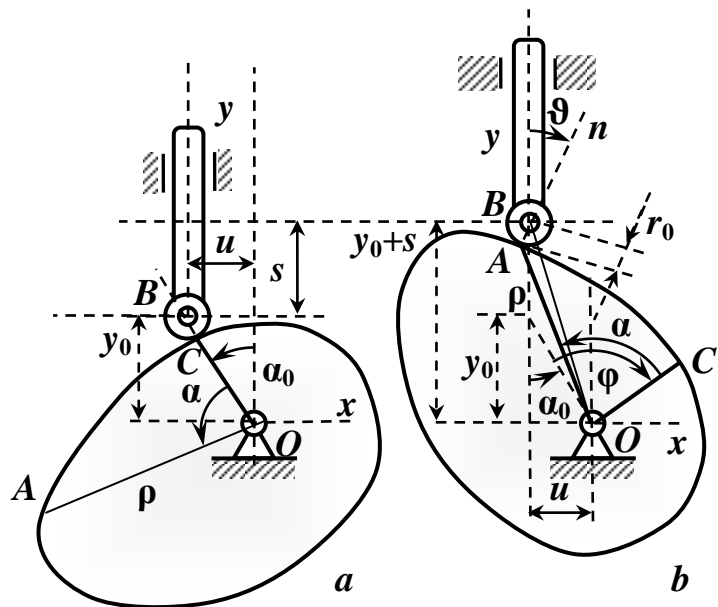


Рис. 5.12. К расчету профиля кулачка

роликом (рис. 5.12 *a*). Полярную ось проведем через центр  $O$  вращения кулачка и точку  $C$ . Таким образом, полярный угол точки  $C$  равен нулю. На профиле кулачка выберем точку  $A$ , полярный угол которой равен  $\alpha$ , а полярный радиус равен  $\rho$ . Полярный угол возрастает в направлении от полярной оси против хода стрелки часов.

Повернем кулачок на такой угол  $\varphi$ , чтобы точка  $A$  профиля совпала с точкой касания с роликом (рис. 5.12 *b*). При этом отрезок  $OC$  кулачка вместе с точкой  $C$  повернется на угол  $\varphi$ . Таким образом, после поворота угол, образуемый лучами с отрезками  $OA$  и  $OC$  остался равным  $\alpha$ , а угол между полярной осью в положении ближнего стояния кулачка и отрезком  $OC$  равен  $\varphi$ . Разным точкам  $A$  профиля кулачка с разными полярными координатами однозначно соответствует угол поворота кулачка или значение параметра  $\varphi$ .

В треугольнике  $OAB$  длины сторон и углы определены:

$$OA = \rho, AB = r_0, OB = \sqrt{[y_0 + s(\varphi)]^2 + u^2};$$

$$\text{угол } ABO = \vartheta + \arctg \frac{u}{y_0 + s(\varphi)}, \text{ угол } AOB = \alpha - \varphi + \alpha_0 - \arctg \frac{u}{y_0 + s(\varphi)}.$$

Для удобства расчетов вместо функций  $\vartheta$ ,  $\alpha$  введем функции  $\vartheta_1$ ,  $\alpha_1$ , значения которых равны углам  $ABO$  и  $AOB$ :

$$\vartheta_1 = \vartheta + \arctg \frac{u}{y_0 + s(\varphi)}; \alpha_1 = \alpha - \varphi + \alpha_0 - \arctg \frac{u}{y_0 + s(\varphi)}. \quad (5.12)$$

Запишем теоремы синуса и косинуса в таком виде:

$$\begin{cases} r_0 \sin \vartheta_1 = \rho \sin \alpha_1 \\ r_0 \cos \vartheta_1 = \sqrt{[y_0 + s(\varphi)]^2 + u^2} - \rho \cos \alpha_1. \end{cases} \quad (5.13)$$

Два уравнения (5.13), в которых переменной служит угол поворота  $\varphi$ , с учетом формул (5.12) содержит три неизвестные: полярные координаты  $\rho$ ,  $\varphi$  и угол давления  $\vartheta$ .

Для определения трех неизвестных к уравнениям (5.13) достаточно добавить равенство (5.5):

$$\begin{cases} r_0 \sin \vartheta_1 = \rho \sin \alpha_1 \\ r_0 \cos \vartheta_1 = \sqrt{[y_0 + s(\varphi)]^2 + u^2} - \rho \cos \alpha_1 \\ \text{tg } \vartheta = \frac{\frac{ds}{d\varphi} - u}{y_0 + s(\varphi)}, \end{cases} \quad (5.14)$$

где переменные  $\vartheta_1, \alpha_1$  определены выражениями (5.12).

При заданной функции  $s(\varphi)$  перемещения толкателя от угла поворота кулачка система уравнений (5.14) имеет аналитическое решение:

$$\begin{cases} \alpha = \varphi - \alpha_0 + \beta + \operatorname{arctg} \frac{r_0 \sin(\vartheta + \beta)}{\sqrt{[y_0 + s(\varphi)]^2 + u^2} - r_0 \cos(\vartheta + \beta)} \\ \rho = \sqrt{[y_0 + s(\varphi)]^2 + u^2 + r_0^2 - 2r_0 \sqrt{[y_0 + s(\varphi)]^2 + u^2} \cos(\vartheta + \beta)}, \end{cases} \quad (5.15)$$

где  $\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{u}{y_0}$ ;

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\frac{ds}{d\varphi} - u}{y_0 + s(\varphi)}; \quad (5.16)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{u}{y_0 + s(\varphi)}.$$

Задача построения профиля кулачка свелась к расчету полярных координат профиля по формулам (5.15) и заданным значениям параметра  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ .

Угол давления в точке профиля кулачка с полярными координатами  $\rho, \alpha$  и параметром  $\varphi$  определяется по формуле (5.16).

## 5.6. Силовой расчет

Рассмотрим плоский кулачковый механизм с ползунным роликовым толкателем (рис. 5.13).

Пусть  $Oxy$  – неподвижная ортогональная декартова система координат с началом в центре вращения кулачка и осью  $Oy$ , параллельной прямолинейной траектории центра ролика толкателя;

$y_0, u$  – соответственно координата центра ролика по оси  $Oy$  в положении ближнего стояния и смещение толкателя, м;

$\varphi$  – угол поворота кулачка с отсчетом от оси  $Oy$  по ходу стрелки часов, рад ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ );

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  – угол поворота кулачка соответственно на фазе удаления, дальнего стояния, сближения, ближнего стояния, рад;

$\omega$  – угловая скорость кулачка, рад/с;

$s$  – перемещение толкателя из положения ближнего стояния  $s = s(\varphi)$ , м;

$s_1(\varphi)$ ,  $s_3(\varphi)$  – функция зависимости перемещения от угла поворота на фазе удаления и сближения соответственно, м;

$H$  – ход толкателя, м;

$r_0$  – радиус ролика, м;

$e_0$ ,  $e_1$  – радиус цапфы вала ролика и кулачка соответственно, м;

$\vartheta$  – угол давления, рад;

$P$  – величина действующей на толкатель силы полезного сопротивления, Н;

$R$ ,  $F$  – величина соответственно силы давления кулачка на ролик и силы трения кулачка с роликом, Н;

$M$  – момент пары движущих сил, Н м;

$M_{f1}$ ,  $M_{f0}$  – величины моментов пар сил трения во вращательных парах кулачка со стойкой и ролика с толкателем, Н м.

$W$  – мощность момента пары движущих сил, Вт;

$I$  – момент инерции кулачка относительно оси вращения, кг м<sup>2</sup>;

$\eta$  – коэффициент полезного действия;

$f$  – коэффициент трения скольжения цапфы со втулкой во вращательной паре;

$\mu$  – коэффициент трения скольжения толкателя со стойкой.

На кулачок действует сила  $R$ , равная по величине и противоположно направленная реакции кулачка, реакция опоры  $O$  и пара движущих сил с моментом  $M$ .

Уравнение вращения кулачка вокруг оси  $O$  запишем так:

$$I\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = M - M_O(R) - M_{f1} - M_O(F), \quad (5.17)$$

где  $M_O(R)$ ,  $M_O(F)$  – величина момента соответственно сил  $R$  и  $F$  относительно центра  $O$ .

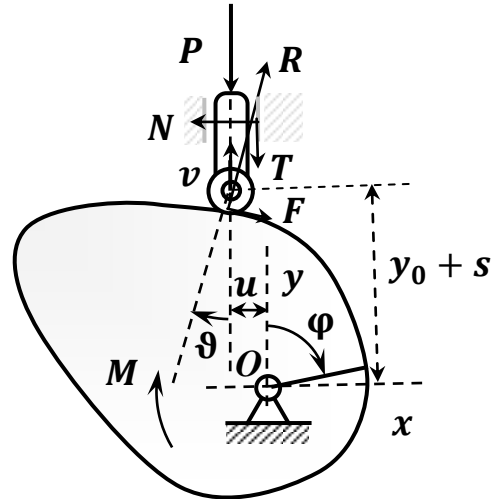


Рис. 5.13. Действующие на толкатель силы ( $\vartheta < 0$ )

По определению (рис. 5.13),

$$M_O(R) = R[(y_0 + s) \sin \vartheta + u \cos \vartheta]; \quad (5.18)$$

$$M_O(F) = F[(y_0 + s) \cos \vartheta - u \sin \vartheta - r_0]. \quad (5.19)$$

Уравнение вращения ролика с малым моментом инерции относительно оси вращения, проходящей через центр масс, запишем так:

$$Fr_0 = M_{f0}. \quad (5.20)$$

Пренебрегая силой  $F$  в сравнении с  $R$ , запишем выражения для моментов пар  $M_{f0}$ ,  $M_{f1}$  так (см. главу по трению):

$$M_{f0} = fRe_0; M_{f1} = fRe_1. \quad (5.21)$$

Перепишем формулу (5.19), выразив величину  $F$  через  $R$  с помощью равенств (5.20), (5.21):

$$M_O(F) = \frac{fRe_0}{r_0} [(y_0 + s) \cos \vartheta - u \sin \vartheta - r_0]. \quad (5.22)$$

Подставляя в уравнение (5.17)  $M_O(R)$  из (5.18),  $M_O(F)$  из (5.22),  $M_{f1}$  из (5.21), найдем выражение для момента пар движущих сил при постоянной угловой скорости кулачка:

$$M = R \left\{ \left( y_0 + s - \frac{fe_0}{r_0} u \right) \sin \vartheta + \left[ u + (y_0 + s) \frac{fe_0}{r_0} \right] \cos \vartheta - e_0 + fe_1 \right\}. \quad (5.23)$$

При известной силе сопротивления величину  $R$  можно найти по формуле (5.1), и формулу (5.23) использовать для расчета момента пар движущих сил.

По определению,

$$W = \omega M. \quad (5.24)$$

Полагаем  $M = 0$ ,  $W = 0$ , если  $\varphi > \varphi_1$ .

Примем, что полезная работа  $A$  совершается кулачком на стадии удаления:

$$A = \int_0^{\varphi_1} M d\varphi. \quad (5.25)$$

Работа сил инерции и изменение кинетической энергии толкателя за цикл равна нулю, и коэффициент  $\eta$  полезного действия определим по формуле

$$\eta = \frac{PH}{A}. \quad (5.26)$$



## 5.7. Алгоритм расчета кулачкового механизма

1. Задаем исходные данные в виде таблицы 5.2:  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  – угол поворота кулачка соответственно на фазе удаления, дальнего стояния, сближения;  $s$  – перемещение толкателя из положения ближнего стояния  $s = s(\varphi)$ ;  $s_1(\varphi), s_3(\varphi)$  – функция зависимости перемещения от угла поворота на фазе удаления и сближения соответственно;  $y_0$  – координата центра ролика по оси  $Oy$  в положении ближнего стояния толкателя;  $u$  – смещение толкателя;  $H$  – ход толкателя;  $r_0$  – радиус ролика, м;  $e_0, e_1$  – радиус цапфы вала ролика и кулачка соответственно, м;  $\omega$  – угловая скорость кулачка;  $P$  – величина действующей на толкатель силы полезного сопротивления;  $\mu$  – коэффициент трения скольжения толкателя со стойкой;  $f$  – коэффициент трения скольжения цапфы со втулкой во вращательной паре.

### 5.2. Обозначения параметров, единицы измерения и величины

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$y_0$	$e_1$	$e_2$	$u$	$H$	$r_0$	$\omega$	$P$	$\mu, f$
град	град	град	мм	мм	мм	мм	мм	мм	рад/с	Н	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

2. Приводим исходные данные к единицам измерения в системе СИ.

3. Вычисляем угол поворота кулачка на фазе ближнего стояния:  $\varphi_4 = 2\pi - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$ .

4. Вычисляем минимальный радиус  $r$  и максимальный радиус  $R$  кулачка по следующим формулам:

$$r = \sqrt{y_0^2 + u^2}; R = \sqrt{[y_0 + H]^2 + u^2}.$$

5. Вычерчиваем систему прямоугольных декартовых координат с осями  $Ox, Oy$ .

6. Вычисляем угол  $\alpha_0$ , образованный осью  $Oy$  и полярной осью, по формуле  $\alpha_0 = \arctg \frac{u}{y_0}$ .

7. Определяем декартовы координаты  $x_B, y_B$  центра ролика в положении ближнего стояния толкателя по формулам

$$x_B = -u; y_B = y_0.$$

8. Назначаем шаг  $\Delta\varphi$  параметра  $\varphi$ , возрастающего от 0 до  $2\pi$ .  
Принимаем  $A = 0$ .

На каждом шагу определяем

1) величины угла  $\vartheta$  давления по формуле (5.16) и угла  $\beta$ , образованного осью  $Oy$  и прямой, соединяющей центры кулачка и ролика:

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\frac{ds}{d\varphi} - u}{y_0 + s(\varphi)}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{u}{y_0 + s(\varphi)};$$

2) полярные координаты  $\rho$ ,  $\alpha$  точки конструктивного профиля по формулам (5.15):

$$\begin{cases} \alpha = \varphi - \alpha_0 + \beta + \operatorname{arctg} \frac{r_0 \sin(\vartheta + \beta)}{\sqrt{[y_0 + s(\varphi)]^2 + u^2} - r_0 \cos(\vartheta + \beta)}, \\ \rho = \sqrt{[y_0 + s(\varphi)]^2 + u^2 + r_0^2 - 2r_0 \sqrt{[y_0 + s(\varphi)]^2 + u^2} \cos(\vartheta + \beta)}; \end{cases}$$

3) декартовы координаты  $x$ ,  $y$  точки конструктивного профиля по следующим формулам:

$$x = -\rho \sin(\alpha_0 + \alpha); \quad y = \rho \cos(\alpha_0 + \alpha);$$

4) положение точки с координатами  $x$   $y$  на чертеже с системой координат  $Oxy$  в заданном масштабе.

5) величину  $R$  силы давления ролика на кулачок по формуле (5.1):

$$R = \frac{P}{(\cos \vartheta - \mu |\sin \vartheta|)}.$$

5) момент пары движущих сил по формуле (5.23):

$$M = R \left\{ \left( y_0 + s - \frac{f e_0}{r_0} u \right) \sin \vartheta + \left[ u + (y_0 + s) \frac{f e_0}{r_0} \right] \cos \vartheta - e_0 + f e_1 \right\};$$

$M = 0$ , если  $\varphi > \varphi_1$ .

6) мощность момента пары движущих сил по формуле  $W = M\omega$ ;

7) приращение работы  $\Delta A$  по формуле (5.25):  $\Delta A = M\Delta\varphi$ ;

8) работу  $A$  движущей пары сил в текущем положении кулачка по формуле (5.25):  $A = A + \Delta A$ .

9. Строим профиль кулачка в плоскости  $Oxy$  по точкам с заданным шагом.

10. Строим графики зависимостей величин  $\vartheta$ ,  $W$ ,  $M$ , от угла поворота.

11. Вычисляем работу  $A$  по формуле (5.25) и среднюю мощность  $W_s$  момента пары движущих сил за один оборот кулачка:

$$A = \sum M \Delta \varphi; W_s = A \omega / \varphi_1.$$

12. Вычисляем коэффициент  $\eta$  полезного действия по формуле (5.26):

$$\eta = \frac{PH}{A}.$$

13. Определяем максимальное  $\vartheta_{max}$  и минимальное  $\vartheta_{min}$  значения угла давления за один оборот кулачка.

14. Строим графики зависимостей  $\eta$ ,  $W_s$ ,  $\vartheta_{max}$ ,  $\vartheta_{min}$ ,  $r$ ,  $R$  от параметров кулачкового механизма  $u$ ,  $\varphi_1$ ,  $y_0$ ,  $H$ .

## 5.8. Пример расчета кулачкового механизма

1. Задаем исходные данные (табл. 5.3):

**5.3. Обозначения параметров, единицы измерения и величины**

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$y_0$	$e_1$	$e_0$	$u$	$H$	$r_0$	$\omega$	$P$	$\mu, f$
град	град	град	мм	мм	мм	мм	мм	мм	рад/с	Н	-
140	20	180	40	4	2	8	60	5	10	40	0,2

$$s = \begin{cases} s_1(\varphi) = H \sin^2 \frac{\pi \varphi}{2\varphi_1}, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \\ H, & \varphi_1 < \varphi \leq \varphi_1 + \varphi_2 \\ s_3(\varphi) = H \sin^2 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(\varphi - \varphi_1 - \varphi_2)}{2\varphi_3} \right], & \varphi_1 + \varphi_2 < \varphi \leq \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \\ 0, & \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 < \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

2. Приводим исходные данные к единицам измерения в системе СИ:

$$[\varphi_1] = \text{рад}, [\varphi_2] = \text{рад}, [\varphi_3] = \text{рад}, [y_0] = \text{м}, [e_0] = \text{м}, [e_1] = \text{м}, [s] = \text{м}, [u] = \text{м}, [H] = \text{м}, [r_0] = \text{м}.$$

3. Строим профиль кулачка в плоскости  $Oxy$  по точкам каждого шага в заданном масштабе (рис. 5.11).

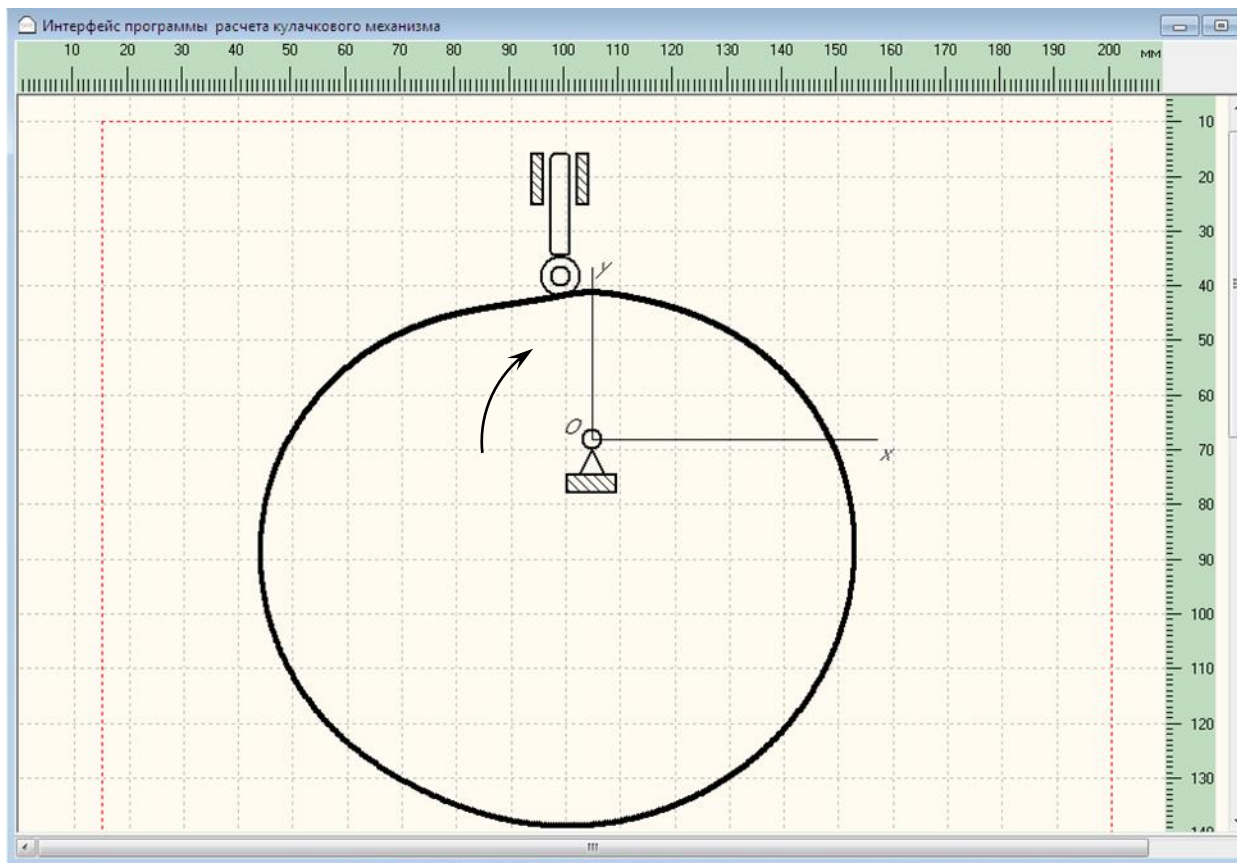


Рис. 5.11. Профиль кулачка

4. Строим графики зависимостей величин  $\vartheta$ ,  $W$  от угла поворота кулачка (рис. 5.12).

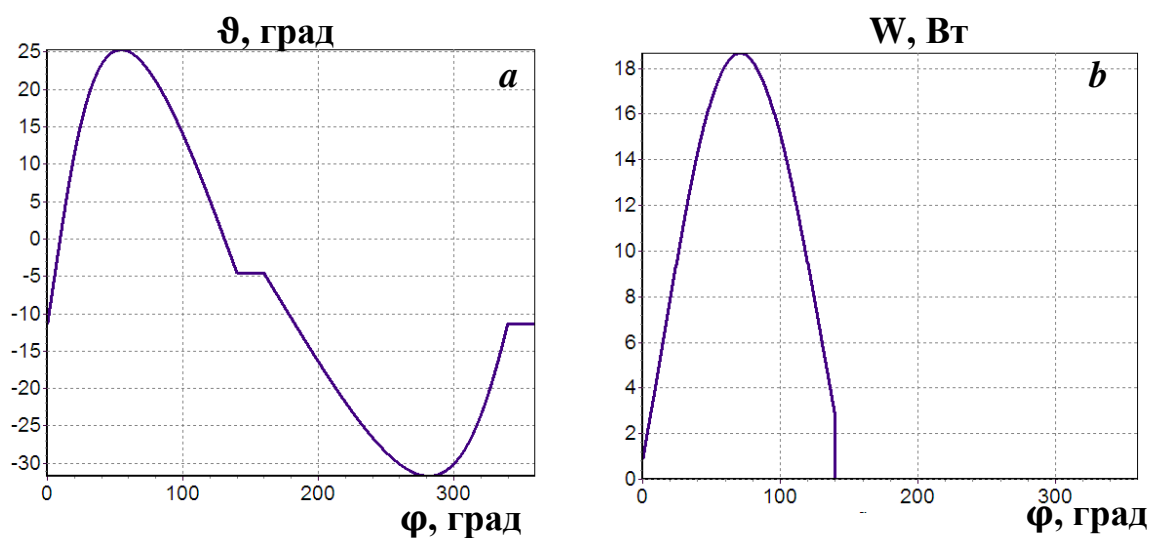


Рис. 5.12. Графики зависимостей угла давления (a) и мощности (b) от угла поворота кулачка

5. Строим графики зависимостей максимального угла давления и КПД от угла  $\varphi_1$  поворота кулачка на фазе подъема толкателя при неизменных углах поворота на фазах сближения и ближнего стояния (рис. 5.13).

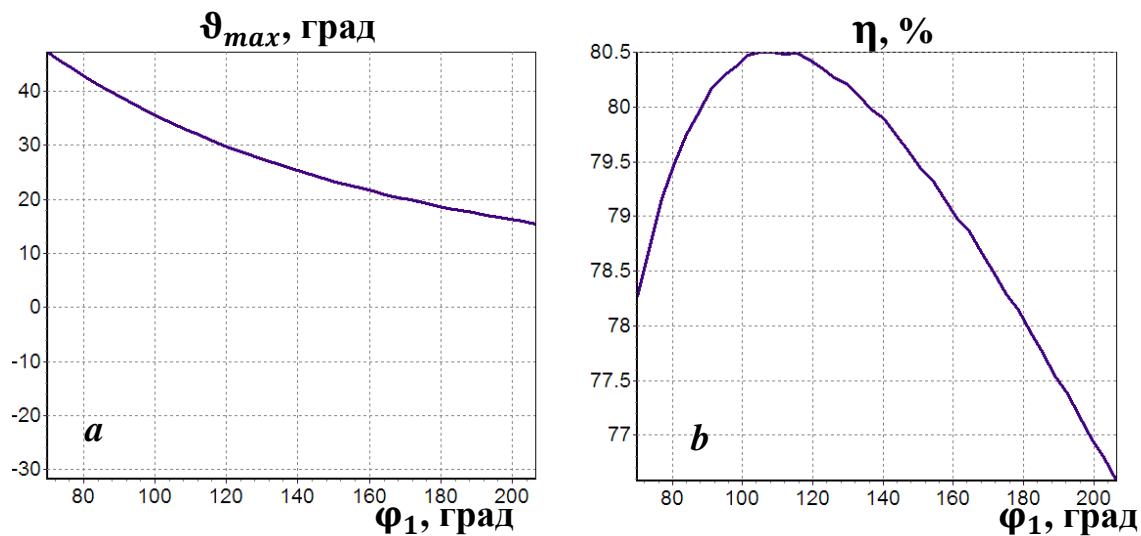


Рис. 5.13. Графики зависимостей максимального угла давления (a) и КПД (b) от угла поворота кулачка на фазе подъема толкателя

6. Строим графики зависимостей максимального и минимального углов давления и КПД от координаты  $y_0$  центра ролика в положении ближнего стояния толкателя (рис. 5.14).

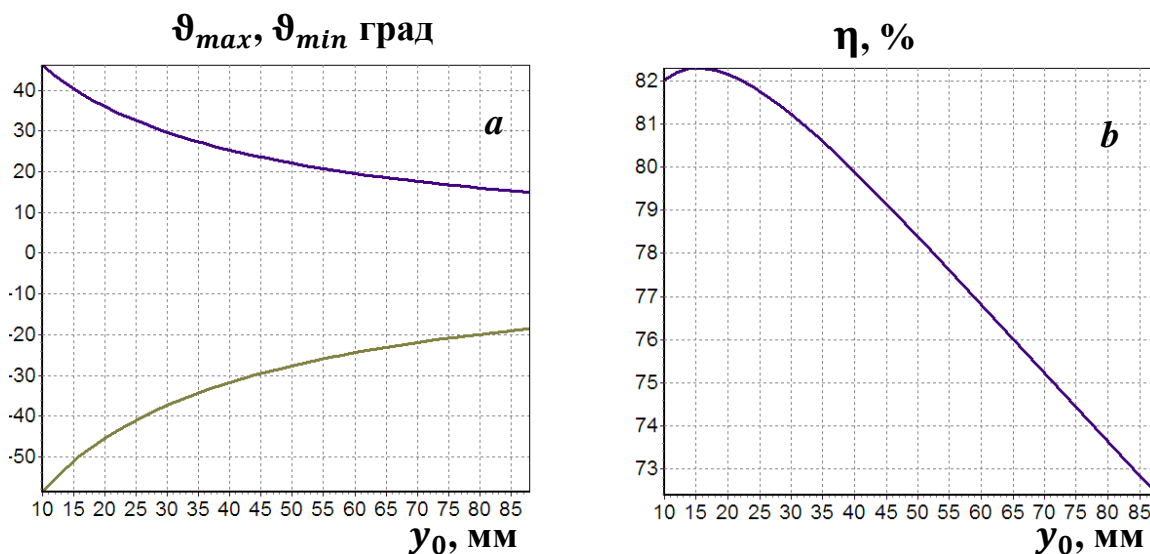


Рис. 5.14. Графики зависимостей максимального угла давления (a) и КПД (b) от координаты  $y_0$

Отмечаем, что

1) максимум мощности достигается в тот момент, когда угол давления максимальный (рис. 5.12);

2) максимальный угол давления уменьшается с увеличением угла поворота кулачка на фазе подъема и с увеличением координаты  $y_0$  (рис. 5.13, 5.14);

3) коэффициент полезного действия не связан монотонно с максимальным углом давления (рис. 5.13, 5.14).

## 6. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

### 6.1. Основные положения

Цель силового расчета механизма состоит в определении сил, приложенных к каждому звену. Силовой расчет необходим для оценки прочности звеньев, надежности кинематических пар и обоснования мощности, необходимой для функционирования механизма. Для выполнения силового расчета необходимо задать исходные данные: закон движения каждого звена, геометрические размеры всех звеньев, массы звеньев с указанием положений центров масс, моменты инерции звеньев относительно центральных осей, внешние силы и пары сил, коэффициенты трения в кинематических парах. К внешним силам относятся сила давления горючей смеси на поршень двигателя внутреннего сгорания, сила технологического сопротивления, действующая на поршень пресса, сила резания, действующая на резец, пары сил, действующие на ротор электродвигателя, и другие. При этом распределенные и объемные силы приводятся к эквивалентным сосредоточенным силам и парам сил.

В быстроходных механизмах сельскохозяйственных машин и оборудования скорости и ускорения звеньев велики, и силы инерции звеньев значительно превышают статические нагрузки.

Силовой расчет, выполненный с учетом сил инерции, называется кинетостатическим расчетом.

### 6.2. Силы инерции и принцип Даламбера

Силы инерции обусловлены ускорениями точек звеньев. Они вводятся для решения задач силового расчета методом кинетостатики, суть которого заключается в том, что задача динамики на основании принципа Даламбера приводится к задаче статики.

Рассмотрим поступательное движение звена массой  $m$  с ускорением  $\vec{a}$  под действием сил, равнодействующая  $\vec{F}$  которых приложена

в центре  $S$  масс звена. Силой  $\vec{F}_i$  инерции (звена) называется вектор, определяемый равенством

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}. \quad (6.1)$$

На основании принципа Даламбера сила  $\vec{F}_u$  инерции, будучи условно приложена в центре масс звена, уравнивает силу  $\vec{F}$  (рис.6.1):  $\vec{F}_u + \vec{F} = \vec{0}$ .

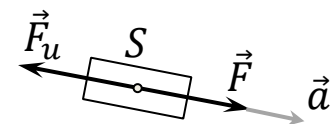


Рис. 6.1. Уравнивающие силы  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_u$

Таким образом, при известном ускорении центра масс звена метод кинестатики позволяет найти равнодействующую  $\vec{F}$  сил, реально действующих на звено

Рассмотрим вращательное движение звена с угловым ускорением  $\varepsilon$  вокруг неподвижной оси, проходящей через центр  $S$  масс, под действием пары сил в плоскости, перпендикулярной оси.

Пусть  $M$  – алгебраический момент пары сил.

Моментом  $M_u$  сил инерции относительно оси вращения называется величина, определяемая равенством

$$M_u = -J \varepsilon, \quad (6.2)$$

где  $J$  – момент инерции звена относительно оси вращения.

Знак « $-$ » в формуле (6.2) означает, что момент сил инерции относительно оси, являющийся проекцией на ось вектора момента сил инерции, имеет знак, противоположный проекции на ось вектора углового ускорения, то есть круговые стрелки в плоскости вращения, изображающие эти векторы, направлены противоположно. На основании принципа Даламбера момент  $M_u$  сил инерции при отсутствии трения уравнивает алгебраический момент  $M$  пары (рис. 6.2):

$$M + M_u = 0.$$

Если центр масс звена находится на неподвижной оси, то сила инерции равна нулю.

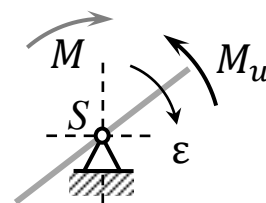


Рис. 6.2. Изображения моментов  $M$  и  $M_u$  сил



Ось, проходящая через центр масс звена, называется центральной.

Единица измерения момента инерции звена относительно оси в системе СИ –  $[\text{кг} \cdot \text{м}^2]$ , момента пары сил –  $[\text{Н} \cdot \text{м}]$ , углового ускорения –  $[\text{рад}/\text{с}^2]$ .

Рассмотрим плоскопараллельное движение звена массы  $m$ . Оно складывается из двух движений: поступательного с ускорением  $\vec{a}$  центра  $S$  масс и вращательного с угловым ускорением  $\varepsilon$  вокруг центральной оси, перпендикулярной плоскости движения. На звено в плоскости движения действуют силы, главный вектор  $\vec{F}$  которых приложен в центре  $S$ , и пара сил, алгебраический момент  $M$  которых соответствует главному моменту сил относительно центра масс.

Сила  $\vec{F}_u$  инерции и момент  $M_u$  сил инерции относительно центральной оси звена при плоскопараллельном движении определяют равенствами, аналогичными равенствам (6.1), (6.2):

$$\begin{cases} \vec{F}_u = -m\vec{a}; \\ M_u = -J \varepsilon, \end{cases} \quad (6.3)$$

где  $J$  – момент инерции звена относительно центральной оси.

На основании принципа Даламбера сила  $\vec{F}_u$  инерции, будучи условно приложена в центре масс звена, уравновешивает силу  $\vec{F}$ , а момент  $M_u$  сил инерции уравновешивает момент  $M$  пары сил (рис.6.3).

Центры масс звеньев рычажного механизма перемещаются. Поэтому при силовом расчете этих звеньев необходимо пользоваться равенствами (6.3).

В частности, это относится к кривошипам, коромыслам, кулисам, совершающим вращения вокруг неподвижных осей.

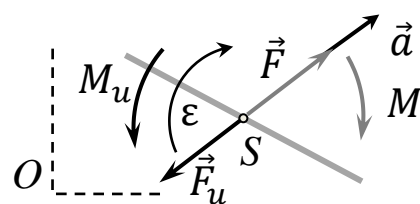


Рис. 6.3. Изображения сил и моментов сил

### 6.3. Реакции в кинематических парах

Звено, ограничивающее движения другого звена, независимо от действующих сил, служит связью. Звено 2, ограничивающее движение звена 1, служит связью для звена 1 (рис. 6.4).

Пусть  $K$  – точка контакта поверхностей звеньев 1 и 2. В соответствии с аксиомой об освобождении от связей при мысленном разъединении звеньев к точке  $K$  звена 1 необходимо приложить реакцию звена 2. При отсутствии трения реакцией звена 2, образующего со звеном 1 высшую пару, служит сила  $\vec{F}_{12}$ , направленная по внешней нормали  $Kn$  к поверхности связи. Сила  $\vec{F}_{12}$  приложена к точке  $K$  звена 1 и действует со стороны мысленно удаленного и отмеченного пунктиром звена 2 (см. рис. 6.4).

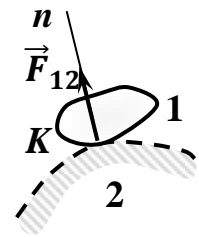


Рис. 6.4. Реакция  $\vec{F}_{12}$  связи

*Реакция в высшей паре не известна по величине и известна по направлению и точке приложения.*

Рассмотрим низшие пары плоского механизма: вращательную и поступательную. Точка приложения реакции связи при контакте цилиндрических поверхностей звеньев 1 и 2, образующих вращательную пару, не известна (рис. 6.5). Однако при отсутствии трения реакция связи направлена по внешней нормали к цилиндрической поверхности, то есть ее линия действия пересекает центр шарнира. Так как силу можно переносить вдоль линии действия, то реакция  $\vec{F}_{12}$  звена 2 при его мысленном удалении приложена к точке  $K$  звена 1, условно совпадающей с центром шарнира (рис. 6.5).

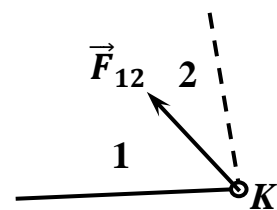


Рис. 6.5. Реакция  $\vec{F}_{12}$  во вращательной паре

*Реакция в низшей паре не известна по величине и направлению и известна по точке пересечения ее линии действия.*

В поступательной паре при отсутствии трения реакция  $\vec{F}_{12}$  звена 2 направлена по внешней нормали к направляющей, а величина  $F_{12}$  и

точка  $K$  ее приложения на звене 1 или плечо  $x$  относительно центра  $C$  звена неизвестны (рис. 6.6, слева). Для удобства расчетов можно воспользоваться теоремой о параллельном переносе силы в центр  $C$  звена 1. При этом число неизвестных, равное двум, не изменится: ими станут величина  $F_{12}$  силы  $\vec{F}_{12}$  и момент  $M_{12}$  пары, действующие на звено 1 (рис. 6.6, справа).

При наличии трения число неизвестных не изменяется, так как сила трения направлена перпендикулярно нормальной реакции  $\vec{F}_{12}$ , а ее величина при известном коэффициенте  $f$  трения равна  $fF_{12}$ . Неизвестные величины определяются из уравнений равновесия звена 1 с учетом сил инерции.

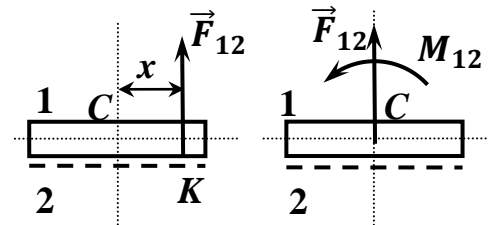


Рис. 6.6. Реакция  $\vec{F}_{12}$  в поступательной паре

#### 6.4. Статическая определимость кинематических цепей

Рассмотрим плоскую кинематическую цепь, звенья которой образуют низшие и высшие пары. Пусть  $n$  – число подвижных звеньев цепи,  $p_1$  – число вращательных и поступательных пар,  $p_2$  – число высших пар.

Каждое звено цепи совершает плоскопараллельное движение. При заданном законе движения звена силы, действующие на него, должны удовлетворять трем уравнениям движения, а для  $n$  звеньев –  $3n$  уравнениям. Как показано ранее, при разъединении высшей пары появляется одна неизвестная, а низшей пары – две. Для определения всех  $(2p_1 + p_2)$  неизвестных необходимо столько же уравнений:

$$3n = 2p_1 + p_2.$$

(6.4)

Плоская кинематическая цепь считается статически определимой, если выполняется равенство (6.4).

Структурные группы Ассур класса II, в которых  $n = 2$ ,  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 0$ , являются статически определимыми цепями. Простейшей статически определимой цепью, содержащей высшую пару, служит толкатель кулачкового механизма, образующий низшую пару со стойкой и высшую с кулачком:  $n = 1$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 1$ .

Структурный анализ плоского механизма с одной степенью свободы без избыточных связей доказывает, что после выделения всех статически определимых групп Ассур остается одно ведущее звено: кривошип или ползун. Три уравнения движения ведущего звена позволяют найти две неизвестные, определяющие реакцию стойки, и третью неизвестную (величину силы для ползуна или момент пары для кривошипа), обеспечивающую заданный закон движения звена.

Можно доказать, что наличие избыточных связей приводит к появлению статически неопределимой цепи, в которой число неизвестных превышает число уравнений движений звеньев. Таким механизмом служит параллелограммный механизм, анализ которого дан в главе 2.

### 6.5. Определение реакций в кинематических парах

Рассмотрим центральный кривошипно-ползунный механизм, приводимый в движение кривошипом 1 и предназначенный для преодоления силы  $\vec{F}_3$  технологического сопротивления (рис. 6.7, а).

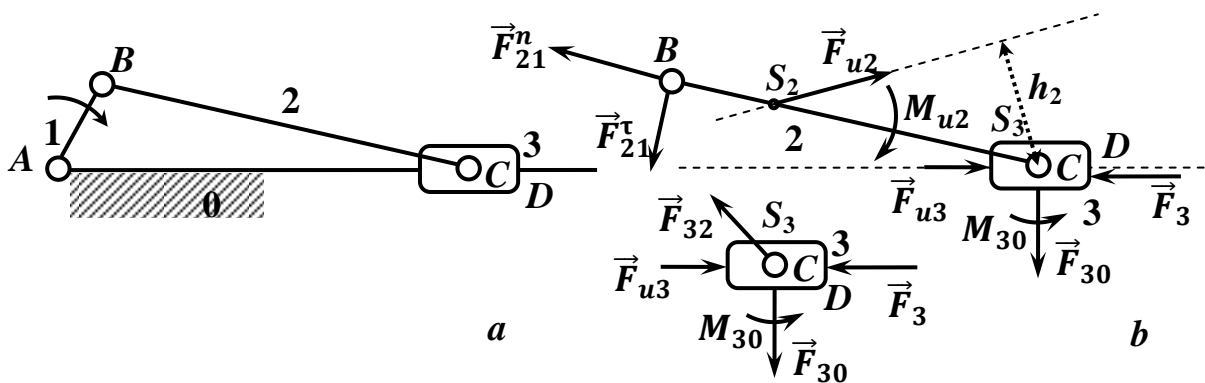


Рис. 6.7. Кинематическая схема механизма (а) и кинематические схемы групп Ассур (b) (1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – ползун)

Пусть  $\vec{F}_{ui}$  – сила инерции звена с номером  $i$ , приложенная к центру масс звена ( $i = 1, 2, \dots$ );

$\vec{F}_{jk}$  – сила, действующая на звена с номером  $j$  со стороны звена с номером  $k$  ( $j = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$ );

$M_{ui}$  – алгебраический момент сил инерции звена с номером  $i$  относительно центра масс звена ( $i = 1, 2, \dots$ );

$M_{jk}$  – алгебраический момент силы, действующей на звено с номером  $j$  со стороны звена с номером  $k$ , относительно заданной точки первого звена ( $j = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$ ).

Силовой расчет механизма для определения реакций в кинематических парах начинают с последней от первичного механизма группы Ассура. Группа состоит из шатуна 2, ползуна 3 и включает три пары  $B, C, D$  (рис. 6.7,  $b$ ).

При силовом расчете группы звенья, образующие концевые кинематические пары группы, мысленно разъединяют. Запишем векторное уравнение равновесия сил для группы:

$$(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{u2}) + (\vec{F}_3 + \vec{F}_{u3} + \vec{F}_{30}) = \vec{0}. \quad (6.5)$$

В уравнении (6.5)  $\vec{F}_{21}$  и  $\vec{F}_{30}$  – неизвестные силы, действующие на шатун 2 со стороны кривошипа 1 и на ползун 3 со стороны стойки 0;  $\vec{F}_{u2}$  и  $\vec{F}_{u3}$  – известные силы инерции звеньев 2 и 3, приложенные к центрам  $S_2$  и  $S_3$  масс звеньев.

Последовательность известных сил  $\vec{F}_{u2}, \vec{F}_3, \vec{F}_{u3}$  не имеет значения. Однако, их удобно группировать по звеньям для сокращения построений плана сил. Без учета трения вектор силы  $\vec{F}_{30}$  направлен по нормали к поверхности стойки и не известен по величине. Его точка приложения не известна. Чтобы не искать точ-

ку приложения, перенесем силу  $\vec{F}_{30}$  в центр  $C$  шарнира, добавив при этом пару сил в плоскости движений звеньев с неизвестным моментом  $M_{30}$ .

Уравнение (6.5) содержит три неизвестные: величину и направление вектора  $\vec{F}_{21}$  и величину вектора  $\vec{F}_{30}$ . Чтобы найти вектор силы  $\vec{F}_{21}$ , приложенной в центре  $B$  шарнира, разложим силу на нормальную составляющую  $\vec{F}_{21}^n$ , направленную вдоль оси звена 2, и тангенциальную составляющую  $\vec{F}_{21}^\tau$ , перпендикулярную оси звена 2:

$$\vec{F}_{21} = \vec{F}_{21}^n + \vec{F}_{21}^\tau.$$

Величину  $F_{21}^\tau$  вектора  $\vec{F}_{21}^\tau$  определим из уравнения равенства нулю суммы алгебраических моментов сил, действующих на звено 2, относительно точки  $C$ :

$$M_C(\vec{F}_{u2}) - M_{u2} + M_C(\vec{F}_{21}^\tau) = 0.$$

Последнее уравнение можно решить графоаналитическим способом с помощью кинематической схемы группы на рисунке 6.7:

$$-F_{u2}h_2\mu_l - M_{u2} + F_{21}^\tau l_{BC} = 0, \quad (6.6)$$

где  $\mu_l$  – масштабный коэффициент длин, м/мм;

$h_2$  – плечо силы  $\vec{F}_{u2}$ , измеренное на кинематической схеме, мм;

$l_{BC}$  – натуральная длина шатуна 2, м.

После измерения плеча  $h_2$  на схеме из уравнения (6.6) находим  $F_{21}^\tau$ :

$$F_{21}^\tau = (F_{u2}h_2\mu_l - M_{u2})/l_{BC}.$$

Если знак  $F_{21}^\tau$  окажется отрицательным, направление вектора  $\vec{F}_{21}^\tau$  на схеме необходимо изменить на противоположное, а знак минус на плюс.

После определения вектора  $\vec{F}_{21}^\tau$  уравнение (6.5) содержит две неизвестные, а именно величины векторов сил  $\vec{F}_{21}^n$  и  $\vec{F}_{30}$ , и может быть разрешено. Перепишем его в виде

$$\vec{F}_{21}^n + \vec{F}_{21}^\tau + \vec{F}_{u2} + \vec{F}_3 + \vec{F}_{u3} + \vec{F}_{30} = \vec{0}. \quad (6.7)$$

Крайние векторы сил в уравнении (6.7) не известны по величине и известны по направлению. Для решения этого уравнения графическим способом строят план сил, на котором изображают замкнутый многоугольник сил в масштабе.

Масштабный коэффициент  $\mu_F$  определяют по формуле

$$\mu_F = F_3/Z_3,$$

где  $Z_3$  – назначенная длина отрезка, изображающего на плане вектор силы  $\vec{F}_3$  в миллиметрах.

Многоугольник сил в масштабе строят от полюса  $O$ , начиная с известной силы  $\vec{F}_{21}^{\tau}$  (рис. 6.8).

Запишем примерный алгоритм построения плана сил:

- 1) выбираем полюс плана  $O$ ;
- 2) из полюса проводим вектор  $\vec{Z}_{21}^{\tau}$ , сонаправленный с вектором силы  $\vec{F}_{21}^{\tau}$  перпендикулярно оси  $BC$  шатуна и длиной, равной величине  $F_{21}^{\tau}$  силы в масштабе:  $Z_{21}^{\tau} = F_{21}^{\tau}/\mu_F$ ;

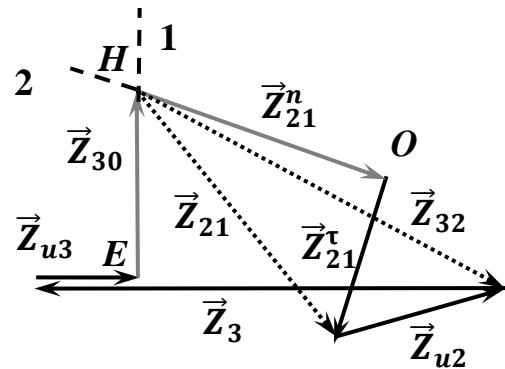


Рис. 6.8. Многоугольник сил

- 3) из конца вектора  $\vec{Z}_{21}^{\tau}$  проводим вектор  $\vec{Z}_{u2}$ , параллельный силе  $\vec{F}_{u2}$  и равный ей в масштабе;
- 4) из конца вектора  $\vec{Z}_{u2}$  проводим вектор  $\vec{Z}_3$ , сонаправленный с вектором силы  $\vec{F}_3$  и длиной, равной величине силы в масштабе;
- 4) аналогично строим вектор  $\vec{Z}_{u3}$ ;
- 5) из конца  $E$  вектора  $\vec{Z}_{u3}$  проводим луч 1, сонаправленный с вектором силы  $\vec{F}_{30}$ ;
- 6) из полюса  $O$  проводим луч 2 параллельно силе  $\vec{F}_{21}^n$  или отрезку  $BC$ ;
- 7) отмечаем пересечение  $H$  лучей 1, 2, являющееся началом вектора  $\vec{Z}_{21}^n$  и концом вектора  $\vec{Z}_{30}$ , изображающих векторы сил  $\vec{F}_{21}^n$  и  $\vec{F}_{30}$  в масштабе;

8) по векторам  $\vec{Z}_{21}^n$  и  $\vec{Z}_{21}^\tau$  строим вектор  $\vec{Z}_{21}$ , изображающий вектор силы  $\vec{F}_{21}$  в масштабе:

$$\vec{Z}_{21} = \vec{Z}_{21}^n + \vec{Z}_{21}^\tau; F_{21} = \mu_F Z_{21}.$$

Для определения реакции  $\vec{F}_{32}$  в шарнире  $C$  и неизвестного момента  $M_{30}$  реакции стойки относительно точки  $C$  записывают уравнения равновесия ползуна 3:

$$\begin{cases} \vec{F}_3 + \vec{F}_{u3} + \vec{F}_{30} + \vec{F}_{32} = \vec{0}; \\ M_C(\vec{F}_3) + M_{30} = 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Первое уравнение системы (6.8) может быть разрешено графическим способом методом построения силового многоугольника, изложенного выше (рис. 6.8). Отметим, что линии действия сил пересекают центр  $C$ ; и моменты этих сил относительно центра равны нулю.

Второе уравнение системы (6.8) содержит одну неизвестную  $M_{30}$  и может быть разрешено. Если линия действия силы  $\vec{F}_3$  пересекает центр  $C$  моментов, то из второго уравнения найдем  $M_{30}$ :  $M_{30} = 0$ . Если линия действия силы  $\vec{F}_3$  не пересекает центр  $C$  моментов, то в условиях необходимо задать плечо силы  $\vec{F}_3$  относительно точки  $C$ , и тогда  $M_{30} = -M_C(\vec{F}_3)$ . Отрицательный знак  $M_{30}$  будет указывать на то, что выбранное на схеме направление круговой стрелки, изображающей момент, следует изменить на противоположное, а знак изменить на плюс.

Силу  $\vec{F}_{23}$ , действующую на звено 2 со стороны звена 3, можно найти и из уравнения равновесия звена 2:  $\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$ .

## 6.6. Определение уравновешивающей силы

Заданный закон движения кривошипа обеспечивается за счет движущей силы или пары сил, действующих на кривошип. Для определения момента  $\mathfrak{M}$  пары сил достаточно построить кинематическую



схему кривошипа с указанием действующей на него реакции  $\vec{F}_{12}$  звена 2, принимая во внимание, что  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ :

$$\mathfrak{M} = F_{12} h_1 \mu_1,$$

где  $h_1$  – плечо силы  $\vec{F}_{12}$ , мм (на кинематической схеме кривошипа с указанием сил, рис. 6.9);

$\mu_1$  – масштабный коэффициент длин, м/мм.

Вместо уравнивающей пары сил можно найти уравнивающую силу  $F_y$ , приложенную к кривошипу в точке  $B$  перпендикулярно оси  $AB$  кривошипа:

$$F_y = \mathfrak{M} / l_{AB},$$

где  $l_{AB}$  – натуральное расстояние между точками  $A, B$  кривошипа, м.

Применение рычага Жуковского позволяет определить уравнивающую силу  $F_{y1}$  методом планов сил без проведения полного силового расчета механизма. Рычагом служит план скоростей, который строится повернутым, например, по ходу часовой стрелки на угол  $90^\circ$  (рис. 6.10).

При построении рычага Жуковского каждая внешняя сила, включая силы инерции и уравнивающую, прикладывается к одноименной точке рычага и переносится без изменения направления.

Момент  $\mathfrak{M}_{u2}$  сил инерции шатуна на схеме рычага необходимо привести к единице изменения  $H \cdot \text{мм}$ :

$$\mathfrak{M}_{u2} = M_{u2} \cdot bc / l_{BC},$$

где  $bc$  – длина отрезка  $bc$  на схеме рычага Жуковского, мм.

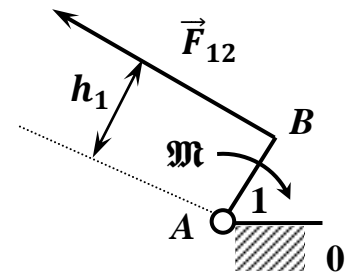


Рис. 6.9. К расчету момента  $\mathfrak{M}$  пары сил

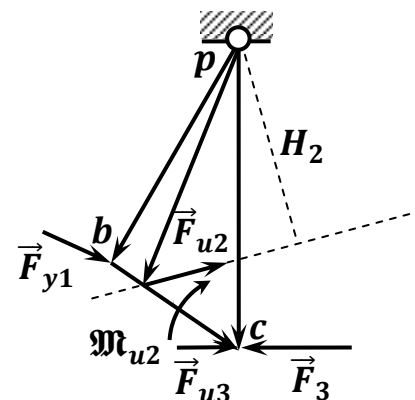


Рис. 6.10. Рычаг Жуковского

Уравновешивающая сила находится из условия равновесия рычага, при котором алгебраическая сумма моментов внешних сил и пар сил относительно полюса  $p$  равняется нулю:

$$F_{y1} \cdot pb - F_3 \cdot pc + F_{u2} \cdot H_2 + F_{u3} \cdot pc - \mathfrak{M}_{u2} = 0,$$

где  $pb$ ,  $pc$ ,  $H_2$  – плечи рычага, равные длинам одноименных отрезков, мм.

Отсюда

$$F_{y1} = (F_3 \cdot pc - F_{u2} \cdot H_2 - F_{u3} \cdot pc + \mathfrak{M}_{u2}) / pb.$$

Если значение  $F_{y1}$ , вычисленное по данной формуле, получается со знаком минус, то направление силы следует изменить на противоположное, а знак на плюс.

Оценка  $\delta$  погрешности расчета в процентах выполняют по формуле

$$\delta = (F_{y1} - F_y) \cdot 100 / F_{y1}.$$

Расчет считается корректным, если погрешность не превышает 5 %.

Для оценки мощности  $P$  двигателя в данном положении механизма воспользуемся таким равенством:

$$P = \mathfrak{M} \cdot \omega_1 / \eta,$$

где  $\omega_1$  – угловая скорость кривошипа;

$\eta$  – КПД передачи.

## 7. ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

### 7.1. Основные положения и обозначения

Кинематическое исследование и силовой анализ рычажного механизма с одной степенью свободы возможны в том случае, когда заданы угловая скорость и угловое ускорение кривошипа или скорость и ускорение ползуна как входного звена в каждом положении механизма.

Для определения кинематических параметров входного звена необходимо решить вторую задачу динамики системы о движении под действием заданных сил.

В теории механизмов принято выделять движущие силы и пары сил, силы и пары сил полезного сопротивления, силы и пары сил трения, силы тяжести.

*Движущими называются активные силы и пары сил, совершающие работу и приводящие к увеличению кинетической энергии механизма за любой промежуток времени с начала их действия.*

В случае периодического движения работа движущих сил за период положительна. Для движущей пары сил геометрически это означает, что сумма площадей графика зависимости момента пары от угла поворота над осью абсцисс превышает сумму площадей под осью абсцисс (рис. 7.1).

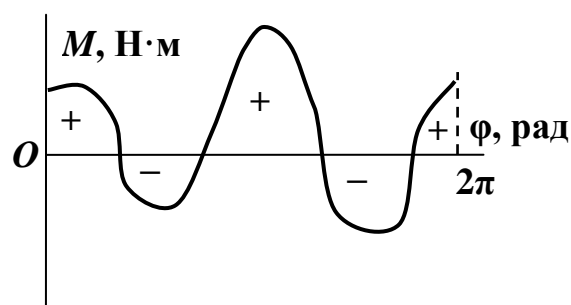


Рис. 7.1. Изменение момента пары движущих сил

*Силами и парами сил полезного сопротивления называются такие силы, для преодоления которых предназначен механизм.*

Силы полезного сопротивления не зависят от движущих сил. Работа этих сил отрицательна. В механизме режущего станка такими силами служат силы резания, в механизме привода автомобиля — силы сопротивления передвижению автомобиля.

Силы и пары сил трения относятся к силам вредного сопротивления. Они являются пассивными и зависят от движущих сил. Работа этих сил отрицательна. Наличие сил вредного сопротивления приводит к уменьшению полезной механической работы и ее рассеиванию в виде тепла.

Введем следующие обозначения:

$n$  – число подвижных звеньев механизма;

$t$  – время, с;

$\varphi_i$  – угол поворота звена с номером  $i$  относительно стоки, рад;

$v_{si}$  – величина скорости центра масс звена с номером  $i$  относительно стойки, м/с;

$\omega_i$  – угловая скорость звена с номером  $i$  относительно стоки, рад/с;

$m_i$  – масса звена с номером  $i$ , кг;

$J_{si}$  – момент инерции звена с номером  $i$  относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости, параллельно которой движется звено, кг·м<sup>2</sup>;

$J$  – приведенный момент инерции механизма, кг·м<sup>2</sup>;

$J_m$  – момент инерции маховика, кг·м<sup>2</sup>;

$\omega_a, \omega_{min}, \omega_{max}$  – соответственно средняя, минимальная и максимальная угловая скорость ведущего звена в установившемся режиме, рад/с;

$\delta$  – коэффициент неравномерности движения механизма;

$M$  – приведенный момент сил, Н·м;

$T$  – кинетическая энергия механизма, Дж;

## 7.2. Уравнение движения механизма

Уравнение движения плоского механизма с одной степенью свободы, содержащего входное звено в виде кривошипа 1, запишем как математическое выражение теоремы об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n P_i \text{ или } \omega_1 \frac{dT}{d\varphi_1} = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (7.1)$$

где  $P_i$  – мощность внешних и внутренних сил, приложенных к звену  $i$ .

Выражение для кинетической энергии механизма можно отнести к произвольному звену, называемому звеном приведения, например, к кривошипу, являющемуся ведущим звеном,

$$T = \frac{J\omega_1^2}{2}, \quad (7.2)$$

где  $J$  – приведенный момент инерции механизма или момент инерции механизма, приведенный к оси вращения кривошипа:

$$J = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i v_{si}^2}{\omega_1^2} + \frac{J_{si} \omega_i^2}{\omega_1^2} \right).$$

Предполагается, что размеры, массы и моменты инерции звеньев относительно осей, проходящих через центры масс, известны и не зависят от положения механизма.

Для упрощения постановки задачи принято вводить приведенный момент  $M$  пар сил, приложенных к вращающемуся звену приведения, например, к кривошипу:

$$M = \sum_{i=1}^n P_i / \omega_1. \quad (7.3)$$

Уравнение (7.1) с учетом выражений (7.2), (7.3) примет вид

$$J\omega_1 \frac{d\omega_1}{d\varphi_1} + \frac{\omega_1^2}{2} \frac{dJ}{d\varphi_1} = M. \quad (7.4)$$

В уравнении (7.4) неизвестной служит функция угловой скорости  $\omega_1$  от угла поворота  $\varphi_1$  кривошипа. Параметры  $J$  и  $M$  должны быть заданы в виде функций от  $\varphi_1$  и  $\omega_1$ . Приведенный момент сил, кроме этого, может зависеть от углового ускорения кривошипа.

В том случае, когда ведущим звеном и звеном приведения служит ползун, вместо приведенного момента инерции и момента сил вводятся приведенные масса  $m$  и приведенная к центру ползуна сила  $F$ :

$$m = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i v_{si}^2}{v_{s1}^2} + \frac{J_{si} \omega_i^2}{v_{s1}^2} \right);$$

$$F = \sum_{i=1}^n P_i / v_{s1}.$$

### 7.3. Решение уравнения движения

Уравнение (7.4) движения механизма с одной степенью свободы является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для его решения, то есть нахождения угловой скорости кривошипа как функции от угла его поворота  $\omega_1 = \omega_1(\varphi_1)$ , необходимо добавить начальное условие – задать начальный угол  $\varphi_{10}$  поворота и угловую скорость  $\omega_1(\varphi_{10})$  кривошипа.

Закон вращения кривошипа  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$  определяется в аналитическом или табличном виде из равенства

$$t = \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\omega_1(\varphi_1)}.$$

Когда приведенный момент не зависит от угла поворота, например, при исследовании не планетарных зубчатых механизмов, а силы не зависят от угловой скорости звена приведения, уравнение (7.4) может быть решено в интегралах:

$$\omega_1^2 = 2 \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} \frac{M}{J} d\varphi_1 + \omega_1^2(\varphi_{10}).$$

При исследовании рычажных механизмов, в которых приведенный момент инерции зависит от угла поворота кривошипа, уравнение (7.4) может быть решено с любой точностью только в численном виде, например методом Рунге-Кутты.

### 7.4. Установившееся движение

В механизмах с одной степенью свободы принято выделять три вида движения: разбег, установившееся движение и выбег (рис. 7.2).

В режиме разбега

механическая работа внешних и внутренних сил, действующих на

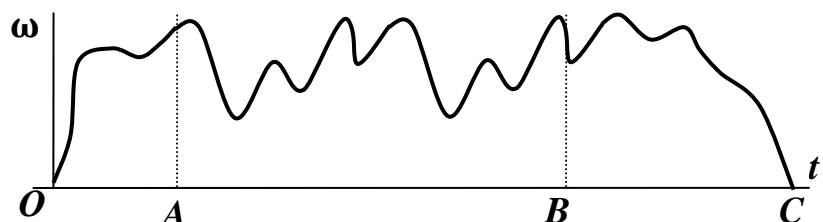


Рис. 7.2. Изменение угловой скорости  $\omega$  звена за время разбега  $OA$ , установившегося движения  $AB$  и выбега  $BC$

звенья механизма, – положительная, в режиме выбега – отрицательная.

*Установившимся называется такое движение механизма, при котором обобщенная скорость является периодической функцией времени.*

Напомним: движение звена периодическое, если положения его точек и направления векторов их скоростей совпадают по истечении некоторого постоянного промежутка времени, называемого периодом.

*Совокупность положений механизма за промежуток времени, равный периоду функции обобщенной скорости при установившемся движении, называется циклом установившегося движения.*

За время цикла координаты и векторы скорости точек механизма не изменяются. Поэтому под циклом установившегося движения также понимается промежуток времени, по истечении которого координаты и векторы скорости точек механизма равны.

При выборе угла поворота кривошипа в качестве обобщенной координаты обобщенной скоростью служит угловая скорость кривошипа. Если в уравнении (7.4) приведенные момент инерции и момент сил зависят только от положения кривошипа  $l$ , то они являются периодическими функциями от угла  $\varphi_1$  с периодом  $2\pi$ .

В соответствии с наблюдениями по истечении некоторого промежутка времени после начала движения кривошипного механизма режим движения становится установившимся. При этом время одного оборота кривошипа становится равным периоду движения. В моменты времени  $t_1, t_2$  установившегося движения с длительностью  $(t_2 - t_1)$ , равной периоду, скорости точек механизма равны. Следовательно, кинетическая энергия  $T_1, T_2$  механизма в указанные моменты времени удовлетворяет равенству

$$T_2 = T_1.$$

В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии механическая работа  $A$  внешних и внутренних сил, приложенных к

точкам механизма, за промежуток времени, равный периоду установившегося движения, равна нулю:

$$T_2 - T_1 = A = 0.$$

#### **7.4.1. Коэффициент неравномерности движения механизма**

Средняя угловая скорость  $\omega_a$  ведущего звена в виде кривошипа определяется как среднее арифметическое его минимальной и максимальной скоростей в установившемся режиме:

$$\omega_a = (\omega_{min} + \omega_{max})/2.$$

*Коэффициентом неравномерности движения в установившемся режиме называется отношение разности максимальной и минимальной угловых скоростей ведущего звена к его средней угловой скорости:*

$$\delta = (\omega_{max} - \omega_{min})/\omega_a.$$

Снижение коэффициента неравномерности механизма – одна из важных технических задач. Так, с увеличением числа цилиндров коэффициент неравномерности двигателя внутреннего сгорания удается снизить до 1/300 и менее.

#### **7.4.2. Назначение маховика и определение его момента инерции**

Эффективным способом, позволяющим уменьшить коэффициент неравномерности движения механизма, служит установка маховика на валу вращения ведущего звена. Маховик конструктивно представляет собой колесо, масса которого распределена на периферии. Добавочная масса ведущего звена называется маховой массой.

Оценим момент инерции маховика 3 механизма прицепного тягового пресс-подборщика (рис. 7.3).

Энергия от вала отбора мощности трактора 1 через карданный механизм 2 и конический редуктор 4 передается всем рабочим органам подборщика, в том числе через кривошип 5 и шатун 6 поршню



ползуна 7, осуществляющему сжатие сено-соломистого материала в камере 8, установленной на раме-стойке 0.

Для обеспечения подбора растений из валков, подачи растений в камеру и обвязки тюков синхронно с поршнем функционируют подборщик, набиватель и обвязочный узел. Привод подборщика осуществляется через ременную передачу 9, приводы граблин набивателя, подающих растения в камеру 8 из камеры 10, и механизмов обвязочного узла 11, – с помощью цепной передачи 12, зубчатых и рычажных механизмов.

При этом вал кривошипа механизма прессования одновременно служит валом привода подборщика и механизмов набивателя, выталкивателя и обвязки. Следовательно, дифференциальное

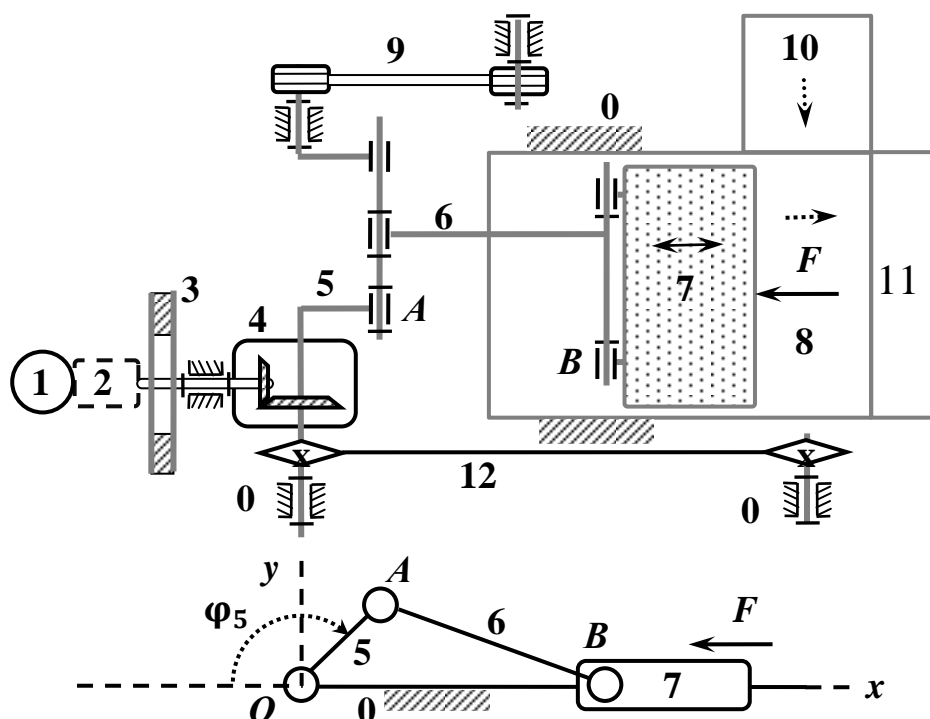


Рис. 7.3. Кривошипно-ползунный механизм тюково-прессподборщика

уравнение движения

кривошипно-ползунного механизма должно учитывать динамические характеристики всех рабочих органов пресс-подборщика.

Если считать ремни нерастяжимыми и исключить их проскальзывание относительно шкивов, то пространственный механизм привода рабочих органов пресс-подборщика имеет одну степень свободы. Это означает, что при составлении дифференциального уравнения движения механизма в качестве ведущего звена и звена приведения можно выбрать кривошип.

Для составления уравнения (7.4) необходимо найти выражения для приведенного момента  $J$  инерции и приведенного момента  $M$  сил.

Пусть  $\varphi_5$  – угол поворота кривошипа, рад;

$l_5, l_6$ , – длины кривошипа и шатуна соответственно, м;

$\omega_1, \omega_5, \omega_6$ , – соответственно угловые скорости вала отбора мощности, кривошипа 5, шатуна 6, рад/с;

$\omega_n, \omega_m$  – соответственно угловые скорости вала отбора мощности при работе двигателя в номинальном режиме и без нагрузки, рад/с;

$u$  – передаточное отношение редуктора 4;

$v_{s6}, v_{s7}$  – величины скорости центра масс шатуна 6 и ползуна 7 соответственно, м/с;

$v$  – скорость движения трактора, м/с;

$m_6, m_7$  – массы шатуна 6 и поршня 7 соответственно, кг;

$J_{s6}$  – момент инерции шатуна относительно центральной оси, кг·м<sup>2</sup>;

$J_5, J_m$  – моменты инерции кривошипа 5 и маховика 3 относительно осей вращения соответственно, кг·м<sup>2</sup>;

$J$  – момент инерции механизма, приведенный к оси вращения кривошипа 5, кг·м<sup>2</sup>;

$q$  – производительность пресс-подборщика, кг/с;

$M_1, M_2$  – приведенные моменты движущих сил и сил сопротивления соответственно, Н·м;

$P$  – эксплуатационная мощность двигателя на валу отбора, Вт;

$c, \alpha$  – экспериментальные коэффициенты свойств растений, Па, м<sup>3</sup>/кг;

$p$  – давление на поршень, Па;

$p_m$  – давление на поршень при выталкивании тюка, Па;

$L, S$  – длина и площадь камеры сжатия соответственно, м, м<sup>2</sup>.

Уравнение (7.4) для механизма пресс-подборщика запишем так:

$$J\omega_5 \frac{d\omega_5}{d\varphi_5} + \frac{\omega_5^2}{2} \frac{dJ}{d\varphi_5} = M_1 + M_2. \quad (7.5)$$

По определению,

$$J = \frac{J_m \omega_1^2}{\omega_5^2} + J_5 + \frac{m_6 v_{s6}^2}{\omega_5^2} + \frac{J_{s6} \omega_6^2}{\omega_5^2} + \frac{m_7 v_{s7}^2}{\omega_5^2}.$$

Выразив координаты центров масс шатуна и ползуна и угол поворота шатуна как функции угла  $\varphi_5$  с помощью метода Ю. В. Морочкина, изложенного в главе 3, найдем выражения для  $v_{s6}$ ,  $\omega_6$ ,  $v_{s7}$ :

$$\omega_6 = \omega_5 l_5 \cos \varphi_5 / \sqrt{l_6^2 - l_5^2 \sin^2 \varphi_5};$$

$$v_{s6} = \omega_5 l_5 \sin \varphi_5 (1 - 0,5 \cdot u_6);$$

$$v_{s7} = \omega_5 l_5 \sin \varphi_5 (1 - u_6).$$

Подставляя полученные функции от угла  $\varphi_5$  в выражение для  $J$ , представим его так:

$$J = J_m u^2 + J_5 + m_6 a_6^2 + J_{s6} u_6^2 + m_7 a_7^2, \quad (7.6)$$

где  $u_6 = l_5 \cos \varphi_5 / \sqrt{l_6^2 - l_5^2 \sin^2 \varphi_5}$ ;

$$a_6 = l_5 \sin \varphi_5 (1 - 0,5 \cdot u_6);$$

$$a_7 = l_5 \sin \varphi_5 (1 - u_6).$$

Приведенный момент пары сил равен алгебраической сумме приведенных моментов пары движущих сил и пары сил сопротивления. Приведенный момент пары сил сопротивления складывается из моментов сил полезного сопротивления и сил вредного сопротивления. К полезным относят силы сжатия растений в прессовальной камере, действующие на поршень, силы, действующие на подборщик при подборе растений из валков, и другие силы. К силам вредного сопротивления относят силы трения поршня со стенками камеры, силы трения в кинематических парах кривошипно-ползунного механизма и передачах и другие.

Будем считать, что момент  $\mathfrak{M}$  пары движущих сил на валу отбора мощности связан с угловой скоростью  $\omega_1$  зависимостью

$$\mathfrak{M} = a - b \omega_1,$$

где  $a$ ,  $b$  – постоянные коэффициенты, которые можно оценить через мощность  $P$  двигателя на валу отбора, номинальную угловую ско-

рость  $\omega_n$  и максимальную угловую скорость  $\omega_m$  двигателя на холостом ходу:

$$\mathfrak{M} = \frac{P(\omega_m - \omega_1)}{\omega_n(\omega_m - \omega_n)}.$$

Поскольку

$$\mathfrak{M} \cdot \omega_1 = M_1 \cdot \omega_5$$

и

$$\omega_1 = u \cdot \omega_5,$$

то момент  $M_1$  пары движущих сил, приведенный к валу кривошипа, определяется выражением

$$M_1 = \frac{P \cdot u \cdot (\omega_m - u \omega_5)}{\omega_n \cdot (\omega_m - \omega_n)}. \quad (7.7)$$

В данном упрощенном примере будем считать, что потребителями энергии служат подборщик и механизм прессования.

Затраты энергии примем равными сумме кинетической энергии растений, поднятых из валка подборщиком, работы силы  $F$  сжатия растений в камере 8 и работы выталкивания растений из камеры:

$$M_2 \omega_5 = -\frac{qv^2}{2} - Fv_{s7},$$

где  $F = pS$ .

Выталкивание порции сжатого сена поршнем из камеры сжатия открытого типа происходит при достижении плотности материала предельного значения, а давления – значения  $p_m$ , достаточного для преодоления трения сена и тюков со стенками камер.

Предельная плотность тюка может регулироваться поджатием продольных балок.

Для определения выражения для силы сжатия необходимо установить уравнение состояния, то есть зависимость давления  $p$  сжатия от плотности материала в камере. Воспользуемся уравнением состояния, полученным В.И. Особовым<sup>1</sup>. Тогда последнее равенство с учетом выражения для  $a_7$  в формулах (7.6) можно представить в виде

---

<sup>1</sup>Особов В. И. Механическая технология кормов. М.: Колос, 2009.

$$M_2 = -\frac{qv^2}{2\omega_5} - pSa_7, \quad (7.8)$$

где  $\Delta$  – смещение поршня из крайнего положения

$$\Delta = l_5(1 - \cos \varphi_5) - l_6 + \sqrt{l_6^2 - l_5^2 \sin^2 \varphi_5};$$

$$\rho_0 = \frac{q}{LS} \frac{2\pi}{\omega_5};$$

$$p = \begin{cases} c \cdot \exp\left(\alpha \rho_0 \frac{\Delta}{L-\Delta} - 1\right), & \text{если } 0 \leq \varphi_5 < \pi \\ 0, & \text{если } \pi \leq \varphi_5 < 2\pi \\ p_m, & \text{если } c \cdot \exp\left(\alpha \rho_0 \frac{\Delta}{L-\Delta} - 1\right) > p_m. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение (7.5) выражения (7.6) для  $J$ , (7.7) для  $M_1$  и (7.8) для  $M_2$ , получим дифференциальное уравнение с неизвестной функцией угловой скорости кривошипа от угла поворота. Для его решения необходимо задать исходные данные (табл. 7.1).

**Таблица 7.1. Исходные данные**

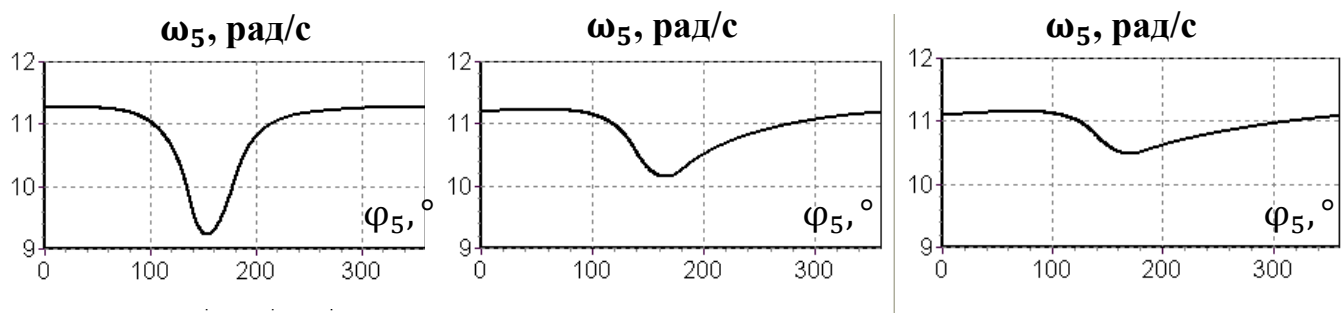
$l_5, \text{ м}$	$l_6, \text{ м}$	$L, \text{ м}$	$S, \text{ м}^2$	$\omega_n, \text{ рад/с}$	$\omega_m, \text{ рад/с}$	$v, \text{ м/с}$	$c, \text{ МПа}$	$u$
0,25	0,5	0,5	0,17	56,6	69,1	2	0,35	6,1
$m_6, \text{ кг}$	$m_7, \text{ кг}$	$p_m, \text{ МПа}$	$P, \text{ кВт}$	$J_5, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$J_{s6}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$q, \text{ кг/с}$	$a, \text{ м}^3/\text{кг}$	
4	8	0,16	40	0,2	0,2	3	$4,0 \times 10^{-3}$	

В установившемся режиме угловая скорость кривошипа в начальном положении, когда угол  $\varphi_5$  поворота равен нулю, неизвестна. Поэтому необходимо найти начальное условие  $\omega_5(0)$ , то есть значение угловой скорости кривошипа в начальном положении. Для этого среди решений  $\omega_5(\varphi_5)$  уравнения (7.5) с разными начальными условиями  $\omega_5(0)$  необходимо найти такое, в котором угловые скорости кривошипа в начале и в конце цикла равны:

$$\omega_5(0) = \omega_5(2\pi).$$

Решение уравнения (7.5) получено численным методом Рунге–Кутты. Расчеты показали, что в начальном положении кривошипа, когда сопротивление движению поршня отсутствует, начальная угловая скорость равна максимальной скорости вала отбора мощности с

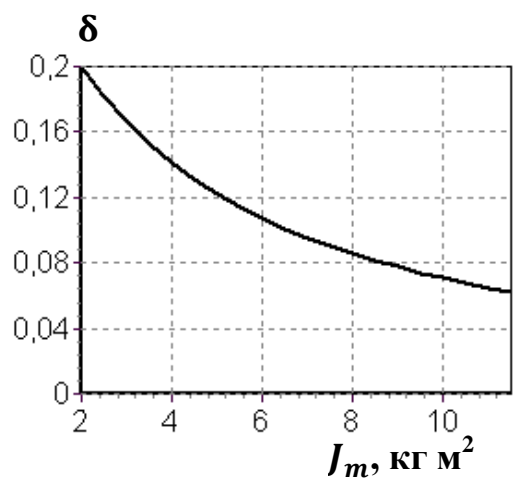
учетом передаточного отношения и полезного сопротивления движению подборщика (рисунок 7.4).



**Рис. 7.4.** Изменение угловой скорости кривошипа за период (слева направо момент инерции маховика равен  $2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $7 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  и  $12 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ )

В моменты максимального сжатия растений, когда давление равно  $0,16 \text{ МПа}$  и происходит выталкивание растений из камеры, плотность материала достигает  $120 \dots 130 \text{ кг/м}^3$ , а угол поворота кривошипа превышает  $150^\circ$ .

Задавая в исходных данных разные значения момента инерции маховика, из решения уравнения (7.5) определим экстремумы угловой скорости кривошипа и зависимость коэффициента неравномерности от момента инерции с любой точностью. С увеличением момента инерции маховика от 2 до  $12 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , то есть в шесть раз, коэффициент неравномерности данного механизма уменьшается с 0,2 до 0,06, то есть в 3 раза (рис. 7.5).



**Рис. 7.5.** График функции  $\delta = \delta(J_m)$

Можно констатировать, что данный расчет маховика произведен с помощью математической модели механизма пресс-подборщика, пригодной для исследования механизма без ограничений на функции приведенного момента инерции, движущих сил и сил сопротивления.

В следующем параграфе рассматривается приближенный графоаналитический метод расчета маховика, пригодный только для разового расчета тогда, когда движущие силы и силы сопротивления постоянны или зависят от положения механизма. Графоаналитический метод не применим для расчета маховика рассмотренного пресс-подборщика, так как моменты движущих сил и сил сопротивления зависят от угловой скорости ведущего звена.

### 7.4.3. Расчет маховика по диаграмме Виттенбауэра

Рассмотрим графоаналитический способ расчета маховика пресс-подборщика с приводом от электродвигателя или теплового двигателя, в котором момент  $M_1$  движущих сил можно считать постоянным, а при расчете начальной плотности растений в камере сжатия изменением угловой скорости вращения кривошипа пренебречь.

Запишем выражение (7.2) кинетической энергии механизма пресс-подборщика:

$$T = \frac{J\omega_5^2}{2}, \quad (7.9)$$

где  $J$ ,  $T$  – приведенный момент и кинетическая энергия механизма соответственно.

На плоскость с координатными осями  $OJ$ ,  $OT$  и полярной осью  $OJ$  нанесем точку  $A$  с координатами  $J$ ,  $T$ , соответствующими некоторому положению механизма в установившемся режиме (рис. 7.6).

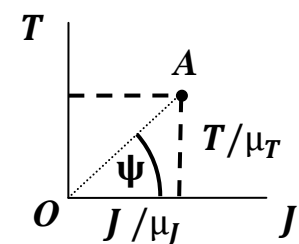


Рис. 7.6. Полярный угол  $\psi$

Пусть  $\mu_J$ ,  $\mu_T$  – линейные масштабы величин  $J$ ,  $T$  с единицами измерения  $(\text{кг}\cdot\text{м}^2)/\text{мм}$  и  $\text{Дж}/\text{мм}$ .

В соответствии с формулой (7.9) полярный угол  $\psi$  точки  $A$  определяет угловую скорость кривошипа в данном положении механизма:

$$\omega_5^2 = 2 \frac{T}{J} = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \text{tg } \psi. \quad (7.10)$$

В том случае, когда в установившемся режиме величины  $J$ ,  $T$  не изменяются или зависят только от угла поворота кривошипа, на рисунке 7.5 можно изобразить точки  $A$  во всех положениях механизма, когда угол поворота кривошипа изменяется от  $0$  до  $2\pi$  радиан.

Замкнутая линия на плоскости с координатными осями  $OJ$ ,  $OT$ , служащая геометрическим местом точек, координаты которых равны приведенному моменту инерции и кинетической энергии во всех положениях механизма в установившемся режиме, называется диаграммой Виттенбауэра (рис. 7.7).

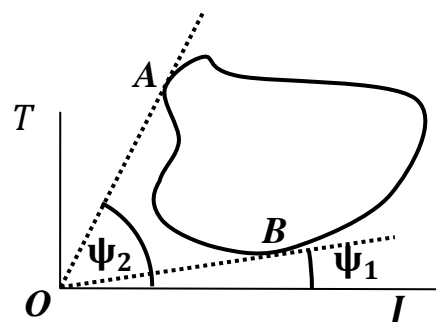


Рис. 7.7. Диаграмма Виттенбауэра

Наименьший  $\psi_1$  и наибольший  $\psi_2$  углы, образованные осью абсцисс и прямыми, проведенными через начало координат и точки касания  $A$ ,  $B$  диаграммы Виттенбауэра, позволяют оценить экстремумы угловой скорости кривошипа по формуле (7.10).

Диаграмма Виттенбауэра строится по точкам, представляя плавную кривую, соединяющую их. Чтобы построить 24 точки, надо найти величины  $J$ ,  $T$  в 24 положениях механизма, например с шагом  $15^\circ$  по углу поворота кривошипа.

Для определения приведенного момента  $J$  без маховика необходимо построить планы скоростей пальца кривошипа, центров шатуна и ползуна в каждом положении при любой заданной угловой скорости  $\omega_5$  кривошипа (рис. 7.8). В конкретном положении механизма величина  $J$  не зависит от угловой скорости кривошипа и вычисляется по формуле (7.6) без учета маховика:

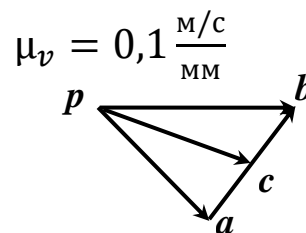


Рис. 7.8. План скоростей (положение на рис. 7.3)

$$J = J_5 + m_6 a_6^2 + J_{S6} u_6^2 + m_7 a_7^2, \quad (7.11)$$

где  $a_6 = \mu_v \frac{pc}{\omega_5} = \frac{l_5 \cdot \omega_5 \cdot pc}{pa \cdot \omega_5} = \frac{l_5 \cdot pc}{pa}$ ;

$$u_6 = \frac{\mu_v \cdot ab}{l_6} \frac{1}{\omega_5} = \frac{l_5 \cdot \omega_5 \cdot ab}{pa \cdot l_6} \frac{1}{\omega_5} = \frac{l_5 \cdot ab}{pa \cdot l_6}$$



$$a_7 = \frac{l_5 \cdot pb}{pa};$$

$pa$ ,  $pc$ ,  $pb$  – длины отрезков на плане, изображающие скорости точек пальца кривошипа, центра масс шатуна и центра ползуна соответственно.

Для расчета кинетической энергии  $T$  в конкретном положении механизма при повороте кривошипа на угол  $\varphi_5$  можно воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \int_0^{\varphi_5} (M_1 + M_2) d\varphi_5$$

или, полагая, что движущий момент  $M_1$  не изменяется,

$$T = T_0 + M_1\varphi_5 + \int_0^{\varphi_5} M_2 d\varphi_5 \quad (7.12)$$

где  $T_0$  – кинетическая энергия механизма в начальном положении, когда  $\varphi_5 = 0^\circ$ .

В формуле (7.12) константы  $T_0$ ,  $M_1$  не известны, а момент сопротивления  $M_2$  определяется выражением (7.8), в котором

$$\rho_0 = \frac{q}{LS} \frac{2\pi u}{\omega_m} = 20 \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

Так как в начальном положении материал не сжимается, то можно предположить, что угловая скорость вращения кривошипа максимальна и

$$T_0 = \frac{1}{2} J(0) \frac{\omega_m^2}{u^2}, \quad (7.13)$$

где  $J(0)$  – приведенный момент инерции в начальном положении.

Следует отметить, что графоаналитическим способом начальную скорость кривошипа в установившемся режиме найти невозможно. Поэтому константа  $T_0$  по формуле (7.13) оценивается приблизительно с ошибкой. За цикл установившегося движения, когда кривошип совершает один оборот, справедливо равенство

$$T - T_0 = 0;$$

и из формулы (7.11) с учетом (7.8) можно найти  $M_1$ :

$$M_1 2\pi + \int_0^{2\pi} M_2 d\varphi_5 = 0$$

или

$$M_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_2 d\varphi_5. \quad (7.14)$$

Определенный интеграл в выражении (7.14) можно вычислять численными методами, способом графического интегрирования или как площадь под кривой подынтегральной функции  $M_2(\varphi_5)$  с учетом масштабов (рис. 7.9). Для определения кинетической энергии  $T$  в избранных положениях механизма следует воспользоваться формулой (7.12).

На рисунке 7.10 показана диаграмма Виттенбауэра механизма пресс-подборщика без маховика с началом  $O$  координат.

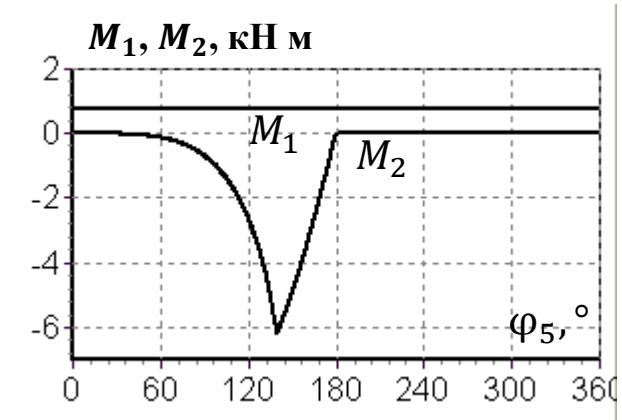


Рис. 7.9. Момент  $M_1$  движущих сил и  $M_2$  сил сопротивления

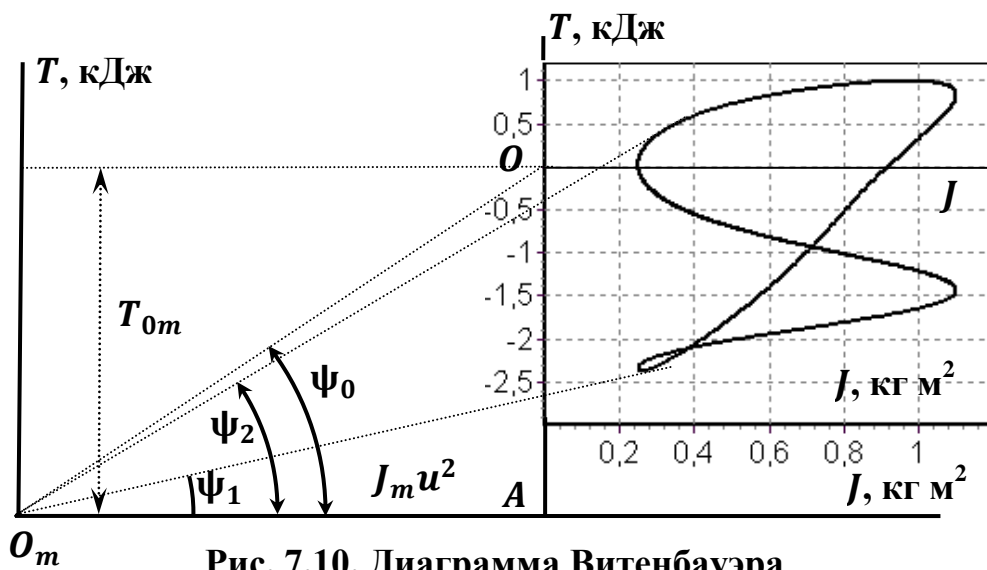


Рис. 7.10. Диаграмма Виттенбауэра

Чтобы найти коэффициент неравномерности механизма с маховиком, в равенстве (7.11) необходимо учесть приведенный момент инерции  $J_m u^2$  маховика, а в равенстве (7.12) – кинетическую энергию  $T_{0m}$  маховика в начальном положении механизма.

При заданном моменте инерции  $J_m$  кинетическую энергию маховика в начальном положении механизма можно определить только приближенно, так как угловая скорость вращения кривошипа неизвестна. Примем ее равной максимальной и оценим по формуле (7.13), используемой для оценки кинетической энергии механизма в начальном положении,

$$T_{0m} = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2. \quad (7.15)$$

Для построения диаграммы Виттенбауэра механизма с маховиком достаточно начало  $O$  координат диаграммы Виттенбауэра без маховика переместить в точку  $O_m$ , то есть вниз вдоль оси  $OT$  на расстояние  $T_{0m}/\mu_T$  и влево вдоль оси  $OJ$  на расстояние  $J_m u^2/\mu_J$  с учетом масштабов  $\mu_T$  и  $\mu_J$  величин  $T$  и  $J$ . Так как между величинами  $J_m$  и  $T_{0m}$  имеет место соотношение (7.15), то точка  $O_m$  должна располагаться на прямой  $OO_m$ , образующей с осью  $OJ$  угол  $\psi_0$ , определяемый равенством

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{\mu_J T_{0m}}{\mu_T J_m u^2}.$$

Измеряя углы  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , образуемые касательными к диаграмме Виттенбауэра, проходящими через начало  $O_m$ , найдем экстремальные угловые скорости кривошипа и коэффициент неравномерности механизма с маховиком:

$$\omega_{min} = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_1}; \quad \omega_{max} = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_2};$$

$$\delta = 2 \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{max} + \omega_{min}}.$$

Необходимо отметить, что к недостаткам невозможности оценить ошибки расчета маховика по диаграмме Виттенбауэра добавляются практические трудности графических построений. Так, в случае с пресс-подборщиком при исследовании маховика, осевой момент инерции которого равен  $2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , а приведенный момент инерции превышает  $72 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , расстояние  $O_m A$  от точки  $O_m$  до оси  $OT$  превышает ширину диаграммы более чем в 70 раз, а расстояние  $OA$  от точки  $O_m$  до оси  $OJ$  превышает высоту диаграммы более чем в 45 раз.

## 8. УРАВНОВЕШИВАНИЕ И БАЛАНСИРОВКА

### 8.1. Основные определения и задача уравнивания

Вопросы уравнивания механизмов приобретают особую значимость при исследовании быстроходных машин. Как показано в предыдущей главе, на звенья, помимо веса, действуют переменные по величине и направлению динамические нагрузки, обусловленные силами инерции. Эти нагрузки, передаваемые на корпус машины и фундамент, вызывают вибрацию и нарушают связь звеньев в кинематических парах, в том числе со стойкой.

В данной главе изучаются звенья, совершающие вращательное движение вокруг неподвижной оси.

*Вращающееся звено механизма, удерживаемое своими несущими поверхностями в опорах, называется ротором.*

Силы инерции, обусловленные вращением ротора вокруг неподвижной оси, называются центробежными. Центробежная сила  $\vec{F}_u$  инерции точечного груза 1 массы  $m$ , укрепленного на роторе на расстоянии  $e$  от оси вращения, приложена к грузу и направлена от оси вращения ротора по линии действия, проходящей через ось в плоскости вращения (рис. 8.1, *a*). Центробежная сила инерции элемента массы  $m$  ротора приложена к центру  $S$  масс элемента на расстоянии  $e$  от оси вращения ротора (рис. 8.1, *b*).

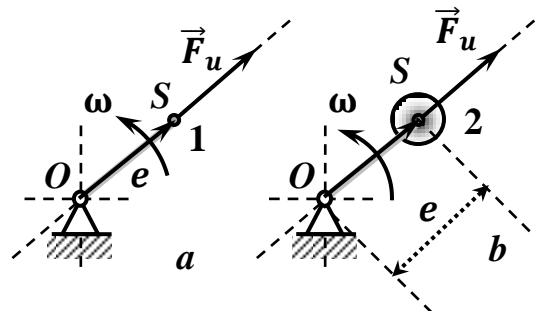


Рис. 8.1. Точечный груз 1 (*a*) и центр масс  $S$  тела 2 (*b*)

Если  $\omega$  – угловая скорость вращения ротора, то величина  $F_u$  силы инерции груза и элемента ротора определяется по формуле

$$F_u = m\omega^2 e. \quad (8.1)$$

Частота вращения валов центрифуг, дробилок, турбин, электромоторов и двигателей внутреннего сгорания превышает 1000 рад/с. При установке груза со смещением 0,1 мм от оси ротора, вращающе-

гося с такой угловой скоростью, сила инерции, «передаваемая» на опоры ротора, превышает вес груза в 10 раз.

*Задачей уравнивания ротора является обеспечение постоянства реакций его опор по величине и направлению.*

При неконтролируемой внешней нагрузке эту задачу решить сложно. Поэтому первоначально решается задача устранения динамических реакций, обусловленных силами инерции.

*Под задачей уравнивания ротора будем понимать устранение опорных реакций ротора, вызванных силами инерции.*

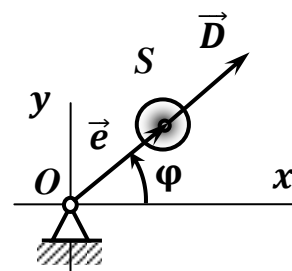
Задача уравнивания решается путем балансировки ротора с помощью грузов, устанавливаемых в роторе и называемых противовесами.

*Под неуравновешенной массой ротора будем понимать неуравновешенный элемент ротора, который можно заменить материальной точкой, масса которой равна массе элемента и расположенной в центре масс элемента.*

*Под корректирующей массой  $m$  будем понимать противовес массы  $m$ .*

Ротор состоит из совокупности элементов.

*Эксцентриситетом  $\vec{e}$  элемента ротора или противовеса называется радиус-вектор центра масс элемента или соответственно противовеса с началом  $O$  на оси вращения ротора в плоскости  $Oxy$ , перпендикулярной оси (рис. 8.2).*



**Рис. 8.2.** Эксцентриситет  $\vec{e}$  элемента

*Дисбалансом элемента ротора называется вектор  $\vec{D}$ , равный произведению массы на эксцентриситет элемента:*

$$\vec{D} = m\vec{e}. \quad (8.2)$$

Величина вектора дисбаланса равна произведению массы элемента на расстояние от центра масс элемента до оси вращения ротора. Единица измерения дисбаланса элемента – [кг·м] или [Г·мм].

Углом дисбаланса элемента называется полярный угол  $\varphi$  центра масс элемента в полярной системе координат с полярной осью  $Ox$  (рис. 8.2).

Вектор дисбаланса элемента характеризуется величиной и углом дисбаланса в радианах или градусах. Он расположен в плоскости, перпендикулярной оси вращения ротора, и имеет начало в центре масс элемента.

Дисбаланс противовеса определяется аналогично.

Из равенств (8.1), (8.2) следует, что вектор центробежной силы инерции элемента ротора прямо пропорционален дисбалансу элемента:

$$\vec{F}_u = \omega^2 \vec{D}. \quad (8.3)$$

Момент  $\vec{M}_O(\vec{F}_u)$  центробежной силы инерции элемента ротора относительно начала  $O$  координат на оси вращения  $Oz$  ротора определяют по формуле [2]

$$\vec{M}_O(\vec{F}_u) = \vec{z} \times \vec{F}_u$$

или

$$\vec{M}_O(\vec{F}_u) = \omega^2 \vec{z} \times \vec{D},$$

где  $\vec{z}$  – вектор на оси  $Oz$ , началом которого служит точка  $O$ , а концом – начало вектора эксцентриситета элемента (рис. 8.3).

Вектор момента находится в плоскости, перпендикулярной оси вращения ротора, и перпендикулярен вектору  $\vec{D}$  дисбаланса элемента. Если его повернуть в плоскости вращения ротора на  $90^\circ$  против

хода вращения при положительной координате  $z$  и по ходу при отрицательной координате  $z$  вектора  $\vec{z}$ , то получим новый вектор  $\vec{M}_O(\vec{D})$ , равный по величине вектору  $\vec{M}_O(\vec{F}_u)$  и сонаправленный с вектором  $\vec{D}$ ,

$$\vec{M}_O(\vec{D}) = \omega^2 z \cdot \vec{D}, \quad (8.4)$$

где  $z$  – проекция вектора  $\vec{z}$  на ось вращения  $Oz$  ротора.

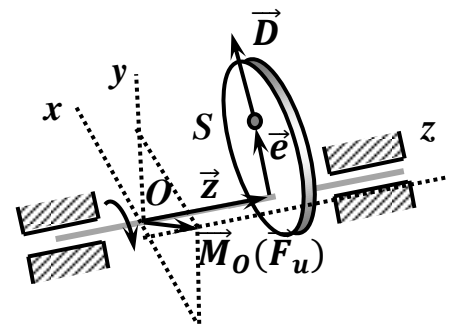


Рис. 8.3. Вектор  $\vec{z}$

## 8.2. Уравновешивание вращающегося звена

### 8.2.1. Основные обозначения

Введем следующие обозначения:

$Oxyz$  – правая система декартовых координат с началом на опоре ротора и осью  $Oz$ , направленной вдоль оси вращения ротора;

$m_0$  – масса ротора, кг;

$n$  – число неуравновешенных элементов ротора;

$N$  – число противовесов;

$m_i$  – масса  $i$ -го элемента ротора ( $i = 1..n$ ), кг или г;

$m_{kj}$  – масса  $j$ -го противовеса ( $j = 1..N$ ), кг или г;

$\varphi_i$  – полярный угол  $i$ -го элемента ротора ( $i = 1..n$ ), рад;

$\varphi_{kj}$  – полярный угол  $j$ -го противовеса ( $j = 1..N$ ), рад;

$\vec{e}_i, \vec{e}_{kj}$  – эксцентриситет  $i$ -го элемента ротора и  $j$ -го противовеса соответственно;

$z_i$  – проекция центра масс  $i$ -го элемента ротора на ось  $Oz$ ;

$z_{kj}$  – проекция центра масс  $j$ -го противовеса на ось  $Oz$ ;

$\vec{e}_{CT}$  – эксцентриситет центра масс ротора;

$\omega$  – угловая скорость вращения ротора, рад/с;

$\vec{D}_i, \vec{D}_{kj}$  – дисбаланс  $i$ -го элемента ротора и  $j$ -го противовеса соответственно;

$\vec{D}_{CT}$  – главный вектор дисбалансов ротора;

$\vec{R}_u$  – главный вектор сил инерции ротора;

$\vec{M}_u$  – главный момент сил инерции ротора относительно начала координат  $O$ .

### 8.2.2. Условия уравновешивания

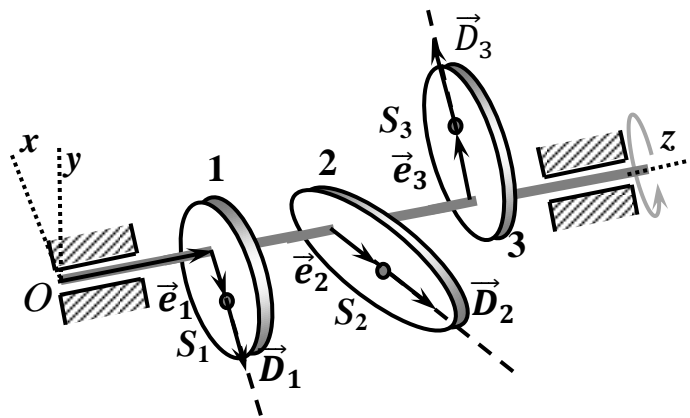
В соответствии с принятыми обозначениями для устранения динамических реакций опор ротора необходимо и достаточно выполнение двух векторных равенств:

$$\begin{cases} \vec{R}_u = \vec{0}; \\ \vec{M}_u = \vec{0}. \end{cases} \quad (8.5)$$

Ротор называется уравновешенным, если главный вектор сил инерции ротора и главный момент сил инерции ротора относительно произвольной точки сохраняются нулевыми.

Уравновешивание ротора, при котором только главный вектор сил инерции ротора сохраняется нулевым, называется статическим уравновешиванием.

Уравновешивание ротора, при котором только главный момент сил инерции ротора сохраняется нулевым, называется динамическим уравновешиванием.



Рассмотрим двухопорный ротор массы  $m_0$ .

Пусть  $n$  – число элементов;  $m_i$  и  $\vec{e}_i$  – масса и эксцентриситет элемента с номером  $i$  ( $i = 1..n$ ) (рис. 8.4).

**Рис. 8.4. Ротор на двух опорах с тремя неуравновешенными элементами**

Учитывая равенство (8.3), выражение для главного вектора сил инерции ротора запишем так:

$$\vec{R}_u = \omega^2 \sum_{i=1}^n \vec{D}_i \text{ или } \vec{R}_u = \omega^2 \vec{D}_{CT}, \quad (8.6)$$

где  $\vec{D}_{CT} = \sum_{i=1}^n \vec{D}_i$ .

Эксцентриситет центра масс ротора определяется по формуле

$$\vec{e}_{CT} = \frac{1}{m_0} \vec{D}_{CT} \text{ или } \vec{e}_{CT} = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^n \vec{D}_i.$$

Из равенств (8.5), (8.6) следует, что для статического уравновешивания ротора векторная сумма дисбалансов его элементов, равная главному вектору дисбалансов, должна равняться нулю:

$$\sum_{i=1}^n \vec{D}_i = \vec{0}. \quad (8.7)$$



Равенство (8.7) служит условием статической уравновешенности ротора. Из него следует, что ротор статически уравновешен, если его центр масс находится на оси вращения ( $\vec{e}_{cT} = \vec{0}$ ).

Главный момент сил инерции и главный момент  $\vec{M}_D$  дисбалансов ротора относительно начала координат связаны соотношением

$$\vec{M}_u = \omega^2 \vec{M}_D.$$

Наряду с вектором  $\vec{M}_u$  рассмотрим вектор  $\vec{M}_{u1}$ , определяемый такой формулой:

$$\vec{M}_{u1} = \omega^2 \sum_{i=1}^n (z_i \vec{D}_i). \quad (8.8)$$

В соответствии с формулой (8.4) величины векторов  $\vec{M}_{u1}$  и  $\vec{M}_u$  равны, векторы перпендикулярны оси вращения ротора и перпендикулярны между собой. Это означает, что из равенства нулю вектора  $\vec{M}_{u1}$  следует равенство нулю вектора  $\vec{M}_u$ . Таким образом, ротор динамически уравновешен, если  $\vec{M}_{u1} = \vec{0}$ , или, учитывая выражение (8.8),

$$\sum_{i=1}^n (z_i \vec{D}_i) = \vec{0}. \quad (8.9)$$

Равенство (8.9) служит условием динамической уравновешенности ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

Если в качестве центра моментов выбрать не начало координат, а точку  $A$  на оси вращения ротора с координатой  $z_{k1}$ , то условие динамической уравновешенности примет вид

$$\sum_{i=1}^n [(z_i - z_{k1}) \vec{D}_i] = \vec{0}. \quad (8.10)$$

Два векторных равенства (8.7) и (8.9) или (8.7) и (8.10) служат условиями полной уравновешенности ротора.

Так как величины векторов  $\vec{M}_u$  и  $\vec{M}_{u1}$  равны, то величину  $M_D$  главного момента дисбалансов можно рассчитать по формуле

$$M_D = \frac{M_{u1}}{\omega^2}.$$

В системе координат  $Oxyz$  с осью вращения  $Oz$  из равенства (8.8) следует, что

$$\frac{M_{u1}}{\omega^2} = \sqrt{[\sum_{i=1}^n (m_i z_i e_{ix})]^2 + [\sum_{i=1}^n (m_i z_i e_{iy})]^2},$$

где  $e_{ix}, e_{iy}$  – проекции или координаты эксцентриситета  $i$ -го элемента соответственно по оси  $Ox$  и  $Oy$  ( $i = 1..n$ ).

Согласно определениям

$$J_{xz} = \sum_{i=1}^n (m_i z_i e_{ix}); J_{yz} = \sum_{i=1}^n (m_i z_i e_{iy}),$$

где  $J_{xz}, J_{yz}$  – центробежные моменты инерции ротора.

Следовательно,

$$M_D = \frac{M_{u1}}{\omega^2} = \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}, \quad (8.11)$$

Как следует из равенств (8.11), при динамическом уравновешивании центробежные моменты инерции ротора равны нулю, то есть ось вращения  $Oz$  совпадает с главной осью инерции ротора.

Главная ось инерции, на которой находится центр масс тела, называется главной центральной осью инерции. При динамическом уравновешивании ось вращения ротора совпадает с главной центральной осью инерции.

### 8.2.3. Расчет противовесов аналитическим способом

Пусть ротор имеет произвольное число  $n$  неуравновешенных элементов, координаты центров масс которых известны, то есть известны координаты центров масс элементов по оси вращения  $Oz$ , полярные углы и эксцентриситеты элементов в некотором положении ротора.

Докажем, что для уравновешивания ротора достаточно установить на нем два противовеса ( $N = 2$ ); при этом неравные координаты  $z_{k1}, z_{k2}$  их центров масс по оси  $Oz$  задают произвольно.

Представим два векторных уравнения (8.7), (8.10) шестью алгебраическими уравнениями проекций векторов на оси координат. Так как проекции дисбалансов элементов на ось  $Oz$  равны нулю, и уравнения для проекций на ось  $Oz$  удовлетворяются тождественно, то из шести уравнений остаются четыре:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (D_i \cos \varphi_i) + D_{k1} \cos \varphi_{k1} + D_{k2} \cos \varphi_{k2} = 0 \\ \sum_{i=1}^n (D_i \sin \varphi_i) + D_{k1} \sin \varphi_{k1} + D_{k2} \sin \varphi_{k2} = 0 \\ \sum_{i=1}^n [(z_i - z_{k1}) D_i \cos \varphi_i] + (z_{k2} - z_{k1}) D_{k2} \cos \varphi_{k2} = 0 \\ \sum_{i=1}^n [(z_i - z_{k1}) D_i \sin \varphi_i] + (z_{k2} - z_{k1}) D_{k2} \sin \varphi_{k2} = 0. \end{cases} \quad (8.12)$$

Четыре уравнения (8.12) содержат шесть неизвестных: величины  $D_{k1}$ ,  $D_{k2}$  дисбалансов двух противовесов, полярные углы  $\varphi_{k1}$ ,  $\varphi_{k2}$  противовесов и координаты  $z_{k1}$ ,  $z_{k2}$  центров масс противовесов по оси  $Oz$ . Они доказывают, что при расположении центров масс двух противовесов в двух наперед заданных плоскостях, перпендикулярных оси вращения ротора, то есть при заданных величинах  $z_{k1}$ ,  $z_{k2}$  ротор уравновешен, если четыре неизвестные величины  $D_{k1}$ ,  $D_{k2}$ ,  $\varphi_{k1}$ ,  $\varphi_{k2}$  удовлетворяют четырем уравнениям (8.12).

Две плоскости, в которых движутся центры масс противовесов, называют плоскостями коррекции. При уравновешивании ротора плоскости коррекции назначают.

Из последних двух уравнений системы (8.12) найдем  $D_{k2}$  и  $\varphi_{k2}$ :

$$D_{k2} = \frac{\sqrt{u_2^2 + w_2^2}}{z_{k2} - z_{k1}}; \varphi_{k2} = \arctg \frac{w_2}{u_2} + \begin{cases} 0, & \text{если } u_2 < 0, w_2 < 0 \\ \pi, & \text{если } w_2 > 0 \\ 2\pi, & \text{если } u_2 > 0, w_2 < 0 \end{cases}, \quad (8.13)$$

где

$$u_2 = \sum_{i=1}^n [(z_i - z_{k1}) D_i \cos \varphi_i]; w_2 = \sum_{i=1}^n [(z_i - z_{k1}) D_i \sin \varphi_i]. \quad (8.14)$$

Если  $u_2 = 0$ ,  $w_2 \neq 0$ , то  $\varphi_{k2} = \pi/2$ . Если  $u_2 \neq 0$ ,  $w_2 = 0$ , то  $\varphi_{k2} = 0$ .

После подстановки  $D_{k2}$ ,  $\varphi_{k2}$  в первые два уравнения системы (8.12) найдем выражения для  $D_{k1}$ ,  $\varphi_{k1}$ :

$$D_{k1} = \sqrt{u_1^2 + w_1^2}; \varphi_{k1} = \arctg \frac{w_1}{u_1} + \begin{cases} 0, & \text{если } u_1 < 0, w_1 < 0 \\ \pi, & \text{если } w_1 > 0 \\ 2\pi, & \text{если } u_1 > 0, w_1 < 0 \end{cases}, \quad (8.15)$$

где

$$u_1 = \sum_{i=1}^n (D_i \cos \varphi_i) + D_{k2} \cos \varphi_{k2}; w_1 = \sum_{i=1}^n (D_i \sin \varphi_i) + D_{k2} \sin \varphi_{k2}. \quad (8.16)$$

Если  $u_1 = 0$ ,  $w_1 \neq 0$ , то  $\varphi_{k1} = \pi/2$ . Если  $u_1 \neq 0$ ,  $w_1 = 0$ , то  $\varphi_{k1} = 0$ .

Массы и эксцентриситеты противовесов назначают из конструктивных соображений так, чтобы вписаться в размеры ротора и удовлетворить равенствам

$$m_{k1} e_{k1} = D_{k1}, m_{k2} e_{k2} = D_{k2}. \quad (8.17)$$

Маломерные вдоль оси вращения роторы, например, маховики, шкивы расположены практически в одной плоскости вращения и, следовательно,  $z_i - z_{k1} = 0$ . Тогда два последних уравнения системы (8.12) удовлетворяются тождественно, и для уравнивания ротора достаточно удовлетворить двум первым уравнениям, то есть достаточно уравновесить ротор статически.

Запишем алгоритм расчета противовесов аналитическим способом.

1. Задаем исходные данные:  $n$ ;  $m_i$ ,  $e_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $z_i$  ( $i = 1..n$ );  $z_{k1}$ ;  $z_{k2}$ ;  $e_{k1}$ ;  $e_{k2}$ .
2. Вычисляем  $u_2$ ,  $w_2$  по формулам (8.14).
3. Определяем величину  $D_{k2}$  дисбаланса второго противовеса и полярный угол  $\varphi_{k2}$  его центра масс по формулам (8.13).
4. Вычисляем  $u_1$ ,  $w_1$  по формулам (8.16).
5. Определяем величину  $D_{k1}$  дисбаланса первого противовеса и полярный угол  $\varphi_{k1}$  его центра масс по формулам (8.15).
6. Определяем массы  $m_{k1}$ ,  $m_{k2}$  первого и второго противовесов из равенств (8.17):  $m_{k1} = \frac{D_{k1}}{e_{k1}}$ ;  $m_{k2} = \frac{D_{k2}}{e_{k2}}$ .
7. Устанавливаем два противовеса с параметрами  $m_{k1}$ ,  $e_{k1}$ ,  $\varphi_{k1}$ ,  $z_{k1}$  и  $m_{k2}$ ,  $e_{k2}$ ,  $\varphi_{k2}$ ,  $z_{k2}$ .

#### 8.2.4. Расчет противовесов графоаналитическим способом

Графоаналитический способ расчета противовесов можно рассматривать как дополнение аналитического способа, когда число  $n$  элементов ротора мало. Он позволяет рассчитать противовесы при-

ближенно, и его достоинство состоит в наглядности. Продемонстрируем этот способ на примере ротора с тремя неуравновешенными элементами, центры масс которых в данном положении ротора находятся в точках  $S_1, S_2, S_3$  (рис. 8.5, *a*).

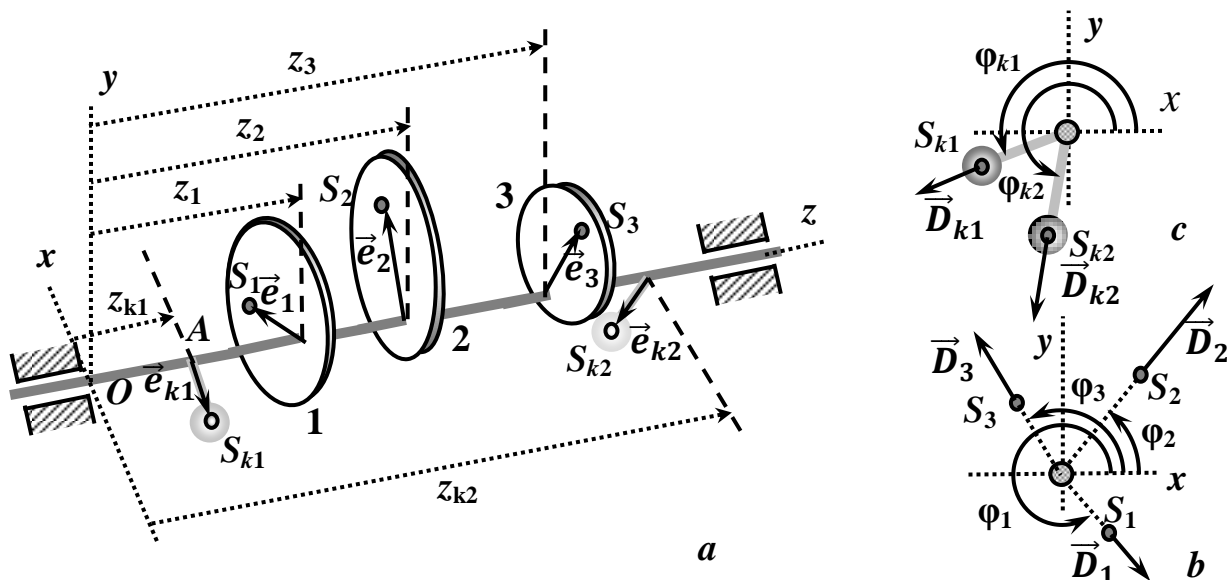


Рис. 8.5. Ротор, состоящий из трех элементов с центрами масс  $S_1, S_2, S_3$ , уравновешенный двумя противовесами с центрами масс  $S_{k1}, S_{k2}$  (*a*), и изображения дисбалансов элементов (*b*) и противовесов (*c*)

1. Задаем следующие величины: 1) массы  $m_1, m_2, m_3$  трех элементов ротора, г; 2) соответствующие полярные углы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  трех элементов ротора, град; 3) соответствующие величины  $e_1, e_2, e_3$  эксцентриситетов трех элементов ротора, мм; 4) соответствующие проекции  $z_1, z_2, z_3$  центров масс трех элементов ротора на ось  $Oz$ ; 5) проекции  $z_{k1}, z_{k2}$  центров масс двух противовесов на ось  $Oz$ ; 6) величины  $e_{k1}, e_{k2}$  эксцентриситетов двух противовесов, мм.

2. Изображаем проекции эксцентриситетов элементов ротора на плоскости  $Oxy$  (рис. 8.5 *b*, рис. 8.6 *a*).

3. Вычисляем величины дисбалансов элементов по формулам  $D_1 = m_1 e_1 = \dots$  кг мм;  $D_2 = m_2 e_2 = \dots$  кг мм;  $D_3 = m_3 e_3 = \dots$  кг мм.

4. Вычисляем величины моментов дисбалансов элементов относительно точки  $A$  на оси  $Oz$  с координатой  $z_{k1}$  по формулам

$$M_1 = D_1(z_1 - z_{k1}) = \dots \text{ кг мм м}; M_2 = D_2(z_2 - z_{k1}) = \dots \text{ кг мм м};$$

$$M_3 = D_3(z_3 - z_{k1}) = \dots \text{ кг мм м.}$$

5. Выбираем наибольшее значение  $M$  из величин  $M_1, M_2, M_3$ .

6. Определяем масштаб  $\mu_M$  плана моментов дисбалансов, назначая наибольшему по значению  $M$  моменту отрезок длиной 100 мм, по формуле  $\mu_M = \frac{M}{100} = \dots \frac{\text{кг мм м}}{\text{мм}}$

7. Вычисляем величины моментов дисбалансов элементов ротора в масштабе по формулам

$$Z_{M1} = M_1/\mu_M = \dots \text{ мм}; Z_{M2} = M_2/\mu_M = \dots \text{ мм}; Z_{M3} = M_3/\mu_M = \dots \text{ мм};$$

8. Отмечаем, что векторы моментов дисбалансов элементов в масштабе сонаправлены с эксцентриситетами дисбалансов элементов:

$$\vec{Z}_{M1} \uparrow\uparrow \vec{e}_1; \vec{Z}_{M2} \uparrow\uparrow \vec{e}_2; \vec{Z}_{M3} \uparrow\uparrow \vec{e}_3.$$

9. Вычерчиваем план (многоугольник) моментов дисбалансов элементов с учетом результатов в пунктах 2 и 8, начиная с точки  $K$  и заканчивая точкой  $H$  (рис. 8.6 *b*).

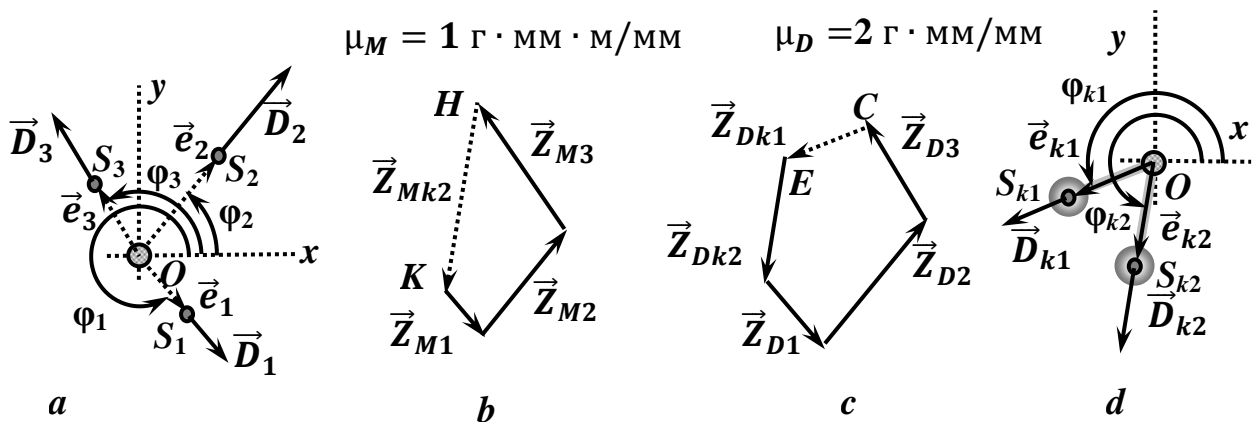


Рис. 8.6. Векторы дисбалансов элементов ротора (а) и дисбалансов противовесов (d) с планами моментов (b) и дисбалансов (c)

10. Замыкаем многоугольник моментов дисбалансов элементов вектором  $\vec{Z}_{Mk2}$ , изображающим момент дисбаланса противовеса 2 (рис. 8.6 *b*).

11. Отмечаем, что вектор  $\vec{Z}_{Mk2}$  момента дисбаланса противовеса в масштабе сонаправлен с эксцентриситетом дисбаланса противовеса 2:

$$\vec{Z}_{Mk2} \uparrow\uparrow \vec{e}_{k2}.$$

**12.** Изображаем параллельную вектору  $\vec{Z}_{Mk2}$  проекцию вектора-эксцентриситет  $\vec{e}_{k2}$  дисбаланса противовеса 2 заданной длины на плоскость  $Oxy$  (рис. 8.6 *d*).

**13.** Замеряем длину  $Z_{Mk2}$  вектора  $\vec{Z}_{Mk2}$  на плане моментов в мм и вычисляем величину  $M_{k2}$  момента дисбаланса противовеса 2 по формуле:  $M_{k2} = \mu_M Z_{Mk2} = \dots$  кг мм м.

**14.** Вычисляем величину  $D_{k2}$  дисбаланса противовеса 2 по следующей формуле:  $D_{k2} = \frac{M_{k2}}{z_{k2} - z_{k1}} = \dots$  кг мм.

**15.** Отмечаем, что вектор  $\vec{D}_{k2}$  дисбаланса противовеса сонаправлен с эксцентриситетом дисбаланса противовеса 2:  $\vec{D}_{k2} \uparrow\uparrow \vec{e}_{k2}$ .

**16.** Выбираем наибольшее значение  $D$  из величин  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_{k2}$ .

**17.** Определяем масштаб  $\mu_D$  плана дисбалансов, назначая наибольшему по значению  $D$  дисбалансу отрезок длиной 100 мм, по формуле  $\mu_D = \frac{D}{100} = \dots \frac{\text{кг мм}}{\text{мм}}$

**18.** Вычисляем величины дисбалансов элементов в масштабе по формулам

$$Z_{D1} = D_1 / \mu_D = \dots \text{мм}; Z_{D2} = D_2 / \mu_D = \dots \text{мм}; Z_{D3} = D_3 / \mu_D = \dots \text{мм}; \\ Z_{Dk2} = D_{k2} / \mu_D = \dots \text{мм}.$$

**19.** Отмечаем, что векторы дисбалансов элементов в масштабе сонаправлены с эксцентриситетами дисбалансов элементов:

$$\vec{Z}_{D1} \uparrow\uparrow \vec{e}_1; \vec{Z}_{D2} \uparrow\uparrow \vec{e}_2; \vec{Z}_{D3} \uparrow\uparrow \vec{e}_3; \vec{Z}_{Dk2} \uparrow\uparrow \vec{e}_{k2}.$$

**20.** Вычерчиваем план (многоугольник) дисбалансов элементов с учетом результатов в пунктах 2, 14, 15 и 19, начиная с точки  $E$  и заканчивая в точке  $C$  (рис. 8.6 *c*).

**21.** Замыкаем многоугольник дисбалансов элементов вектором  $\vec{Z}_{Dk1}$ , изображающим дисбаланс противовеса 1 (рис. 8.6 *c*).

**22.** Отмечаем, что вектор  $\vec{Z}_{Dk1}$  сонаправлен с эксцентриситетом дисбаланса противовеса 1:  $\vec{Z}_{Dk1} \uparrow\uparrow \vec{e}_{k1}$ .

23. Изображаем проекцию вектора-эксцентриситет  $\vec{e}_{k1}$  дисбаланса противовеса 1 заданной длины на плоскость  $Oxy$  (рис. 8.6 d).

24. Вычисляем массы противовесов по формулам

$$m_{k1} = D_{k1}/e_{k1} = \dots \text{кг}; \quad m_{k2} = D_{k2}/e_{k2} = \dots \text{кг}.$$

### 8.3. Балансировка

Погрешности при изготовлении и неоднородность металла приводят к начальной неуравновешенности ротора. Устранение начальной неуравновешенности натурального образца называется балансировкой. Полное устранение неуравновешенности практически недостижимо.

Цель балансировки – обеспечить остаточную неуравновешенность в пределах норм, установленных стандартами: величина  $U_{res}$  остаточного дисбаланса не должна превышать допустимого остаточного дисбаланса  $U_{per}$  в плоскости центра масс ротора:

$$U_{res} \leq U_{per}.$$

В системе СИ единица измерения величин  $U_{res}$ ,  $U_{per}$  – кг · м. Допускается также единица измерения г · м.

В зависимости от класса точности и массы  $m$  ротора величину допустимого дисбаланса вычисляют по формуле

$$U_{per} = e_{per}m,$$

где  $e_{per}$  – допустимый удельный остаточный дисбаланс (рассчитывают по принятой методике).

Балансировка роторов осуществляется на специальных балансировочных машинах и станках.

Маховики, шкивы и другие малоразвитые по оси вращения детали достаточно сбалансировать статически. Для этого пригодны любые две опоры вала, обеспечивающие контакт с валом в двух точках,



например на двух ножках, или в четырех точках, как показано на рисунке 8.7.

Неуравновешенный ротор 1 повернется вокруг оси вращения  $O$  на ножках 2 так, что его центр  $S$  масс займет низшее положение. Противовес  $K$  устанавливается после поворота ротора на вертикали над осью вращения. Варьированием массой противовеса и расстоянием от него до оси добиваются такого состояния, когда ротор не вращается при любом начальном положении (рис. 8.7,  $b$ ).

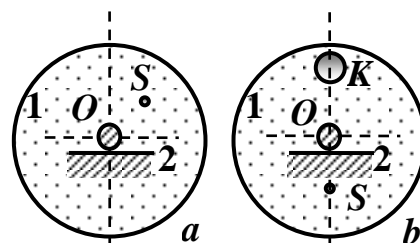


Рис. 8.7. Неуравновешенный ( $a$ ) и уравновешенный ( $b$ ) роторы

Большинство станков, предназначенных для динамической балансировки, работают по принципу станка Б. В. Шитикова (рис. 8.8).

Рама 1 станка, один конец которой образует неподвижную вращательную пару  $O$  со стойкой, а другой

опирается на пружину 2, установленную на стойке, имеет возможность качаться вокруг горизонтальной оси  $O$ .

Наибольшая амплитуда колебаний рамы регистрируется датчиком 3. На раме закреплены подшипники 4, 5, удерживающие вал ротора 6, ось вращения которого перпендикулярна оси  $O$ .

На валу ротора установлены диски 7, 8 с диаметрными прорезями для первого и второго противовесов. Диски образуют две плоскости коррекции. Ось качаний  $O$  попадает в плоскость коррекции диска 7.

Диски образуют две плоскости коррекции. Ось качаний  $O$  попадает в плоскость коррекции диска 7.

Диски образуют две плоскости коррекции. Ось качаний  $O$  попадает в плоскость коррекции диска 7.

Диски образуют две плоскости коррекции. Ось качаний  $O$  попадает в плоскость коррекции диска 7.

Диски образуют две плоскости коррекции. Ось качаний  $O$  попадает в плоскость коррекции диска 7.

Диски образуют две плоскости коррекции. Ось качаний  $O$  попадает в плоскость коррекции диска 7.

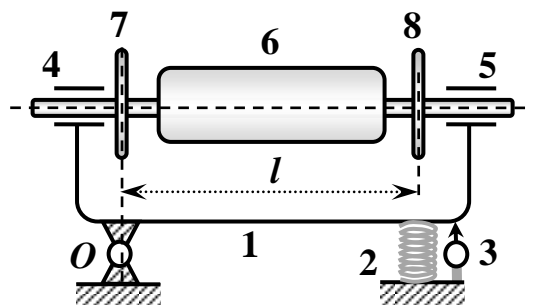


Рис. 8.8. Станок Б.В. Шитикова

произвольных несовпадающих плоскостях, перпендикулярных оси вращения ротора. В станке Б. В. Шитикова такими плоскостями служат плоскости коррекции, в которых, как можно предположить, движутся центры масс диска 7 и диска 8, заменяющих ротор. Задача состоит в том, чтобы в каждой плоскости найти дисбалансы  $\vec{D}_7$ ,  $\vec{D}_8$  дисков 7 и 8.

При включении двигателя ротору сообщают частоту вращения, превышающую резонансную, после чего двигатель выключают, а ротор продолжает вращаться на стадии выбега. В момент, когда падающая частота вращения ротора приблизится к частоте собственных колебаний рамы, наступит резонанс качаний рамы из-за неуравновешенности диска 8.

При наступлении резонанса регистрируют наибольшую амплитуду  $A_8$  качаний. Неуравновешенность диска 7 не влияет на колебания, так как моменты сил инерции диска относительно оси вращения рамы равны нулю.

Из теории малых колебаний системы известно, что амплитуда вынужденных колебаний при резонансе примерно равна полной амплитуде  $A_8$  колебаний и прямо пропорциональна величине  $D_8$  дисбаланса  $\vec{D}_8$  диска 8:

$$A_8 = \mu D_8, \quad (8.18)$$

где  $\mu$  – коэффициент пропорциональности, м/(г · мм).

Если найти коэффициент  $\mu$  и угол  $\varphi_8$  дисбаланса с отсчетом от заданного направления на диске, то из формулы (8.18) находят дисбаланс  $\vec{D}_8$ .

Для определения  $\mu$  и заданного направления достаточно дополнительных двух уравнений или двух испытаний.

Порядок испытаний таков:

1) определяют амплитуду  $A_8$  при вращении ротора без грузов;

2) в первой прорези диска 8 устанавливают груз  $G$  с известными массой  $m_G$ , расстоянием  $r_G$  от оси вращения и дисбалансом  $\vec{D}_G$  (рис. 8.9, *a*); ротор разгоняют, и после отключения двигателя на выбеге при резонансе регистрируют амплитуду  $A_{G1}$  качаний рамы;

3) груз  $G$  переставляют симметрично относительно оси вращения во вторую прорезь и аналогично определяют амплитуду  $A_{G2}$  в новом положении груза с дисбалансом  $(-\vec{D}_G)$  (рис. 8.9, *b*).

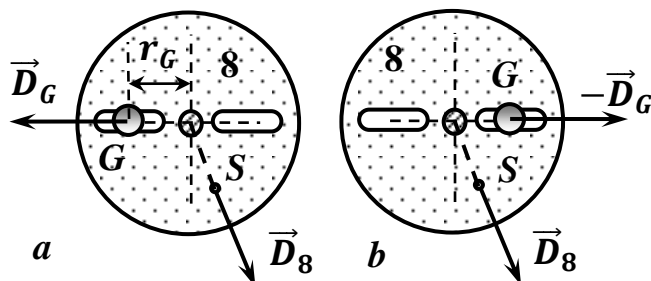


Рис. 8.9. Установка груза  $G$  в левой (*a*) и правой (*b*) прорезях

Три отрезка амплитуд  $A_8$ ,  $A_{G1}$ ,  $A_{G2}$  в линейном масштабе позволяют построить треугольник, по которому можно определить векторы  $\vec{D}_8$ ,  $\vec{D}_G$  дисбалансов в масштабе.

В испытаниях с грузом амплитуда  $A_{G1}$  или  $A_{G2}$  прямо пропорциональна величине силы, равной векторной сумме центробежных сил инерции диска и груза  $G$ . Центробежные силы прямо пропорциональны дисбалансам. Поэтому (рис. 8.10)

$$A_{G1} = \mu |\vec{D}_8 + \vec{D}_G|; \quad A_{G2} = \mu |\vec{D}_8 - \vec{D}_G|. \quad (8.19)$$

Равенства (8.18), (8.19) позволяют построить треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB$  длиной  $A_{G1}/2$ ,  $BC$  длиной  $A_{G2}/2$  и  $AC$  длиной  $A_8$  (рис. 8.10).

Пусть

$$\vec{AE} = 2\vec{AB}.$$

Тогда длина отрезка  $EC$  равна  $\mu D_G$  или  $\mu m_G r_G$ . Измеряя длину  $a$  отрезка  $EC$  в тех же единицах, в каких измерялись амплитуды, найдем коэффициент  $\mu$ :

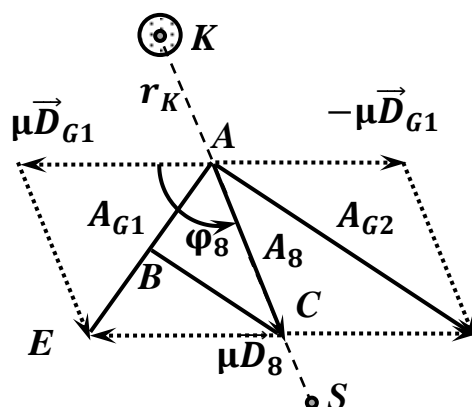


Рис. 8.10. Построение треугольника  $ABC$

$$\mu = a/(m_G r_G).$$

Величину  $a$  можно вычислить и из теоремы косинусов:

$$a = \sqrt{(A_{G1}^2 + A_{G2}^2 - 2A_8^2)/2}.$$

Из равенства (8.18) определяем  $D_8$ :

$$D_8 = A_8/\mu.$$

Задавая из конструктивных соображений радиус  $r_K$  противовеса  $K$ , найдем его массу  $m_K$  по формуле

$$m_K = D_8/r_K.$$

Будем считать, что при взгляде вдоль оси вращения в некотором положении первая прорезь расположена горизонтально слева от второй. Тогда при положении центра  $S$  масс диска  $\delta$  под прорезью в треугольнике  $AEC$  вектор  $\overrightarrow{CE}$  направлен вдоль прорези от центра. Замеряя угол  $\varphi_8$  на чертеже и поворачивая прорезь на этот угол против часовой стрелки, найдем прямую, на которой расположен центр  $S$  масс диска (под прорезью) и центр  $K$  масс противовеса (над прорезью). Если в действительности центр масс диска в данном положении расположен над прорезью, то для определения прямой  $SK$  прорезь надо поворачивать на угол  $\varphi_8$  по часовой стрелке. Очевидно, в этом случае новые положения центров  $S$  и  $K$  будут симметричны старым положениям относительно оси прорези.

При балансировке необходимо проверять оба положения противовеса. При повороте прорези против часовой стрелки противовес расположен над прорезью, по часовой стрелке – под прорезью.

Наряду с измерением угла  $\varphi_8$  можно найти и аналитически из теоремы косинусов:

$$\varphi_8 = \arccos \frac{A_8^2 + \mu^2 D_{G1}^2 - A_{G2}^2}{2\mu D_{G1} A_8}.$$

Из двух значений угла следует выбрать тот, который соответствует рисунку 8.10.

Аналогично осуществляется балансировка диска 7, если ротор установить так, чтобы ось  $O$  качаний располагалась в плоскости диска 8.

Рассмотрим валец мукомольного станка (рис. 8.11). Диаметр  $d$  и длина  $L$  вальца равны 0,25 м и 1,25 м, угловая скорость  $\omega$  – 50 рад/с. Ввиду неравномерности распределения металла и погрешностей сборки валец не уравновешен.

Перед установкой вальца в мукомольный станок его необходимо подвергнуть динамической балансировке на станке Б. В. Шитикова, то есть найти дисбалансы в плоскостях коррекции  $I, II$  и тем самым массы  $m_I, m_{II}$  и радиусы  $r_I, r_{II}$  противовесов. Балансировка вальца приведет к неизменности реакций  $\vec{R}_A, \vec{R}_B$  его опор.

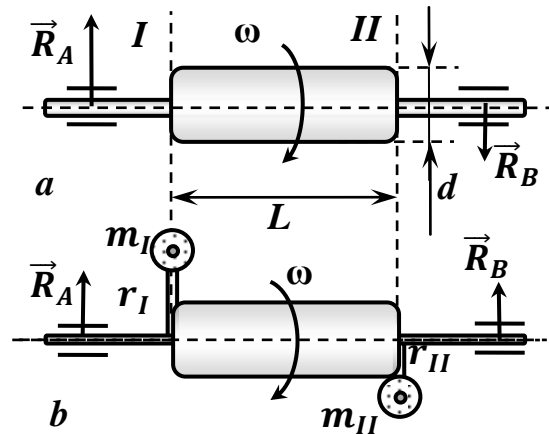


Рис. 8.11. Валец без противовесов (а) и с противовесами (б)

## 9. МАНИПУЛЯТОРЫ И ПРОМЫШЛЕННЫЕ РОБОТЫ

### 9.1. Основные определения

*Манипулятором называется управляемое и оснащенное рабочим органом устройство, предназначенное для воспроизведения действий руки человека при перемещении объектов.* Рабочий орган представляет собой захватывающее устройство, сварочные клещи, инструмент для сборки, режущий аппарат для обрезки веток, ножницы для обрезки лозы, шланг для полива растений или др. Рабочим органом манипулятора, как правило, служит схват, имитирующий действия пальцев руки.

*Промышленным роботом* называется автоматическая машина, состоящая из исполнительного устройства в виде одного или нескольких манипуляторов и устройства программного управления движением манипулятора или манипуляторов [3]. Такой робот работает в ручном и/или автоматическом режимах. Промышленные роботы в автоматическом режиме работы предназначены для выполнения производственных процессов, состоящих из циклически повторяющихся вспомогательных и основных операций.

Под *роботом* понимается машина для воспроизведения двигательных и интеллектуальных функций человека.

Появление манипуляторов и промышленных роботов вызвано потребностью человека снизить издержки и повысить эффективность своего труда. Манипуляторы, управляемые оператором и копирующие действия руки человека, были необходимы при выполнении вредной работы в атомной промышленности. Первые промышленные роботы в автомобильной и металлургической промышленности появились в США в конце 50-х – начале 60-х годов прошлого века и послужили началом роботизации промышленности. Они нашли применение при проведении ответственных и сложных операций в кузнечно-штамповочном производстве, при резке и сварке, погрузочно-разгрузочных работах.

Объединение промышленных роботов под управлением вычислительного комплекса позволило перейти от автоматизации отдельных линий к автоматизации цехов и предприятия в целом.

Различают промышленные роботы с позиционным, контурным и адаптивным управлением. В роботах с позиционным управлением движение рабочего органа происходит по заданным точкам позиционирования без контроля траектории, с контурным управлением – по заданной траектории с заданной скоростью. В адаптивных роботах установлены локационные, видео и сенсорные устройства, например, датчики местоположения, температуры, цвета предметов, электромагнитного поля или химического состава, которые обеспечивают управление направлением и скоростью исполнительного органа до соприкосновения с объектом манипулирования.

Интегральный, или интеллектуальный робот, или просто робот обладает «мозгом» и «способностью» к самообучению. «Мозгом» интеллектуального робота служит искусственный интеллект, то есть техническая система, способная решать задачи невычислительного характера и выполнять действия, требующие переработки содержательной информации и считающиеся прерогативой человеческого мозга. К числу таких задач относится и распознавание зрительных образов. Искусственный интеллект «составляет» трехмерную карту объекта на базе программы распознавания зрительных образов, принимающей на входе сигналы сенсоров, видео и сканирующих устройств, «строит» модель внешней среды, самостоятельно принимает решения и выбирает способ движения для достижения цели, заданной программой.

Одно из основных направлений применения промышленных роботов – выполнение однообразных операций перемещения грузов. Автоматические промышленные роботы сводят к минимуму трудозатраты на однообразные погрузочно-разгрузочные операции. Технологии перемещения грузов востребованы в сельском хозяйстве при перемещении рассады в горшках с места хранения в теплицу или на по-

ле, собранного урожая в ящиках к местам хранения, упаковки и расфасовки.

Сельскохозяйственные роботы как категория промышленных роботов предназначены для выполнения трудоемких и вредных работ в сельском хозяйстве: прополки овощей, сбора ягод и плодов, окашивания и обрезки кустов, культивации почвы, обработки растений пестицидами, заточки ножей фрезы. Интенсивная разработка таких роботов знаменует начало роботизации сельскохозяйственного производства.

## 9.2. Схема манипулятора и промышленного робота

Структурная схема манипулятора сродни схеме человеческой руки с корпусом 0, плечом 1, предплечьем 2, кистью 3 и пальцами 4 (рис. 9.1). Если кисть 3 с пальцами 4

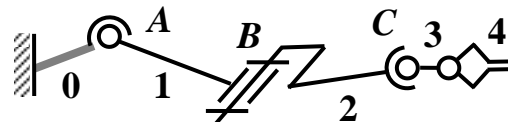


Рис. 9.1. Структурная схема манипулятора

считать одним звеном, то схема, представляющая разомкнутую кинематическую цепь, содержит три подвижных звена и три кинематические пары:

трехподвижную сферическую пару  $A$  в плечевом суставе, одноподвижную вращательную пару  $B$  в локтевом суставе и трехподвижную сферическую пару  $C$  в кистевом суставе. Таким образом, рука без учета пальцев имеет семь степеней свободы.

Положение схвата в пространстве в декартовой системе координат, связанной со стойкой и называемой базовой, определяется тремя координатами его центра  $s$  и ориентацией в пространстве с помощью трех углов Эйлера.

Ориентацию схвата можно также определить тройкой единичных векторов [17]: вектором подхода  $\vec{e}$ , направленным по оси схвата, вектором ориентации  $\vec{d}$  с направлением относительного поворота звеньев, вектором нормали  $\vec{n}$ , образующими правую прямоугольную систему координат (рис. 9.2). Вектор  $\vec{e}$  оси схвата определяется любыми



двумя из трех углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , образуемыми вектором с осями координат.

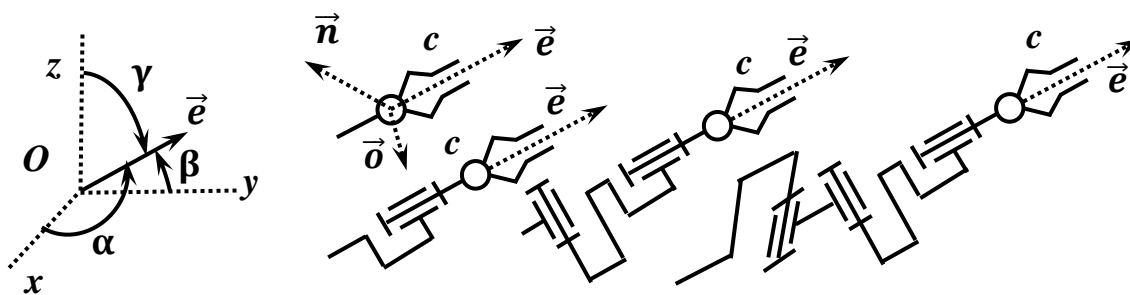


Рис. 9.2. Схемы схвата

Под перемещением схвата понимается перемещение его характерной точки. Схват совершает два вида движения: транспортирующее, когда перемещение его характерной точки превышает размеры схвата, и ориентационное, выполняемое при захвате объекта.

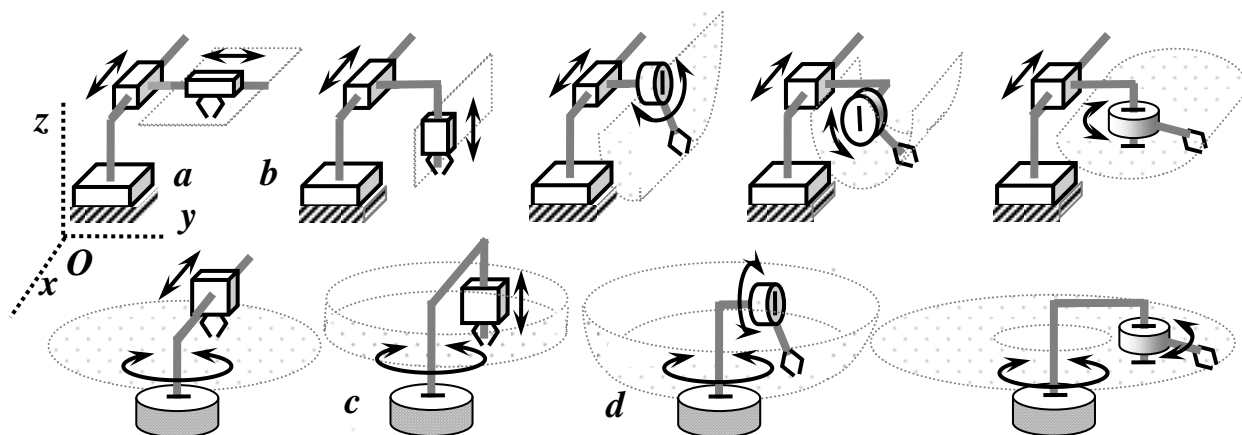
Каждое независимое движение манипулятора, реализующее одну степень свободы, должно осуществляться индивидуальным приводом и тормозным устройством. Поэтому приводные звенья присоединяются одноподвижными вращательными, поступательными, винтовыми парами. Вращательное, поступательное или винтовое движение в манипуляторах осуществляется, как правило, гидроцилиндром, шаговым двигателем или серводвигателем постоянного или переменного тока, интегрированным с энкодером и управляемым с помощью контроллера. Гидроцилиндр или двигатель устанавливается на одном из звеньев пары.

В зависимости от сложности выполняемых операций число степеней свободы манипулятора варьирует от 2 до 7. Четвертая и следующие подвижности обеспечивают повышение эффективности работы манипулятора, ориентацию схвата в пространстве и захват объекта манипулирования.

Рабочая зона манипулятора — пространство, в котором находится схват при всех возможных положениях манипулятора. Предмет, перемещаемый манипулятором, называется объектом манипулирования.

ния. Пространством обслуживания называется рабочая зона, в которой схват выполняет свои функции.

Структурная схема сложного манипулятора является развитием простых схем (рис. 9.3).



**Рис. 9.3. Простые схемы манипулятора с 2-мя степенями свободы**

В манипуляторах с двумя степенями свободы геометрическим местом характерной точки схвата служит поверхность (плоскость или цилиндрическая поверхность).

Сложная схема с разомкнутой цепью может быть получена путем расширения простой схемы присоединением нового звена к звену со схватом или наложением простой схемы без стойки на новое звено с помощью одноподвижной пары.

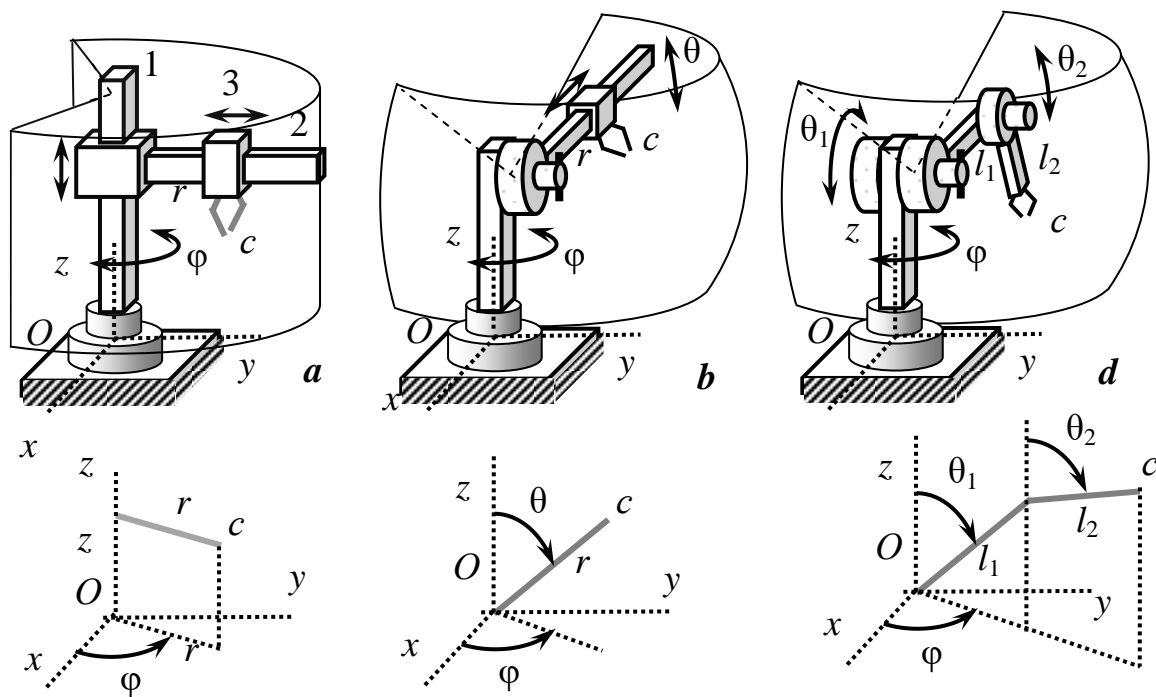
Манипуляторы с поступательными парами отличаются высокой точностью позиционирования схвата и служат исполнительными устройствами промышленных роботов, работающих в системе декартовых координат  $Oxyz$ .

Присоединение к простой схеме *c* на рисунке 9.3 звена 3 с помощью поступательной пары приводит к схеме манипулятора, рабочей зоной которого служит круглый цилиндр или его усечения (рис. 9.4 слева).

Обобщенными координатами такого манипулятора или координатами характерной точки  $c$  схвата служат цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$ .

Манипуляторы, положение которых определяется числами  $r, \varphi, z$ , служат исполнительными устройствами промышленных роботов, работающих в системе отсчета с цилиндрическими координатами.

Присоединение к простой схеме  $d$  (рис 9.3) звена с помощью поступательной пары позволяет получить схему манипулятора, рабочей зоной которого служит сфера или ее усечения (рис. 9.4,  $b$ ). Обобщенными координатами этого манипулятора служат сферические координаты  $r, \varphi, \theta$ .



**Рис. 9.4.** Манипулятор с цилиндрическими ( $a$ ), со сферическими ( $b$ ) и с угловыми ( $d$ ) координатами

Манипуляторы, положение которых определяется числами  $r, \varphi, \theta$ , служат исполнительными устройствами промышленных роботов, работающих в системе отсчета со сферическими координатами. Шарнирный манипулятор с тремя степенями свободы не имеет поступательных пар. Его обобщенными координатами служат углы  $\varphi, \theta_1, \theta_2$

(рис. 9.4, *d*). Он образован присоединением к простой схеме *d* на рисунке 9.3 звена с помощью вращательной пары.

Шарнирные манипуляторы служат исполнительными устройствами промышленных роботов, работающих в системе отсчета с угловыми координатами.

К промышленным роботам, работающим в системе отсчета с другими координатами, относятся такие, обобщенные координаты которых нельзя свести к декартовым, цилиндрическим, сферическим и угловым.

Обобщенные координаты, с помощью которых можно определить положение руки человека, называются антропоморфными.

### 9.3. Схемы манипуляторов сельскохозяйственных роботов

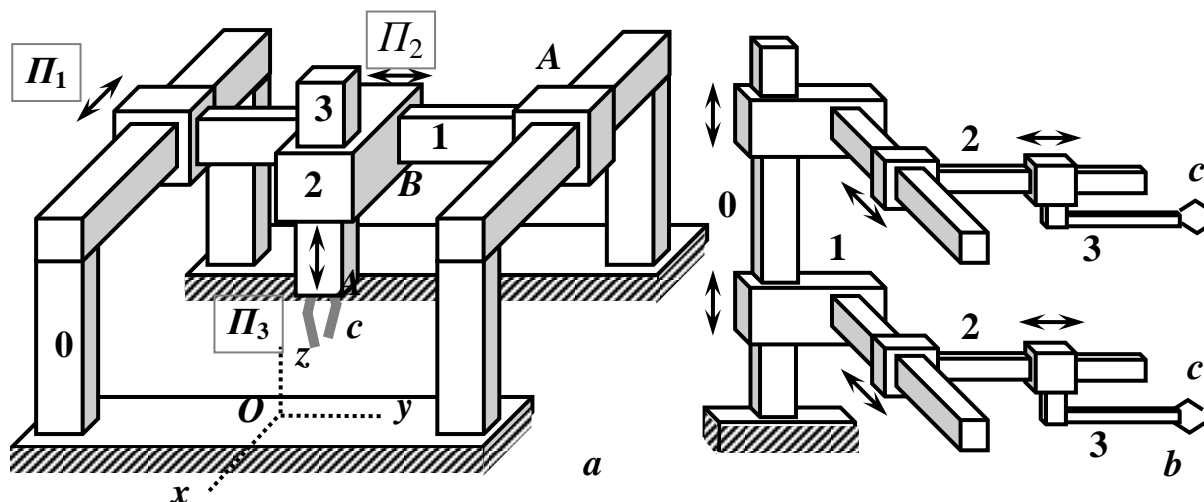
В основу принципов работы сельскохозяйственных роботов для сбора фруктов и садовой земляники заложен «интеллект», позволяющий распознать созревший плод и заменить действия человека при его съеме, и мобильность, обеспечивающая подход к плоду без повреждения веток и листьев (рис. 9.5).



Рис. 9.5. Системные элементы сельскохозяйственного робота

Для перемещения схвата в заданную точку рабочей зоны теоретически достаточно трех подвижностей звеньев 1, 2, 3 вдоль трех ко-

ординатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , обеспечиваемых приводами  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  на звеньях 0, 1, 2 (рис. 9.6).



**Рис. 9.6. Простейший трехзвенный манипулятор (a) и манипулятор робота для сбора фруктов (b) с поступательными парами**

Схему данного манипулятора можно получить присоединением звена 3 поступательной парой к схеме *a* на рисунке 9.3 или наложением схем *a* или *b* на звено 1, образующее со стойкой поступательную пару. Рабочая зона манипулятора – параллелепипед.

Для распознавания плода манипулятор робота снаряжается одной или несколькими видеокамерами и лазером для сканирования. Изображение объекта передается в компьютер и обрабатывается с помощью программы распознавания образов.

Для сбора апельсинов применяют мобильные роботы, манипуляторы которых имеют разомкнутую кинематическую цепь, состоящую из четырех подвижных звеньев (рис. 9.7).

Звенья 1...4 попарно образуют между собой и с шасси четыре одноподвижные вращательные пары с горизонтальными осями вращения. Вращательные движения звеньев обеспечиваются гидроцилиндрами  $\Pi_1 - \Pi_4$  или серводвигателями.

Вращательные движения звеньев обеспечиваются четырьмя гидроцилиндрами  $\Pi_1 - \Pi_4$ , управляемыми оператором или автоматически.

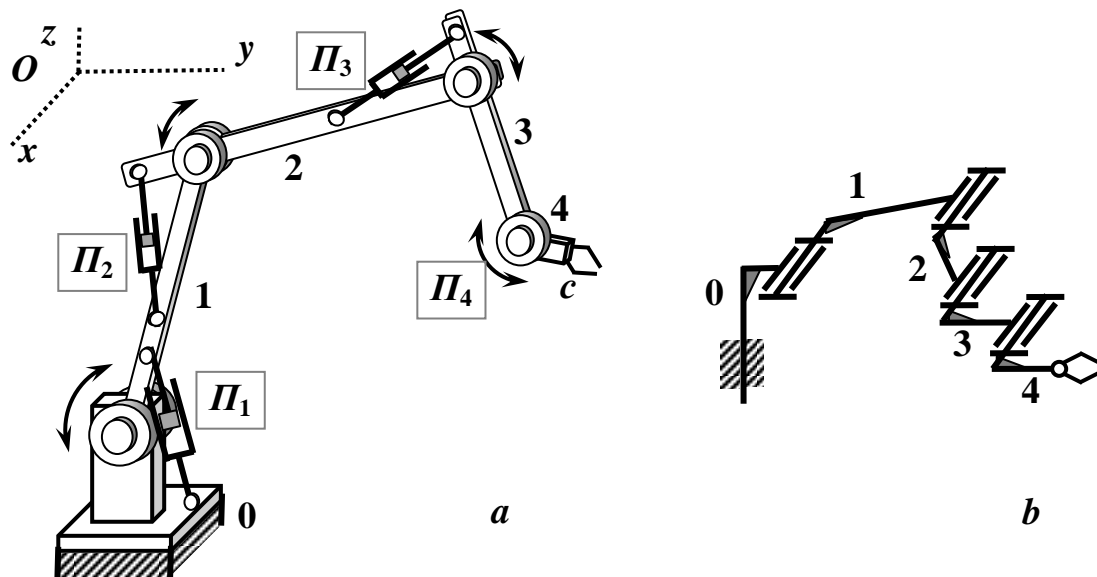


Рис. 9.7. Манипулятор с вращательными парами (a) и его пространственная структурная схема (b)

Типовая структурная схема манипулятора робота для сбора садовой земляники в поле показана на рисунке 9.8.

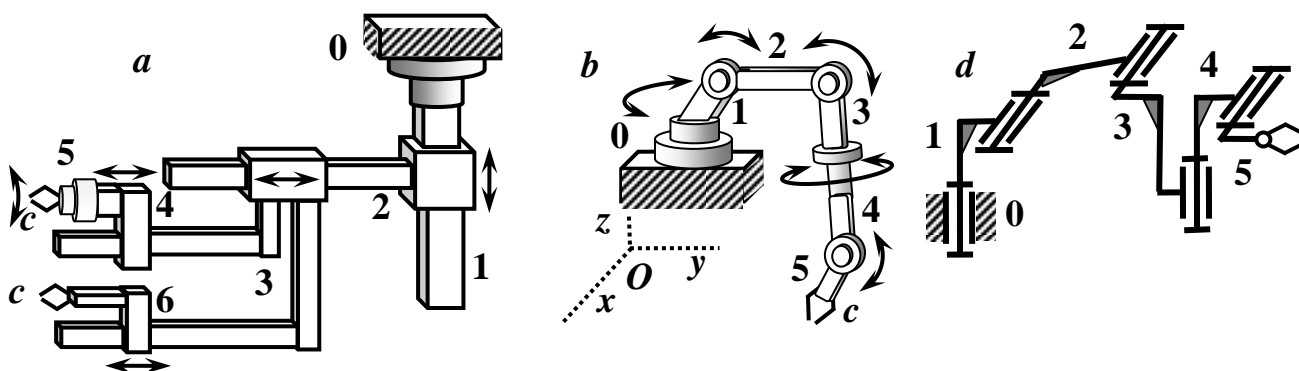


Рис. 9.8. Манипулятор робота для сбора земляники в теплице (a), в полевых условиях (b) и пространственная структурная схема манипулятора (d)

Манипулятор имеет четыре или пять звеньев 1 – 5, входящих в открытую кинематическую цепь и образующих вращательные пары. Четыре или соответственно пять независимых осей вращения звеньев

позволяют обеспечить схвату любую ориентацию на заданной высоте. В некоторых конструкциях звено 5, несущее схват, с помощью ременных и реечных зубчатых передач связано со звеньями 2, 3, 4 так, чтобы схват сохранял вертикальную ориентацию без поворота вокруг вертикальной оси. Дополнительная подвижность обеспечивается мобильным средством, на котором установлен манипулятор и которое можно рассматривать как звено, образующее поступательную пару с полем или полом теплицы.

Губки схвата позволяют отделять ягоду от ножки без повреждения. Снятая ягода автоматически укладывается манипулятором в корзинку для последующей транспортировки на хранение и/или сбыт.

Схемы сельскохозяйственного робота для сбора апельсинов, яблок, слив, желтого перца конструктивно схожи со схемами робота для сбора земляники.

Робот для сбора плодов овощей и фруктов устанавливается на самоходное шасси, управляемое системой спутниковой навигации, и снабжается одним или множеством манипуляторов.

Манипулятор представляет разомкнутую кинематическую цепь и содержит от четырех до шести подвижных звеньев 1 – 6, образующих вращательные пары

и в некоторых конструкциях поступательную пару (рис. 9.9).

Для повышения эффективности технологии роботизированной уборки некоторыми технологиями преду-

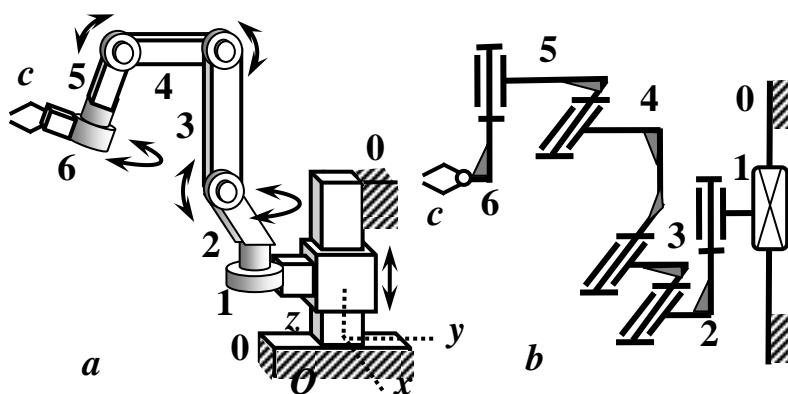


Рис. 9.9. Манипулятор робота для сбора плодов овощей и фруктов (а) и его пространственная структурная схема (b)

смотрено взаимодействия пар роботов. Первый робот пары составляет карту обнаруженных плодов, а идущий следом за ним снимает плоды, координаты которых поступают от первого робота.

Сила сжатия плода при его захвате и съеме во избежание повреждения регулируется давлением сжатого воздуха в пневматическом приводе схвата.

Типовой промышленный робот Kuka KR 6/2 (Германия) предназначен для перемещения грузов (рис. 9.10).

Он способен перемещать штучные изделия массой до 6 кг с ленточного транспортера I на поддон на транспортере II в пределах радиуса действия 1,57 м и угла поворота колонны 1 вокруг вертикальной оси  $Oz$  от  $0^\circ$  до  $185^\circ$  в обоих направлениях.

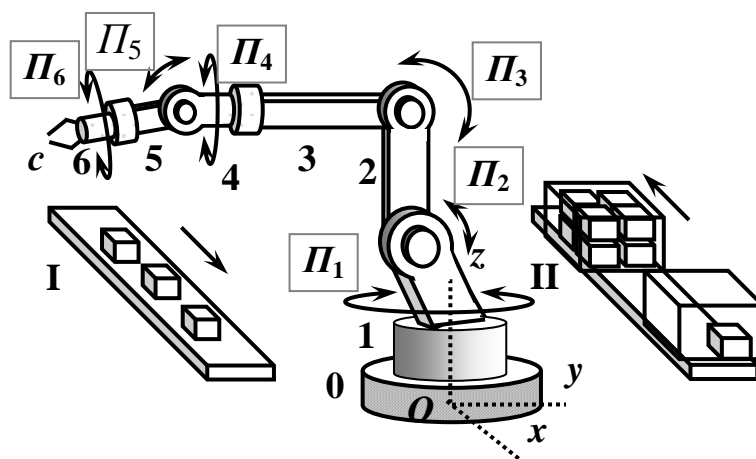


Рис. 9.10. Робот – укладчик

Манипулятор робота, устанавливаемый на неподвижном полу 0, состоит из звеньев 1 (колонны), 2 (плеча), 3 (предплечья) и звеньев кисти 4, 5, 6 со схватом с. Звенья открытой кинематической цепи образуют шесть вращательных пар и с помощью гидроцилиндров или сервомоторов позволяют вывести схват в заданную позицию с заданной ориентацией.

Использование в конструкции манипулятора Kuka KR 180 PA замкнутых параллелограммных кинематических цепей позволяет обеспечить заданную неизменяемую ориентацию схвата, а также увеличить высоту штабелирования до 3 м и грузоподъемность до 180 кг.

Манипулятор, установленный на стойке 0, состоит из восьми звеньев: колонны 1, плеча 2, предплечья 3, звеньев 4, 6, служащих тягами, промежуточных звеньев 5, 7 и схвата с на ведомом (выходном)



звене 8 (рис. 9.11). Звенья образуют десять вращательных пар. Две «параллелограммные» замкнутые цепи  $BEFC$  и  $GKDH$  обеспечивают поступательные движения звеньев 5 и 7: Звенья 5 и 7 не поворачиваются относительно звена 1. Это означает, что ось звена 8 и схвата  $c$ , будучи выставлена вертикальной в некотором положении, остается вертикальной и при других положениях звеньев.

Данная конструкция манипулятора не позволяет схвату изменять ориентацию в пространстве по вертикали.

Система управления роботом осуществляется автоматически с помощью программы, настраиваемой оператором на компьютере под конкретные внешние условия работы.

Привод  $\Pi_3$  звена 3 манипулятора через вращательную пару  $C$  осуществляется гидромотором, электродвигателем или пневмодвигателем, размещается на звене 2 и перемещается вместе со звеном. При движении привода возникают силы инерции, действующие на опору 0 манипулятора.

Размещение исполнительного устройства привода на опоре 0 в ряде случаев позволяет уменьшить нагрузку от инерционных сил элементов привода и упростить его установку.

На рисунке 9.12 показан ма-

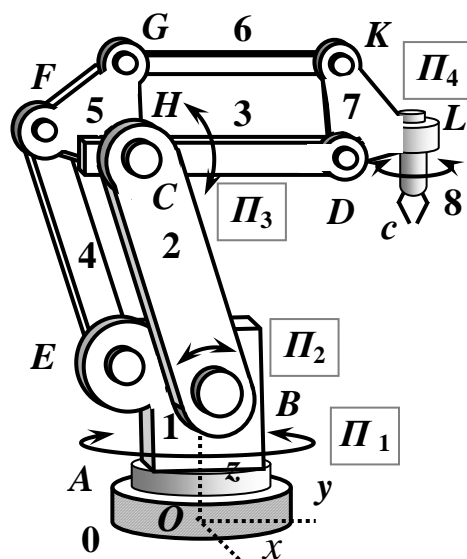


Рис. 9.11. Манипулятор робота с замкнутыми контурами

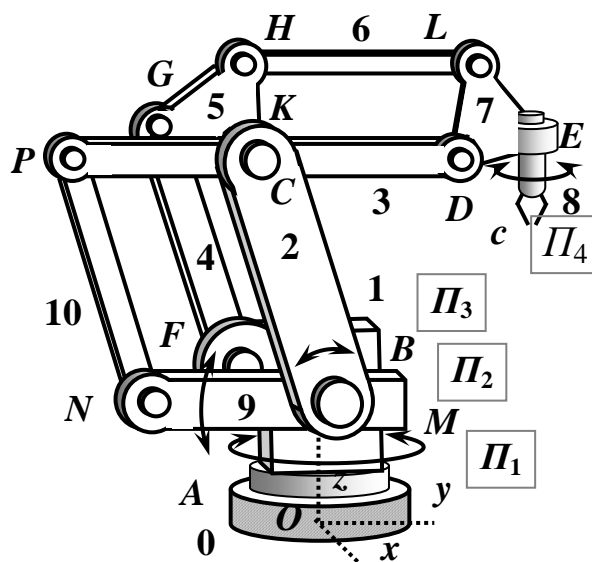


Рис. 9.12. Манипулятор робота с приводом  $\Pi_3$  звена 3 на опоре 0

нипулятор, отличающийся от предыдущего тем, что привод из верхнего положения  $C$  на звене 2 перемещен в нижнее положение  $B$  и предназначен для вращения звена 3 через звено 9.

В конструкцию данного манипулятора вводят дополнительные звенья 9, 10 и три вращательные пары  $M, N, P$ , образованные соответственно звеньями 2 и 9, 9 и 10, 3 и 10. Исполнительное устройство обеспечивает вращение звена 3 через звенья 9, 10.

Простейшие однообразные операции перемещения объектов выполняются роботами с контурным управлением.

На рисунке 9.13 показан манипулятор механического робота, предназначенный для перемещения объекта с транспортера I на транспортер II. Во избежание рассогласования операций перемещение схвата 7, установленного на кулисе, осуществляется двумя синусными механизмами с приводом кривошипа 1 от двигателя  $\Pi_1$ .

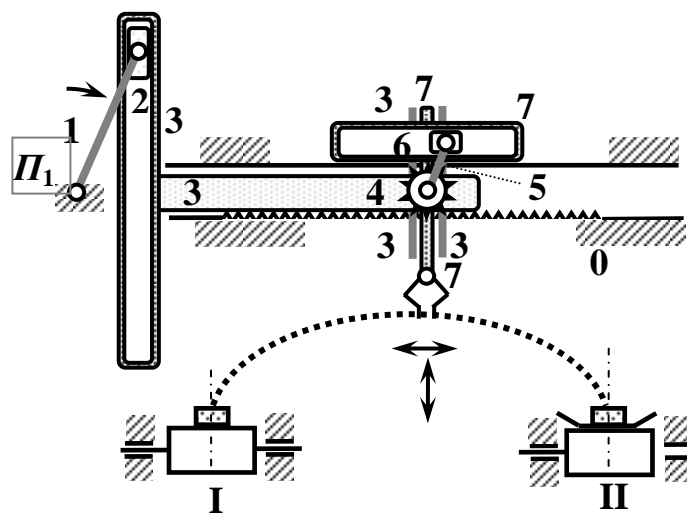


Рис. 9.13. Манипулятор укладчика (0—стойка, зубчатая рейка: 1—кривошип; 2—камень; 3—кулиса, ползун; 4—зубчатое колесо; 5—водило, 6—камень; 7— кулиса, ползушка, схват)

Заданную траекторию центра схвата достигают регулировкой длины штанги кулисы 7.

#### 9.4. Число степеней свободы и структура манипулятора

Число  $W$  степеней свободы пространственного манипулятора с кинематическими парами, подвижности которых не превышают трех, определяется по формуле (2.4):

$$W = q + 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3, \quad (9.1)$$

где  $p_1, p_2, p_3$  – число пар пятого, четвертого и третьего класса;  
 $q$  – число избыточных связей.

Манипулятор, представляемый открытой кинематической цепью, не содержит контурные избыточные связи, и в формуле (9.1)  $q = 0$ .

Маневренностью манипулятора называется число  $M$  его степеней свободы при неподвижном схвате без учета локальных подвижностей. Остановка схвата означает, что на звено, соединенное со схватом, накладываются дополнительно к имеющимся связи, эквивалентные жесткому закреплению, то есть число степеней свободы манипулятора уменьшается на 6:

$$M = W - 6, \quad (9.2)$$

где  $W$  – число степеней свободы без учета локальных подвижностей.

Маневренность манипулятора с одноподвижными парами равна числу звеньев, одновременными движениями которых можно изменить положение кинематической цепи манипулятора при неизменном положении схвата. Маневренность «наделяет» манипулятор способностью обходить препятствия.

На рисунке 9.14 показана структурная схема изображенного на рисунке 9.6 манипулятора с открытой кинематической цепью, содержащей три звена ( $n = 3$ ) и три одноподвижные поступательные пары  $A, B, C$  ( $p_1 = 3$ ).

В манипуляторах с открытой кинематической цепью контурные избыточные связи отсутствуют. Число  $W$  степеней свободы данного манипулятора определяем по формуле (9.1):

$$W = q + 6n - 5p_1 = 0 + 6 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 3.$$

Манипулятор не имеет маневренности, и для подвода схвата к объекту с заданными координатами  $x, y, z$  звенья 1, 2, 3 должны занять неизменяемые положения.

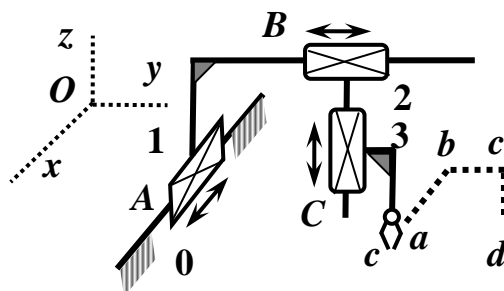


Рис. 9.14. Пространственная структурная схема с поступательными парами

Траектория движения центра схвата при перемещении из точки  $a$  в точку  $d$  с координатами  $x_d, y_d, z_d$  зависит от законов движения звеньев 1, 2, 3. Движение схвата складывается из трех независимых движений звеньев 1, 2, 3 в любой последовательности, например:

1) движения  $x_{10}$  ползуна 1 вместе со звеньями 2, 3 и схватом  $C$  относительно стойки 0 вдоль оси  $Ox$  до момента, когда координата  $x$  центра схвата станет равной  $x_d$ ;

2) движения  $y_{21}$  ползуна 2 вместе со звеном 3 и схватом  $C$  относительно звена 1 вдоль оси  $Oy$  со звеном 3 и схватом  $C$  до момента, когда координата  $y$  станет равной  $y_d$ ;

3) движения  $z_{32}$  ползуна 3 со схватом  $C$  относительно звена 2 вдоль оси  $Oz$  до момента, когда координата  $z$  станет равной  $z_d$ .

Траекторией центра схвата будет линия, состоящая из трех отрезков  $ab, bc, cd$ , параллельных осям  $Ox, Oy, Oz$  соответственно.

Структуру манипулятора определяют формулой его строения, под которой понимают математическую запись формулы (9.1)<sup>2</sup>:

$$W = [x_{10} + 2, 3, c] + [y_{21} + 3, c] + [z_{32} + c].$$

Функционирование манипулятора обеспечивается тремя исполнительными устройствами приводов ползунков 1, 2, 3.

Рассмотрим манипулятор сельскохозяйственного робота для сбора плодов с куста (рис. 9.9). Он имеет открытую кинематическую цепь и состоит из шести звеньев 1 – 6 ( $n = 6$ ) и шести одноподвижных кинематических пар ( $p_1 = 6$ ), среди которых звенья 0 и 1 образуют поступательную пару, а звенья 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5, 5 и 6 – пять вращательных пар.

Число степеней свободы определим по формуле (9.1):

$$W = q + 6n - 5p_1 = 0 + 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6.$$

Маневренность манипулятора отсутствует.

При записи формулы строения ориентации звеньев манипулятора удобно выбирать так, чтобы оси относительных вращений и направ-

---

<sup>2</sup> Тарабарин В. Б. Конспект лекций по курсу ТММ. М: МГТУ, 1998.

ления поступательных перемещений звеньев были расположены параллельно осям базовой системы координат (рис. 9.15).

В формулу строения войдут все движения звеньев:

1) движение  $z_{10}$  ползуна 1 вместе с другими звеньями и схватом  $c$  относительно стойки 0 вдоль оси  $Oz$ ;

2) поворот  $\varphi_{21}$  звена 2 вместе со звеньями 3 – 6 и схватом относительно звена 1 вокруг оси, параллельной  $Oz$ ;

3) повороты  $\theta_{32}$  звена 3 относительно звена 2,  $\theta_{43}$  звена 4 относительно звена 3 и  $\theta_{54}$  звена 5 относительно звена 4 вокруг оси, параллельной  $Ox$ , вместе со звеньями 3 – 6, 4 – 6, 5 – 6 и схватом;

4) поворот  $\varphi_{65}$  звена 6 вместе со схватом относительно звена 5 вокруг оси, параллельной  $Oz$ .

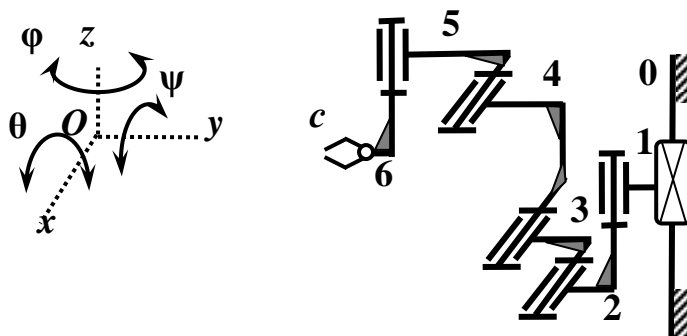


Рис. 9.15. Оси базовой системы координат (слева) и положения звеньев на пространственной структурной схеме (справа)

Формулу строения запишем так:

$$W = [z_{10} + 2 \div 6, c] + [\varphi_{21} + 3 \div 6, c] + [\theta_{32} + 4, 5, 6, c] + [\theta_{43} + 5, 6, c] + [\theta_{54} + 6, c] + [\theta_{65} + c].$$

С каждым звеном можно связать свою систему координат и при составлении формулы строения рассматривать относительные движения звеньев в подвижных системах координат.

Функционирование манипулятора обеспечивают шесть двигателей приводов ползуна 1 и вращающихся звеньев 2, 3, 4, 5, 6.

Манипулятор Kuka KR 6/2 имеет открытую кинематическую цепь с шестью звеньями ( $n = 6$ ) и шестью одноподвижными вращательными парами ( $p_1 = 6$ ) (рис. 9.10). Число степеней свободы манипулятора равно 6:

$$W = 6n - 5p_1 = 6.$$

Формула строения данного манипулятора аналогична предыдущей. Для ее составления поступательную пару следует заменить вращательной.

Функционирование манипулятора обеспечивают гидроцилиндры и двигатели приводов вращающихся звеньев 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Рассмотрим манипулятор робота Kuka KR 180 PA (рис. 9.11). Ввиду наличия в структурной схеме замкнутых кинематических контуров манипулятор содержит избыточные связи.

Для определения числа избыточных связей воспользуемся методом образования замкнутого контура за счет присоединения кинематическими парами группы звеньев, рассмотренного в главе 2.

На первом этапе в качестве исходного механизма выберем механизм со звеньями 0, 1, 2, 3, образующими открытую кинематическую цепь (рис. 9.16, *a*).

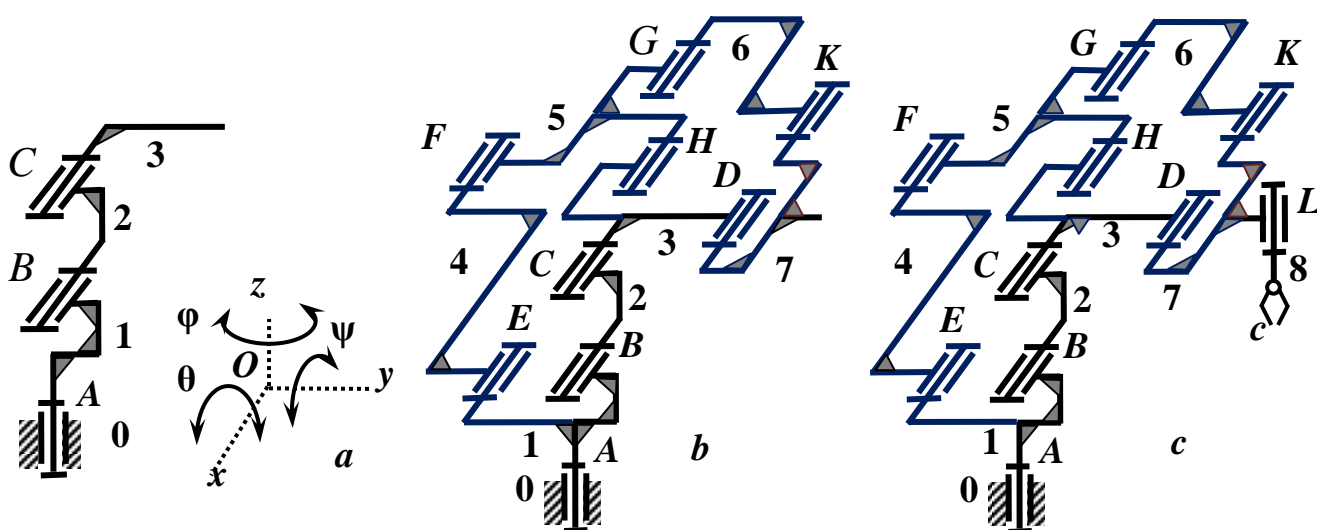


Рис. 9.16. Исходный механизм из звеньев 0, 1, 2, 3 (*a*) и новые механизмы с добавленными звеньями 4, 5, 6, 7 (*b*) и всеми звеньями (*c*)

Манипулятор с такой схемой содержит три подвижных звена ( $n = 3$ ) и столько же одноподвижных вращательных пар  $A, B, C$  ( $p_1 = 3$ ) из звеньев 0 и 1, 1 и 2, 2 и 3. Число  $W$  степеней свободы такого манипулятора равно найдем по формуле (2.1):

$$W = 6n - 5p_1 = 0 + 6 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 3.$$

В соответствии с формулой (2.17) первый замкнутый контур, образованный присоединением группы звеньев 4, 5 ( $m = 2$ ) тремя вращательными парами  $E, F, H$  ( $p_{1m} = 3$ ), вносит три избыточные связи, так как группа звеньев не является самоустанавливающейся (рис. 9.16 *b*):  $q_m = 5p_{1m} - 6m = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 3$ .

Второй замкнутый контур, образованный присоединением группы звеньев 6, 7 ( $m = 2$ ) тремя вращательными парами  $G, K, D$  ( $p_{1m} = 3$ ), вносит дополнительные три избыточные связи, так как группа звеньев не является самоустанавливающейся (рис. 9.16 *b*):  $q_m = 5p_{1m} - 6m = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 3$

Механизм, образованный звеньями 0..7 с двумя замкнутыми контурами (рис. 9.16 *b*), имеет три степени свободы и шесть контурных избыточных связей.

В соответствии с формулой (2.18) присоединение к звену 7 с помощью вращательной пары  $L$  ( $p_{1m} = 1$ ) звена 8 ( $m = 1$ ) со схватом добавляет одну степень свободы:  $W_m = 6m - 5p_{1m} = 6 - 5 = 1$ .

Подвижность звена 8 не является локальной, так как звено 8 служит выходным звеном.

Итак, манипулятор имеет четыре степени свободы и шесть избыточных связей.

Замена вращательных пар  $E, G$  на сферические, а пар  $F, K$  – на цилиндрические превращает механизм в самоустанавливающийся (табл. 2.3).

Формулу строения можно записать так:

1) вращение  $\varphi_{10}$  колонны 1 вокруг оси  $Oz$  вместе с другими звеньями и схватом  $c$  относительно стойки 0;

2) повороты  $\theta_{21}$  звена 2 вместе со звеньями 3 – 8 и схватом относительно звена 1 и  $\theta_{32}$  звена 3 относительно звена 2 вместе со звеньями 4 – 8 и схватом вокруг осей, параллельных  $Ox$  в данном положении;

3) поворот  $\varphi_{87}$  звена 8 вместе со схватом относительно звена 7 вокруг оси, параллельной  $Oz$ .

Отсюда

$$W = [\varphi_{10} + 2 \div 8, c] + [\theta_{21} + 3 \div 8, c] + [\theta_{32} + 4 \div 8, c] + [\varphi_{87} + c].$$

Аналогичный структурный анализ с помощью равенства (2.5) и таблицы 2.3 показывает, что добавление к манипулятору на рисунке 9.11 звеньев 9, 10 и одноподвижных пар  $M, N, P$  приводит к появлению дополнительных трех избыточных связей (рис. 9.12).

## 9.5. Кинематика манипуляторов

### 9.5.1. Прямая задача

Прямая задача кинематики манипулятора состоит в нахождении положения схвата по положениям приводных звеньев. Принятым методом решения прямой задачи служит метод преобразования координат.

Рассмотрим метод преобразования координат на примере исследования движений двух звеньев 1, 2, образующих одноподвижную вращательную пару (рис. 9.17). Каждое звено является приводным, и положение схвата  $c$  однозначно определяется углами поворотов звеньев 1 и 2 в относительных движениях.

С каждым из звеньев свяжем ортогональную, правую декартову систему координат с началом в центре кинематической пары: со стойкой – базовую систему координат  $O_0x_0y_0z_0$  с началом в центре первой кинематической пары; со звеном 1 – систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  с началом в центре второй кинематической пары; со звеном 2, связанным со схватом – систему координат  $O_2x_2y_2z_2$ .

Ось  $O_0z_0$  направим по оси вращения звена 1, ось  $O_1z_1$  – по оси вращения звена 2 относительно звена 1. Ось  $O_1x_1$  направим перпен-

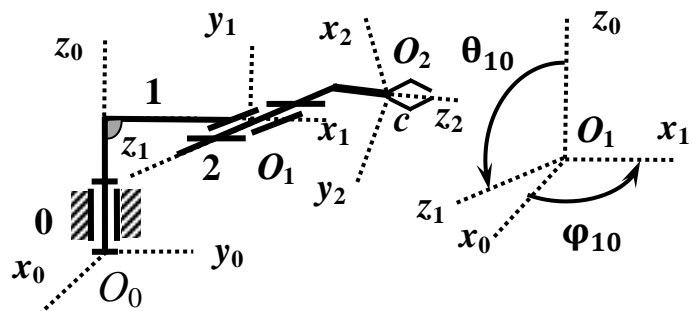


Рис. 9.17. Схема трехзвенного манипулятора с вращательными парами



дикулярно осям  $O_0z_0$  и  $O_1z_1$ , а ось  $O_1y_1$  – перпендикулярно осям  $O_1x_1$  и  $O_1z_1$  так, чтобы при наблюдении с конца оси  $O_1z_1$  кратчайший поворот оси  $O_1x_1$  к оси  $O_1y_1$  происходил против хода стрелки часов.

Пусть заданы 1) угол  $\varphi_{10}$ , образованный осями  $O_1x_1$  и  $O_0x_0$  с отсчетом от оси  $O_0x_0$  в направлении против хода стрелки часов при наблюдении с конца оси  $O_0z_0$ ; 2) угол  $\theta_{10}$ , образованный осями  $O_0z_0$  и  $O_1z_1$  с отсчетом от оси  $O_0z_0$  в направлении против хода стрелки часов при наблюдении с конца оси  $O_1x_1$ ; 3) неизменные координаты  $x_{10}, y_{10}, z_{10}$  точки  $O_1$  относительно системы отсчета  $O_0x_0y_0z_0$ .

Можно доказать, что координаты  $x_{c1}, y_{c1}, z_{c1}$  центра схвата в системе координат  $O_1x_1y_1z_1$  связаны с координатами  $x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}$  схвата в системе координат  $O_0x_0y_0z_0$  следующими равенствами:

$$\begin{cases} x_{c0} = x_{10} + x_{c1} \cos \varphi_{10} - y_{c1} \cos \theta_{10} \sin \varphi_{10} + z_{c1} \sin \theta_{10} \sin \varphi_{10}; \\ y_{c0} = y_{10} + x_{c1} \sin \varphi_{10} + y_{c1} \cos \theta_{10} \cos \varphi_{10} - z_{c1} \sin \theta_{10} \cos \varphi_{10}; \\ z_{c0} = z_{10} + y_{c1} \sin \theta_{10} + z_{c1} \cos \theta_{10} \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_{c0} \\ y_{c0} \\ z_{c0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_{10} & -\cos \theta_{10} \sin \varphi_{10} & \sin \theta_{10} \sin \varphi_{10} \\ \sin \varphi_{10} & \cos \theta_{10} \cos \varphi_{10} & -\sin \theta_{10} \cos \varphi_{10} \\ 0 & \sin \theta_{10} & \cos \theta_{10} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

Для обобщения равенства (9.3) введем следующие обозначения:

$O_i x_i y_i z_i, O_{i+1} x_{i+1} y_{i+1} z_{i+1}$  – правые системы декартовых координат, связанные соответственно со звеном  $i$  и звеном  $i + 1$ , образующими одноподвижную -ю пару;

$a_{i+1 i}$  – расстояние между осями  $O_i z_i$  и  $O_{i+1} z_{i+1}$ ;

$\varphi_{i+1 i}$  – угол, образованный осями  $O_i x_i$  и  $O_{i+1} x_{i+1}$  с отсчетом от оси  $O_i x_i$  в направлении против хода стрелки часов при наблюдении с конца оси  $O_i z_i$ ;

$\theta_{i+1 i}$  – угол, образованный осями  $O_i z_i$  и  $O_{i+1} z_{i+1}$  с отсчетом от оси  $O_i z_i$  в направлении против хода стрелки часов при наблюдении с конца оси  $O_{i+1} x_{i+1}$ ;

$x_{i+1 i}, y_{i+1 i}, z_{i+1 i}$  – координаты точки  $O_{i+1}$  в системе координат  $O_i x_i y_i z_i$ ;

$x_{ci}, y_{ci}, z_{ci}$  – координаты центра схвата относительно системы координат  $O_i x_i y_i z_i$ .

Система координат  $O_i x_i y_i z_i$  подчиняется следующим правилам:

- 1) точка  $O_i$  помещена в центр  $(i + 1)$ -й пары;
- 2) ось  $O_i z_i$  направлена по оси вращения или по оси поступательного движения звена  $i + 1$  относительно звена  $i$ ;
- 3) ось  $O_i x_i$  направлена перпендикулярно осям  $O_i z_i$  и  $O_{i-1} z_{i-1}$  от оси  $O_{i-1} z_{i-1}$ , а ось  $O_i y_i$  – перпендикулярно осям  $O_i x_i$  и  $O_i z_i$  так, чтобы при наблюдении с конца оси  $O_i z_i$  кратчайший поворот оси  $O_i x_i$  к оси  $O_i y_i$  происходил против хода стрелки часов.

Равенству (9.4) можно придать вид рекуррентной формулы:

$$\begin{pmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \\ z_{ci} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i+1 i} \\ y_{i+1 i} \\ z_{i+1 i} \end{pmatrix} + T_{i+1 i} \begin{pmatrix} x_{c i+1} \\ y_{c i+1} \\ z_{c i+1} \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

где

$$T_{i+1 i} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{i+1 i} & -\cos \theta_{i+1 i} \sin \varphi_{i+1 i} & \sin \theta_{i+1 i} \sin \varphi_{i+1 i} \\ \sin \varphi_{i+1 i} & \cos \theta_{i+1 i} \cos \varphi_{i+1 i} & -\sin \theta_{i+1 i} \cos \varphi_{i+1 i} \\ 0 & \sin \theta_{i+1 i} & \cos \theta_{i+1 i} \end{bmatrix}.$$

При заданном расстоянии  $a_{i+1 i}$  между осями  $O_i z_i$  и  $O_{i+1} z_{i+1}$  координаты  $x_{i+1 i}, y_{i+1 i}$  точки  $O_{i+1}$  в системе координат  $O_i x_i y_i z_i$  можно найти по формулам

$$\begin{cases} x_{i+1 i} = a_{i+1 i} \cos \varphi_{i+1 i}; \\ y_{i+1 i} = a_{i+1 i} \sin \varphi_{i+1 i}. \end{cases}$$

Заметим, что матрица  $T_{i+1 i}$  равна произведению матриц  $T_{i i+1}^z$  и  $T_{i i+1}^x$ , описывающих преобразование координат точки в системе координат  $O_i x_i y_i z_i$  после поворота вокруг оси  $O_i z_i$  на угол  $\varphi_{i+1 i}$  и затем – вокруг оси  $O_i x_i$  на угол  $\theta_{i+1 i}$ :

$$T_{i i+1}^z = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{i+1 i} & -\sin \varphi_{i+1 i} & 0 \\ \sin \varphi_{i+1 i} & \cos \varphi_{i+1 i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; T_{i i+1}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{i+1 i} & -\sin \theta_{i+1 i} \\ 0 & \sin \theta_{i+1 i} & \cos \theta_{i+1 i} \end{bmatrix}.$$

В робототехнике исходные определения и равенство (9.4), записанное с помощью квадратной матрицы четвертого порядка, называются представлением Денавита – Хартенберга [17]:

$$\begin{pmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \\ z_{ci} \\ 1 \end{pmatrix} = T_{i+1i} \begin{pmatrix} x_{ci+1} \\ y_{ci+1} \\ z_{ci+1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

где  $a_{i+1i}$  – расстояние между осями  $O_i z_i$  и  $O_{i+1} z_{i+1}$ ;

$d_{i+1i}$  – расстояние между прямыми, на которых измеряются расстояния  $a_{i+1i}$  и  $a_{ii-1}$ ;

$$T_{i+1i} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{i+1i} & -\cos \theta_{i+1i} \sin \varphi_{i+1i} & \sin \theta_{i+1i} \sin \varphi_{i+1i} & a_{i+1i} \cos \varphi_{i+1i} \\ \sin \varphi_{i+1i} & \cos \theta_{i+1i} \cos \varphi_{i+1i} & -\sin \theta_{i+1i} \cos \varphi_{i+1i} & a_{i+1i} \sin \varphi_{i+1i} \\ 0 & \sin \theta_{i+1i} & \cos \theta_{i+1i} & d_{i+1i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть  $n$  – число приводных звеньев и число степеней свободы.

Расчет по формуле (9.5) начинают с первой итерации перехода от  $k$ -го звена, с которым связан схват, к  $(n - 1)$ -му звену. При переходе от  $(k + 1)$ -го звена к  $k$ -му должны быть заданы или определены углы  $\varphi_{k+1k}$ ,  $\theta_{k+1k}$  и координаты  $x_{k+1k}$ ,  $y_{k+1k}$ ,  $z_{k+1k}$  начала  $(k + 1)$ -й системы координат относительно  $k$ -й.

Координаты, или закон движения схвата относительно стойки определяют на последней итерации по формуле (9.5).

Рассмотрим пример решения прямой задачи о положении схвата четырехзвенного манипулятора с тремя вращательными парами (рис. 9.18).

Пусть заданы следующие параметры:

- 1) положения и ориентации систем координат  $O_0 x_0 y_0 z_0$ ,  $O_1 x_1 y_1 z_1$ ,  $O_2 x_2 y_2 z_2$ ,  $O_3 x_3 y_3 z_3$ , связанных со звеньями 0, 1, 2, 3, в которых оси  $O_0 z_0$  и  $O_1 z_1$  – перпендикулярны, оси  $O_1 z_1$  и  $O_2 z_2$  – параллельны; 2)  $\varphi_{10} = 90^\circ$ ,  $\theta_{10} = 90^\circ$ ;
- 3)  $\varphi_{21} = 30^\circ$ ,  $\theta_{21} = 0^\circ$ ; 4)  $\varphi_{32} = -120^\circ$ ,  $\theta_{32} = -90^\circ$ ; 5)  $a_{10} = 2$ ,

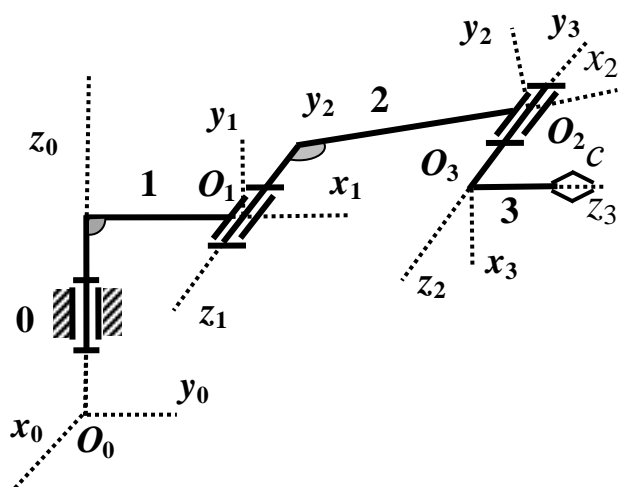


Рис. 9.18. Пространственная структурная схема четырехзвенного манипулятора

$x_{10} = a_{10} \cdot \cos \varphi_{10} = 0$ ,  $y_{10} = a_{10} \cdot \sin \varphi_{10} = 2$ ,  $z_{10} = 4$ ; 6)  $a_{21} = 2$ ,  
 $x_{21} = a_{21} \cdot \cos \varphi_{21} = 1,7$ ,  $y_{21} = a_{21} \cdot \sin \varphi_{21} = 1$ ,  $z_{21} = -1$ ; 7)  $a_{32} = 0$ ,  
 $x_{32} = a_{32} \cdot \cos \varphi_{32} = 0$ ,  $y_{32} = a_{32} \cdot \sin \varphi_{32} = 0$ ,  $z_{32} = 2$ ; 8)  $x_{c3} = 0$ ,  
 $y_{c3} = 0$ ,  $z_{c3} = 1$ .

Прямая задача заключается в том, чтобы определить координаты  $x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}$  точки  $c$  схвата в базовой системе координат  $O_0x_0y_0z_0$ . Для этого воспользуемся формулой (9.5) и осуществим три итерации.

На первом шагу ( $i = 2$ ) формула (9.5) имеет такой вид:

$$\begin{pmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_{32} & -\cos \theta_{32} \sin \varphi_{32} & \sin \theta_{32} \sin \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{32} & \cos \theta_{32} \cos \varphi_{32} & -\sin \theta_{32} \cos \varphi_{32} \\ 0 & \sin \theta_{32} & \cos \theta_{32} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \\ z_{c3} \end{pmatrix},$$

ИЛИ

$$\begin{pmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0,86 \\ -0,86 & 0 & -0,5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \\ z_{c3} \end{pmatrix},$$

ИЛИ

$$\begin{cases} x_{c2} = 0 - 0,5 x_{c3} + 0,86 z_{c3}; \\ y_{c2} = 0 - 0,86 x_{c3} - 0,5 z_{c3}; \\ z_{c2} = 2 - y_{c3} + z_{c3}. \end{cases}$$

На втором шагу ( $i = 1$ ) формула (9.5) принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_{21} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} & -\cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} & \sin \theta_{21} \sin \varphi_{21} \\ \sin \varphi_{21} & \cos \theta_{21} \cos \varphi_{21} & -\sin \theta_{21} \cos \varphi_{21} \\ 0 & \sin \theta_{21} & \cos \theta_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{pmatrix},$$

ИЛИ

$$\begin{pmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0,86 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,86 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{pmatrix},$$

ИЛИ

$$\begin{cases} x_{c1} = 1,7 + 0,86 x_{c2} + 0,5 y_{c2}; \\ y_{c1} = 1 + 0,5 x_{c2} + 0,86 y_{c2}; \\ z_{c1} = -1 + z_{c2} \end{cases}.$$

На третьем шагу ( $i = 0$ ) формулу (9.5) запишем так:

$$\begin{pmatrix} x_{c0} \\ y_{c0} \\ z_{c0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_{10} & -\cos \theta_{10} \sin \varphi_{10} & \sin \theta_{10} \sin \varphi_{10} \\ \sin \varphi_{10} & \cos \theta_{10} \cos \varphi_{10} & -\sin \theta_{10} \cos \varphi_{10} \\ 0 & \sin \theta_{10} & \cos \theta_{10} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} x_{c0} \\ y_{c0} \\ z_{c0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_{c0} = z_{c1} = -1 + z_{c2} = 1 - y_{c3} + z_{c3}; \\ y_{c0} = 2 + x_{c1} = 3,7 + 0,86 x_{c2} + 0,5 y_{c2} = 3,7 - 0,86 x_{c3} + 0,5 z_{c3}; \\ z_{c0} = 4 + y_{c1} = 5 + 0,5 x_{c2} + 0,86 y_{c2} = 5 - x_{c3}. \end{cases}$$

При замене третьей пары поступательной парой ось  $O_3z_3$  следует направить вдоль оси поступательного движения звена 3 относительно звена 2.

Формулу (9.5) можно использовать и для определения уравнений движения центра схвата относительно стойки. Для этого необходимо задать законы движения приводных звеньев.

В манипуляторах с параллельными и перпендикулярными осями вращений звеньев оси координат  $O_i x_i$  и  $O_{i+1} x_{i+1}$  можно выбрать так, чтобы при параллельном переносе они находились в плоскости вращения звена  $i + 1$  относительно звена  $i$  (рис.

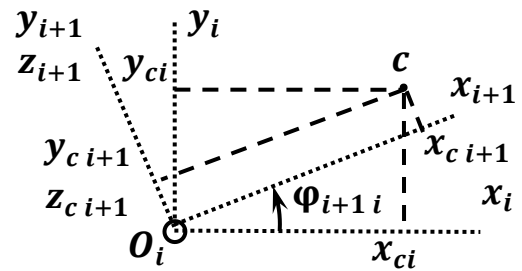


Рис. 9.19. Координаты точки  $c$  в исходной и повернутой системах координат

9.19). При этом угол  $\varphi_{i+1 i}$  равен углу поворота звена  $i + 1$  относительно звена  $i$ . Правила отсчета угла поворота соответствуют правилам отсчета угла  $\varphi_{i+1 i}$ .

Чтобы найти уравнения движения схвата, в формуле (9.5) для звеньев, образующих вращательную пару, под  $\varphi_{i+1 i}$  следует понимать заданный закон вращения звена  $i + 1$  относительно звена  $i$ :

$$\begin{cases} \varphi_{i+1 i} = \varphi_{i+1 i}(t); \\ \theta_{i+1 i} = 0^\circ \text{ или } \theta_{i+1 i} = \pm 90^\circ. \end{cases}$$

Пусть звено  $i + 1$  вместе с системой координат  $O_{i+1} x_{i+1} y_{i+1} z_{i+1}$  движется поступательно относительно звена  $i$  вдоль оси  $O_i z_i$  (рис. 9.20). В этом случае при определении уравнений движения схвата с

помощью формулы (9.5), необходимо задавать закон движения звена  $i + 1$ , образующего поступательную пару со звеном  $i$ , в системе координат  $O_i x_i y_i z_i$ :

$$\begin{cases} z_{i+1 i} = z_{i+1 i}(t); \\ \varphi_{i+1 i} = 0^\circ \text{ или } \varphi_{i+1 i} = \pm 90^\circ; \\ \theta_{i+1 i} = 0^\circ \text{ или } \theta_{i+1 i} = \pm 90^\circ. \end{cases}$$

Координаты схвата в базовой системе координат можно выразить в виде функций обобщенных координат, то есть углов поворотов или перемещений приводных звеньев в относительных движениях.

Формула (9.5) упрощает расчет координат, скорости и ускорения схвата, так как вместо «громоздких функций» используются простые рекуррентные соотношения, удобные для вычислений на компьютере.

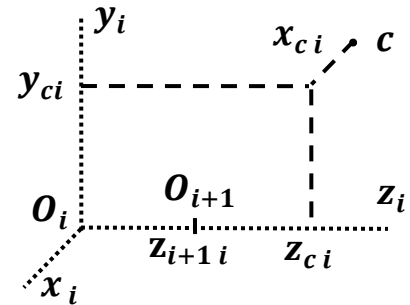


Рис. 9.20. Точки  $O_i$  и  $O_{i+1}$

### 9.5.2. Закон движения, скорость и ускорение схвата

Пусть  $\dot{x}_{ci}, \dot{y}_{ci}, \dot{z}_{ci}$  и  $\ddot{x}_{ci}, \ddot{y}_{ci}, \ddot{z}_{ci}$  – первые и вторые производные по времени от функций координат  $x_{ci}, y_{ci}, z_{ci}$  центра схвата в системе координат  $O_i x_i y_i z_i$ , связанной со звеном  $i$ . Рекуррентные формулы для вычисления координат векторов скорости и ускорения центра схвата следуют из формулы (9.4):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{ci} \\ \dot{y}_{ci} \\ \dot{z}_{ci} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{i+1 i} \\ \dot{y}_{i+1 i} \\ \dot{z}_{i+1 i} \end{pmatrix} + \dot{T}_{i+1 i} \begin{pmatrix} x_{ci+1} \\ y_{ci+1} \\ z_{ci+1} \end{pmatrix} + T_{i+1 i} \begin{pmatrix} \dot{x}_{ci+1} \\ \dot{y}_{ci+1} \\ \dot{z}_{ci+1} \end{pmatrix}, \quad (9.5)$$

где

$$\dot{T}_{i+1 i} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_{i+1 i} \sin \varphi_{i+1 i} & -\cos \theta_{i+1 i} \dot{\varphi}_{i+1 i} \cos \varphi_{i+1 i} & \sin \theta_{i+1 i} \dot{\varphi}_{i+1 i} \cos \varphi_{i+1 i} \\ \dot{\varphi}_{i+1 i} \cos \varphi_{i+1 i} & -\cos \theta_{i+1 i} \dot{\varphi}_{i+1 i} \sin \varphi_{i+1 i} & \sin \theta_{i+1 i} \dot{\varphi}_{i+1 i} \sin \varphi_{i+1 i} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогично

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_{ci} \\ \ddot{y}_{ci} \\ \ddot{z}_{ci} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{i+1 i} \\ \ddot{y}_{i+1 i} \\ \ddot{z}_{i+1 i} \end{pmatrix} + T_{i+1 i} \begin{pmatrix} \ddot{x}_{ci+1} \\ \ddot{y}_{ci+1} \\ \ddot{z}_{ci+1} \end{pmatrix} + 2\dot{T}_{i+1 i} \begin{pmatrix} \dot{x}_{ci+1} \\ \dot{y}_{ci+1} \\ \dot{z}_{ci+1} \end{pmatrix} + \ddot{T}_{i+1 i} \begin{pmatrix} x_{ci+1} \\ y_{ci+1} \\ z_{ci+1} \end{pmatrix}, \quad (9.6)$$

где

$$\ddot{T}_{i+1i} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \cos \varphi_{i+1i} & -\cos \theta_{i+1i} \frac{d^2}{dt^2} \sin \varphi_{i+1i} & \sin \theta_{i+1i} \frac{d^2}{dt^2} \sin \varphi_{i+1i} \\ \frac{d^2}{dt^2} \sin \varphi_{i+1i} & \cos \theta_{i+1i} \frac{d^2}{dt^2} \cos \varphi_{i+1i} & -\sin \theta_{i+1i} \frac{d^2}{dt^2} \cos \varphi_{i+1i} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если в системе координат, связанной со звеном, несущим схват, центр схвата неподвижен, то координаты его векторов скорости и ускорения на первой итерации в формулах (9.6), (9.7) равны нулю.

Найдем закон движения и скорость центра схвата манипулятора с тремя степенями свободы и тремя приводными звеньями (рис. 9.21).

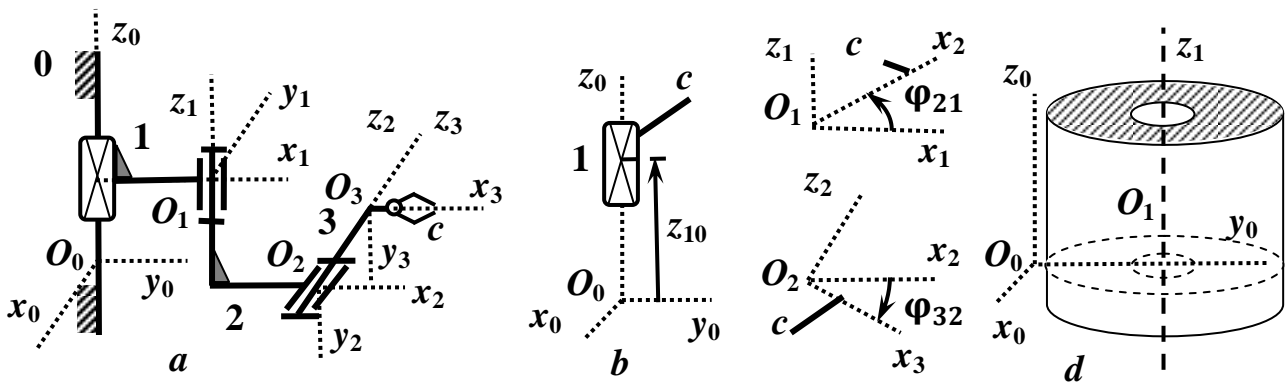


Рис. 9.21. Пространственная структурная схема манипулятора (а), системы координат (b) и рабочая зона манипулятора (d)

Введем следующие обозначения:

$O_0x_0y_0z_0, O_1x_1y_1z_1, O_2x_2y_2z_2, O_3x_3y_3z_3$  – системы координат, связанные со звеньями 0, 1, 2, 3, причем звенья 0 и 1 образуют поступательную пару, звенья 1 и 2 – вращательную пару, 2 и 3 – вращательную пару;

$x_{i+1i}, y_{i+1i}, z_{i+1i}$  – координаты точки  $O_{i+1}$  в системе координат  $O_ix_iy_iz_i$  ( $i = 0, 1, 2$ );

$d_{i+1i}$  – заданные и не изменяющиеся расстояния между осями  $O_iz_i$  и  $O_{i+1}z_{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2$ );

$\theta_{i+1i}$  – заданные и не изменяющиеся углы, образованные осями  $O_iz_i$  и  $O_{i+1}z_{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2$ );

$\varphi_{i+1i}$  – углы, образованные осями  $O_ix_i$  и  $O_{i+1}x_{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2$ );

$x_{ci}, y_{ci}, z_{ci}$  – координаты центра схвата в системе координат  $O_i x_i y_i z_i$  ( $i = 0, 1, 2$ );

$x_{c3}, y_{c3}, z_{c3}$  – заданные координаты центра схвата в системе координат  $O_3 x_3 y_3 z_3$ ;

$\dot{x}_{ci}, \dot{y}_{ci}, \dot{z}_{ci}$  – первые производные по времени от функций координат  $x_{ci}, y_{ci}, z_{ci}$  схвата ( $i = 1, 2, 3$ );

$\dot{x}_{c0}, \dot{y}_{c0}, \dot{z}_{c0}$  – искомые координаты скорости центра схвата в системе координат  $O_0 x_0 y_0 z_0$ ;

$z_{10} = z_{10}(t)$  – заданный закон поступательного движения центра ползуна 1 и точки  $O_1$  вдоль оси  $O_0 z_0$  стойки;

$\varphi_{21} = \varphi_{21}(t)$  – заданный закон вращательного движения звена 2 вокруг оси  $O_1 z_1$ , связанной с ползуном 1 (при вращении звена по ходу положительного направления отсчета угол поворота увеличивается, иначе – уменьшается);

$\varphi_{32} = \varphi_{32}(t)$  – заданный закон вращательного движения звена 3 вокруг оси  $O_2 z_2$ , связанной со звеном 2 (при вращении звена по ходу положительного направления отсчета угол поворота увеличивается).

В соответствии со схемой на рис. 9.21 слева

$$\varphi_{10} = 90^\circ, \theta_{10} = 0^\circ, \theta_{21} = -90^\circ, \theta_{32} = 0^\circ, x_{10} = 0, y_{10} = d_{10},$$

$$z_{10} = z_{10}(t), x_{21} = d_{21} \cos \varphi_{21}(t), y_{21} = d_{21} \sin \varphi_{21}(t),$$

$$z_{21} = \text{const}, x_{32} = 0, y_{32} = 0, z_{32} = \text{const}.$$

На первом шагу ( $i = 2$ ) по формулам (9.5), (9.6) найдем уравнения движения и скорость центра схвата в системе координат  $O_2 x_2 y_2 z_2$ :

$$\begin{pmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix} + A_{32} \begin{pmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \\ z_{c3} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_{c2} \\ \dot{y}_{c2} \\ \dot{z}_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{32} \\ \dot{y}_{32} \\ \dot{z}_{32} \end{pmatrix} + \dot{A}_{32} \begin{pmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \\ z_{c3} \end{pmatrix} + A_{32} \begin{pmatrix} \dot{x}_{c3} \\ \dot{y}_{c3} \\ \dot{z}_{c3} \end{pmatrix},$$

где

$$T_{32} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{32} & -\cos \theta_{32} \sin \varphi_{32} & \sin \theta_{32} \sin \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{32} & \cos \theta_{32} \cos \varphi_{32} & -\sin \theta_{32} \cos \varphi_{32} \\ 0 & \sin \theta_{32} & \cos \theta_{32} \end{bmatrix};$$

$$\dot{T}_{32} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_{32} \sin \varphi_{32} & -\cos \theta_{32} \dot{\varphi}_{32} \cos \varphi_{32} & \sin \theta_{32} \dot{\varphi}_{32} \cos \varphi_{32} \\ \dot{\varphi}_{32} \cos \varphi_{32} & -\cos \theta_{32} \dot{\varphi}_{32} \sin \varphi_{32} & \sin \theta_{32} \dot{\varphi}_{32} \sin \varphi_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$



ИЛИ

$$\begin{cases} x_{c2} = x_{c3} \cos \varphi_{32}(t) - y_{c3} \sin \varphi_{32}(t); \\ y_{c2} = x_{c3} \sin \varphi_{32}(t) + y_{c3} \cos \varphi_{32}(t); \\ z_{c2} = z_{32} + z_{c3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{c2} = \dot{x}_{c3} \cos \varphi_{32}(t) - \dot{y}_{c3} \sin \varphi_{32}(t) - x_{c3} \dot{\varphi}_{32} \sin \varphi_{32}(t) - y_{c3} \dot{\varphi}_{32} \cos \varphi_{32}(t); \\ \dot{y}_{c2} = \dot{x}_{c3} \sin \varphi_{32}(t) + \dot{y}_{c3} \cos \varphi_{32}(t) + x_{c3} \dot{\varphi}_{32} \cos \varphi_{32}(t) - y_{c3} \dot{\varphi}_{32} \sin \varphi_{32}(t); \\ \dot{z}_{c2} = \dot{z}_{c3}. \end{cases}$$

На втором шагу ( $i = 1$ ) найдем закон движения и скорость в системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ :

$$\begin{pmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_{21} \end{pmatrix} + T_{21} \begin{pmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_{c1} \\ \dot{y}_{c1} \\ \dot{z}_{c1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{y}_{21} \\ \dot{z}_{21} \end{pmatrix} + \dot{T}_{21} \begin{pmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{pmatrix} + T_{21} \begin{pmatrix} \dot{x}_{c2} \\ \dot{y}_{c2} \\ \dot{z}_{c2} \end{pmatrix},$$

где

$$T_{21} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} & -\cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} & \sin \theta_{21} \sin \varphi_{21} \\ \sin \varphi_{21} & \cos \theta_{21} \cos \varphi_{21} & -\sin \theta_{21} \cos \varphi_{21} \\ 0 & \sin \theta_{21} & \cos \theta_{21} \end{bmatrix};$$

$$\dot{T}_{21} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21} & -\cos \theta_{21} \dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21} & \sin \theta_{21} \dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21} \\ \dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21} & -\cos \theta_{21} \dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21} & \sin \theta_{21} \dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ИЛИ

$$\begin{cases} x_{c1} = d_{21} \cos \varphi_{21}(t) + x_{c2} \cos \varphi_{21}(t) - z_{c2} \sin \varphi_{21}(t); \\ y_{c1} = d_{21} \sin \varphi_{21}(t) + x_{c2} \sin \varphi_{21}(t) + z_{c2} \cos \varphi_{21}(t); \\ z_{c1} = z_{21} - y_{c2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{c1} = -d_{21} \dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21} + \dot{x}_{c2} \cos \varphi_{21} - \dot{z}_{c2} \sin \varphi_{21} - x_{c2} \dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21} + z_{c2} \dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}; \\ \dot{y}_{c1} = d_{21} \dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21} + \dot{x}_{c2} \sin \varphi_{21} + \dot{z}_{c2} \cos \varphi_{21} + x_{c2} \dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21} - z_{c2} \dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}; \\ \dot{z}_{c1} = -\dot{y}_{c2}. \end{cases}$$

На третьем шагу ( $i = 0$ )

$$\begin{pmatrix} x_{c0} \\ y_{c0} \\ z_{c0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix} + T_{10} \begin{pmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_{c0} \\ \dot{y}_{c0} \\ \dot{z}_{c0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{y}_{10} \\ \dot{z}_{10} \end{pmatrix} + \dot{T}_{10} \begin{pmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{pmatrix} + T_{10} \begin{pmatrix} \dot{x}_{c1} \\ \dot{y}_{c1} \\ \dot{z}_{c1} \end{pmatrix},$$

где  $T_{10} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{10} & -\cos \theta_{10} \sin \varphi_{10} & \sin \theta_{10} \sin \varphi_{10} \\ \sin \varphi_{10} & \cos \theta_{10} \cos \varphi_{10} & -\sin \theta_{10} \cos \varphi_{10} \\ 0 & \sin \theta_{10} & \cos \theta_{10} \end{bmatrix};$

$$\dot{T}_{10} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_{10} \sin \varphi_{10} & -\cos \theta_{10} \dot{\varphi}_{10} \cos \varphi_{10} & \sin \theta_{10} \dot{\varphi}_{10} \cos \varphi_{10} \\ \dot{\varphi}_{10} \cos \varphi_{10} & -\cos \theta_{10} \dot{\varphi}_{10} \sin \varphi_{10} & \sin \theta_{10} \dot{\varphi}_{10} \sin \varphi_{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0],$$

ИЛИ

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{c0} = x_{10} - y_{c1}; \\ y_{c0} = y_{10} + x_{c1}; \\ z_{c0} = z_{10}(t) + z_{c1}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{c0} = -\dot{y}_{c1}; \\ \dot{y}_{c0} = \dot{x}_{c1}; \\ \dot{z}_{c0} = \dot{z}_{10}(t) + \dot{z}_{c1}. \end{array} \right.$$

Полученные формулы служат алгоритмом расчета на компьютере координат положения и скорости центра схвата в каждый момент времени.

В рассматриваемом примере  $x_{c3}, y_{c3}, z_{c3}$  – заданные константы:

$$\dot{x}_{c3} = 0; \dot{y}_{c3} = 0; \dot{z}_{c3} = 0.$$

Чтобы найти уравнения движения и аналитические выражения координат скорости центра схвата в базовой системе координат, достаточно в последние соотношения вместо  $x_{c1}, y_{c1}, z_{c1}, \dot{x}_{c1}, \dot{y}_{c1}, \dot{z}_{c1}$  подставить их выражения на втором шаге итераций, а затем вместо  $x_{c2}, y_{c2}, z_{c2}, \dot{x}_{c2}, \dot{y}_{c2}, \dot{z}_{c2}$  их выражения на первом шагу:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{c0} = -[d_{21} + x_{c3} \cos \varphi_{32}(t) - y_{c3} \sin \varphi_{32}(t)] \sin \varphi_{21}(t) - (z_{32} + z_{c3}) \cos \varphi_{21}(t); \\ y_{c0} = d_{10} + [d_{21} + x_{c3} \cos \varphi_{32}(t) - y_{c3} \sin \varphi_{32}(t)] \cos \varphi_{21}(t) - (z_{32} + z_{c3}) \sin \varphi_{21}(t); \\ z_{c0} = z_{10}(t) + z_{21} - x_{c3} \sin \varphi_{32}(t) - y_{c3} \cos \varphi_{32}(t). \end{array} \right. (9.7)$$

Равенства (9.7) являются законом движения центра схвата в координатном виде в базовой системе координат.

Аналогично в базовой системе координат можно записать и координаты векторов скорости и ускорения центра схвата. Ввиду громоздкости аналитических выражений они не приводятся. При решении прямой задачи на компьютере в этом нет необходимости, так как для построения траектории и определения скорости и ускорения схвата достаточно рекуррентных соотношений (9.5) – (9.7).

Наряду с точными аналитическими методами определения огибающих поверхностей рабочую зона манипулятора можно оценить методом построения планов положений схвата, как показано в главе 2. Чтобы воспользоваться методом засечек, надо поочередно оставлять одну подвижность, фиксируя положения звеньев с оставшимися подвижностями. Так, при разных фиксированных положениях ползуна 1 и звена 2 можно определить положения схвата, соответствующие различным углам поворота звена 3 относительно звена 2.

Так, рабочей зоной манипулятора на рисунке 9.21 служит полый цилиндр, если ограничения на перемещения и углы поворота приводных звеньев отсутствуют и справедливо неравенство

$$d_{10} > \sqrt{(d_{21} + \sqrt{x_{c3}^2 + y_{c3}^2})^2 + (z_{32} + z_{c3})^2}.$$

### 9.5.3. Обратная задача и элементы динамики манипулятора

Обратная задача о положении манипулятора состоит в том, чтобы по заданному положению схвата определить значения обобщенных координат, то есть углы поворота и/или поступательные перемещения приводных звеньев.

Положение схвата в пространстве характеризуется шестью величинами: тремя координатами центра и тремя углами ориентации системы координат, связанной со схватом. Поэтому однозначное решение обратной задачи возможно, если манипулятор имеет шесть степеней свободы.

Обратная задача положения центра схвата состоит в том, чтобы по заданному положению и/или закону движения схвата определить величины обобщенных координат и/или соответственно законы относительных движений приводных звеньев манипулятора. Однозначное решение обратной задачи о положении центра манипулятора возможно, если манипулятор имеет три степени свободы: теоретически уравнения (9.8) позволяют определить законы движения приводных звеньев  $z_{10}(t)$ ,  $\varphi_{21}(t)$ ,  $\varphi_{32}(t)$  по закону движения центра схвата  $x_{c0}(t)$ ,  $y_{c0}(t)$ ,  $z_{c0}(t)$  пространственного манипулятора с тремя степенями свободы.

Первой задачей динамики манипулятора можно считать задачу определения движущих сил и реакций звеньев в кинематических парах по заданным законам относительного движения звеньев. Покажем один из способов определения реакций звеньев в кинематических парах манипулятора, кинематический расчет которого представлен в разделе 9.4.2 (рис. 9.21).

Введем следующие обозначения (рис. 9.22):

$c_i x_i y_i z_i$  – подвижная декартова система координат, неизменно связанная со звеном  $i$  с началом  $c_i$  в центре масс звена и осями, совпадающими с главными центральными осями инерции звена ( $i = 0, 1, 2$ );

$J_{ix}, J_{iy}, J_{iz}$  – известные и неизменяемые главные моменты инерции звена  $i$  относительно осей  $c_i x_i, c_i y_i, c_i z_i$  ( $i = 0, 1, 2$ );

$\vec{\omega}_{21}, \vec{\omega}_{32}$  – известные векторы угловых скоростей звена 2 относительно оси звена 1, звена 3 относительно звена 2;

$\vec{F}_1$  и  $\vec{\mathfrak{M}}_2, \vec{\mathfrak{M}}_3$  – сила, приводящая в движение звено 1, и моменты пар сил, приводящих во вращение звено 2, звено 3;

$\vec{F}_{ij}$  и  $\vec{M}_{ij}$  – реакция и момент пары сил реакций, действующих на звено  $i$  со стороны звена  $j$  ( $i = 0, 1, 2; j = i + 1; i = 1, 2, 3; j = i - 1$ );

$m_1, m_2, m_3$  – массы звеньев 1, 2 и 3 со схватом соответственно;

$\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$  – вес звеньев 1, 2 и 3 со схватом соответственно.

Неизвестными в данной задаче динамики служат величина движущей силы  $\vec{F}_1$ , моменты  $\vec{\mathfrak{M}}_2, \vec{\mathfrak{M}}_3$  пар движущих сил и реакции связей.

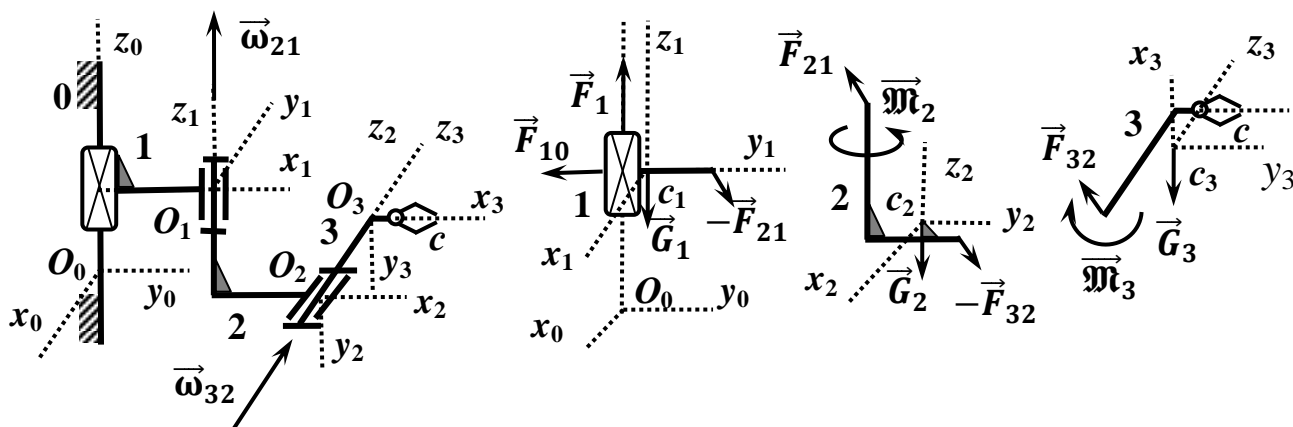


Рис. 9.22. Движущие силы и реакции в кинематических парах

Для определения неизвестных необходимо составить дифференциальные уравнения движения каждого звена.

Сначала составим систему уравнений движения последнего звена 3, включая схват. Она состоит из трех дифференциальных уравнений движения центра масс звена относительно базовой системы координат  $O_0x_0y_0z_0$  и трех дифференциальных уравнений движения звена около центра масс относительно подвижной системы координат  $c_3x_3y_3z_3$ .

Функции от времени зависимостей координат  $x_3(t)$ ,  $y_3(t)$ ,  $z_3(t)$  центра масс звена 3 и проекций  $\ddot{x}_3(t)$ ,  $\ddot{y}_3(t)$ ,  $\ddot{z}_3(t)$  ускорения центра масс на оси базовой системы координат можно найти методами кинематики, аналогичными тем, с помощью которых определяют кинематические характеристики центра схвата.

Вектор  $\vec{\omega}_3$  угловой скорости звена 3 относительно стойки равен векторной сумме угловых скоростей всех звеньев до звена 3 включительно:  $\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{32}$ .

По ориентации системы координат  $c_3x_3y_3z_3$  относительно базовой системы  $O_0x_0y_0z_0$  можно найти проекции  $\omega_{3x}$ ,  $\omega_{3y}$ ,  $\omega_{3z}$  вектора  $\vec{\omega}_3$  на оси  $c_3x_3$ ,  $c_3y_3$ ,  $c_3z_3$ . Если ось  $O_2z_2$  относительного вращения звена 3 параллельна оси  $c_3z_3$ , то вектор  $\vec{\omega}_{21}$  направлен перпендикулярно оси  $c_3z_3$  и образует угол  $\varphi_{32}$  с осью  $c_3x_3$ , а вектор  $\vec{\omega}_{32}$  параллелен оси  $c_3z_3$ :

$$\begin{cases} \omega_{3x} = \dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{32}; \\ \omega_{3y} = -\dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{32}; \\ \omega_{3z} = \dot{\varphi}_{32}. \end{cases}$$

Систему уравнений движения звена 3 со схватом запишем так:

$$\begin{cases} m_3 \ddot{x}_3 = F_{32x}; \\ m_3 \ddot{y}_3 = F_{32y}; \\ m_3 \ddot{z}_3 = F_{32z} - G_3; \\ J_{3x} \dot{\omega}_{3x} = M_{32x} + F_{z32} y_{32} - F_{y32} z_{32}; \\ J_{3y} \dot{\omega}_{3y} = M_{32y} - F_{z32} x_{32} + F_{x32} z_{32}; \\ J_{3z} \dot{\omega}_{3z} = \mathfrak{M}_3 + M_{32z} + F_{y32} x_{32} - F_{x32} y_{32}, \end{cases} \quad (9.8)$$

где

$F_{32x}, F_{32y}, F_{32z}$  – координаты силы  $\vec{F}_{32}$  в базовой системе координат;

$F_{x32}, F_{y32}, F_{z32}$  – координаты силы  $\vec{F}_{32}$  в системе координат  $C_3x_3y_3z_3$ ;

$x_{32}, y_{32}, z_{32}$  – неизменные координаты точки приложения силы  $\vec{F}_{32}$  на звене 3 в системе координат  $C_3x_3y_3z_3$ ;

$M_{32x}, M_{32y}, M_{32z}$  – координаты вектора  $\vec{M}_{32}$  в системе координат  $C_3x_3y_3z_3$ .

Между проекциями  $F_{32x}, F_{32y}, F_{32z}$  и  $F_{x32}, F_{y32}, F_{z32}$  вектора  $\vec{F}_{32}$  в базовой и подвижной системах координат существует связь, которая устанавливается методом преобразования координат:

$$\begin{pmatrix} F_{32x} \\ F_{32y} \\ F_{32z} \end{pmatrix} = T_{30} \begin{pmatrix} F_{x32} \\ F_{y32} \\ F_{z32} \end{pmatrix}, \quad (9.9)$$

где

$$T_{30} = \begin{bmatrix} \sin \varphi_{32} \sin \varphi_{21} & -\cos \varphi_{32} \sin \varphi_{21} & -\cos \varphi_{21} \\ -\sin \varphi_{32} \cos \varphi_{21} & \cos \varphi_{32} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} \\ \cos \varphi_{32} & \sin \varphi_{32} & 0 \end{bmatrix}.$$

При отсутствии трения в кинематической паре, образованной звеньями 2 и 3, верно равенство  $M_{32z} = 0$ .

Таким образом, уравнения (9.8) и (9.9) позволяют найти  $F_{x32}, F_{y32}, F_{z32}$  и  $F_{32x}, F_{32y}, F_{32z}$ , то есть вектор  $\vec{F}_{32}$ , а также моменты пар реакций  $M_{32x}$  в плоскости  $C_3y_3z_3$ ,  $M_{32y}$  – в плоскости  $C_3x_3z_3$  и момент  $\mathfrak{M}_{3z}$  движущей пары сил в плоскости  $C_3x_3y_3$ .

Уравнения движения звена 2 выводим аналогично уравнениям для звена 3:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 = F_{23x} + F_{21x}; \\ m_2 \ddot{y}_2 = F_{23y} + F_{21y}; \\ m_2 \ddot{z}_2 = F_{23z} + F_{21z} - G_2; \\ J_{2x} \dot{\omega}_{2x} = M_{21x} + M_{23x} + F_{z23} y_{23} - F_{y23} z_{23} + F_{z21} y_{21} - F_{y21} z_{21}; \\ J_{2y} \dot{\omega}_{2y} = M_{21y} + M_{23y} - F_{z23} x_{23} + F_{x23} z_{23} - F_{z21} x_{21} + F_{x21} z_{21}; \\ J_{2z} \dot{\omega}_{2z} = \mathfrak{M}_2 + M_{21z} + M_{23z} + F_{y23} x_{23} - F_{x23} y_{23} + F_{y21} x_{21} - F_{x21} y_{21}, \end{cases} \quad (9.10)$$

где  $\omega_{2x}, \omega_{2y}, \omega_{2z}$  – проекции вектора  $\vec{\omega}_2$  на оси  $C_2x_2, C_2y_2, C_2z_2$ ;

$F_{23x}, F_{23y}, F_{23z}$  и  $F_{21x}, F_{21y}, F_{21z}$  – координаты векторов  $\vec{F}_{23}$  и  $\vec{F}_{21}$  в базовой системе координат;

$F_{x23}, F_{y23}, F_{z23}$  и  $F_{x21}, F_{y21}, F_{z21}$  – координаты векторов  $\vec{F}_{23}$  и  $\vec{F}_{21}$  в системе координат  $c_2x_2y_2z_2$ ;

$x_{23}, y_{23}, z_{23}$  и  $x_{21}, y_{21}, z_{21}$  – неизменные координаты точек приложения сил  $\vec{F}_{23}$  и  $\vec{F}_{21}$  на звене 2 в системе координат  $c_2x_2y_2z_2$ ;

$M_{21x}, M_{21y}, M_{21z}$  и  $M_{23x}, M_{23y}, M_{23z}$  – координаты векторов  $\vec{M}_{21}$  и  $\vec{M}_{23}$  в системе координат  $c_2x_2y_2z_2$ .

По условию,

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_{21}.$$

Учитывая ориентацию системы координат  $c_2x_2y_2z_2$  с вертикальной осью  $c_2z_2$  относительно базовой  $O_0x_0y_0z_0$  системы координат и последнее равенство, запишем координаты вектора  $\vec{\omega}_2$  так:

$$\begin{cases} \omega_{2x} = 0; \\ \omega_{2y} = 0; \\ \omega_{2z} = \dot{\phi}_{21}. \end{cases}$$

В соответствии с третьим законом Ньютона

$$\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} F_{23x} = -F_{32x}; \\ F_{23y} = -F_{32y}; \\ F_{23z} = -F_{32z}. \end{cases} \quad (9.11)$$

Между проекциями  $F_{23x}, F_{23y}, F_{23z}$  и  $F_{x23}, F_{y23}, F_{z23}$  вектора  $\vec{F}_{23}$ , а также между проекциями  $F_{21x}, F_{21y}, F_{21z}$  и  $F_{x21}, F_{y21}, F_{z21}$  вектора  $\vec{F}_{21}$  в базовой и подвижной системах координат существует связь, которую устанавливаем методом преобразования координат:

$$\begin{pmatrix} F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{23z} \end{pmatrix} = T_{20} \begin{pmatrix} F_{x23} \\ F_{y23} \\ F_{z23} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} F_{21x} \\ F_{21y} \\ F_{21z} \end{pmatrix} = T_{20} \begin{pmatrix} F_{x21} \\ F_{y21} \\ F_{z21} \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

где

$$T_{20} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & 0 \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{bmatrix}.$$

В соответствии с третьим законом Ньютона

$$\vec{M}_{23} = -\vec{M}_{32}. \quad (9.13)$$

Запишем соотношения между проекциями  $M_{23x}$ ,  $M_{23y}$ ,  $M_{23z}$  вектора  $\vec{M}_{23}$  в системе координат  $c_2x_2y_2z_2$  и проекциями  $M_{32x}$ ,  $M_{32y}$ ,  $M_{32z}$  вектора  $\vec{M}_{32}$  в системе координат  $c_3x_3y_3z_3$  с учетом равенства (9.13):

$$\begin{pmatrix} M_{23x} \\ M_{23y} \\ M_{23z} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} & 0 \\ \cos \varphi_{32} & -\sin \varphi_{32} & 0. \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_{32x} \\ M_{32y} \\ 0. \end{pmatrix}. \quad (9.14)$$

Из равенств (9.11), (9.14) определяем неизвестные величины:  $F_{23x}$ ,  $F_{23y}$ ,  $F_{23z}$ ,  $M_{23x}$ ,  $M_{23y}$ ,  $M_{23z}$ .

Примем, что трение во вращательной паре, образованной звеньями 1, 2, отсутствует:  $M_{21z} = 0$ .

Подстановка найденных величин  $F_{23x}$ ,  $F_{23y}$ ,  $F_{23z}$ ,  $M_{23x}$ ,  $M_{23y}$ ,  $M_{23z}$  в уравнения (9.10), (9.13) позволяет найти величины  $F_{x23}$ ,  $F_{y23}$ ,  $F_{z23}$ ,  $F_{21x}$ ,  $F_{21y}$ ,  $F_{21z}$ ,  $F_{x21}$ ,  $F_{y21}$ ,  $F_{z21}$ ,  $M_{21x}$ ,  $M_{21y}$  и момент  $\mathfrak{M}_2$  движущей пары в плоскости  $c_2x_2y_2$ .

Рассмотрим взаимодействие звеньев 1 и 2.

В соответствии с третьим законом Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

или

$$\begin{cases} F_{12x} = -F_{21x}; \\ F_{12y} = -F_{21y}; \\ F_{12z} = -F_{21z}. \end{cases} \quad (9.15)$$

Аналогично

$$\vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21},$$

$$\begin{pmatrix} M_{12x} \\ M_{12y} \\ M_{12z} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & 0 \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_{21x} \\ M_{21y} \\ M_{21z} \end{pmatrix}, \quad (9.16)$$



где  $M_{12x}, M_{12y}, M_{12z}$  – проекции вектора  $\vec{M}_{12}$  в системе координат  $c_1x_1y_1z_1$ ;

$M_{21x}, M_{21y}, M_{21z}$  – проекции вектора  $\vec{M}_{21}$  в системе координат  $c_2x_2y_2z_2$ .

Решение уравнений (9.15), (9.16) позволяет определить величины  $F_{12x}, F_{12y}, F_{12z}$  и  $M_{12x}, M_{12y}, M_{12z}$ .

Звено 1 совершает поступательное движение вдоль оси  $O_0z_0$ , закон которого задан.

Для определения действующих на звено сил запишем дифференциальные уравнения движения звена в таком виде:

$$\begin{cases} 0 = F_{10x} + F_{12x}; \\ 0 = F_{10y} + F_{12y}; \\ m_1\ddot{z}_1 = F_{10z} + F_{12z} - G_1; \\ 0 = M_{10x} + M_{12x} + F_{10z}y_{10} - F_{10y}z_{10} + F_{12z}y_{12} - F_{12y}z_{12}; \\ 0 = M_{10y} + M_{12y} - F_{10z}x_{10} + F_{10x}z_{10} - F_{12z}x_{12} + F_{12x}z_{12}; \\ 0 = M_{10z} + M_{12z} + F_{10y}x_{10} - F_{10x}y_{10} + F_{12y}x_{12} - F_{12x}y_{12}, \end{cases} \quad (9.17)$$

где  $F_{10x}, F_{10y}, F_{10z}$  и  $F_{12x}, F_{12y}, F_{12z}$  – координаты векторов  $\vec{F}_{10}$  и  $\vec{F}_{12}$  в базовой системе координат;

$x_{10}, y_{10}, z_{10}$  и  $x_{12}, y_{12}, z_{12}$  – неизменные координаты точек приложения сил  $\vec{F}_{10}$  и  $\vec{F}_{12}$  на звене 1 в системе координат  $c_1x_1y_1z_1$ ;

$M_{10x}, M_{10y}, M_{10z}$  и  $M_{12x}, M_{12y}, M_{12z}$  – координаты векторов  $\vec{M}_{10}$  и  $\vec{M}_{12}$  в системе координат  $c_1x_1y_1z_1$ .

Уравнения (9.18) при заданном законе движения звена 1 имеют шесть неизвестных функций от времени:  $F_{10x}, F_{10y}, F_{10z}$  и  $M_{10x}, M_{10y}, M_{10z}$ .

Решение этих уравнений завершает решение задачи.

## 10. ТРЕНИЕ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ

### 10.1. Виды трения

*Трением в кинематической паре называется механическое сопротивление в плоскости касания звеньев пары в состоянии их относительного движения и в некоторых состояниях относительного покоя.*

Различают три вида трения: 1) трение скольжения, 2) трение качения, 3) трение покоя. Трение скольжения звеньев имеет место в низшей или высшей паре в том случае, когда скорости точек контакта двух звеньев не равны между собой. Трение качения звеньев имеет место в высшей паре в том случае, когда скорости точек контакта двух звеньев равны между собой, и поверхность одного звена перекатывается по поверхности другого. Трение покоя имеет место в низшей или высшей паре в том случае, когда относительные скорости точек звеньев равны нулю. В случае вращательной пары трение скольжения также называют трением верчения.

По состоянию поверхностей взаимодействующих звеньев различают сухое трение, жидкостное трение и полужидкостное трение. Трение считается сухим при несмазанных контактирующих поверхностях, жидкостным – при смазанных контактирующих поверхностях и полужидкостным – при частично смазанных контактирующих поверхностях звеньев пары.

Полезные свойства трения покоя и трения качения широко используются в тормозах, болтовых соединениях, ременных передачах, в механизмах транспортных машин, ходовых системах автомобилей и в других механизмах и передачах.

Трение скольжения повышает расход энергии и представляет собой вредное явление. Трение скольжения в кинематических парах влияет на коэффициент полезного действия механизма и износ его звеньев.

## 10.2. Трение в поступательной паре

Рассмотрим ползун 1 на горизонтальной плоскости стойки 0 (рис.10.1). Сила  $\vec{P}_n$  прижатия ползуна уравновешена равной ей и противоположно направленной нормальной реакцией  $\vec{N}$ . Чтобы переместить ползун по стойке, касательная составляющая  $\vec{P}_t$  главного вектора  $\vec{P}$  активных сил, приложенных к ползуну, и сил инерции ползуна должна преодолеть сопротивление, обусловленное силой трения  $\vec{T}_1$ , действующей на ползун 1 со стороны стойки 0.

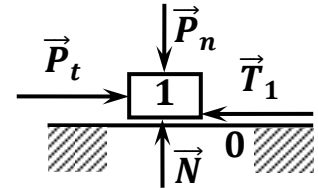


Рис. 10.1. Силы, действующие на ползун

По данным экспериментов, ползун, находящийся в состоянии покоя или относительного покоя, не изменит своего состояния до тех пор, пока величина  $P_t$  силы  $\vec{P}_t$  при увеличении не достигнет максимума  $T_n$  силы трения, называемой силой трения покоя (рис. 10.2).

В момент начала движения ползуна сила  $T_1$  трения скачкообразно уменьшается до величины  $T$  и остается неизменной при движении ползуна с постоянной скоростью. Сила трения скольжения направлена противоположно вектору скорости точки ползуна относительно стойки. Величины сил трения в состояниях покоя и движения ползуна с мало изменяющейся скоростью определяют по формуле Амонтона–Кулона:

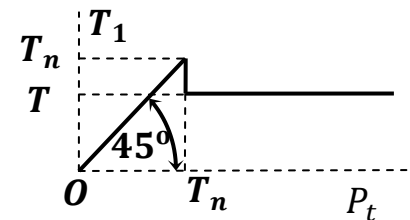


Рис. 10.2. Связь между силами  $T_1$  и  $P_t$

$$T_n = f_n N \quad \text{и} \quad T = f N, \quad (10.1)$$

где  $f_n$  и  $f$  – соответственно коэффициенты трения покоя (сцепления) и трения скольжения.

Коэффициенты трения определяются опытным путем и зависят от материалов контактирующих звеньев и состояния трущихся поверхностей (табл.10.1).

**Таблица 20.1. Коэффициенты трения покоя и трения скольжения при малых изменениях относительной скорости**

Материалы	$f_n$		$f$	
	Со смазкой	Без смазки	Со смазкой	Без смазки
Сталь по стали	0,11	0,15	0,09	0,13
Сталь по бронзе	0,10	0,11	0,09	0,10
Сталь по железу	0,10	0,15	0,09	0,10

В состоянии покоя справедливо нестрогое неравенство:

$$T_1 \leq T_n.$$

В условиях скольжения звена с переменной относительной скоростью необходимо учитывать влияние скорости на силу трения [18].

При сухом трении зависимость коэффициента трения скольжения устанавливается экспериментально (рис. 10.3).

В случае жидкостного трения такой учет осуществляется добавлением силы сопротивления, обусловленной вязкостью смазки [18]:

$$T = fN + \eta Sv/\Delta,$$

где  $v$  – относительная скорость точки звена в точке контакта, м/с;

$S$  – площадь поверхности звеньев в контакте, м<sup>2</sup>;

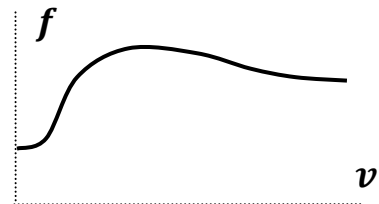
$\Delta$  – толщина зазора или слоя смазки между звеньями пары, м;

$\eta$  – экспериментальный коэффициент, Н · с/м<sup>2</sup>, или Па · с.

Реакция  $\vec{R}$  связи в кинематической паре складывается из силы давления  $\vec{N}$  (нормальной составляющей реакции) и силы трения  $\vec{T}$  (касательной составляющей реакции):

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}.$$

Фигура, образованная концами векторов  $\vec{R}$  с началом в точке контакта, называется конусом трения (рис. 10.4). Угол  $\varphi$ , образуемый реакцией  $\vec{R}$  и внешней нормалью  $n - n$  к поверхности связи, называется углом трения.



**Рис. 10.3. Связь коэффициента трения со скоростью**

В случае сухого трения между углом и коэффициентом трения скольжения имеет место соотношение, которое служит определением угла трения и конуса трения:

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \quad (10.2)$$

Аналогично определяется угол  $\varphi_n$  и конус трения покоя:

$$\operatorname{tg} \varphi_n = f_n.$$

*Конус трения не зависит от равнодействующей активных сил, приложенных к звену, и сил инерции.*

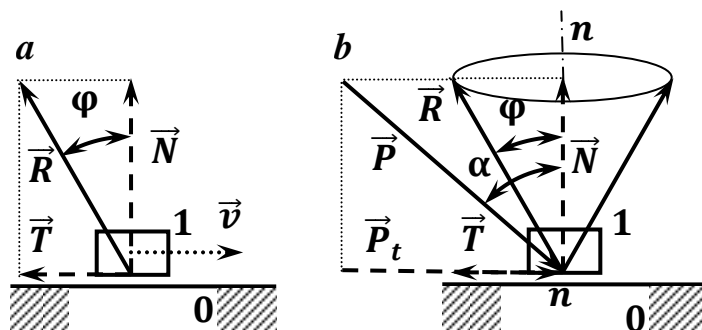


Рис. 10.4. Реакция стойки 0 (а) и конус трения для ползуна 1 (б)

Пусть  $\alpha$  – угол, образуемый вектором  $\vec{P}$  и внешней нормалью  $n - n$  к поверхности связи (рис. 10.4, б).

Звено пары находится в состоянии покоя относительно другого звена, если вектор  $\vec{P}$  находится внутри конуса трения ( $\alpha < \varphi$ ), в предельном состоянии покоя, если вектор  $\vec{P}$  направлен по образующей конуса трения покоя ( $\alpha = \varphi_n$ ), и в состоянии ускоренного движения относительно другого звена, если вектор  $\vec{P}$  находится вне конуса трения ( $\alpha > \varphi$ ) и вне конуса трения покоя в момент начала движения ( $\alpha > \varphi_n$ ).

### 10.3. Трение во вращательной паре

Вращательная пара, или шарнир есть соединение двух звеньев, контактирующих по цилиндрической поверхности. Вращательная пара является одноподвижной, то есть допускает только вращение одного звена пары относительно другого звена.

Рассмотрим вращательную пару, образованную цапфой (опорной частью вала в виде шипа на его конце или шейки в середине) 1 и втулкой 0 (рис.10.5). Под втулкой 0 можно понимать вкладыш втул-

ки. Соединение цапфы и втулки выполняется по посадке с некоторым зазором.

Установим условия покоя вала и условия равномерного вращения вала.

Рассмотрим случай действия на цапфу радиальной силы  $\vec{P}$ . В этом случае вал находится в покое, когда сила  $\vec{P}$  уравнивается реакцией  $\vec{R}$  опоры, направленной по внешней нормали к втулке и равной  $\vec{N}$  (рис.10.5, *a*). При этом точка  $K$  приложения реакции опоры находится на общей линии действия сил  $\vec{P}$  и  $\vec{R}$ , пересекающей центр  $O$  вращения цапфы.

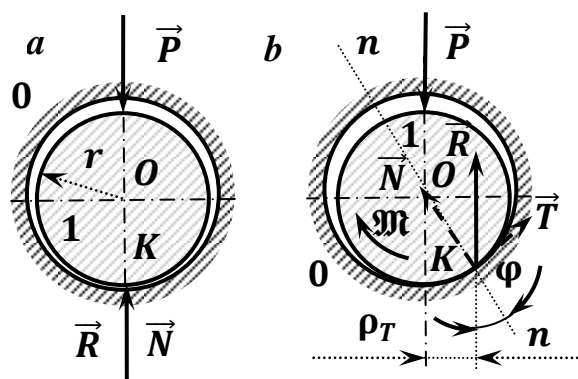


Рис. 10.5. Точка  $K$  контакта втулки 0 и цапфы 1

Рассмотрим случай действия на цапфу радиусом  $r$  пары сил с моментом  $\mathfrak{M}$  и радиальной силы  $\vec{P}$ . В этом случае под действием силы  $\vec{T}$  трения цапфа набегаёт на втулку и точка  $K$  приложения реакции втулки поднимается (рис.10.5, *b*). Реакция  $\vec{R}$  связи, приложенная в точке  $K$  контакта, уравнивает радиальную силу  $\vec{P}$ . При этом силы  $\vec{P}$  и  $\vec{R}$  не имеют общей линии действия.

Плечо  $\rho_T$  силы  $\vec{R}$  относительно оси  $O$  вращения цапфы называется радиусом круга трения:

$$\rho_T = r \sin \varphi, \tag{10.3}$$

где  $\varphi$  – угол трения.

Учитывая равенство (10.2), формулу (10.3) можно записать так:

$$\rho_T = rf / \sqrt{1 + f^2}$$

или при малом коэффициенте трения

$$\rho_T = rf.$$

Момент  $M_T$  силы трения относительно оси вращения цапфы, действующий на цапфу 1 со стороны втулки 0, изображается круговой стрелкой в плоскости вращения, направленной противоположно круговой стрелке, изображающей угловую скорость цапфы:

$$M_T = Tr = P\rho_T. \quad (10.4)$$

При действии радиальной силы  $\vec{P}$  вращение вала возможно в том случае, если вращающий момент  $\mathfrak{M}$  пары движущих сил не меньше момента силы трения, определяемого по формуле (10.4):

$$\mathfrak{M} \geq M_T.$$

Круг трения во вращательной паре и конус трения в поступательной паре имеют аналогичные свойства.

Рассмотрим цапфу 1 вала и радиальный стержень  $AB$ , жестко закрепленный на валу.

Пусть  $\vec{P}$  – внешняя сила, приложенная к концу  $A$  стержня (рис. 10.6). Если плечо  $OA$  силы  $\vec{P}$  меньше радиуса  $\rho_T$  круга трения, то вал будет заклинен, независимо от величины силы. Вращение вала – равномерное, если плечо  $OA$  равно радиусу  $\rho_T$ , и ускоренное, если плечо превышает радиус круга трения.

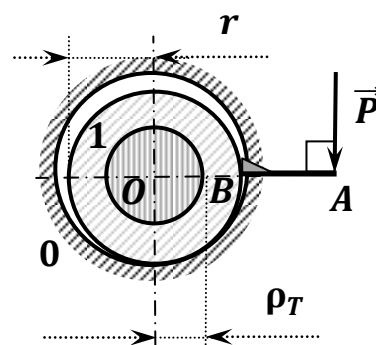


Рис. 10.6. Круг трения радиуса  $\rho_T$

## 10.4. Трение в высшей паре

Рассмотрим высшую пару цилиндрического зубчатого механизма с эвольвентными колесами.

Движение шестерни 1 относительно колеса 2 является плоскопараллельным и состоит из скользящего движения и перекатывания по колесу.

При взаимодействии зубьев шестерни 1 и колеса 2 точка  $K$  зуба шестерни 1 в точке контакта с колесом 2 имеет относительную ско-

рость  $\vec{v}_{12}$ , направленную по общей касательной  $\tau - \tau$  к профилям зубьев (рис. 10.7).

Со стороны колеса к шестерне приложена реакция  $\vec{R}_{12}$  колеса и пара сил с моментом трения качения  $M_k$ , круговая стрелка которого направлена противоположно круговой стрелке, изображающей угловую скорость  $\omega_{12}$  шестерни относительно колеса:

$$R_{12} = N_{12} / \cos \varphi; M_k = N_{12} k, \quad (10.5)$$

где  $N_{12}$  – величина нормальная составляющая реакции колеса 2;

$\varphi$  – угол трения скольжения;

$k$  – коэффициент трения качения, м.

При перекачивании зубьев из стали  $k = 5 \cdot 10^{-5}$  м.

В технических расчетах момент  $M_k$  трения качения в шариковых и роликовых радиальных подшипниках определяют по формуле

$$M_k = 1,46 N_{12} k (1 + D/d),$$

где  $D$  – внешний диаметр внутреннего кольца;

$d$  – диаметр шарика (ролика).

Как следует из последней формулы, потери на трение качения в подшипниках уменьшаются при увеличении диаметра шарика и уменьшении диаметра внутренней обоймы.

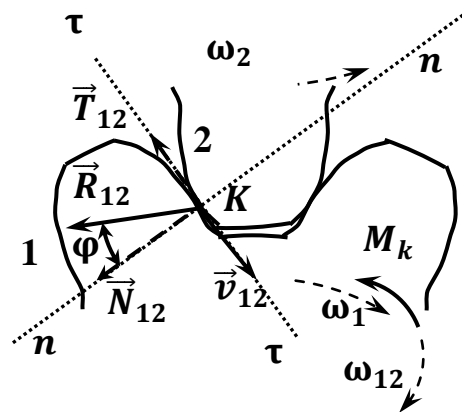


Рис. 10.7. Точка  $K$  контакта зубьев



# 11. РЕМЕННАЯ ПЕРЕДАЧА

## 11.1. Основные определения и обозначения

Ременная передача – это механическая система, состоящая из ведущего шкива, ведомого шкива и соединяющего их ремня (рис. 11.1).

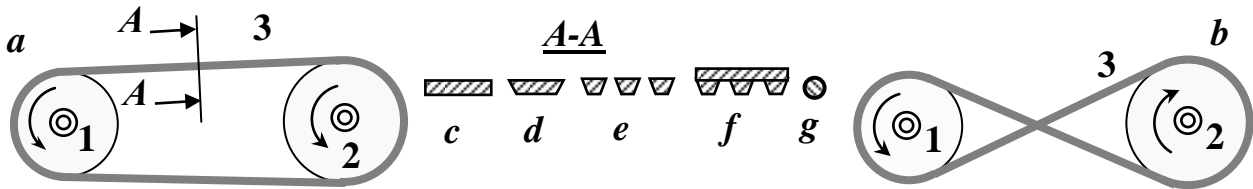


Рис. 11.1. Ременная передача открытая (а) и перекрестная (б) с параллельными шкивами 1, 2 и ремнем 3 с плоским (с), клиновым одноручьевым (d), клиновым многоручьевым (e), поликлиновым (f), круглым (g) поперечным сечением

Ременная передача предназначена для передачи механической энергии вращательными движениями шкивов. Различают открытую и перекрестную передачи. В первых шкивы вращаются в одном направлении, во вторых – в противоположных направлениях. Композиционные ременные передачи содержат валы с промежуточными или раздаточными шкивами. На таких валах установлено два шкива и более.

Условием работы ременных передач является трение между ремнем и шкивом, возникающее при натяжении ремня и давлении его на шкив. Не являясь механизмами, ременные передачи нашли широкое распространение в приводах кривошипов.

Введем следующие обозначения (рис. 11.2):

$R_1, R_2$  – радиус шкива 1 и шкива 2 соответственно, м;

$L$  – расстояние между осями шкивов 1 и 2, м;

$s$  – площадь поперечного сечения плоского ремня, м<sup>2</sup>;

$\delta$  – половина толщины ремня, м;

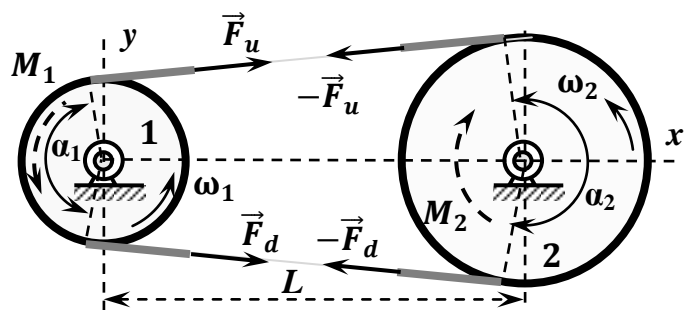


Рис. 11.2. К расчету ременной передачи

$\alpha_1, \alpha_2$  – радиальный угол охвата ремнем ведущего и ведомого шкива, рад;

$r_1, r_2$  – радиус цапфы вала ведущего и ведомого шкива, м;

$\varepsilon_u, \varepsilon_d$  – относительное удлинение внутреннего волокна ведущей и ведомой ветви ремня соответственно;

$\omega_1, \omega_2$  – угловая скорость шкива 1 и шкива 2 соответственно, рад/с;

$v_u, v_d$  – скорость набегающей на шкив точки ремня ведущей и ведомой ветви соответственно, м/с;

$i$  – передаточное отношение;

$\rho$  – плотность ремня, кг/м<sup>3</sup>;

$F_u, F_d$  – величина силы натяжения ведущей и ведомой ветви ремня соответственно без учета веса ремня, Н;

$F_0$  – начальная сила натяжения ремня без учета веса, Н;

$E$  – модуль упругости ремня, Па;

$\sigma_0$  – начальное напряжение ремня, Н;

$\sigma_u$  – предел упругости ремня, Па;

$f$  – коэффициент трения скольжения ремня по шкиву;

$\mu$  – коэффициент трения скольжения вала со шкивом во вращательной паре;

$M_1, M_2$  – величина момента пары движущих сил, действующих на ведущий шкив 1, и пары сил полезного сопротивления (рабочей нагрузки), действующих на ведомый шкив 2, Н м;

$M_{01}, M_{02}$  – величина момента силы трения во вращательной паре “вал – опора” ведущего и ведомого шкива относительно оси вращения соответствующего шкива, Н м;

$P_1, P_2$  – мощность момента  $M_1, M_2$  пары сил соответственно, Вт;

$\eta$  – коэффициент полезного действия ременной передачи.

## 11.2. Кинематика ременной передачи

Рассмотрим ременную передачу с ведущим шкивом 1 и ведомым 2 при неизменной нагрузке и равномерных вращениях шкивов.

В соответствии с исследованиями Н. П. Петрова и Н. Е. Жуковского дуга охвата шкива ремнем состоит из участков сцепления и скольжения [19].

Пусть точки  $A, C$  и  $K, E$  – концевые точки дуги охвата ремнем ведущего и ведомого шкива соответственно (рис. 11.3). На участках  $AB$  и  $KD$

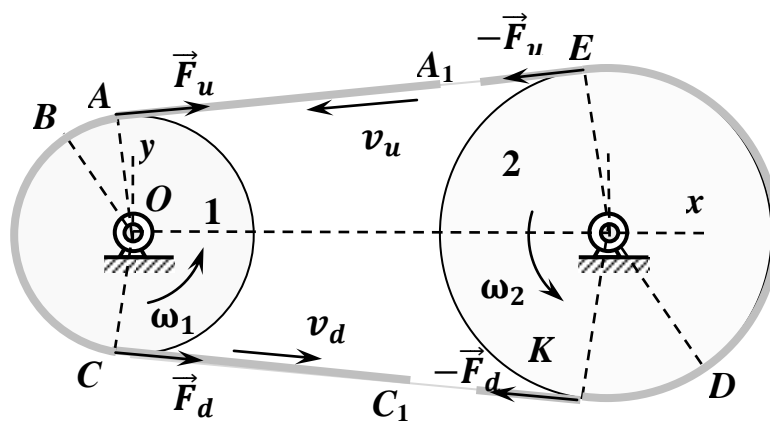


Рис. 11.3. Ведущий 1 и ведомый 2 шки-

ва. При этом скорости точек участка  $BC$  ремня, касающегося ведущего шкива, уменьшаются до  $v_d$  в точке  $C$  схода, то есть участок  $BC$  ремня «отстает» от шкива из-за укорочения и скользит по нему. Аналогичные условия должны соблюдаться на дуге  $KE$  ведомого шкива. Скорость  $v_d$  точки  $K$  ведомой ветви ремня при набегании на шкив равна скорости точки  $K$  шкива. При этом скорости точек участка  $DE$  ремня, касающихся шкива, увеличиваются до  $v_u$  в точке  $E$  схода, то есть участок  $DE$  ремня «опережает» шкив из-за удлинения:

$$\begin{cases} v_u = R_1 \omega_1 \\ v_d = R_2 \omega_2. \end{cases} \quad (11.1)$$

При буксовании ремня равенства (11.1) не соблюдаются.

Рассмотрим участок  $AC$  ремня, огибающий ведущий шкив. За время  $t$  его место займет участок  $AA_1$  длиной  $L_u$  ведущей ветви, а участок  $AC$  займет положение  $CC_1$  длиной  $L_d$  ведомой ветви:

$$L_u = v_u t; L_d = v_d t. \quad (11.2)$$

Участки  $AA_1$  и  $CC_1$  в разные моменты времени представляют один и тот же участок  $AC$  ремня и имеют длину  $l$  в недеформированном состоянии. Следовательно,

$$L_u = l(1 + \varepsilon_u); L_d = l(1 + \varepsilon_d). \quad (11.3)$$

Подставляя выражения для  $L_u$ ,  $L_d$  из равенств (11.3) в равенства (11.2) и исключая время  $t$ , придем к такому отношению:

$$\frac{v_u}{v_d} = \frac{1 + \varepsilon_u}{1 + \varepsilon_d}. \quad (11.4)$$

Равенство (11.4) справедливо при отсутствии буксования и при буксовании ремня.

По определению,

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

или с учетом равенств (11.1), (11.4)

$$u = \frac{R_2}{R_1} \frac{1 + \varepsilon_u}{1 + \varepsilon_d}. \quad (11.5)$$

Формула (11.5) справедлива при отсутствии буксования ремня. Она доказывает, что передаточное отношение ременной передачи равно отношению радиусов ведомого и ведущего шкивов, умноженному на коэффициент пропорциональности, который не равен единице и зависит от относительных удлинений ведущей и ведомой ветвей ремня.

### 11.3. Динамика шкива и ремня

Установим соотношения между величинами моментов  $M_1$ ,  $M_2$ . Вес ремня учитывать не будем. Можно доказать, что он не влияет на работу движущих сил.

Примем, что при неизменной нагрузке 1) вращения шкивов равномерные; 2) движение ремня установившееся; 3) ремень находится в упругом состоянии растяжения.

Выделим часть ремня, охватывающую ведущий шкив, как сплошную среду (рис. 11.4). Среда ограничена контрольной поверхностью, состоящей из цилиндрических внутренних и внешних поверхностей, двух боковых поверхностей, перпендикулярных оси вращения шкивов, и двух плоских радиальных поперечных сечений набегания и схода ремня. На контрольной поверхности действуют следующие силы: 1) равнодействующие  $\vec{F}_u$ ,  $\vec{F}_d$  сил натяжения веду-

щей и ведомой ветви соответственно; 2) равнодействующая  $\vec{F}_1$  реакций ведущего шкива.

При неизменном сопротивлении движение ремня как сплошной среды – установившееся. Полагая, что плотности и площади поперечного сечения ведомой ветви и ремня в ненапряженном состоянии отличается незначительно, запишем уравнение сохранения масс в интегральном виде [20, с. 54]:

$$\rho s v_d = \rho_u s_u v_u,$$

где  $\rho_u, s_u$  – плотности и площадь поперечного сечения ведущей ветви ремня.

Момент силы или количества движения материальной точки относительно оси шкива будем считать положительным, если при

наблюдении на рисунок сила или количество движения стремятся вращать шкив вокруг оси против хода стрелки часов.

Уравнение моментов количества движения относительно оси  $O$  вращения шкива ремня на шкиве при установившемся движении запишем в интегральном виде [20, с. 54]:

$$\rho s (R_1 + \delta) v_d^2 - \rho_u s_u (R_1 + \delta) v_u^2 = M_O(\vec{F}_1) + (R_1 + \delta)(F_d - F_u)$$

или с учетом уравнения сохранения масс

$$\rho s (R_1 + \delta) (v_d^2 - v_d v_u) = M_O(\vec{F}_1) + (R_1 + \delta)(F_d - F_u), \quad (11.6)$$

где  $M_O(\vec{F}_1)$  – величина момента силы  $\vec{F}_1$  относительно оси шкива.

Уравнение равномерного вращения шкива 1 представим в виде уравнения равновесия моментов сил относительно оси вращения:

$$M_1 - M_O(\vec{F}_1) - M_{01} = 0.$$

Следовательно, уравнение (11.6) можно записать так:

$$M_1 = \rho s (R_1 + \delta) (v_d^2 - v_d v_u) + (R_1 + \delta)(F_u - F_d) + M_{01}$$

или

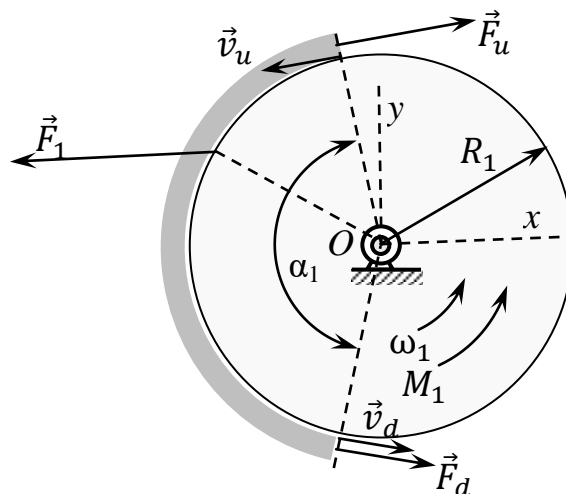


Рис. 11.4. Ремень на участке обхвата и силы, действующие на него

$$M_1 = \rho s(R_1 + \delta)(v_d^2 - v_d v_u) + (R_1 + \delta)Es(\varepsilon_u - \varepsilon_d) + M_{01}. \quad (11.7)$$

Рассматривая участок ремня, охватывающий ведомый шкив, придем к аналогичному уравнению:

$$M_2 = \rho s(R_2 + \delta)(v_d^2 - v_d v_u) + (R_2 + \delta)Es(\varepsilon_u - \varepsilon_d) - M_{02}. \quad (11.8)$$

При неизменности общей длины ремня растяжение ведущей ветви «компенсируется» сжатием ведомой ветви, то есть уменьшение силы сжатия «компенсируется» увеличением силы растяжения:

$$F_u + F_d = 2F_0 \quad (11.9)$$

или

$$Es(\varepsilon_u + \varepsilon_d) = 2F_0. \quad (11.10)$$

Найдем величины  $M_{01}$ ,  $M_{02}$  моментов сил трения во вращательной паре ведущего и ведомого шкива.

На ведущий шкив со стороны элемента  $ab$  ремня действует элементарная нормальная сила  $dN_1$  и элементарная сила  $dT_1$  трения сцепления, а на ведомый шкив – соответственно  $dN_2$  и  $dT_2$ . На вал ведущего шкива со стороны опоры действует элементарная сила, уравновешивающая силу  $dN_1$  и элементарная сила  $dQ_1$  трения, а на вал ведомого шкива – силы  $dN_2$ ,  $dQ_2$  (рис. 11.5).

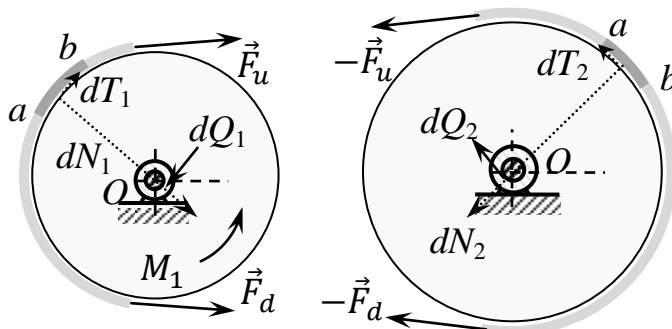


Рис. 11.5. Элемент  $ab$  ремня на ведущем (слева) и ведомом (справа) шкиве

По определению,

$$\begin{cases} M_{01} = \int_0^{\alpha_1} r_1 dQ_1 \\ M_{02} = \int_0^{\alpha_2} r_2 dQ_2. \end{cases} \quad (11.11)$$

Силы трения скольжения связаны с силами давления такими равенствами:

$$dQ_1 = \mu dN_1; \quad dQ_2 = \mu dN_2.$$

Следовательно, формулы (11.11) можно переписать так:

$$\begin{cases} M_{01} = \mu \int_0^{\alpha_1} r_1 dN_1 \\ M_{02} = \mu \int_0^{\alpha_2} r_2 dN_2. \end{cases} \quad (11.12)$$

Установим связь между силами растяжения ремня и силами давления ремня на шкив.

Рассмотрим элемент  $ab$  ремня на ведущем шкиве с элементарным радиальным углом  $d\alpha$  (рис. 11.6). На него действуют силы растяжения  $\vec{F}$  и  $-\vec{F} + d\vec{F}$ , вес, нормальная и касательная составляющие реакции шкива, элементарные равнодействующие которых равны  $dN$  и  $dT$ .

Приращение  $d\vec{F}$  вектора  $\vec{F}$  имеет проекцию  $dF_\tau$  на ось касательной к окружности шкива и проекцию  $dF_n$  на ось нормали к окружности шкива:

$$\begin{cases} dF_n = F d\alpha \\ dF_\tau = dF. \end{cases}$$

Расчеты показали, что касательное ускорение точек ремня, обусловленное его деформацией, приводит к изменению сил натяжения ремня менее чем на 1% и им можно пренебречь. Вес ремня не влияет на работу движущих сил, и его также не будем учитывать. Рассмотрим предельный случай, когда скорость точки элемента ремня наибольшая и давление ремня на шкив наименьшее. Уравнения движения центра масс элемента  $ab$  ремня массы  $dm$  на ведущем шкиве в естественном виде [2] запишем так:

$$\begin{cases} 0 = dT - dF \\ \frac{v_u^2}{R_1 + \delta} dm = F d\alpha - dN. \end{cases}$$

Проинтегрируем обе части уравнений по всем элементам  $ab$  ремня на дуге охвата ремня по окружности шкива 1:

$$\begin{cases} 0 = \int_0^{\alpha_1} dT - (F_u - F_d) \\ \rho s \alpha_1 v_u^2 \approx \frac{F_u + F_d}{2} \alpha_1 - \int_0^{\alpha_1} dN. \end{cases} \quad (11.13)$$

Формулы (11.12) с учетом равенств (11.9), а также (11.13) и аналогичных для ведомого шкива примут такой вид:

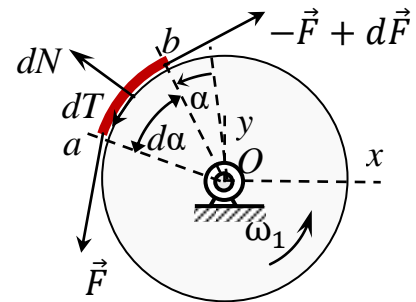


Рис. 11.6. Элемент  $ab$  ремня и силы, действующие на него

$$\begin{cases} M_{01} = \mu F_0 r_1 \alpha_1 - \mu r_1 \rho s \alpha_1 v_u^2 \\ M_{02} = \mu F_0 r_2 \alpha_2 - \mu r_2 \rho s \alpha_2 v_u^2. \end{cases} \quad (11.14)$$

Условие отсутствия буксования ремня на ведущем шкиве имеет вид:

$$\int_0^{\alpha_1} dT \leq \int_0^{\alpha_1} f dN$$

или с учетом равенств (11.13)

$$F_u - F_d < f \alpha_1 (F_0 - \rho s v_u^2). \quad (11.15)$$

Условие отсутствия буксования для ведомого шкива выводится аналогично:

$$F_u - F_d < f \alpha_2 (F_0 - \rho s v_u^2). \quad (11.16)$$

Сцепление ремня с ведущим и ведомым шкивом характеризуется соответственно коэффициентом  $\beta_1, \beta_2$  запаса сцепления:

$$\begin{cases} \beta_1 = f \alpha_1 (F_0 - \rho s v_u^2) / (F_u - F_d) \\ \beta_2 = f \alpha_2 (F_0 - \rho s v_u^2) / (F_u - F_d). \end{cases} \quad (11.17)$$

Уравнения (11.4), (11.7), (11.8), (11.9) позволяют найти четыре неизвестные  $v_d, \varepsilon_d, \varepsilon_u, M_1$ . Они справедливы при отсутствии буксования ремня.

Отметим, что искомые неизвестные являются константами, если момент пары нагрузки не изменяется. Если момент пары нагрузки изменяется и задан как функция времени, то при малом моменте сил инерции шкивов четыре неизвестные  $v_d, \varepsilon_d, \varepsilon_u, M_1$  определяются из тех же уравнений как функции от времени.

При установившемся движении механизма с приводом от ременной передачи функция момента пары нагрузки является периодической.

## 11.4. Алгоритм расчета

1. Задаем исходные данные:  $R_1$  [м];  $R_2$  [м];  $L$  [м];  $r_1$  [м];  $r_2$  [м];  $s$  [м<sup>2</sup>];  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>];  $\omega_1$  [рад/с];  $M_2$  [Н м];  $\sigma_0$  [Па];  $E$  [Па];  $\sigma_u$  [Па];  $f$ ;  $\mu$ .

2. Определяем углы охвата ремней, скорости точки ведущей ветви по формуле (11.1), начальной силы растяжения ремня и моментов холостого хода по формулам (11.14):



- 1)  $\alpha_1 = \pi - 2 \arcsin \frac{R_2 - R_1}{L}$ ; 2)  $\alpha_2 = \pi + 2 \arcsin \frac{R_2 - R_1}{L}$ ;  
 3)  $v_u = R_1 \omega_1$ ; 4)  $F_0 = \sigma_0 s$ ; 5)  $M_{01} = \mu F_0 r_1 \alpha_1 - \mu r_1 \rho s \alpha_1 v_u^2$ ;  
 6)  $M_{02} = \mu F_0 r_2 \alpha_2 - \mu r_2 \rho s \alpha_2 v_u^2$ .

3. Отмечаем, что три уравнения (11.4), (11.8), (11.9) содержат три неизвестные  $v_d$ ,  $\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_d$ . Они приводятся к кубическому уравнению относительно переменной  $z$ :

$$c_1 z^3 - c_2 z + c_3 = 0,$$

где

$$z = \frac{v_d}{v_u}; c_1 = \frac{\rho s v_u^2}{2}; c_2 = c_1 + \frac{M_2 + M_{02}}{2(R_2 + \delta)} + F_0 + Es; c_3 = F_0 + Es - \frac{M_2 + M_{02}}{2(R_2 + \delta)}.$$

4. Находим единственный корень  $z$  кубического уравнения на отрезке  $[0, 1]$  численным методом Ньютона [21] и определяем скорость точки ведомой ветви ремня:  $v_d = v_u z$ .

5. Определяем неизвестные  $\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_d$  из уравнений (11.4), (11.9):

$$\varepsilon_u = v_u \frac{2(Es + F_0)}{Es(v_u + v_d)} - 1; \varepsilon_d = \frac{2F_0}{Es} - \varepsilon_u;$$

6. Определяем силы натяжения и момент пары движущих сил из уравнений (11.7):

$$1) F_u = Es \varepsilon_u, \text{ Н}; F_d = Es \varepsilon_d, \text{ Н};$$

$$2) M_1 = \rho s (R_1 + \delta) (v_d^2 - v_u^2) + (R_1 + \delta) Es (\varepsilon_u - \varepsilon_d) + M_{01}, \text{ Н м}.$$

7. Проверяем условия (11.15), (11.16) отсутствия буксования:

$$F_u - F_d < f \alpha_1 (F_0 - \rho s v_u^2); F_u - F_d < f \alpha_2 (F_0 - \rho s v_u^2).$$

8. Проверяем условие упругости ремня по среднему слою:

$$E \varepsilon_u \leq \sigma_u.$$

9. При выполнении условий в п. 7, 8 определяем угловую скорость ведомого шкива по формуле (11.1):  $\omega_2 = v_d / R_2$ , рад/с.

10. Определяем передаточное отношение по формуле  $u = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ .

11. Определяем мощности движущих сил и сил сопротивления:

$$P_1 = M_1 \omega_1; \quad P_2 = M_2 \omega_2.$$

12. Оцениваем коэффициент полезного действия ременной передачи:  $\eta = P_2 / P_1$ .

13. Оцениваем относительное скольжение  $\xi$  ремня по формуле

$$\xi = \varepsilon_u - \varepsilon_d.$$

14. Оцениваем коэффициент  $\varphi$  тяги передачи по формуле

$$\varphi = \frac{F_u - F_d}{2F_0}.$$

15. Оцениваем коэффициенты запаса сцепления по формулам (11.17).

## 11.5. Анализ тяговых характеристик

Рассчитаем тяговые характеристики ременной передачи по формулам алгоритма (табл. 11.1).

### 11.1. Исходные данные

$R_1$ , м	$R_2$ , м	$L$ , м	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм	$s$ , мм <sup>2</sup>	$\delta$ , мм	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\omega_1$ , об/мин	$M_2$ , Н м	$\sigma_0$ , МПа	$E$ , МПа	$\sigma_u$ , МПа	$f$	$\mu$
0,1	0,2	0,7	10	20	160	2	1200	800	40	1,6	160	2,2	0,3	0,12

Полагаем, что единицы измерения исходных данных приведены к системе СИ.

Расчеты показывают, что в области упругости ремня сила растяжения и относительное удлинение ведущей ветви ремня увеличиваются, а ведомой –

уменьшаются прямо пропорционально моменту пары нагрузки (рис. 11.7).

Для оценки тяговой способности передачи строят экспериментальные графики зависимостей относительного скольжения  $\xi$  в %, равно-

го разности относительных удлинений ведущей и ведомой ветвей ремня, и коэффициента  $\eta$  полезного действия передачи в % от коэффициента  $\varphi$  тяги передачи, формула расчета которого дана в п. 14 алгоритма.

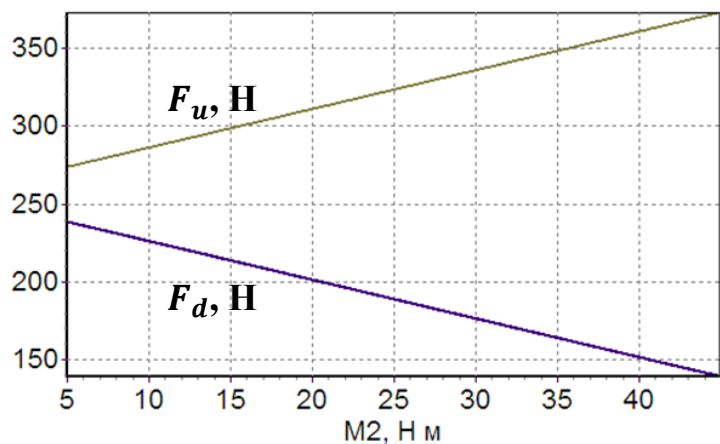


Рис. 11.7. Зависимости силы растяжения ведущей  $F_u$  и ведомой  $F_d$  ветви ремня от момента  $M_2$

На рис. 11.8 показаны расчетные графики тяговой способности передачи при изменении момента пары сил полезной нагрузки от 5 до 40 Н м.

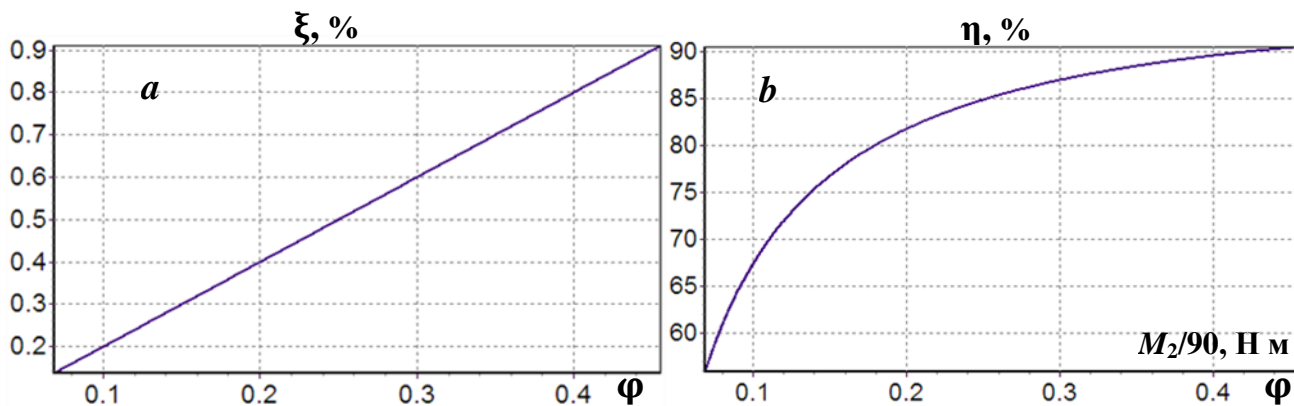


Рис. 11.8. Зависимости относительного скольжения в % (a) и коэффициента полезного действия передачи в % (b) от коэффициента тяги

В области упругости ремня и отсутствия буксования коэффициент полезного действия передачи увеличивается с ростом коэффициента тяги и полезной нагрузки (рис. 11.8, b).

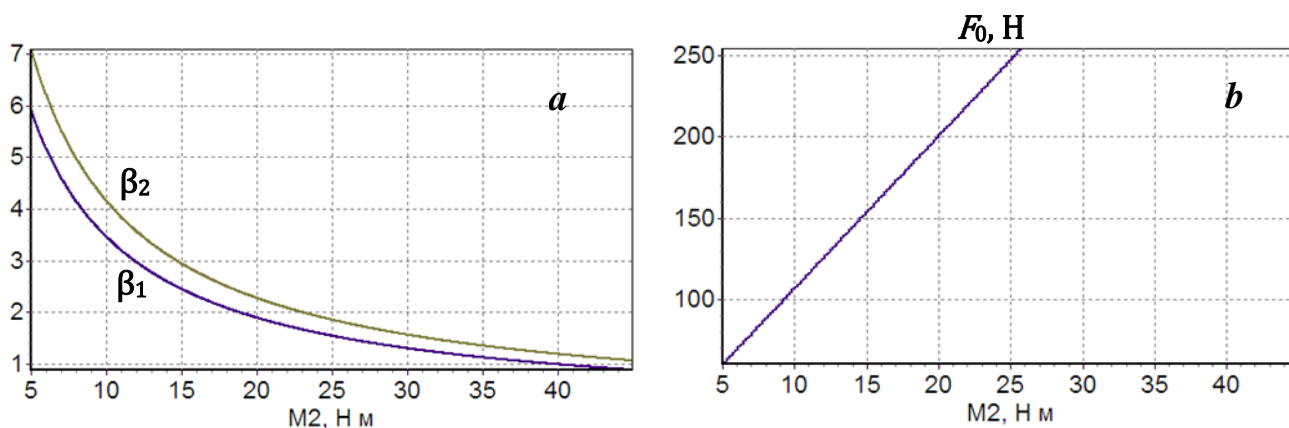


Рис. 11.9. Зависимости коэффициентов запаса сцепления (a) и силы натяжения ремня при коэффициенте  $\beta_1$  запаса сцепления 1,5 (b) от момента  $M_2$

С увеличением нагрузки коэффициент  $\beta_1$  запаса сцепления ремня с ведущим шкивом и  $\beta_2$  с ведомым шкивом уменьшаются (рис. 11.9, a). При отсутствии скольжения ремня по шкиву, когда коэффициент запаса сцепления уменьшается до 1, эффективность ременной передачи возрастает. Коэффициент полезного действия достигает макси-

мума при такой нагрузке и тяге, когда коэффициент запаса сцепления на одном из шкивов уменьшится до минимума, равного 1. При этом сила трения между ремнем и шкивом достигает максимума. Отметим, что отношение сил натяжения ветвей ремня в этом случае согласуется с формулой Эйлера, если принять во внимание поправки на силы инерции, деформацию и толщину ремня.

Чтобы поддерживать заданный коэффициент запаса сцепления, при повышении нагрузки силу натяжения ремня необходимо регулировать, увеличивая ее прямо пропорционально моменту пары сил нагрузки (рис. 11.9, *b*).

Снижение модуля упругости ремня в процессе эксплуатации приводит к ухудшению характеристик передачи (рис. 11.10).

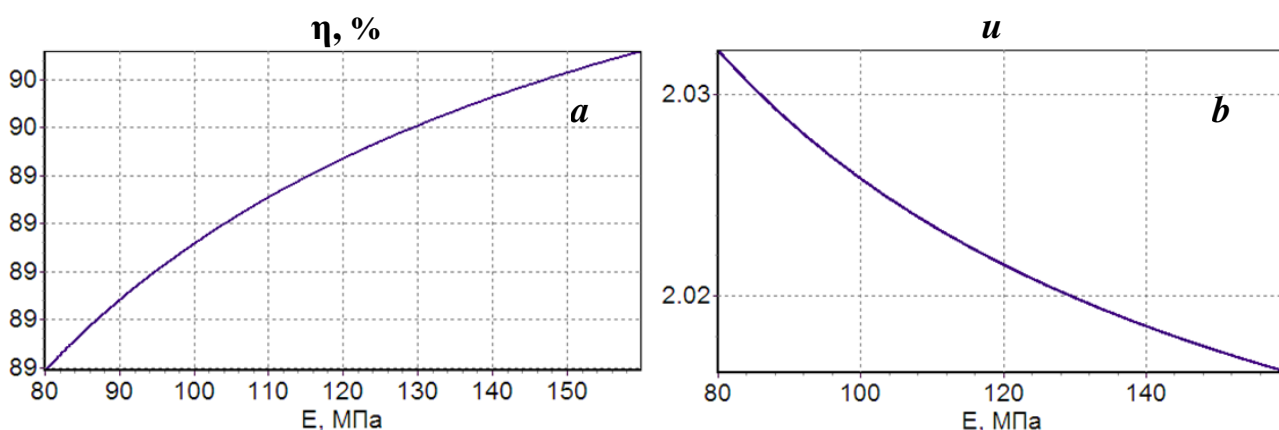


Рис. 11.10. Зависимости коэффициента полезного действия передачи (*a*) и передаточного отношения (*b*) от модуля упругости ремня

При снижении эксплуатационных характеристик ремня дополнительное растяжение позволяет уменьшить коэффициент запаса сцепления и увеличить коэффициент полезного действия передачи.

## 12. ФРИКЦИОННАЯ ПЕРЕДАЧА

### 12.1. Основные определения и обозначения

Фрикционная передача – это механическая система, состоящая из ведущего колеса и прижатого к нему ведомого колеса (рис. 12.1).

Фрикционная передача предназначена для передачи механической энергии

вращательными движениями колес.

Различают цилиндрическую и коническую передачи с внешним зацеплением.

В первых колеса имеют цилиндрическую форму и параллельные оси вращения, во вторых – форму усеченного конуса и перпендикулярные оси вращения в одной плоскости.

Композиционные фрикционные передачи содержат валы с двумя и более колесами или промежуточное колесо (ролик), поджатый к ведущему и ведомому колесам.

Условием работы фрикционных передач является трение между колесами при их прижатии. Не являясь механизмами, фрикционные передачи применяются в приводах.

Введем следующие обозначения (рис. 12.2):

$R_1, R_2$  – радиус колеса 1, 2 соответственно, м;

$L$  – длина колес 1, 2, м;

$r_1, r_2$  – радиус цапфы вала ведущего и ведомого колеса, м;

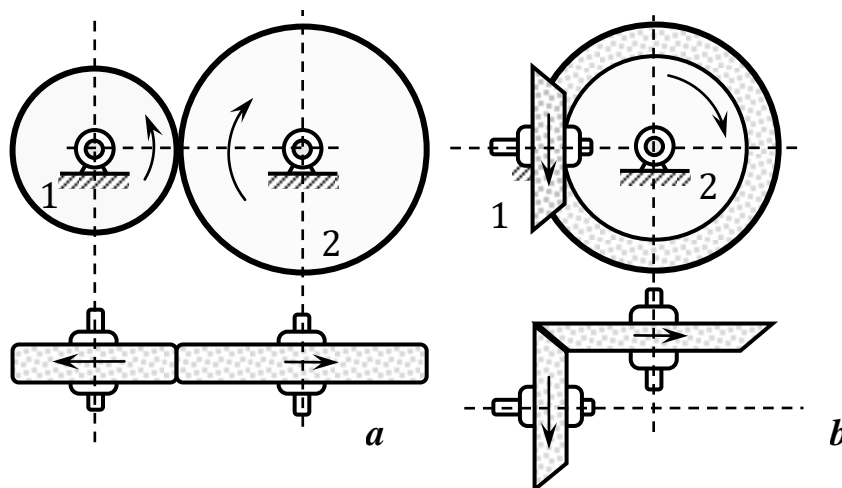


Рис. 12.1. Фрикционная передача цилиндрическая (a) и коническая (b)

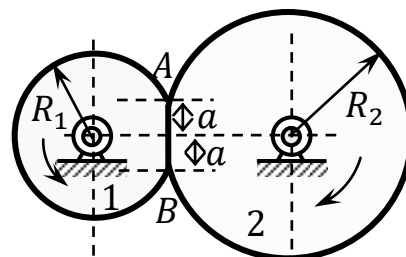


Рис. 12.2. Прижатые колеса фрикционной передачи

$2a$  – ширина прямоугольной контактной площадки;  
 $\psi$  – коэффициент длины контактной площадки;  
 $\omega_1, \omega_2$  – угловая скорость колеса 1 и 2 соответственно, рад/с;  
 $u$  – передаточное отношение;  
 $T$  – величина силы трения между колесами, Н;  
 $p_0$  – погонная сила прижатия, Н/м;  
 $E$  – модуль упругости материала колес, Па;  
 $\nu$  – коэффициент Пуассона материала колес;  
 $\sigma_0$  – заданное напряжение сжатия на площадке контакта, Па;  
 $\sigma_H$  – допускаемое напряжение сжатия на площадке контакта, Па;  
 $f$  – коэффициент трения скольжения между колесами;  
 $\mu$  – коэффициент трения скольжения вала колеса с опорой во вращательной паре;  
 $M_1, M_2$  – величина момента пары движущих сил, действующих на ведущее колеса 1, и пары сил полезного сопротивления (рабочей нагрузки), действующих на ведомое колесо 2, Н м;  
 $M_{01}, M_{02}$  – величина момента силы трения во вращательной паре “вал – опора” ведущего и ведомого колеса относительно оси вращения соответствующего колеса, Н м;  
 $P_1, P_2$  – мощность момента  $M_1, M_2$  пары сил соответственно, Вт;  
 $\eta$  – коэффициент полезного действия фрикционной передачи.

## 12.2. Кинематика фрикционной передачи

Рассмотрим фрикционную цилиндрическую передачу с ведущим колесом 1 и ведомым 2. Необходимым условием ее работоспособности является трение между вращающимися колесами, возникающее при их прижатии.

Пусть в начальном состоянии колеса неподвижны, и сила прижатия равномерно распределена по длине колес. Тогда, в соответствии с теорией Герца [22, с. 119], в области контакта колеса деформируются с образованием площадки контакта. Если считать колеса примерно

равнопрочными, то такая площадка  $AB$  представляет собой прямоугольник длиной  $L$  и шириной  $2a$ :

$$a = 2 \sqrt{\frac{2p_0 R_1 R_2 (1-\nu^2)}{\pi E (R_1 + R_2)}}. \quad (12.1)$$

Формула (12.1) позволяет определить ширину площадки контакта колес.

Максимальное давление на площадке контакта определяется таким равенством [22, с. 119]:

$$\sigma_0 = \frac{2p_0}{\pi a}$$

или с учетом выражения для  $a$  (12.1)

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{p_0 E (R_1 + R_2)}{2\pi R_1 R_2 (1-\nu^2)}} \quad (12.2)$$

По теореме Пифагора можно найти расстояние до площадки от оси вращения ведущего колеса и от оси ведомого колеса:

$$l_1 = \sqrt{R_1^2 - a^2}; \quad l_2 = \sqrt{R_2^2 - a^2}. \quad (12.3)$$

Полагаем, что во время вращения колес величины  $l_1, l_2$  не изменяются. Тогда при отсутствии буксования выражение для передаточного отношения фрикционной передачи примет такой вид:

$$u = \omega_1 / \omega_2 = l_2 / l_1$$

или с учетом равенств (12.3)

$$u = \frac{R_2}{R_1} \sqrt{\frac{1 - a^2 / R_2^2}{1 - a^2 / R_1^2}}. \quad (12.4)$$

Формула (12.4) справедлива при отсутствии буксования колес. Она доказывает, что передаточное отношение фрикционной передачи равно отношению радиусов ведомого и ведущего шкивов, умноженному на коэффициент пропорциональности, который зависит от поджатия и радиусов колес.

### 12.3. Динамика колес

Установим соотношения между величинами моментов  $M_1, M_2$ .

Примем, что при неизменной нагрузке 1) вращения колес равномерные; 2) колеса не буксуют; 3) колеса находятся в упругом состоянии.

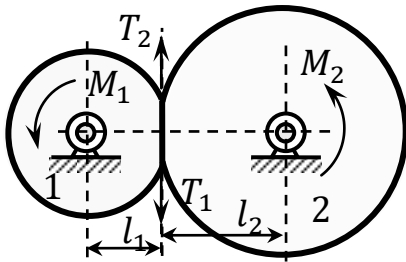


Рис. 12.3. Силовое взаимодействие между колесами

Уравнение равномерного вращения колеса 1 представим в виде уравнения равновесия моментов сил относительно оси вращения (рис. 12.3):

$$M_1 - T_1 l_1 - M_{01} = 0, \quad (12.5)$$

где  $T_1$  – величина силы трения сцепления между колесами.

Аналогичное уравнение справедливо для колеса 2:

$$M_2 - T_2 l_2 + M_{02} = 0, \quad (12.6)$$

где  $T_2$  – величина силы трения сцепления между колесами.

Так как  $T_1 = T_2$ , то искомое соотношение найдем из равенств (12.5), (12.6):

$$M_1 = M_{01} + \frac{(M_2 + M_{02})l_1}{l_2}. \quad (12.7)$$

Величины  $M_{01}$ ,  $M_{02}$  моментов сил трения во вращательной паре ведущего и ведомого шкива определяются по следующим формулам:

$$M_{01} = \mu p_0 L r_1; \quad M_{02} = \mu p_0 L r_2. \quad (12.8)$$

Условие отсутствия буксования колес заключается в выполнении неравенств

$$T_1 \leq f p_0 L; \quad T_2 \leq f p_0 L$$

или с учетом равенств (12.5), (12.6)

$$M_1 - M_{01} \leq f l_1 p_0 L \quad M_2 + M_{02} \leq f l_2 p_0 L. \quad (12.9)$$

По определению, коэффициент  $\beta$  запаса сцепления между колесами 1, 2 можно найти по одной из формул:

$$\beta = \frac{f l_1 p_0 L}{M_1 - M_{01}} = \frac{f l_2 p_0 L}{M_2 + M_{02}}. \quad (12.10).$$

## 12.4. Алгоритм расчета

1. Задаем исходные данные:  $R_1$  [м];  $R_2$  [м];  $\psi$ ;  $r_1$  [м];  $r_2$  [м];  $\omega_1$  [рад/с];  $M_2$  [Н м];  $E$  [Па];  $v$ ;  $\sigma_0$  [Па];  $\sigma_H$  [Па];  $f$ ;  $\mu$ .



2. Определяем погонную силу  $p_0$  прижатия из равенства (12.2):

$$p_0 = \frac{2\pi\sigma_0^2 R_1 R_2 (1-\nu^2)}{E(R_1+R_2)}.$$

3. Определяем длину колес, ширину площадки контакта по формуле (12.1), расстояния до площадки от оси вращения ведущего и ведомого колеса по формулам (12.3), колес, моментов холостого хода по формулам (12.8):

$$3.1. L = 2\psi R_1; \quad 2.2. a = 2\sqrt{\frac{2p_0 R_1 R_2 (1-\nu^2)}{\pi E(R_1+R_2)}};$$

$$3.2. l_1 = \sqrt{R_1^2 - a^2}; \quad l_2 = \sqrt{R_2^2 - a^2};$$

$$3.3. M_{01} = \mu p_0 L r_1; \quad M_{02} = \mu p_0 L r_2.$$

4. Определяем момент пары движущих сил по формуле (12.7):

$$M_1 = M_{01} + \frac{(M_2 + M_{02})l_1}{l_2}.$$

4. Проверяем условия (12.9) отсутствия буксования:

$$M_2 + M_{02} \leq f l_2 p_0 L.$$

5. Проверяем условие упругости по допускаемому напряжению:

$$\sigma_0 \leq \sigma_H.$$

6. При выполнении условий в пп. 4, 5 определяем передаточное отношение по следующей формуле:  $u = \frac{l_2}{l_1}$ .

7. Определяем угловую скорость ведомого колеса по формуле

$$\omega_2 = \omega_1 / u, \text{ рад/с.}$$

8. Определяем мощности движущих сил и сил сопротивления:

$$P_1 = M_1 \omega_1; \quad P_2 = M_2 \omega_2.$$

9. Оцениваем коэффициент полезного действия фрикционной передачи:

$$\eta = P_2 / P_1.$$

10. Оцениваем коэффициент  $\beta$  запаса сцепления по формуле (12.10).

$$\beta = f l_2 p_0 L / (M_2 + M_{02}).$$

## 12.5. Анализ характеристик передачи

Рассчитаем характеристики фрикционной передачи согласно представленному в предыдущем параграфе алгоритму (табл. 12.1).

### 12.1. Исходные данные

$R_1$ , мм	$R_2$ , мм	$\psi$ ,	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм	$\omega_1$ , об/мин	$M_2$ , Н м	$E$ , МПа	$\nu$	$\sigma_0, \sigma_H$ МПа	$f$	$\mu$
80	240	0,3	10	20	800	40..200	6000..200000	0,3	60..800	0,3..0,1	0,1

В таблице 12.1 пределы варьирования модуля упругости, допускаемого напряжения и коэффициента трения между колесами соответствуют текстолиту и стали. При проведении расчетов единицы измерения исходных величин в таблице 12.1 приводились к системе СИ, как указано в п. 1 алгоритма.

Рассмотрим стальные колеса. Пусть нормальное напряжение на контактной площадке, обеспечивающее прижатие колес, задано ( $\sigma_0 = 600$  МПа), и погонная сила прижатия остается неизменной при варьировании нагрузки. Относительная деформация колес при таком прижатии не превышает 0,1% и не влияет на передаточное отношение.

С увеличением нагрузки при отсутствии буксования колес коэффициент полезного действия возрастает, а коэффициент запаса сцепления уменьшается (рис. 12.4).

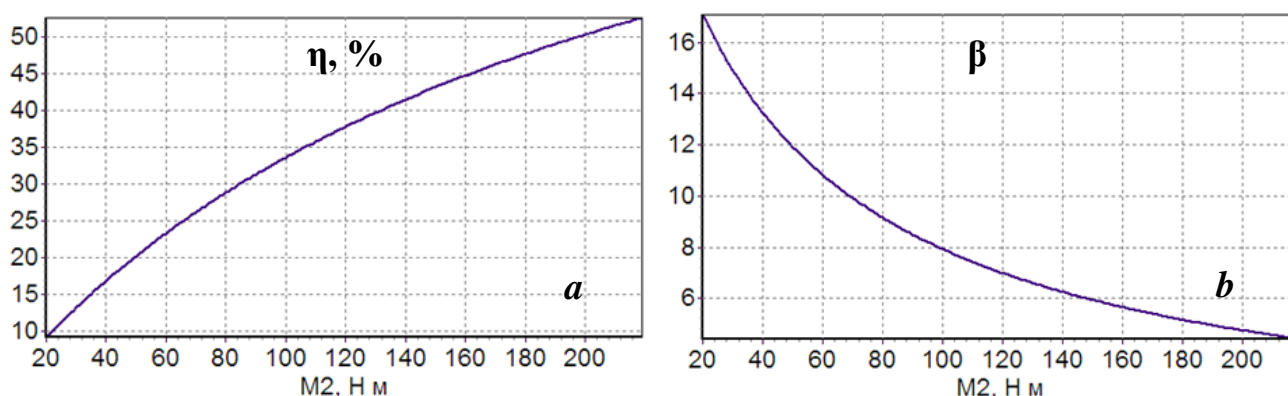


Рис. 12.4. Графики зависимости коэффициентов полезного действия передачи (a) и запаса сцепления (b) от момента пары сил нагрузки

Два графика на рисунке 12.4 представим в виде одного, показывающего влияние коэффициента запаса сцепления на эффективность фрикционной передачи без буксования: коэффициент полезного действия передачи достигает максимума при наименьшем коэффициенте запаса сцепления, близком к 1 (рис. 12.5).

Для поддержания заданного коэффициента  $\beta$  запаса сцепления прижимное усилие при возрастании нагрузки необходимо увеличивать (рис. 12.6).

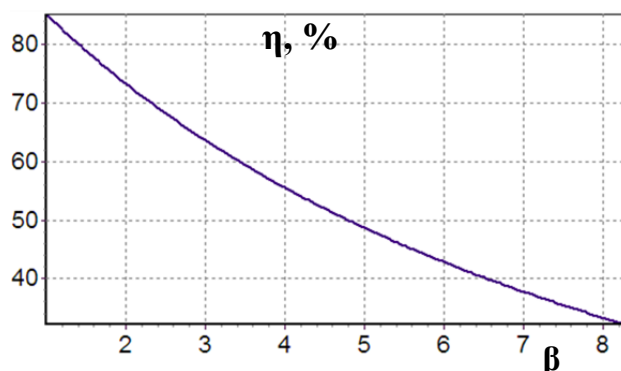


Рис. 12.5. Зависимость к. п. д. передачи от коэффициента запаса сцепления

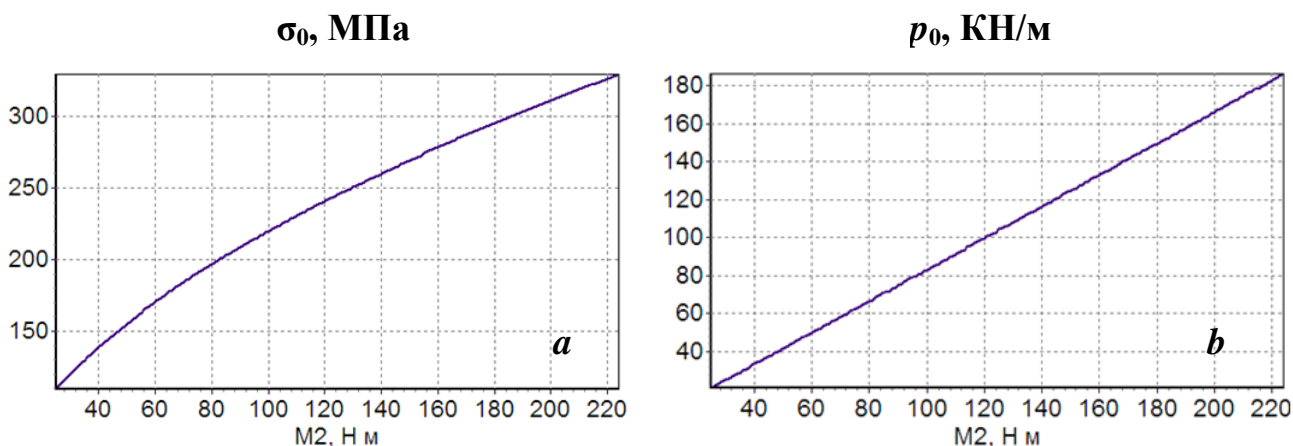


Рис. 12.6. Графики зависимости контактного напряжения (a) и погонной силы прижатия (b) от момента пары сил нагрузки ( $\beta = 1,5$ )

Регулирование прижатия колес, обеспечивающего заданное сцепление, позволяет поддерживать коэффициент полезного действия фрикционной передачи постоянным (рис. 12.7).

Расчет по формуле (12.1) показывает, что с уменьшением модуля упругости материала колес вдвое ширина площадки контакта возрастает в 1,4 раза (рис. 12.8 a).

Деформация колес из стали и текстолита при заданной нагрузке приводит к незначительному изменению передаточного отношения. Так, передаточное отношение увеличивается с 3.0 до 3.0003 при учете

деформации колес из материала с модулем упругости 5000 МПа и до 3.0005 – с модулем упругости 3000 МПа (рис. 12.8 *b*).

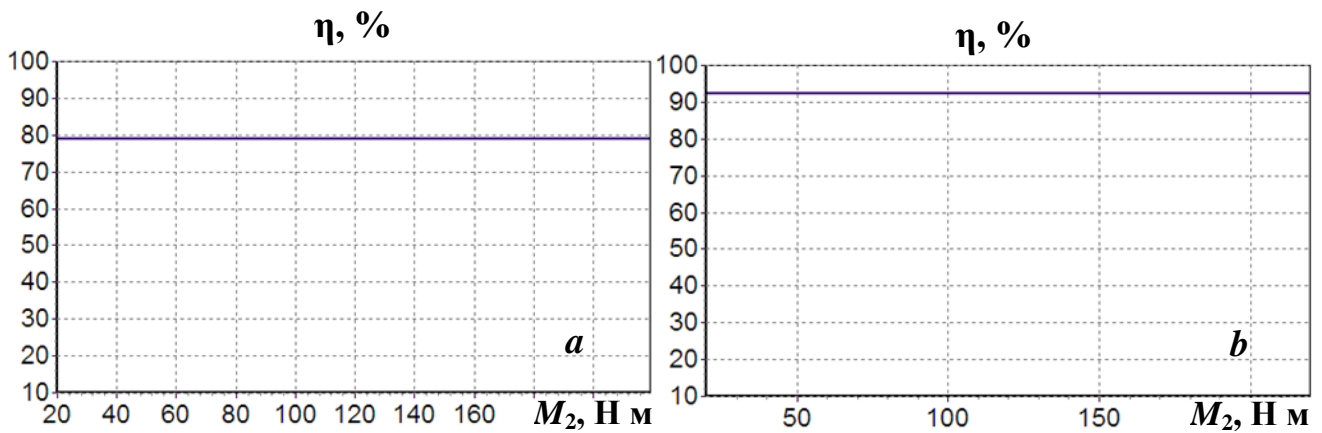


Рис. 12.7. Зависимость к. п. д. фрикционной передачи с колесами из стали (*a*) и из текстолита (*b*) от момента пары сил нагрузки ( $\beta = 1,5$ )

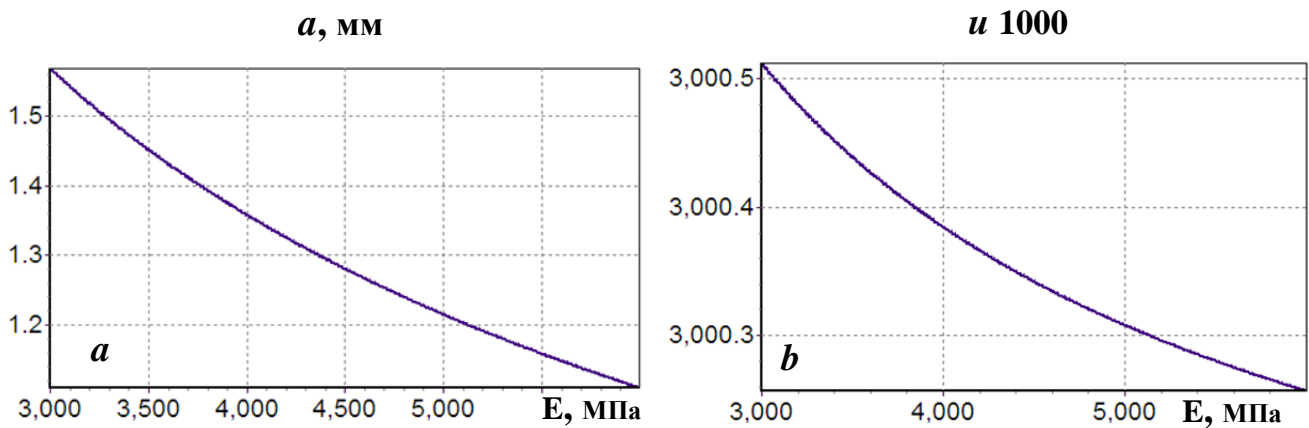


Рис. 12.8. Зависимость полуширины площадки контакта (*a*) и передаточного отношения (*a*) от модуля упругости ( $\beta = 1,5$ )

### 13. МАЛЬТИЙСКИЙ МЕХАНИЗМ

Типовой мальтийский механизм состоит из трех звеньев: стойки, водила в виде диска с установленными на нем стопорной шайбой и пальцем-цевкой (цевками), мальтийского креста с пазами (рис. 13.1).

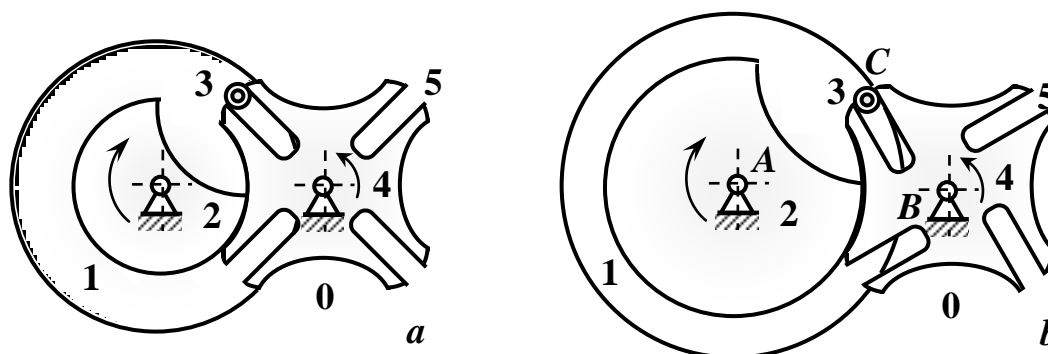


Рис. 13.1. Мальтийский механизм внешнего зацепления с радиальными (*a*) и со смещенными (*b*) пазами (0 – стойка, 1 – диск, 2 – стопорная шайба, 3 – цевка, 4 – мальтийский крест, 5 – паз)

Мальтийский механизм предназначен для преобразования непрерывного вращательного движения водила (кривошипа, диска) в периодическое вращательное или поступательное прерывистое движение креста.

Ведущим звеном мальтийского механизма служит водило; ведомым звеном – мальтийский крест.

Движение ведомого звена происходит за счет движения цевки во время нахождения ее в пазу креста. Количество цевок определяет количество остановок креста за время одного оборота водила.

Стопорная шайба предотвращает вращение креста в интервале времени между выходом цевки из паза и входом цевки в паз. Для этого профиль сектора креста между пазами выполняется в виде дуги вогнутой окружности, радиус которой равен радиусу стопорной шайбы.

В мальтийских механизмах с водилом в виде кривошипа вместо стопорной шайбы применяются стопоры различного конструктивного исполнения.

### 13.1. Структурный анализ плоских мальтийских механизмов

Типовой трехзвенный мальтийский механизм содержит два подвижных звена ( $n = 2$ ) и три кинематические пары: одноподвижную пару  $A$ , образованную диском 1 и стойкой 0; одноподвижную пару  $B$ , образованную крестом 5 и стойкой 0; четырехподвижную или пятиподвижную пару  $C$ , образованную цевкой диска и профилем паза креста (табл. 13.1).

**13.1. Кинематические пары мальтийского механизма, образующие звенья и классы кинематических пар**

$A$	$B$	$C$
0, 1	0, 4	1, 4
V	V	II или I

Диск и крест образуют пару первого класса при соприкосновении цевки с крестом в одной точке и пару второго класса при соприкосновении цевки с крестом по линии. В первом случае механизм содержит две одноподвижные пары ( $p_1 = 2$ ) и одну пару первого класса ( $p_5 = 1$ ). Во втором случае механизм содержит две одноподвижные пары ( $p_1 = 2$ ) и одну пару второго класса ( $p_4 = 1$ ). При этом взаимодействие между диском и крестом не отличается от взаимодействия заостренного или незаостренного толкателя с кулачком. Мальтийский механизм с парой второго класса относится к механизмам первого семейства ( $k = 1$ ).

Число  $W$  степеней свободы трехзвенного плоского мальтийского механизма с парой первого класса определим по формуле Сомова-Малышева:

$$W = 6n - 5p_1 - p_5 = 1.$$

Число  $W$  степеней свободы одноконтурного мальтийского механизма с парой второго класса определим по формуле (2.2) для механизма первого семейства:

$$W = 5n - 4p_1 - p_4 = 1.$$

В соответствии с формулой (2.4) мальтийский механизм с парой первого класса не имеет избыточных связей, а с парой второго класса имеет одну контурную избыточную связь.

При насаживании на палец ролика (роликовой цевки) добавляется четвертое звено и одна вращательная пара, образованная роликом и пальцем диска ( $n = 3$ ;  $p_1 = 3$ ;  $p_4 = 1$ ). Число  $W$  степеней свободы мальтийского механизма с роликовой цевкой определим по формуле (2.2) для механизма первого семейства:

$$W = 5n - 4p_1 - p_4 = 2.$$

В соответствии с формулой (2.4) мальтийский механизм с роликовой цевкой имеет одну контурную избыточную связь и одну локальную подвижность (вращение ролика).

### 13.2. Фазы движения мальтийского креста

Рассмотрим плоский мальтийский механизм с радиальными пазами (рис. 13.2). Будем считать, что диск 1 вращается по ходу стрелки часов с отсчетом угла  $\varphi$  поворота от оси, соединяющей центры диска и цевки 2 в момент входа в паз 3.

Движение креста за один оборот вращения диска с одной цевкой содержит три фазы: вращение при сближении центра цепки с центром креста, вращение при удалении цепки от центра креста и стояние. На первой фазе движения креста диск

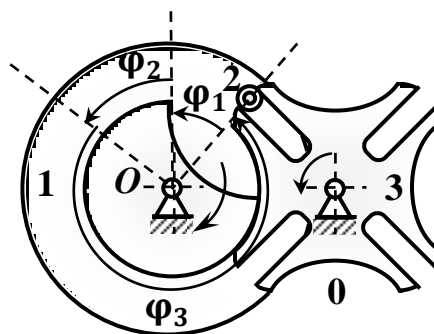


Рис. 13.2. Фазы движения креста

поворачивается на угол  $\varphi_1$ , на второй –  $\varphi_2$  и на третьей –  $\varphi_3$ :

$$\varphi_1 = \varphi(t_1) - \varphi(t_0); \varphi_2 = \varphi(t_2) - \varphi(t_1); \varphi_3 = 2\pi - \varphi_1 - \varphi_2,$$

где  $t_0, t_1, t_2$  – момент начала первой фазы, окончания первой и второй фазы соответственно.

При установке второй цевки угол  $\varphi_3$  определяется моментами времени выхода первой цевки из паза и входа второй цевки в паз. При

этом добавляются три фазовых угла  $\varphi_4$ ,  $\varphi_5$ ,  $\varphi_6$ , соответствующих движению второй цевки:

$$\varphi_6 = 2\pi - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_5.$$

В крестах с радиальными пазами ось паза в плоскости вращения креста проходит через его центр вращения; в крестах со смещенными пазами ось паза не пересекает центр вращения креста. Смещение паза равно расстоянию от центра креста до оси паза в плоскости вращения (рис. 13.3). Смещение радиального паза равно нулю.

Отметим, что в момент входа цевки в паз вектор скорости центра цевки направлен по оси паза.

Пусть  $n$  – число пазов креста;  $k$  – число цевок;  $t_m$ ,  $t_s$  – время движения креста и время стояния креста соответственно;  $K$  – коэффициент движения креста;

$\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – углы поворота диска на первой и второй фазах движения соответственно;  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – углы поворота креста на первой и второй фазах движения соответственно;  $L$  – расстояние между осями вращения диска и креста;  $h$  – смещение паза креста против хода вращения.

Во время движения цевки величина  $r_1$  остается неизменной, а величина  $r_2$  изменяется.

По определению,

$$K = \frac{t_m}{t_m + t_s} \quad (13.1)$$

Углы поворота диска, а также углы поворота креста на обеих фазах движения креста равны (рис. 13.3), или  $\varphi_1 = \varphi_2$ ;  $\beta_1 = \beta_2$ ; и при постоянной угловой скорости диска справедливы равенства

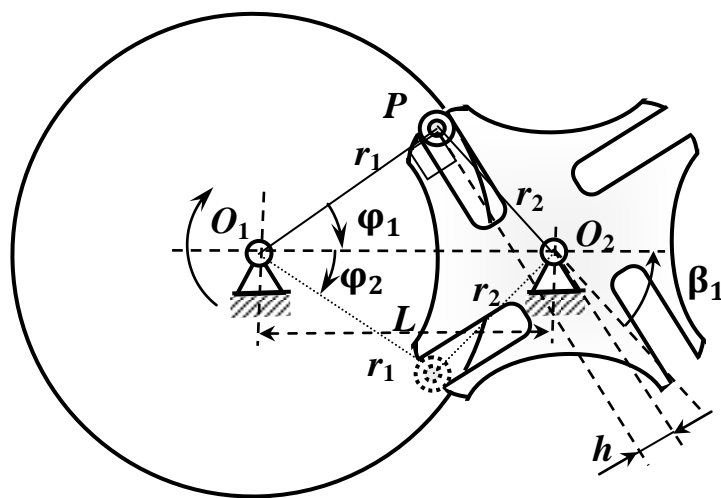


Рис. 13.3. Смещение паза и углы поворота диска и креста на первой фазе движения



$$\varphi_1 = K \frac{\pi}{k}; \quad \beta_1 = \frac{\pi}{n}. \quad (13.2)$$

Между углами  $\varphi_1$  и  $\beta_1$  имеет место геометрическая связь (рис. 13.3):

$$\varphi_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{h}{L \sin \varphi_1}$$

Подставляя в последнее равенство выражения (13.2), перепишем его так:

$$\frac{K}{k} = \frac{n-2}{2n} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{h}{L \sin (\pi K/k)}. \quad (13.3)$$

Равенство (13.3) приводит к ряду выводов:

- 1) число пазов креста не может быть меньше трех;
- 2) число цевок не может быть меньше двух, если время движения креста превышает время стояния ( $K > 0,5$ );
- 3) для креста с радиальными пазами ( $h = 0$ ) имеет место равенство

$$\frac{K}{k} = \frac{n-2}{2n},$$

это равенство показывает, что время движения и время стояния креста с радиальными пазами нельзя назначать произвольно (табл. 13.2);

### 13.2. Коэффициент движения креста $K: K = t_m/(t_m + t_s)$

$k \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1/6	1/4	3/10	1/3	5/14	3/8	7/18	2/5
2	1/3	1/2	3/5	2/3	5/7	3/4	7/9	4/5
3	1/2	3/4	9/10	—	—	—	—	—
4	2/3	—	—	—	—	—	—	—

4) назначать без ограничений время движения и стояния креста путем подбора смещения пазов или отношения  $h/L$  можно только в механизмах, оснащенных крестом со смещенными пазами.

По условиям,

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{k(t_m + t_s)}; \quad (13.4)$$

### 13.3. Кинематика мальтийского креста

#### 13.3.1. Крест с радиальными пазами

Рассмотрим крест с радиальными пазами (рис. 13.4).

Пусть  $\varphi_1, \varphi_2$  – углы поворота диска на первой и второй фазах движения соответственно;  $\beta_1, \beta_2$  – углы поворота креста на первой и второй фазах движения соответственно;  $r_1, r_2$  – расстояние между центром цевки и соответственно центром диска и креста;  $L$  – расстояние между осями

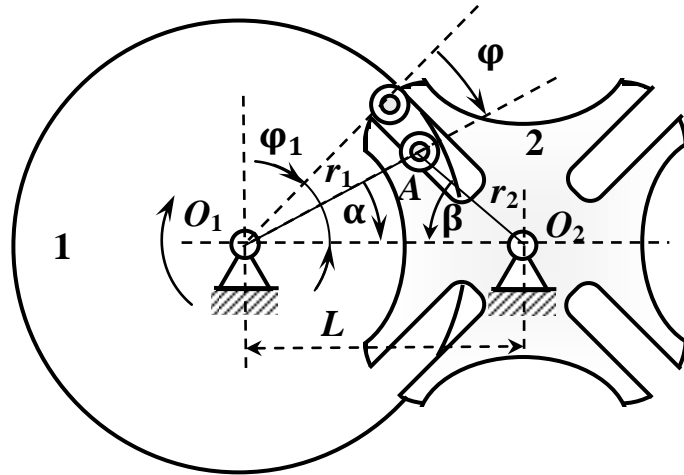


Рис. 13.4. Диск 1 и крест 2 до поворота и цевка А после поворота диска на угол  $\varphi$

вращения диска и креста;  $\omega_1$  – угловая скорость диска;  $\omega_2, \varepsilon_2$  – угловая скорость и угловое ускорение креста.

Рассмотрим треугольник  $O_1AO_2$  с вершинами в центрах диска  $O_1$ , креста  $O_2$  и цевки А. Пусть  $\alpha, \beta$  – острые углы треугольника. Запишем теоремы синусов и косинусов для треугольника  $O_1AO_2$  так:

$$\begin{cases} r_2 \sin \beta = r_1 \sin \alpha \\ r_2 \cos \beta = L - r_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

После деления обеих частей первого равенства на второе и из второго равенства найдем  $\beta$  и  $r_2$ :

$$\beta = \arctg \frac{r_1 \sin \alpha}{L - r_1 \cos \alpha}; r_2 = \frac{L - r_1 \cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (13.5)$$

Первая формула (13.5) позволяет определить угол поворота, угловую скорость и угловое ускорение креста при заданных параметрах  $r_1, L$  и задании закона вращения диска.

Так как в момент входа цевки в паз треугольник  $O_1AO_2$  прямоугольный, то

$$\varphi_1 = \arccos \frac{r_1}{L}; \quad \varphi_2 = \varphi_1; \quad (13.6)$$

$$\beta_1 = \arcsin \frac{r_1}{L} = \frac{\pi}{2} - \varphi_1; \quad \beta_2 = \beta_1. \quad (13.7)$$

Для упрощения анализа вращения креста воспользуемся теоремами сложения скоростей и ускорений центра  $A$  цевки.

Пусть  $v_a, v_r, v_e$  – величины абсолютной скорости, скорости относительно креста и переносной вместе с крестом скорости центра цевки (рис. 13.5 *a*). Как следует из теоремы о сложении скоростей [2], проекции абсолютной и переносной скорости центра цевки на ось, перпендикулярную вектору его относительной скорости, равны:

$$v_e = v_a \cos(\alpha + \beta)$$

или, так как  $v_a = \omega_1 r_1; v_e = \omega_2 r_2$ , то

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1 \cos(\alpha + \beta)}{r_2}. \quad (13.8)$$

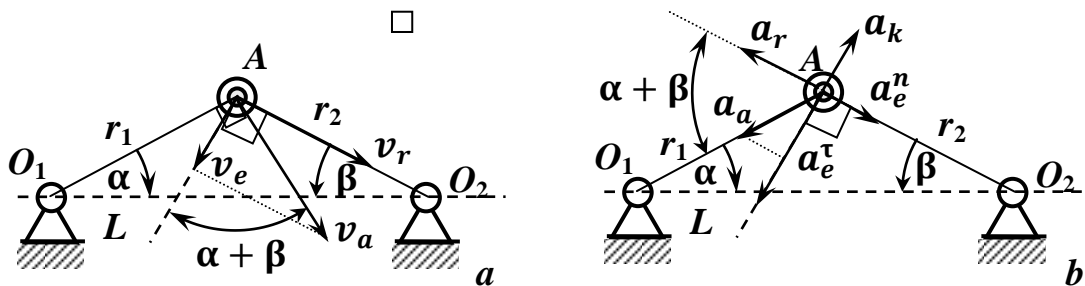


Рис. 13.5. Абсолютная скорость  $v_a$  (*a*) и абсолютное ускорение  $a_a$  (*b*) центра цевки

Анализ формулы (13.8) показывает, что в момент входа цевки в паз креста, когда  $\alpha + \beta = \pi/2$ , угловая скорость креста равна нулю, то есть вход осуществляется без жесткого удара. При движении цевки в пазу сумма  $\alpha + \beta$  уменьшается и числитель увеличивается, а знаменатель уменьшается, то есть угловая скорость возрастает. Максимум  $\omega_{2m}$  достигается в момент окончания первой фазы движения креста:

$$\omega_{2m} = \omega_1 r_1 / (L - r_1).$$

Выход цевки из радиального паза осуществляется без жесткого удара.

Пусть  $a_a, a_r, a_e^\tau, a_e^n, a_k$  – величины абсолютного ускорения, ускорения относительно креста, касательного и нормального ускоре-

ния вместе с крестом и кориолисова ускорения центра цевки (рис. 13.5 *b*). Как следует из теоремы о сложении ускорений [2], проекция абсолютного ускорения центра цевки на ось, перпендикулярную вектору его относительного ускорения, равна сумме проекций переносного и кориолисова ускорений:

$$a_e^\tau - a_k = a_a \sin(\alpha + \beta)$$

или

$$\varepsilon_2 r_2 - 2\omega_2 \omega_1 r_1 \sin(\alpha + \beta) = \omega_1^2 r_1 \sin(\alpha + \beta),$$

так как при равномерном вращении диска

$$a_a = \omega_1^2 r_1; a_e^\tau = \varepsilon_2 r_2;$$

$$a_k = 2\omega_2 v_r = 2\omega_2 v_a \sin(\alpha + \beta) = 2\omega_2 \omega_1 r_1 \sin(\alpha + \beta).$$

Отсюда найдем  $\varepsilon_2$ :

$$\varepsilon_2 = \frac{(2\omega_2 + \omega_1)\omega_1 r_1 \sin(\alpha + \beta)}{r_2}. \quad (13.9)$$

Анализ формулы (13.9) показывает, что в момент входа цевки в паз креста, когда  $\alpha + \beta = \pi/2$ , угловое ускорение креста не равно нулю, то есть в этот момент имеет место мягкий удар.

### 13.2.2. Крест со смещенными пазами

Рассмотрим крест со смещенными пазами (рис. 13.6).

Пусть  $\varphi_1, \varphi_2$  – углы поворота диска на первой и второй фазах движения соответственно;  $\beta_1, \beta_2$  – углы поворота креста на первой и второй фазах движения соответственно;  $r_1, r_2$  – расстояние между центром цевки и соответственно центром диска и креста;  $L$  – расстояние между осями вращения диска и креста;  $h$  – сме-

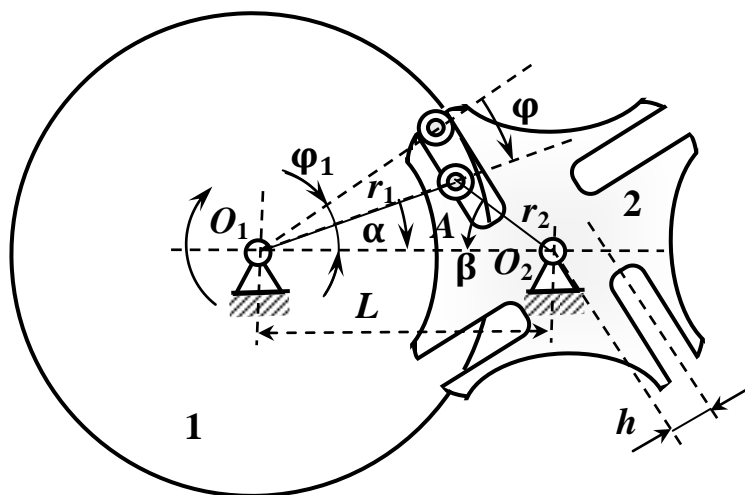


Рис. 13.6. Диск 1 и крест 2 до поворота и цевка А после поворота диска на угол  $\varphi$

щение паза;  $\omega_1$  – угловая скорость диска;  $\omega_2, \varepsilon_2$  – угловая скорость и угловое ускорение креста.

Рассмотрим треугольник  $O_1AO_2$  с вершинами в центрах диска  $O_1$ , креста  $O_2$  и цевки  $A$ . Пусть  $\alpha, \beta$  – острые углы треугольника. При этом угол  $\alpha$  связан с углом поворота диска:  $\alpha = \varphi_1 - \varphi$ .

В треугольнике  $O_1AO_2$  углы и стороны связаны такими равенствами:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{r_1 \sin \alpha}{L - r_1 \cos \alpha}; r_2 = \frac{L - r_1 \cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (13.10)$$

Выражения (13.6), (13.7) углов поворота диска и креста при смещении пазов (треугольник  $O_1AO_2$ , рис. 13.3) примут такой вид:

$$\varphi_1 = \arccos \frac{r_1 + h}{L}; \quad \varphi_2 = \varphi_1; \quad (13.11)$$

$$\beta_1 = \operatorname{arctg} \frac{r_1 \sin \varphi_1}{L - r_1 \cos \varphi_1}; \quad \beta_2 = \beta_1. \quad (13.12)$$

Для анализа вращения креста воспользуемся теоремами сложения скоростей и ускорений центра  $A$  цевки.

Пусть  $v_a, v_r, v_e$  – величины абсолютной скорости, скорости относительно креста и переносной вместе с крестом скорости центра цевки (рис. 13.7 *a*).

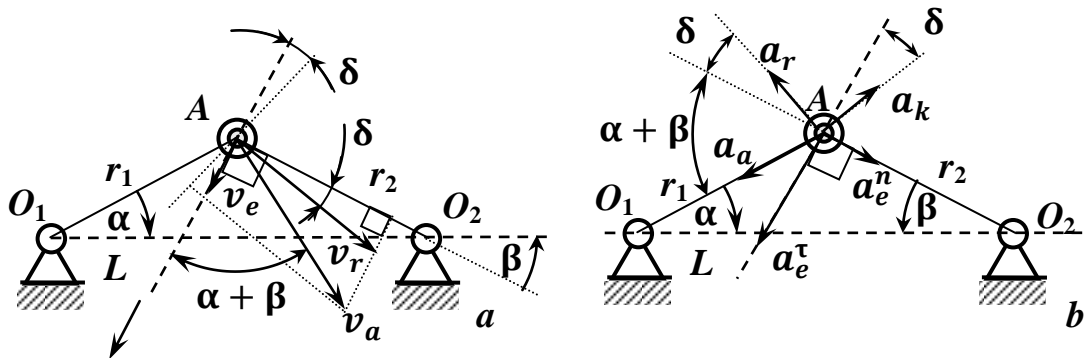


Рис. 13.7. Абсолютная скорость  $v_a$  (*a*) и абсолютное ускорение  $a_a$  (*b*) центра цевки

В отличие от креста с радиальными пазами вектор скорости центра цевки относительно креста со смещенными пазами при движении направлен не к центру креста, а под углом  $\delta$  к прямой, соединяющей центры цевки  $A$  и креста  $O_2$ :

$$\delta = \arcsin \frac{h}{r_2}. \quad (13.13)$$

Как следует из теоремы о сложении скоростей [2], проекции абсолютной и переносной скорости центра цевки на ось, перпендикулярную вектору его относительной скорости, равны:

$$v_a \cos(\alpha + \beta + \delta) = v_e \cos \delta.$$

Принимая во внимание, что  $v_a = \omega_1 r_1$ ;  $v_e = \omega_2 r_2$ , последнее равенство можно записать так:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1 \cos(\alpha + \beta + \delta)}{r_2 \cos \delta}. \quad (13.14)$$

Анализ выражения (13.14) показывает, что в момент входа цевки в паз креста, когда  $\alpha + \beta + \delta = \pi/2$ , угловая скорость креста равна нулю, то есть вход осуществляется без жесткого удара. В момент выхода цевки из паза имеем  $\alpha + \beta + \delta \neq \frac{\pi}{2}$ ; и угловая скорость креста не равна нулю, то есть в момент выхода цевки из смещенного паза имеет место жесткий удар.

Пусть  $a_a$ ,  $a_r$ ,  $a_e^t$ ,  $a_e^n$ ,  $a_k$  – величины абсолютного ускорения, ускорения относительно креста, касательного и нормального ускорения вместе с крестом и кориолисова ускорения центра цевки (рис. 13.7 б).

Как следует из теоремы о сложении ускорений [2], проекция абсолютного ускорения центра цевки на ось, перпендикулярную вектору его относительного ускорения, равна сумме проекций переносного и кориолисова ускорений:

$$a_e^t \cos \delta - a_e^n \sin \delta - a_k = a_a \sin(\alpha + \beta + \delta)$$

или

$$\varepsilon_2 r_2 \cos \delta - \omega_2^2 r_2 \sin \delta - 2\omega_2 \frac{\omega_1 r_1 \sin(\alpha + \beta)}{\cos \delta} = \omega_1^2 r_1 \sin(\alpha + \beta + \delta),$$

так как при равномерном вращении диска

$$a_a = \omega_1^2 r_1; a_e^t = \varepsilon_2 r_2; a_e^n = \omega_2^2 r_2;$$

$$a_k = 2\omega_2 v_r = 2\omega_2 \frac{v_a \sin(\alpha + \beta)}{\cos \delta} = 2\omega_2 \frac{\omega_1 r_1 \sin(\alpha + \beta)}{\cos \delta}.$$

Отсюда найдем  $\varepsilon_2$ :

$$\varepsilon_2 = \frac{2\omega_2\omega_1 r_1 \sin(\alpha+\beta)}{r_2 \cos^2 \delta} + \frac{\omega_1^2 r_1 \sin(\alpha+\beta+\delta) + \omega_2^2 r_2 \sin \delta}{r_2 \cos \delta}. \quad (13.15)$$

Анализ формулы (13.15) показывает, что в момент входа цевки в паз креста, когда  $\alpha + \beta + \delta = \pi/2$ , угловое ускорение креста не равно нулю, то есть в этот момент имеет место мягкий удар.

Формулы (13.8), (13.9) являются частным случаем формул (13.14), (13.15), когда  $\delta = 0$ .

### 13.4. Динамика мальтийского креста

Пусть  $r_1, r_2$  – расстояние между центром цевки и соответственно центром диска и креста (рис. 13.8);  $\omega_1$  – угловая скорость диска;  $\varphi_1$  и  $\beta_1$  – углы поворота соответственно диска и креста

на первой фазе движения креста;  $L$  – расстояние между центрами диска и креста;  $\varepsilon_2$  – угловое ускорение креста;  $N_1$  – величина нормальной реакции креста (паза), действующей на цевку;  $T_1$  – сила трения, действующая на цевку;  $I$  – момент инерции креста и приводимых им звеньев, приведенный к оси вращения креста;  $\mu$  – коэффициент трения скольжения цевки с крестом;  $f$  – коэффициент трения скольжения между втулкой стойки и цапфами валов креста и диска;  $M_1$  – величина момента пары движущих сил, действующих на диск;  $M_2$  – величина момента пары сил полезного сопротивления, приведенного к оси вращения креста;  $M_{01}, M_{02}$  – момент пар сил трения между втулкой стойки и цапфами валов соответственно диска и креста;  $e_1, e_2$  – радиусы цапф валов диска и креста соответственно;  $W$  – мощность момента  $M_1$  пары сил;  $\eta$  – коэффициент полезного действия.

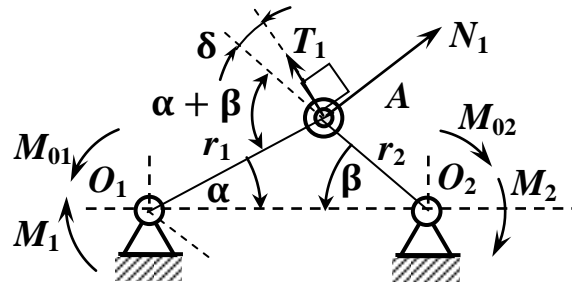


Рис. 13.8. Силы, действующие на цевку А

креста (паза), действующей на цевку;  $T_1$  – сила трения, действующая на цевку;  $I$  – момент инерции креста и приводимых им звеньев, приведенный к оси вращения креста;  $\mu$  – коэффициент трения скольжения цевки с крестом;  $f$  – коэффициент трения скольжения между втулкой стойки и цапфами валов креста и диска;  $M_1$  – величина момента пары движущих сил, действующих на диск;  $M_2$  – величина момента пары сил полезного сопротивления, приведенного к оси вращения креста;  $M_{01}, M_{02}$  – момент пар сил трения между втулкой стойки и цапфами валов соответственно диска и креста;  $e_1, e_2$  – радиусы цапф валов диска и креста соответственно;  $W$  – мощность момента  $M_1$  пары сил;  $\eta$  – коэффициент полезного действия.

На цевку со стороны креста действует сила  $R_1$ , равная равнодействующей сил  $N_1$  и  $T_1$ :

$$T_1 = \mu N_1; R_1 = \sqrt{N_1^2 + T_1^2} = N_1 \sqrt{1 + \mu^2}.$$

С учетом принятых обозначений уравнение вращения диска вокруг оси  $O_1$  с постоянной угловой скоростью можно записать так (рис. 13.8):

$$0 = N_1 r_1 \cos(\alpha + \beta + \delta) + T_1 r_1 \text{sign}(\varphi_1 - \varphi) \sin(\alpha + \beta + \delta) + M_{01} - M_1, \quad (13.16)$$

где  $\alpha = \varphi_1 - \varphi$ ;  $\beta = \arctg \frac{r_1 \sin \alpha}{L - r_1 \cos \alpha}$ ;  $\delta = \arcsin \frac{h}{r_2}$ ;

$\text{sign}(\varphi_1 - \varphi)$  – знак разности  $(\varphi_1 - \varphi)$  и «+» при нулевой разности.

Полагаем, что центр масс диска совпадает с центром  $O_1$  и неподвижен. Тогда из уравнения его движения следует, что сила  $R_1$  равна реакции во вращательной паре, образуемой диском и стойкой; и момент  $M_{01}$  пар сил трения определяется так:

$$M_{01} = f R_1 e_1 = f e_1 N_1 \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Учитывая, что реакции цевки и креста в точке взаимодействия равны по величине и направлены противоположно, запишем уравнение вращения креста в таком виде:

$$I \varepsilon_2 = T_1 r_2 \text{sign}(\varphi_1 - \varphi) \sin \delta + N_1 r_2 \cos \delta - M_2 - M_{02}$$

или

$$N_1 = \frac{I \varepsilon_2 + M_2}{r_2 (\cos \delta + \mu \text{sign}(\varphi_1 - \varphi) \sin \delta) - f e_2 \sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (13.17)$$

Равенства (13.16), (13.17) позволяют оценить мощность момента  $M_1$  и коэффициент полезного действия мальтийского механизма с радиальными и со смещенными пазами:

$$W = M_1 \omega_1; \quad (13.18)$$

$$\eta = \frac{M_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\int_0^{\varphi_1 + \varphi_2} M_1 d\varphi}. \quad (13.19)$$

### 13.5. Алгоритм расчета мальтийского механизма

1. Задаем исходные данные в виде таблицы 13.3:  $t_m$  – время движения креста между остановками;  $t_s$  – время стояния креста;  $e_1, e_2$  – радиусы цапф валов диска и креста соответственно;  $I$  – момент инер-



ции звеньев, приведенный к оси вращения креста;  $\mu$  – коэффициент трения скольжения цевки с крестом;  $f$  – коэффициент трения скольжения между втулкой стойки и цапфами валов креста и диска;  $M_2$  – величина момента пары сил полезного сопротивления, приведенного к оси вращения креста.

### 13.3. Обозначения параметров, единицы измерения и величины

$t_m$	$t_s$	$L$	$e_1$	$e_2$	$I$	$\mu$	$f$	$M_2$
с	с	мм	мм	мм	кг м <sup>2</sup>			Н м
+	+	+	+	+	+	+	+	+

2. Приводим исходные данные к единицам измерения в системе СИ.

3. Вычисляем коэффициент  $K$  движения креста по формуле (13.1):

$$K = \frac{t_m}{t_m + t_s}.$$

4. По таблице определяем число  $z$  пазов креста и число  $k$  цевок на диске. Если точное значение  $K$  в таблице 13.1 найдено, принимаем смещение паза нулевым:  $h = 0$ . Если в таблице 13.1 точного значения  $K$  не найдено, находим ближайшее к нему большее значение и соответствующие ему  $z$  и  $k$ .

5. Определяем смещение  $h$  паза из равенства (13.3), если при выполнении пункта 4 точное значение  $K$  в таблице 13.1 не найдено:

$$h = L \sin \left( \frac{\pi K}{k} \right) \operatorname{tg} \left[ \pi \left( \frac{z-2}{2z} - \frac{K}{k} \right) \right].$$

6. Вычисляем угловую скорость диска по формуле (13.4):

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{k(t_m + t_s)}.$$

7. Вычисляем углы поворота диска на фазе сближения  $\varphi_1$  цевки с крестом и удаления  $\varphi_2$  от креста по формуле (13.2):  $\varphi_1 = K \frac{\pi}{k}$ ;  $\varphi_2 = \varphi_1$ .

8. Вычисляем расстояние  $r_1$  между центром вращения диска и центром цевки из равенства (13.11):  $r_1 = L \cos \varphi_1 - h$ .

9. Вычисляем угол  $\beta_1$  поворота креста на фазе сближения и  $\beta_2$  на фазе удаления по формулам (13.2), (13.12):  $\beta_1 = \frac{\pi}{z}$ ;  $\beta_2 = \beta_1$ .

10. Вычисляем расстояние между центром креста и дальним  $r_{2max}$  и ближним  $r_{2min}$  концами паза по формулам

$$r_{2max} = \frac{L - r_1 \cos \varphi_1}{\cos \beta_1}; r_{2min} = L - r_1.$$

11. Назначаем шаг  $\Delta\varphi$  параметра  $\varphi$ , возрастающего от 0 до  $\varphi_1 + \varphi_2$ . Принимаем  $A = 0$ .

На каждом шагу определяем

1) углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и расстояние  $r_2$  между центрами креста и цевки по формулам (13.10):  $\alpha = \varphi_1 - \varphi$ ;  $\beta = \text{actg} \frac{r_1 \sin \alpha}{L - r_1 \cos \alpha}$ ;  $r_2 = \frac{L - r_1 \cos \alpha}{\cos \beta}$ ;

2) угол  $\delta$  между осями паза и прямой, соединяющей центры цевки  $A$  и креста  $O_2$  по формуле (13.13):  $\delta = \arcsin \frac{h}{r_2}$ ;

3) угловую скорость  $\omega_2$  креста по формуле (13.14):

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1 \cos(\alpha + \beta + \delta)}{r_2 \cos \delta};$$

4) угловое ускорение  $\varepsilon_2$  креста по формуле (13.15):

$$\varepsilon_2 = \frac{2\omega_2 \omega_1 r_1 \sin(\alpha + \beta)}{r_2 \cos^2 \delta} + \frac{\omega_1^2 r_1 \sin(\alpha + \beta + \delta) + \omega_2^2 r_2 \sin \delta}{r_2 \cos \delta};$$

5) величину  $N_1$  силы давления цевки на крест по формуле (13.17):

$$N_1 = \frac{I\varepsilon_2 + M_2}{r_2(\cos \delta + \mu \text{sign}(\varphi_1 - \varphi) \sin \delta) - f e_2 \sqrt{1 + \mu^2}};$$

6) величину  $M_1$  момента пары движущих сил по формуле из равенства (13.16):

$$M_1 = N_1 \left[ r_1 \cos(\alpha + \beta + \delta) + \mu r_1 \text{sign}(\varphi_1 - \varphi) \sin(\alpha + \beta + \delta) + f e_1 \sqrt{1 + \mu^2} \right];$$

7) мощность момента пары движущих сил по формуле (13.18):

$$W = M_1 \omega_1;$$

8) приращение работы  $\Delta A$  по формуле  $\Delta A = M_1 \Delta\varphi$ ;

9) работу  $A$  пары движущих сил в текущем положении диска по формуле:  $A = A + \Delta A$ .

12. Строим графики зависимостей величин  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $r_2$ ,  $\omega_2$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $M_1$ ,  $W$  от угла  $\varphi$  поворота диска на первой и второй фазах движения креста.

13. Вычисляем коэффициент  $\eta$  полезного действия по формуле (13.19):  $\eta = \frac{M_2(\beta_1 + \beta_2)}{A}$ .

14. Строим графики зависимости функций  $\eta$ ,  $h$ ,  $r_1$ ,  $r_{2max}$ ,  $r_{2min}$  от  $K$ ,  $L$ .

### 13.6. Пример расчета

Рассмотрим линию по укладке и упаковке штучных продуктов в тару (рис. 13.9). Электродвигатель передает вращательное движение через редуктор на ведущее звено (диск) мальтийского механизма.

Крест совершает прерывистое однонаправленное вращение. Жестко с крестом связан ведущий вал периодически движущихся ленточных транспортеров.

Во время движения креста транспортеры перемещают продукт, а укладчик неподвижен. Во время стояния креста транспортеры неподвижны, схват укладчика в состоянии рабочего хода захватывает продукт на транспортере подачи продукта, перемещает его и помещает в тару на транспортере подачи тары, упаковочная машина упаковывает продукт. За время холостого хода укладчика схват возвращается в исходное положение, после чего движение креста возобновляется.

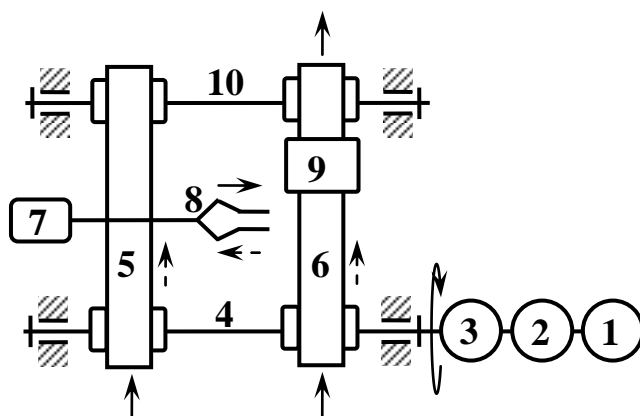


Рис. 13.9. Автоматизированная линия (1 – электродвигатель, 2 – редуктор, 3 – мальтийский механизм, 4 – ведущий вал ленточных транспортеров, 5 – транспортер подачи продукта, 6 – транспортер подачи тары, 7 – укладчик, 8 – схват, 9 – упаковочная машина, 10 – ведомый вал транспортеров)

Во время движения креста транспортеры перемещают продукт, а укладчик неподвижен. Во время стояния креста транспортеры неподвижны, схват укладчика в состоянии рабочего хода захватывает продукт на транспортере подачи продукта, перемещает его и помещает в тару на транспортере подачи тары, упаковочная машина упаковывает продукт. За время холостого хода укладчика схват возвращается в исходное положение, после чего движение креста возобновляется.

Время цикла операций укладчика равно 2..3 с. Время движения транспортеров равно 1 с.

1. Задаем исходные данные (табл. 13.4).

#### 13.4. Обозначения параметров, единицы измерения и величины

$t_m$	$t_m + t_s$	$L$	$e_1$	$e_2$	$I$	$\mu$	$f$	$M_2$
с	с	мм	мм	мм	кг м <sup>2</sup>			Н м
1	3..4	600	4	4	3,4	0,3	0,12	40

2. Оцениваем угловую скорость и максимальную мощность момента пары движущих сил (мощность двигателя) на фазах сближения и удаления, когда время движения и стояния креста равно 4 с ( $K = 1/4$ ), и число пазов ( $z = 4$ ) без смещения и число цевок ( $k = 1$ ) найдено по таблице 13.2 (рис. 13.10).

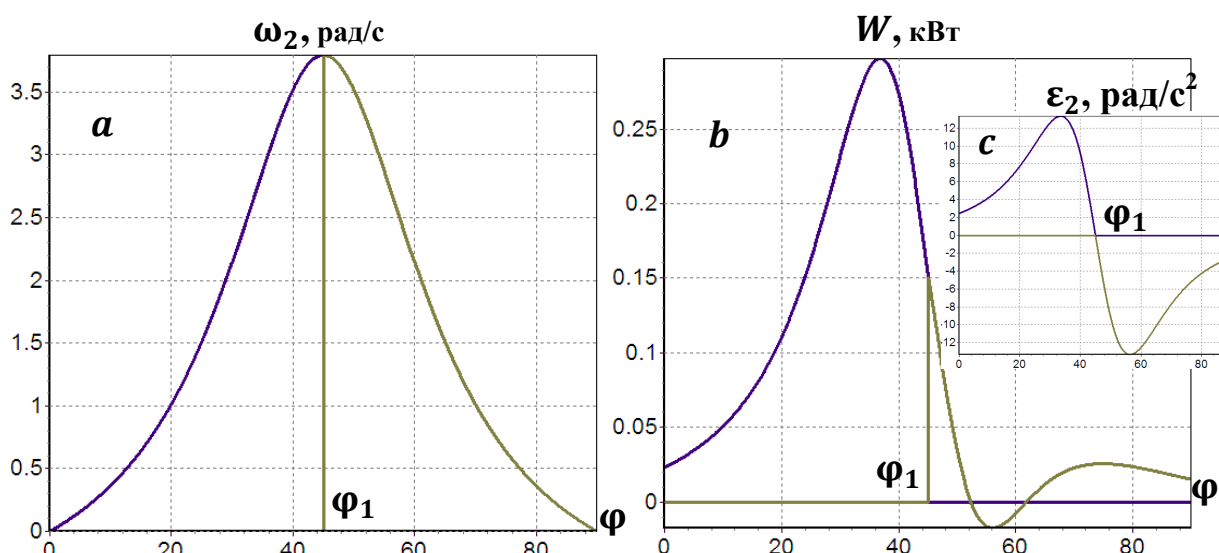


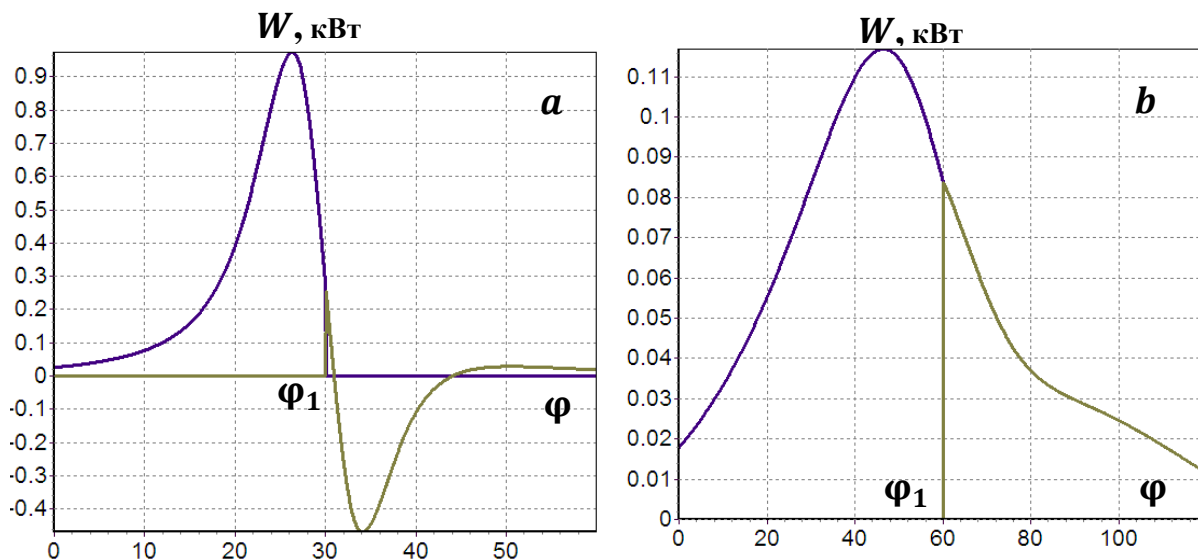
Рис. 13.10 Зависимости угловой скорости креста (а), мощности момента  $M_1$  (b), углового ускорения креста (с) от угла поворота диска [град]

3. Отмечаем отсутствие жесткого удара со скачками угловой скорости и мягкий удар со скачками углового ускорения на фазах сближения и удаления креста с радиальными пазами.

4. Оцениваем мощность момента пары движущих сил (мощность двигателя) на фазах сближения и удаления, когда время движения и стояния креста равно 3 с ( $K = 1/3$ ), и в соответствии с таблицей 13.2

число  $z$  пазов равно 3 и число  $k$  цевок равно 2, либо число пазов равно 6 и число цевок равно 1 (рис. 13.11).

Отмечаем, что обеспечение заданного коэффициента движения креста за счет увеличения числа цевок приводит к увеличению мощности двигателя и резкому росту инерционных нагрузок.



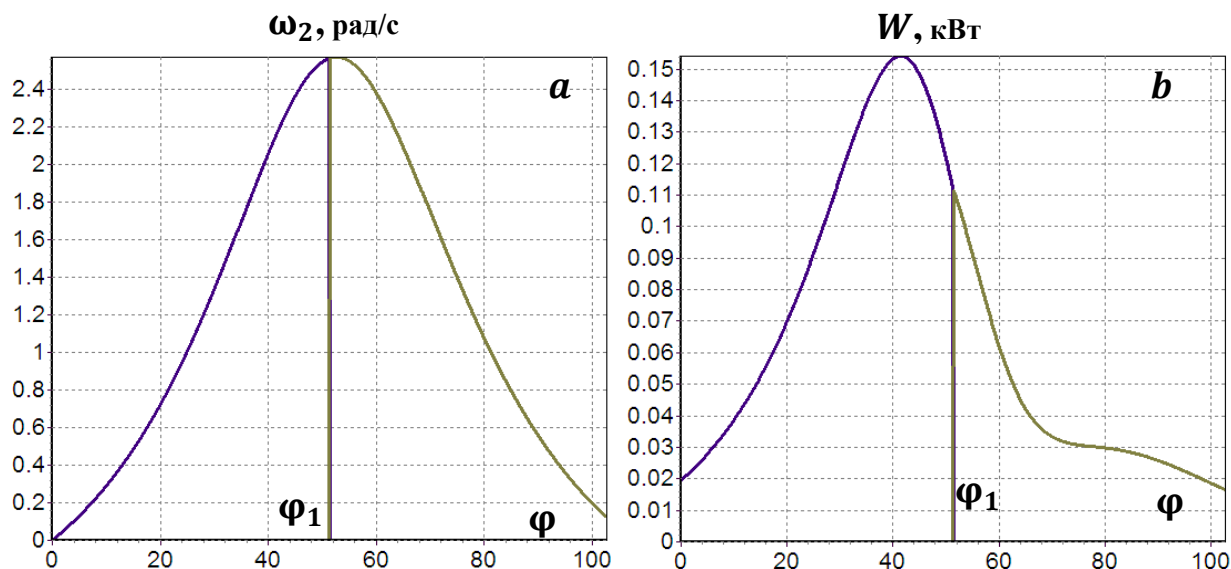
**Рис. 13.11.** Зависимости от угла поворота диска [град] мощности момента  $M_1$  пары сил, действующих на крест, когда  $z = 3, k = 2$  (a) и  $z = 6, k = 1$  (b)

5. Оцениваем мощность момента пары движущих сил (мощность двигателя) на фазах сближения и удаления, когда время движения и стояния креста равно 3,5 с ( $K = 1/3,5$ ), и ближайшее максимальное число по таблице 13.2 соответствует числу  $z$  пазов, равному 5, и числу  $k$  цевок, равному 1 (рис. 13.12).

Отмечаем, что заданный коэффициент движения креста достигается за счет смещения пазов. Максимум угловой скорости креста достигается на фазе удаления цевки от креста.

Недостатком смещения паза является жесткий удар диска с крестом на выходе цевки из паза, то есть ненулевая угловая скорость креста в момент его остановки стопором (рис. 13.12, a). На выходе из паза диск «подталкивает» крест. Уменьшить эффект удара или полностью избавиться от него позволит сглаживание угла паза или вы-

полнение шарнирного соединения углового края паза с подпружиниванием. Другой способ «сглаживания» удара состоит в подпружинивании стопорной шайбы или стопора кривошипа так, чтобы крест останавливался не мгновенно.



**Рис. 13.12.** Зависимости от угла поворота диска [град] угловой скорости креста (*a*) и мощности момента  $M_1$  пары сил, действующих на крест (*b*), когда  $z = 5, k = 1$

При переходе диска из фазы сближения к фазе удаления мощность скачкообразно уменьшается за счет изменения направления силы трения, действующей на цевку, и уменьшения момента действующих на крест сил относительно оси вращения. При назначенных исходных данных скачок момента – незначительный (рис. 13.12 *b*).

5. Оцениваем размер диска (расстояние  $r_1$  между центрами диска и цевки), смещение  $h$  паза, расстояние между центром креста и соответственно ближним  $r_{2min}$  и дальним  $r_{2max}$  концом паза (рис. 13.13).

6. Отмечаем, что заданный коэффициент движения выгоднее обеспечить за счет изменения числа пазов без увеличения числа цевок (рис. 13.14). Например, чтобы обеспечить коэффициент движения равным  $1/3$ , выгоднее установить одну цевку и шесть пазов, чем две цевки и три паза.

Рассмотренный пример позволяет подтвердить ряд выводов:

1) радиальные пазы креста мальтийского механизма обеспечивают безударный ход креста, но не позволяют устанавливать время движения и стояния креста иное, кроме определенного набора значений отношения времени движения и времени стояния;

2) смещенные пазы креста мальтийского механизма не обеспечивают безударный ход креста при выходе цевки из паза, но позволяют устанавливать время движения и стояния креста без ограничения значений;

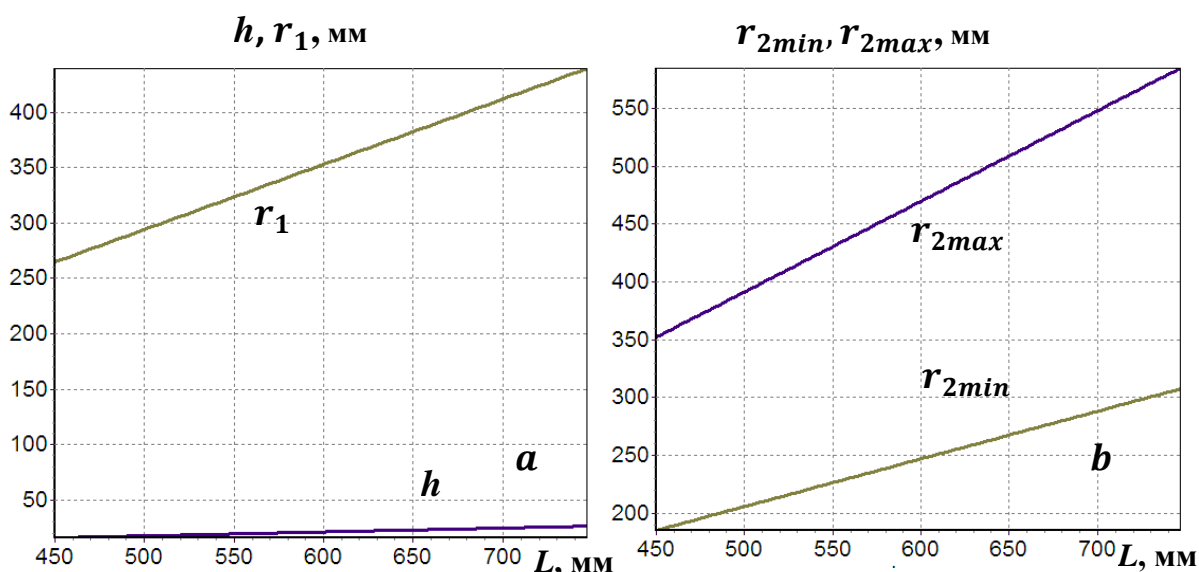


Рис. 13.13. Зависимости  $h, r_1, (a)$  и  $r_{2min}, r_{2max} (b)$  от расстояния между центрами диска и креста

3) повышение эффективности и коэффициента полезного действия мальтийского механизма с заданным коэффициентом движения креста достигается измене-

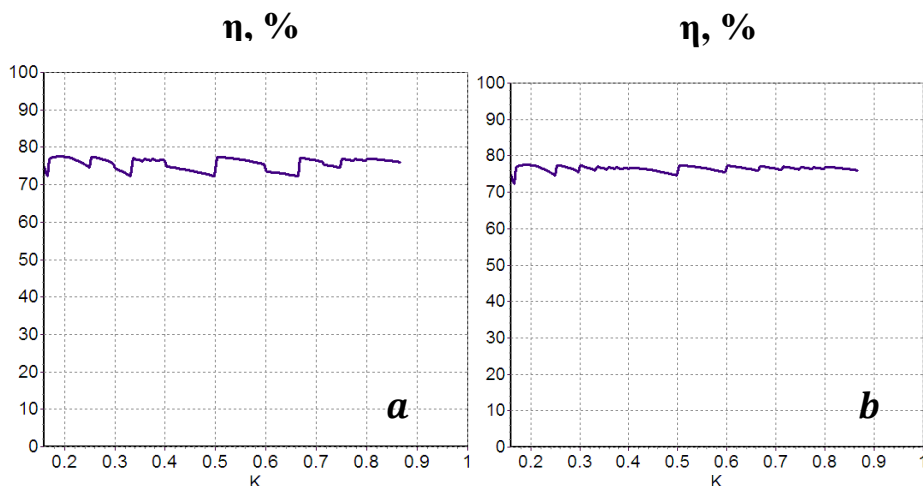


Рис. 13.14. Зависимости КПД от коэффициента  $K$  движения креста при изменении количества цевок (a) и количества пазов (b)

НИЕМ ЧИСЛА ПАЗОВ, а не числа ЦЕВОК.



## 14. ТЕСТЫ

### 14.1. Тест по главе 1

*Задание 1.* Механизм предназначен для

- 1) передачи механической энергии при заданных движениях звеньев;
- 2) преобразования энергии;
- 3) преобразования немеханической энергии в движения тел;
- 4) преобразовании движения тел в немеханическую энергию;
- 5) выполнения задач, отличных от перечисленных выше.

*Задание 2.* Механизм и передача – понятия

- 1) тождественные; 2) взаимно исключают; 3) связанные между собой;
- 4) не связанные.

*Задание 3.* В состав механизма может не входить

- 1) стойка; 2) входное (ведущее) звено; 3) выходное (ведомое) звено;
- 4) кривошип.

*Задание 4.* Звеньями могут быть

- 1) твердые тела; 2) гибкие тела; 3) пружины; 4) жидкости в шлангах.

*Задание 5.* Кривошип совершает

- 1) вращательное движение вокруг оси, связанной с подвижным звеном;
- 2) вращательное движение вокруг оси, связанной со стойкой;
- 3) поступательное движение относительно стойки;
- 4) движение, не перечисленное выше.

*Задание 6.* Кулиса совершает

- 1) вращательное движение вокруг оси, связанной с камнем;
- 2) вращательное движение вокруг оси, связанной со стойкой;
- 3) поступательное движение относительно стойки;
- 4) движение, не перечисленное выше.

*Задание 7.* Кинематическая пара образуется

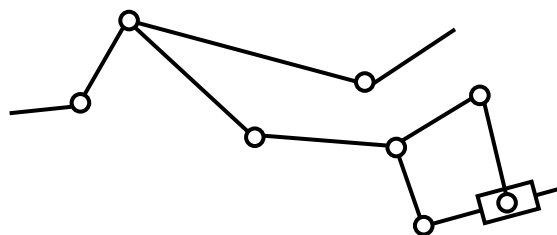
- 1) одним звеном; 2) двумя звеньями; 3) тремя звеньями и больше;
- 4) не образуется звеньями.

*Задание 8.* Звенья, контактирующие в точке, образуют пару

1) низшую; 2) высшую; 3) высшую или низшую; 4) не высшую и не низшую.

*Задание 9.* Изображенная на рисунке кинематическая цепь является

- 1) открытой простой;
- 2) замкнутой простой;
- 3) открытой сложной;
- 4) замкнутой сложной.

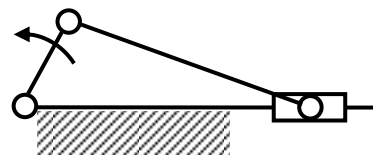


*Задание 10.* Плоские рычажные механизмы относятся к механизмам

- 1) второго семейства; 2) третьего семейства; 3) четвертого семейства;
- 4) не второго, не третьего, не четвертого семейства.

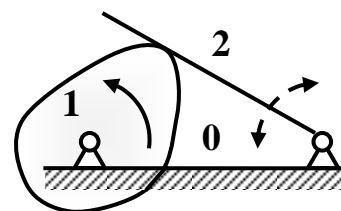
*Задание 11.* Кинематические пары в кривошипно-ползунном механизме, изображенном на рисунке, относятся к

- 1) низшим; 2) высшим;
- 3) высшим и низшим;
- 4) не высшим и не низшим.



*Задание 12.* Звено 2 на рисунке называется

- 1) кулисой; 2) кривошипом;
- 3) коромыслом;
- 4) не кулисой, не коромыслом, не кривошипом.



*Задание 13.* В плоском кулачковом механизме, изображенном на рисунке из задания 12, кулачок и толкатель образуют

- 1) одноподвижную кинематическую пару; 2) двухподвижную пару;
- 3) трехподвижную пару; 4) не одно-, не двух- и не трехподвижную пару.

*Задание 14.* В простейшем зубчатом механизме контактирующие зубья колес образуют

- 1) низшую кинематическую пару; 2) высшую кинематическую пару;
- 3) низшую или высшую кинематическую пару; 4) не образуют кинематическую пару.

*Задание 15.* Кинематические пары в зубчатом механизме относятся к

- 1) высшим; 2) низшим; 3) высшим и низшим; 4) не высшим и не низшим.

*Задание 16.* В простейшем зубчатом механизме с параллельными осями колес колеса называются

1) цилиндрическими; 2) коническими; 3) цилиндрическими или коническими; 4) не цилиндрическими и не коническими.

*Задание 17.* В простейшем зубчатом механизме с пересекающимися осями колес колеса называются

1) цилиндрическими; 2) коническими; 3) цилиндрическими или коническими; 4) не цилиндрическими и не коническими.

*Задание 18.* В простейшем зубчатом механизме с внутренним зацеплением колеса вращаются

- 1) в одном направлении; 2) в противоположных направлениях;
- 3) в произвольных направлениях;
- 4) не в одном и не в противоположном направлениях.

*Задание 19.* В ступенчатом зубчатом механизме на каждом валу установлено

- 1) одно колесо; 2) два колеса; 3) одно или два колеса;
- 4) одно или более колес.

*Задание 20.* В простейшем фрикционном механизме колеса образуют

- 1) низшую кинематическую пару; 2) высшую кинематическую пару;
- 3) низшую или высшую пару; 4) не образуют кинематическую пару.

**Номера заданий и правильных ответов теста к главе 1**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	3	4	1	2	2	2	2	4	2	1	4	2	2	3	1	2	1	4	2

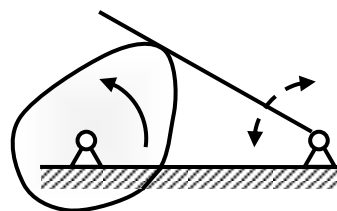
## 11.2. Тест по главе 2

*Задание 1.* Плоский рычажный механизм содержит  $p_1$  одноподвижных и  $p_2$  двухподвижных кинематических пар. В формуле для числа  $W$  степеней свободы механизма  $W = (6 - k)n - (5 - k)p_1 - (4 - k)p_2$  число  $k$  семейств равно

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 0 или больше трех.

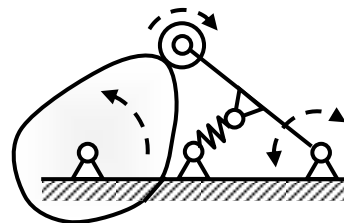
**Задание 2.** Число степеней свободы плоского кулачкового механизма, изображенного на рисунке, равно

- 1) 1; 2) 1 или 2; 3) не 1; 4) не 1 и не 2



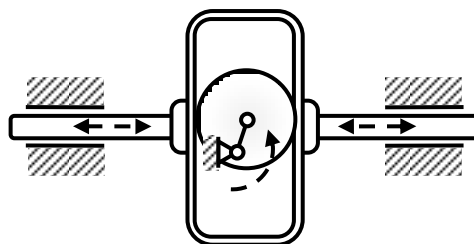
**Задание 3.** Число степеней свободы изображенного на рисунке плоского кулачкового механизма с роликовым толкателем и силовым замыканием высшей пары равно

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) больше 3.



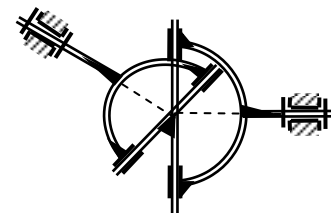
**Задание 4.** Число кинематических пар плоского кулачкового механизма, изображенного на рисунке, равно

- 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) больше 4.



**Задание 5.** Число кинематических пар карданного механизма, изображенного на рисунке, равно

- 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) больше 4.

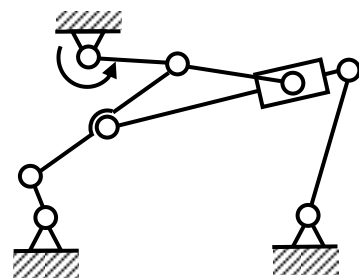


**Задание 6.** Число степеней свободы карданного механизма, изображенного на рисунке к заданию 5, равно

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) больше 3.

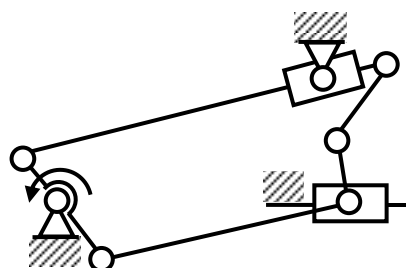
**Задание 7.** Механизм, структурная схема которого изображена на рисунке, относится к механизму

- 1) первого класса 2) второго класса;  
3) третьего класса; 4) четвертого класса.



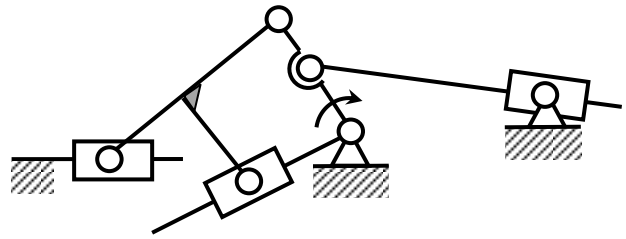
**Задание 8.** Механизм, структурная схема которого изображена на рисунке, относится к механизму

- 1) четвертого класса; 2) третьего класса;  
3) второго класса; 4) первого класса.



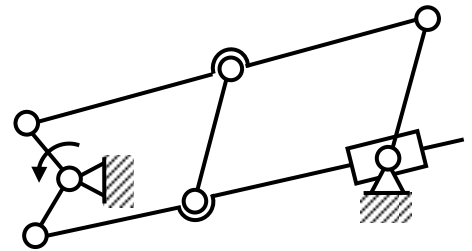
*Задание 9.* Механизм, структурная схема которого изображена на рисунке, относится к механизму

- 1) третьего класса; 2) первого класса;
- 3) второго класса; 4) четвертого класса.



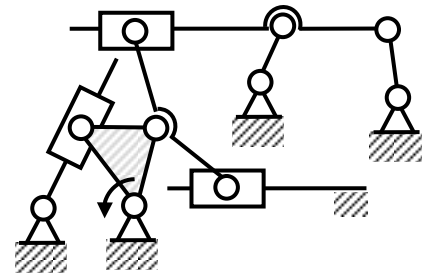
*Задание 10.* Механизм, структурная схема которого изображена на рисунке, относится к механизму

- 1) четвертого класса; 2) первого класса;
- 3) второго класса; 4) третьего класса.

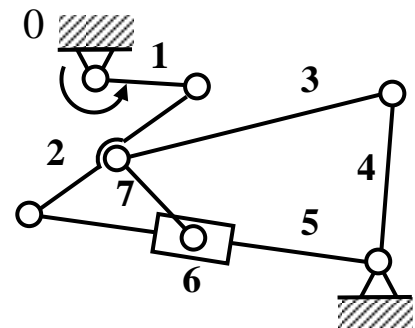


*Задание 11.* Механизм, структурная схема которого изображена на рисунке, относится к механизму

- 1) третьего класса; 2) четвертого класса;
- 3) второго класса; 4) первого класса.



*Задание 12.* Формула строения механизма, структурная схема которого изображена на рисунке, записывается в виде



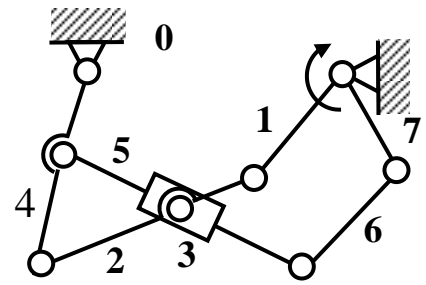
$$1) \text{ Мех кл. I } (0 - 1) + \text{ группа кл. II } (2 - 5) + \begin{cases} \text{группа кл. II } (3 - 4) \\ \text{группа кл. II } (6 - 7) \end{cases};$$

$$2) \text{ Мех кл. I } (0 - 1) + \text{ группа кл. II } (2 - 5) + \text{ группа кл. II } (3 - 4) + \text{ группа кл. II } (6 - 7);$$

$$3) \text{ Мех кл. I } (0 - 1) + \text{ группа кл. III } (2 - 5 - 6 - 7) + \text{ группа кл. II } (3 - 4);$$

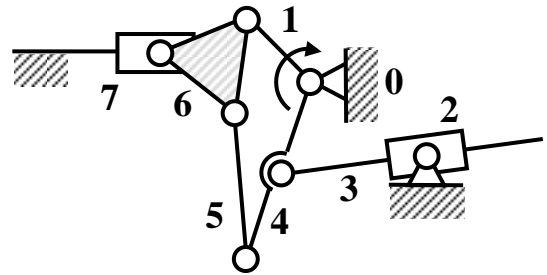
$$4) \text{ Мех кл. I } (0 - 1) + \begin{cases} \text{группа кл. II } (2 - 5) \\ \text{группа кл. II } (3 - 4) \end{cases} + \text{ группа кл. II } (6 - 7).$$

**Задание 13.** Формула строения механизма, структурная схема которого изображена на рисунке, имеет вид



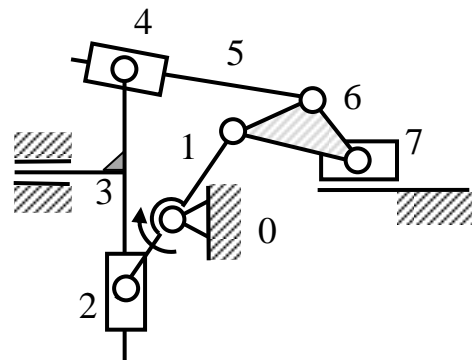
- 1) Мех кл. I (0 – 1) + группа кл. III (2 – 3 – 4 – 5) + группа кл. II (6 – 7);
- 2) Мех кл. I (0 – 1) + группа кл. II (2 – 4) + группа кл. II (3 – 5) + группа кл. II (6 – 7);
- 3) Мех кл. I (0 – 1) +  $\begin{cases} \text{группа кл. III (2 – 3 – 4 – 5)} \\ \text{группа кл. II (6 – 7)} \end{cases}$ ;
- 4) Мех кл. I (0 – 1) +  $\begin{cases} \text{группа кл. II (2 – 4)} \\ \text{группа кл. II (6 – 7)} \end{cases}$  + группа кл. II (3 – 5).

**Задание 14.** Формула строения механизма, структурная схема которого изображена на рисунке, записывается в виде



- 1) Мех кл. I (0 – 1) +  $\begin{cases} \text{группа кл. II (6 – 7)} \\ \text{группа кл. II (4 – 5)} \end{cases}$  + группа кл. II (2 – 3);
- 2) Мех кл. I (0 – 1) + группа кл. III (4 – 5 – 6 – 7) + группа кл. II (2 – 3);
- 3) Мех кл. I (0 – 1) + группа кл. II (4 – 5) + группа кл. II (6 – 7) + группа кл. II (2 – 3);
- 4) Мех кл. I (0 – 1) + группа кл. II (6 – 7) + группа кл. II (4 – 5) + группа кл. II (2 – 3).

**Задание 15.** Формула строения механизма, структурная схема которого изображена на рисунке, записывается в виде



- 1) Мех кл. I (0 – 1) + группа кл. II (2 – 3) + группа кл. II (4 – 5) + группа кл. II (6 – 7);
- 2) Мех кл. I (0 – 1) + группа кл. II (2 – 3) + группа кл. III (4 – 5 – 6 – 7);

$$3) \text{ Мех кл. I (0 - 1) + } \begin{cases} \text{группа кл. II (2 - 3)} \\ \text{группа кл. II (6 - 7)} \end{cases} + \text{ группа кл. II (4 - 5);}$$

$$4) \text{ Мех кл. I (0 - 1) + группа кл. II (6 - 7) + } \begin{cases} \text{группа кл. II (4 - 6)} \\ \text{группа кл. II (2 - 3)} \end{cases}$$

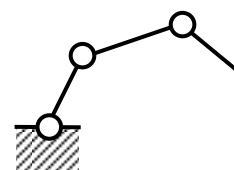
### Номера заданий и правильных ответов теста к главе 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	1	2	2	3	1	2	3	3	4	1	1	2	4	3

### 11.3. Тест по главе 3

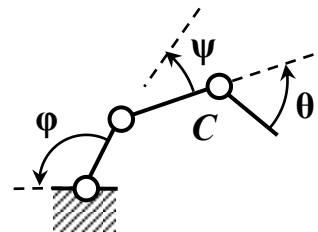
*Задание 1.* Число степеней свободы четырехзвенного плоского рычажного механизма, схема которого показана на рисунке, равно

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) больше трех.



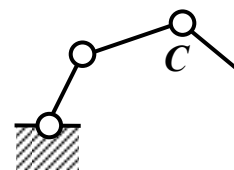
*Задание 2.* Положение точки  $C$  среднего звена плоского рычажного механизма, схема которого показана на рисунке, зависит от длины звеньев и от угла (углов)

- 1)  $\varphi$ ; 2)  $\psi$ ; 3)  $\varphi, \psi$ ; 4)  $\varphi, \psi, \theta$ .



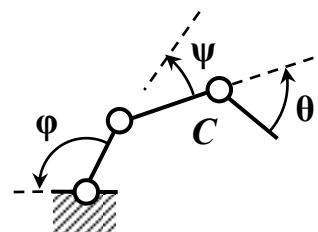
*Задание 3.* Чтобы найти методом Ю. В. Морозкина координаты точки  $C$  среднего звена плоского рычажного механизма, схема которого показана на рисунке, надо составить

- 1) два уравнения; 2) три уравнения; 3) четыре уравнения; 4) не два, не три, не четыре уравнения.



*Задание 4.* Скорость точки  $C$  среднего звена плоского рычажного механизма, схема которого показана на рисунке, зависит от длины звеньев и от следующих углов и их производных по времени:

- 1)  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ ; 2)  $\psi$  и  $\dot{\psi}$ ; 3)  $\varphi, \psi$  и  $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ ;  
4)  $\varphi, \psi, \theta$  и  $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ .



*Задание 5.* План скоростей именованных точек рычажного механизма с одной степенью свободы можно построить, если известны

1) положение и скорости точек ведущего звена; 2) скорости точек ведущего звена; 3) положение и ускорения точек ведущего звена; 4) скорости и ускорения точек ведущего звена.

*Задание 6.* План скоростей позволяет определить

1) только направления векторов скоростей именованных точек; 2) только величины векторов скоростей именованных точек; 3) направления и величины векторов скоростей именованных точек; 4) направления и величины векторов скоростей всех точек механизма.

*Задание 7.* При построении плана скоростей именованных точек плоского механизма с одной степенью свободы достаточно

- 1) выполнить структурный анализ механизма и указать точки;
- 2) выполнить структурный анализ механизма, указать точки, ведущее звено механизма и кинематические характеристики ведущего звена;
- 3) выполнить структурный анализ, указать точки, ведущее звено, скорость точки ведущего звена и кинематическую схему механизма в заданном положении;
- 4) выполнить структурный анализ механизма, указать точки, ведущее звено механизма, скорость и ускорение точки ведущего звена, кинематическую схему механизма в заданном положении.

*Задание 8.* Точка механизма, скорость которой равна нулю, на плане скоростей изображается вектором, конец которого находится

1) в полюсе; 2) в точке плана, отличной от полюса; 3) в произвольной точке плана.

*Задание 9.* Скорости точек ползуна на плане скоростей изображаются

1) одним вектором с началом в полюсе; 2) одним вектором с началом не в полюсе; 3) множеством векторов с началом в полюсе; 4) множеством векторов с началом не в полюсе.

*Задание 10.* Скорости точек ползушки, движущейся поступательно относительно кулисы, на плане скоростей изображают

1) одним вектором с началом в полюсе; 2) одним вектором с началом не в полюсе; 3) множеством векторов с началом в полюсе; 4) множеством векторов с началом не в полюсе;

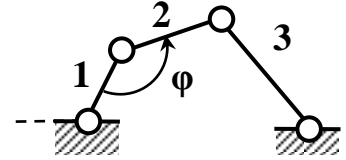


**Задание 11.** План скоростей не позволяет определить

- 1) величины угловых скоростей вращения звеньев; 2) направления вращения звеньев; 3) векторы относительных скоростей точек звеньев; 4) величины перемещений точек звеньев.

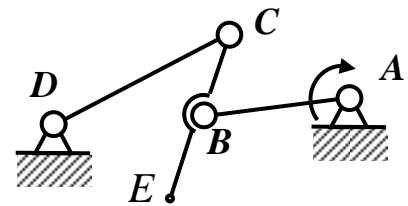
**Задание 12.** Коромысло  $CD$  механизма, схема которого изображена на рисунке, займет крайнее левое положение, когда угол  $\varphi$  равен

- 1)  $0^\circ$ ; 2)  $90^\circ$ ; 3)  $180^\circ$ ; 4) не  $0^\circ$ , не  $90^\circ$ , не  $180^\circ$ .

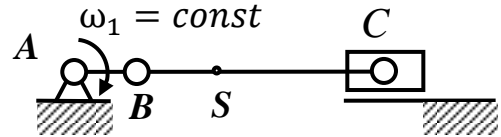


**Задание 13.** На рисунке изображена схема сеноворошилки. При определении ускорения именованных точек графоаналитическим методом плана ускорений ошибка допущена в уравнении

- 1)  $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau$ ; 2)  $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^\tau$ ;
- 3)  $\vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{a}_{EC}^n + \vec{a}_{EC}^\tau$ ; 4)  $\vec{a}_E = \vec{a}_D + \vec{a}_{ED}^n + \vec{a}_{ED}^\tau$ .



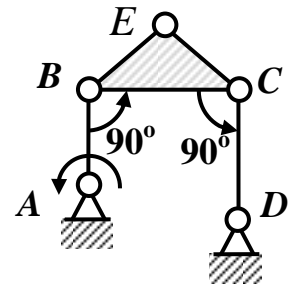
**Задание 14.** Кривошипно-ползунный механизм представлен в крайнем правом положении. Ускорение центра  $S$  тяжести шатуна правильно показано на плане



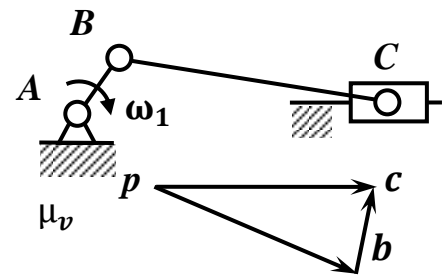
- |    |    |
|----|----|
| 1) | 3) |
| 2) | 4) |

**Задание 15.** На схеме изображен шарнирный четырехзвенник в особом положении. Скорость точки  $E$  правильно показана на плане

- |    |    |
|----|----|
| 1) | 2) |
| 3) | 4) |

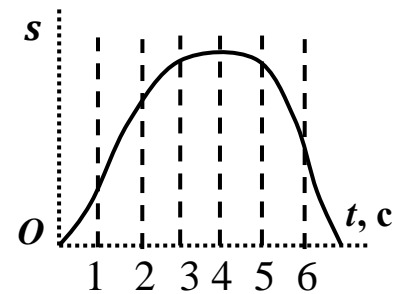


**Задание 16.** На схеме показан кривошипно-ползунный механизм, у которого длина кривошипа  $AB$  равна  $0,1$  м; шатуна  $BC$  –  $0,7$  м; угловая скорость кривошипа –  $100$  рад/с. Если на плане скоростей  $pb = 50$  мм,  $bc = 14$  мм, то угловая скорость шатуна равна



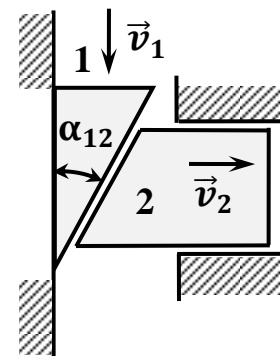
- 1) 14 рад/с; 2) 140 рад/с; 3) 100 рад/с;
- 4) 4 рад/с.

**Задание 17.** Перемещение точки выходного звена задано функцией от времени  $s = s(t)$ , график которой показан на рисунке. Минимальная скорость точки достигается в момент времени



- 1) 2 с; 2) 4 с; 3) 3 с; 4) не 2, не 4, не 3 с.

**Задание 18.** В механизме четвертого семейства клинового пресса, схема которого показана на рисунке, поступательное движение ведущего клина 1 по вертикали преобразуется в поступательное движение ведомого клина 2 по горизонтали, как показано на рисунке. Скорость ведомого клина меньше скорости ведущего клина в  $2,75$  раза, когда угол  $\alpha_{12}$  клина равен



- 1)  $20^\circ$ ; 2)  $70^\circ$ ; 3)  $30^\circ$ ; 4)  $60^\circ$ .

**Задание 19.** При скорости ведущего звена 1 в условиях задания 18, равной  $2,75$  м/с, скорость звена 2 относительно звена 1 равна

- 1)  $2,75$  м/с; 2)  $2,93$  м/с; 3)  $3,75$  м/с; 4)  $1,75$  м/с.

### Номера заданий и правильных ответов теста к главе 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	3	3	3	1	4	1	1	1	4	4	1	4	1	1	4	2	1	2

## 14.4. Тест по главе 4

**Задание 1.** Цилиндрическая передача состоит из колес, оси которых

- 1) не пересекаются; 2) пересекаются; 3) параллельны; 4) расположены произвольно.

*Задание 2.* Коническая передача состоит из колес, оси которых

1) не пересекаются; 2) пересекаются; 3) параллельны; 4) расположены произвольно.

*Задание 3.* Сложный зубчатый механизм содержит

1) два колеса или более; 2) больше двух колес; 3) больше трех колес; 4) больше четырех колес.

*Задание 4.* Многократный зубчатый механизм состоит из колес с

1) подвижными и неподвижными осями; 2) подвижными осями; 3) неподвижными осями; 4) осями, на движение которых не накладывается ограничений.

*Задание 5.* Планетарный механизм состоит из колес с

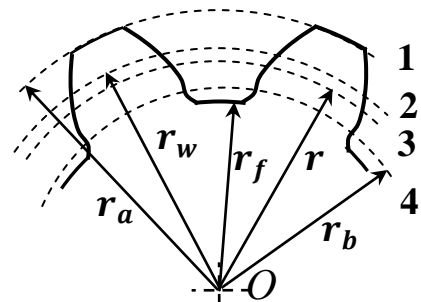
1) подвижными и неподвижными осями;  
2) подвижными осями; 3) неподвижными осями; 4) осями, на движение которых не накладывается ограничений.

*Задание 6.* На рисунке цифрой 1 обозначена окружность

1) основная; 2) делительная; 3) начальная;  
4) не основная, не делительная, не начальная.

*Задание 7.* На рисунке в задании 6 цифрой 3 обозначена окружность

1) основная; 2) делительная; 3) начальная;  
4) не основная, не делительная, не начальная.



*Задание 8.* На рисунке в задании 6 цифрой 4 обозначена окружность

1) основная; 2) делительная; 3) начальная; 4) не основная, не делительная, не начальная.

*Задание 9.* Эвольвентой окружности служит кривая, которую описывает незакрепленный конец нити, сматываемой с

1) делительной окружности; 2) начальной окружности; 3) основной окружности; 4) окружности, не являющейся делительной, начальной, основной.

*Задание 10.* Эвольвентный профиль зуба заключен между окружностями

1) делительной и вершин; 2) основной и впадин; 3) вершин и впадин; 4) основной и вершин; 5) другими, не перечисленными выше.

*Задание 11.* Рабочим участком профиля зуба колеса в плоскости вращения называется

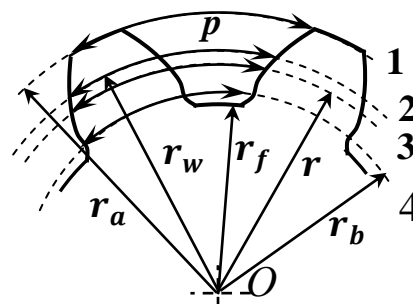
1) эвольвентный профиль зуба; 2) эвольвентная и неэвольвентная части профиля; 3) часть эвольвентного профиля, точки которого вступают в контакт с зубьями колеса в зацеплении; 4) часть профиля между окружностями впадин и вершин; 5) участок, не названный выше.

*Задание 12.* Модуль зубьев

1) является безразмерной величиной; 2) измеряют в миллиметрах; 3) измеряют в метрах; 4) может быть размерным или безразмерным.

*Задание 13.* Стандартный шаг  $p$  зубьев равен длине дуги, показанной на рисунке, по окружности

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4 или не привязан к какой-либо окружности.



*Задание 14.* В нулевом колесе толщина зуба

1) равна ширине впадины по делительной окружности; 2) равна ширине впадины по окружности вершин; 3) равна ширине впадины по основной окружности; 4) не равна ширине впадины по указанным выше окружностям.

*Задание 15.* Модуль  $m$  зуба, стандартный шаг  $p$  колеса, число  $z$  зубьев колеса, радиусы делительной  $r$  и основной  $r_b$  окружностей связаны равенствами

1)  $m = p/\pi$ ,  $r_b = mz$ ; 2)  $m = p/\pi$ ,  $r = mz/2$ ; 3)  $m = \frac{p}{\pi}$ ,  $z = r/m$ ; 4)  $m = p/\pi$ ,  $r_b = mz/2$ ; 5) другими, отличными от перечисленных выше.

*Задание 16.* Пусть  $m$  – модуль зубьев. Полная высота  $h$  зуба цилиндрического зубчатого колеса, нарезанного без смещения инструмента, определяется по формуле

1)  $h = 1,0 m$ ; 2)  $h = 1,25 m$ ; 3)  $h = 2,0 m$ ; 4)  $h = 2,25 m$ ; 5) другой, не указанной выше.

**Задание 17.** Передаточное отношение зубчатого механизма равно

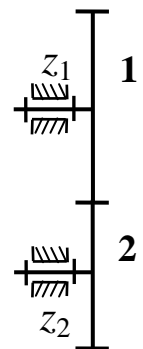
- 1) отношению угловых скоростей ведущего и ведомого валов;
- 2) отношению угловых скоростей ведомого и ведущего валов;
- 3) отношению числа зубьев колес на ведущем и ведомом валах;
- 4) отношению числа зубьев колес на ведомом и ведущем валах;
- 5) отношению, не перечисленному выше.

**Задание 18.** Передаточное отношение зубчатого механизма с эвольвентным зацеплением

- 1) зависит от расстояния между колесами в зацеплении;
- 2) зависит от расстояния между колесами и геометрических параметров колес в зацеплении;
- 3) не зависит от геометрических параметров колес в зацеплении;
- 4) не зависит от расстояния между колесами в зацеплении.

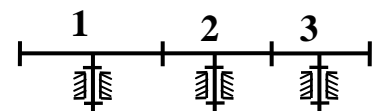
**Задание 19.** На рисунке изображена схема простейшего зубчатого механизма, содержащего колесо 1 с числом зубьев  $z_1$  на входе и колеса 2 с числом зубьев  $z_2$  на выходе. Передаточное отношение механизма определяется по формуле

- 1)  $u_{12} = z_1/z_2$ ; 2)  $u_{12} = -z_2/z_1$ ; 3)  $u_{21} = z_2/z_1$ ;
- 4)  $u_{21} = -z_2/z_1$ ; 5) иной, не указанной выше.



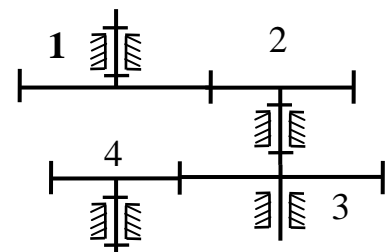
**Задание 20.** Число степеней свободы и число ступеней механизма, схема которого изображена на рисунке, равны соответственно

- 1) 1 и 1; 2) 2 и 2; 3) 1 и 2; 4) 2 и 1;
- 5) числам, не указанным выше.



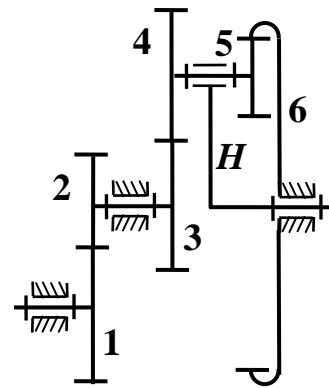
**Задание 21.** Число степеней свободы и число ступеней механизма, схема которого изображена на рисунке, равны соответственно

- 1) 1 и 1;
- 2) 2 и 2;
- 3) 1 и 2;
- 4) 2 и 1;
- 5) числам, не указанным выше.



**Задание 22.** Число степеней свободы и число ступеней механизма, схема которого изображена на рисунке, равны соответственно

- 1) 1 и 3;
- 2) 2 и 2; 3) 1 и 2; 4) 2 и 3;
- 5) числам, не указанным выше.



**Задание 23.** Передаточное отношение механизма с входным (ведущим) валом 1 и выходным (ведомым) валом 4 в задании 21 определяется формулой

- 1)  $u_{14} = u_{13}u_{34}$ ; 2)  $u_{14} = u_{12}u_{34}$ ; 3)  $u_{41} = u_{12}u_{34}$ ; 4)  $u_{14} = u_{24}u_{12}$ ;
- 5) с левой или правой частями, отличными от указанных выше.

**Задание 24.** Передаточное отношение механизма с входным валом 1 и выходным валом водила в задании 22 определяется формулой

- 1)  $u_{1H} = u_{12}u_{24}u_{45}u_{5H}$ ; 2)  $u_{1H} = u_{12}u_{34}u_{45}u_{5H}$ ; 3)  $u_{1H} = u_{12}u_{3H}$ ;
- 4)  $u_{H1} = u_{12}u_{34}u_{5H}$ ; 5) с левой или правой частями, отличными от указанных выше.

**Задание 25.** Ступени механизма с входным (ведущим) валом 1 и выходным (ведомым) валом 4 в задании 21 образованы колесами

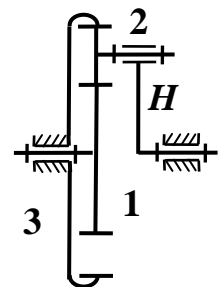
- 1) 1, 2 + 2, 3 + 3, 4; 2) 1, 2 + 2, 4; 3) 1, 2 + 3, 4; 4) 1, 2, 3 + 3, 4;
- 5) иначе, чем показано выше.

**Задание 26.** Ступени механизма с входным (ведущим) валом 1 и водилом  $H$  на выходе в задании 22 образованы колесами

- 1) 1, 2 + 3, 4 + 5, 6,  $H$ ; 2) 1, 2 + 2, 3 + 3, 4 + 5, 6 + 6,  $H$ ;
- 3) 1, 2 + 3, 4, 5, 6,  $H$ ; 4) 1, 2, 3 + 4, 5, 6,  $H$ ; 5) иначе, чем показано выше.

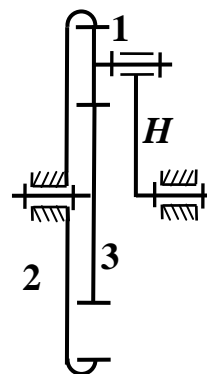
**Задание 27.** На рисунке изображена схема механизма, состоящего из колеса 1 на входе (ведущего) с числом зубьев  $z_1$ , колес 2, 3 с числами зубьев  $z_2$ ,  $z_3$  и водила  $H$  на выходе (ведомого). Формула для передаточного отношения механизма приводится к виду

- 1)  $u_{1H} = -\frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_2}$ ; 2)  $u_{1H} = -\frac{z_3}{z_1}$ ; 3)  $u_{H1} = -\frac{z_2}{z_3} \frac{z_2}{z_3}$ ;
- 4)  $u_{1H} = 1 + \frac{z_3}{z_1}$ ; 5) иначе, чем показано выше.



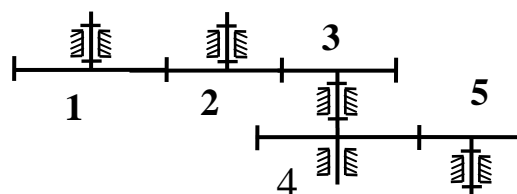
**Задание 28.** На рисунке изображена схема механизма, состоящего из водила  $H$  на входе, колес 1, 2 с числами зубьев  $z_1, z_2$  и колеса 3 с числом зубьев  $z_3$  на выходе. Формула для передаточного отношения механизма приводится к виду

- 1)  $u_{H3} = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2}$ ; 2)  $u_{3H} = -\frac{z_3}{z_1}$ ; 3)  $u_{H3} = -\frac{z_2 z_2}{z_3 z_3}$ ;
- 4)  $u_{H3} = \frac{z_3}{z_2+z_3}$ ; 5) иному, чем показано выше.



**Задание 29.** Если число зубьев колеса 2 на схеме зубчатого механизма увеличить в два раза, то угловая скорость колеса 5

- 1) увеличится в четыре раза;
- 2) уменьшится в два раза;
- 3) не изменится;
- 4) увеличится в два раза;
- 5) изменится иначе, чем указано выше.



**Задание 30.** Если число зубьев колеса 3 механизма в задании 29 увеличить в два раза, то угловая скорость колеса 5

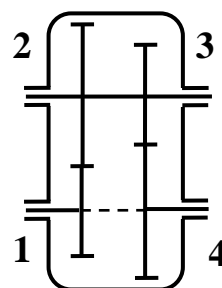
- 1) увеличится в два раза;
- 2) не изменится;
- 3) увеличится в четыре раза;
- 4) уменьшится в два раза;
- 5) изменится иначе, чем указано выше.

**Задание 31.** Если число зубьев колеса 5 механизма в задании 29 уменьшить в два раза, то угловая скорость колеса 5

- 1) не изменится;
- 2) уменьшится в два раза;
- 3) увеличится в два раза;
- 4) увеличится в четыре раза;
- 5) изменится иначе, чем указано выше.

**Задание 32.** Частота вращения промежуточного вала цилиндрического редуктора на рисунке с колесом 1 на входе (ведущим) и колесом 4 на выходе (ведомым) равна 330 об/мин. Если числа зубьев колес 1, 2, 3, 4 равны соответственно 17, 51, 24, 44, то частоты вращения колес 1 и 4 равны

- 1) 990 об/мин и 660 об/мин;
- 2) 990 об/мин и 180 об/мин;
- 3) 110 об/мин и 180 об/мин;
- 4) 180 об/мин и 660 об/мин;
- 5) числам, не указанным выше.



**Задание 33.** Передаточное отношение второй ступени цилиндрического редуктора в задании 32 равно 2, число зубьев колеса 4 равно 60, передаточное

отношение редуктора равно 10. Если модули колес одинаковы, числа зубьев шестерни 1 и колеса 2 должны равняться

1) 30 и 60; 2) 10 и 50; 3) 15 и 75; 4) 75 и 15; 5) числам, не указанным выше.

*Задание 34.* Если механизм в задании 29 состоит из нулевых колес с модулем 4 мм, образующих нулевые передачи в зацеплениях, а число зубьев колес 1, 2, 3, 4, 5 равны соответственно 18, 34, 24, 16, 32, то расстояние между осями колес 1 и 5 должно равняться

1) 496 мм; 2) 360 мм; 3) 316 мм; 4) 252 мм; 5) числу, не указанному выше.

#### Номера заданий и правильных ответов теста к главе 4

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>1</b>

<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>	<b>26</b>	<b>27</b>	<b>28</b>	<b>29</b>	<b>30</b>	<b>31</b>	<b>32</b>	<b>33</b>	<b>34</b>
<b>4</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>3</b>

### 14.5. Тест по главе 5

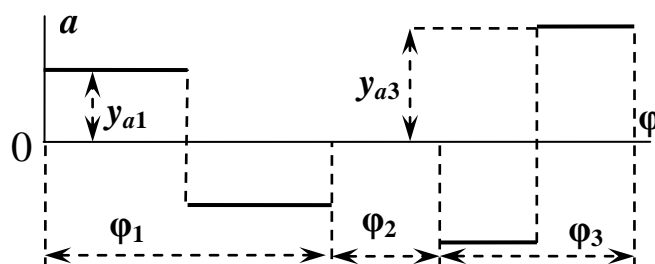
*Задание 1.* Плоский трехзвенный кулачковый механизм с ползунным толкателем содержит  $p_1$  низших и  $p_2$  высших кинематических пар. При этом

1)  $p_1 = 3$ ; 2)  $p_1 = 1$ ;  $p_2 = 2$ ; 3)  $p_1 = 2$ ;  $p_2 = 1$ ; 4)  $p_2 = 3$ ; 5) ответы выше не верны.

*Задание 2.* При частоте вращения кулачка 600 об/мин и отношении времени  $\tau_1$  удаления толкателя к периоду  $T$ , равном 0,25 ( $\tau_1/T = 0,25$ ), время удаления равно

1) 0,025 с; 2) 2,5 с; 3) 0,1 с; 4) 0,25 с; 5) числу, при котором ответы выше не верны.

*Задание 3.* На ступенчатой диаграмме ускорения ордината  $y_{a1}$  ускорения толкателя на фазе удаления равна 10 мм. Если углы поворота кулачка на фазе удаления  $\varphi_1$  и



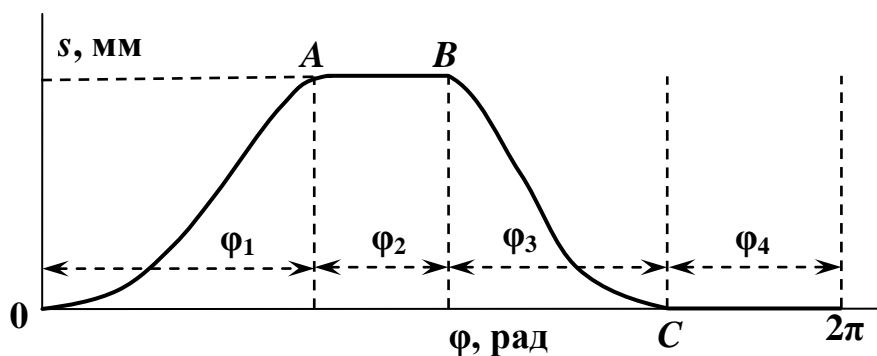


сближения  $\varphi_3$  равны  $\pi/2$  и  $\pi/3$  соответственно, то ордината  $y_{a3}$  ускорения толкателя на фазе сближения равна

1) 6,67 мм; 2) 22,5 мм; 3) 15 мм; 4) 15,7 мм; 5) число, при котором ответы выше не верны.

**Задание 4.** Участок  $BC$  на показанной диаграмме перемещения ползунного толкателя соответствует фазе

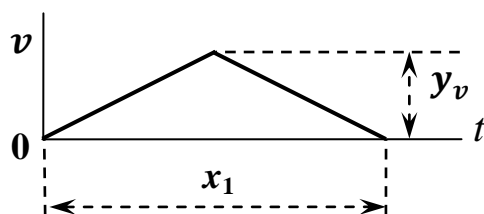
1) удаления;  
2) дальнего стояния;  
3) сближения;  
4) ближнего стояния.



**Задание 5.** На участке  $AB$  диаграммы перемещения в задании 4 скорость ползунного толкателя

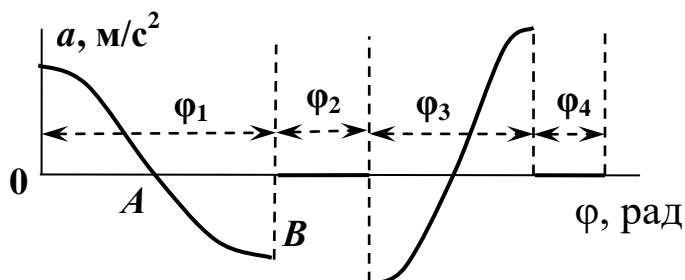
1) возрастает; 2) убывает; 3) не изменяется и равна нулю; 4) не изменяется и не равна нулю.

**Задание 6.** Диаграмма скорости  $v$  толкателя в масштабе  $\mu_v$ , равном  $0,004 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}$ , изображается двумя отрезками прямых с ординатой  $y_v$  высшей точки, равной 15 мм. На оси абсцисс отложено время  $t$  в масштабе  $\mu_t$ , равном  $0,01 \frac{\text{с}}{\text{мм}}$ . За время, соответствующее отрезку  $x_1$  длиной 80 мм на оси абсцисс, ход толкателя составит



1) 0,08 м; 2) 0,48 м; 3) 0,048 м; 4) 0,024 м; 5) число, не указанное выше.

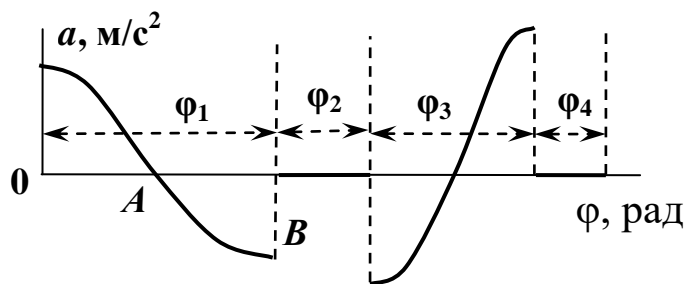
**Задание 7.** Движение ползунного толкателя, диаграмма ускорения которого показана на рисунке, является



1) безударным;  
2) с мягкими ударами;  
3) с жесткими ударами;  
4) с мягкими и жесткими ударами.

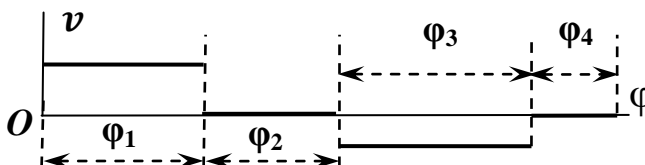
**Задание 8.** На участке  $AB$  диаграммы скорость ползунного толкателя

- 1) возрастает; 2) убывает; 3) не изменяется; 4) возрастает, убывает или не изменяется.



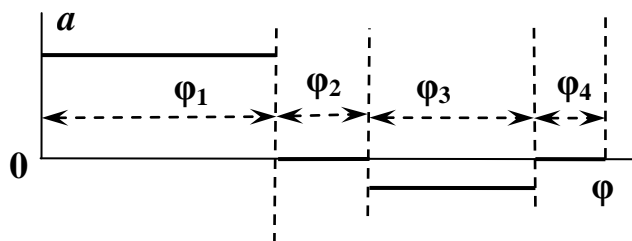
**Задание 9.** Движение ползунного толкателя, диаграмма скорости которого показана на рисунке, является

- 1) безударным; 2) с мягкими ударами; 3) с жесткими ударами; 4) с мягкими и жесткими ударами.

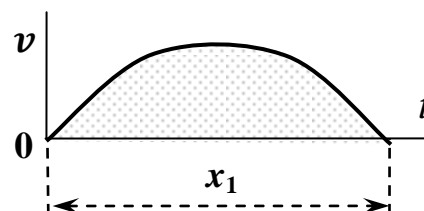


**Задание 10.** Движение ползунного толкателя, диаграмма ускорения которого показана на рисунке, является

- 1) безударным; 2) с мягкими ударами; 3) с жесткими ударами; 4) с мягкими и жесткими ударами.



**Задание 11.** Площадь фигуры под графиком на диаграмме скорости  $v$  толкателя в масштабе  $\mu_v$ , равном  $0,5 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}$ , на отрезке  $x_1$  времени удаления длиной 60 мм равна  $800 \text{ мм}^2$ . Если отношение времени  $\tau_1$  удаления к периоду  $T$  движения толкателя равно 0,25, а ход  $H$  толкателя равен 0,1 м, то частота вращения кулачка равна



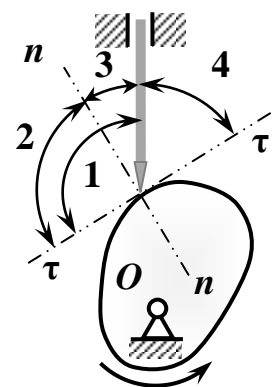
- 1) 1000 об/мин; 2) 600 об/мин; 3) 800 об/мин; 4) 320 об/мин; 5) число, не указанному выше.

**Задание 12.** Пусть  $H$ ,  $\tau_1$ ,  $T$ ,  $n$  – ход, время удаления, период движения толкателя и частота вращения кулачка. При равноускоренном движении толкателя и  $H = 0,08 \text{ м}$ ;  $n = 300 \text{ об/мин}$ ;  $\tau_1/T = 0,4$  ускорение равно

- 1)  $50 \text{ м/с}^2$ ; 2)  $0,4 \text{ м/с}^2$ ; 3)  $12,5 \text{ м/с}^2$ ; 4)  $40 \text{ м/с}^2$ ; 5) число, не указанному выше.

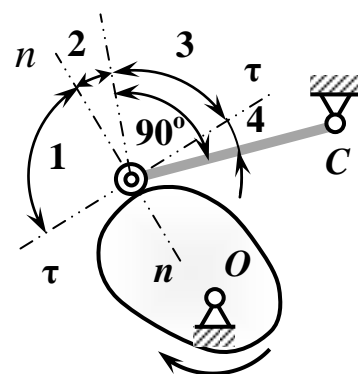
**Задание 13.** Угол давления в кулачковом механизме с заостренным прямолинейно движущимся толкателем на рисунке обозначен цифрой

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4.



**Задание 14.** Угол давления в кулачковом механизме с качающимся толкателем на рисунке обозначен цифрой

- 1) 4;
- 2) 3;
- 3) 2;
- 4) 1.



**Задание 15.** Допускаемый угол давления в кулачковом механизме с заостренным толкателем в прямолинейных направляющих не должен превышать угла  $\vartheta$  заклинивания, который можно оценить по формуле  $\vartheta = 90^\circ - \varphi_1 - \varphi_2$ , где  $\varphi_1, \varphi_2$  – углы трения кулачка с толкателем и толкателя со стойкой.

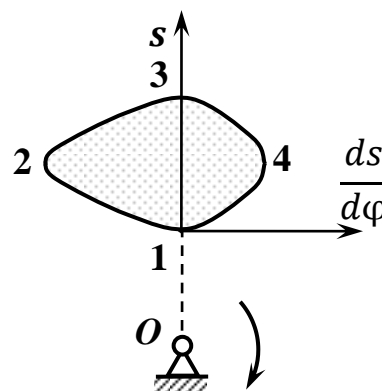
При коэффициентах трения не выше 0.57 угол давления не должен превышать 1)  $20^\circ$ ; 2)  $30^\circ$ ; 3)  $40^\circ$ ; 4)  $50^\circ$ .

**Задание 16.** При выборе угла поворота в качестве обобщенной координаты аналог ускорения ползунного толкателя имеет единицу измерения

- 1) м; 2) м/с; 3) м/с<sup>2</sup>; 4) м, м/с или м/с<sup>2</sup>; 5) иную, не указанную выше.

**Задание 17.** На изображенной фазовой траектории кулачкового механизма с ползунным толкателем в прямолинейных направляющих угол давления на фазе удаления наибольший в положении

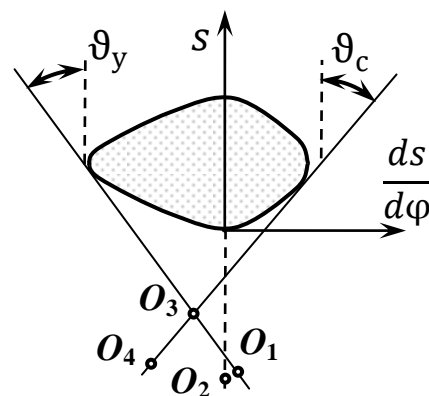
- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4;



5) не указанном выше.

*Задание 18.* На изображенной фазовой траектории кулачкового механизма с ползунным толкателем в прямолинейных направляющих минимальные размеры кулачка достигаются при размещении центра вращения кулака в точке

- 1)  $O_1$ ; 2)  $O_2$ ; 3)  $O_3$ ; 4)  $O_4$ ;
- 5) иной, не указанной выше.



### Номера заданий и правильных ответов теста к главе 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3	1	2	3	3	4	2	2	3	4	1	1	3	3	2	1	4	3

## 14.6. Тест по главе 6

*Задание 1.* Звено массы  $m$  с моментом инерции  $J$  относительно центральной оси движется поступательно с ускорением  $a$  и скоростью  $v$ . Величина силы инерции определяется выражением

- 1)  $J \cdot a$ ; 2)  $m \cdot a$ ; 3)  $m \cdot v$ ; 4)  $m \cdot v^2/2$ ; 5) иным, не указанным выше.

*Задание 2.* Звено массы  $m$  с моментом инерции  $J$  относительно центральной оси вращается вокруг этой оси с угловым ускорением  $\varepsilon$  и угловой скоростью  $\omega$ . Момент сил инерции звена относительно оси определяется выражением

- 1)  $m \cdot a$ ; 2)  $J \cdot \omega^2/2$ ; 3)  $J \cdot \omega$ ; 4)  $J \cdot \varepsilon$ ; 5) иным, не указанным выше.

*Задание 3.* Для определения реакции звена, образующего с другим звеном плоского механизма высшую пару, требуется составить уравнения для расчета только

- 1) точки приложения и величины реакции;
- 2) точки приложения и линии действия реакции;
- 3) точки приложения, линии действия и величины реакции;
- 4) величины реакции.

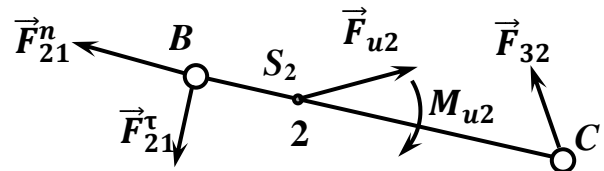
**Задание 4.** Для определения реакции звена, образующего с другим звеном плоского механизма низшую пару, требуется составить уравнения для расчета только

- 1) точки приложения и величины реакции;
- 2) точки приложения и линии действия реакции;
- 3) точки приложения, линии действия и величины реакции;
- 4) величины реакции.

**Задание 5.** Статически неопределимой может являться кинематическая цепь, у которой числа подвижных звеньев, низших пар, высших пар равны соответственно

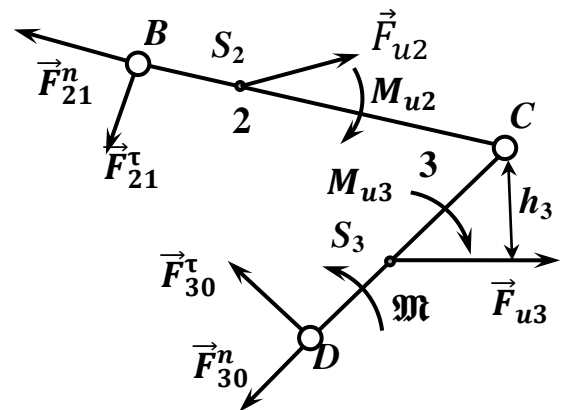
- 1) 2, 1, 1; 2) 2, 2, 0; 3) 6, 7, 0; 4) 2, 2, 1; 5) числам, не перечисленным выше.

**Задание 6.** На шатун 2 в плоскости показанного чертежа действуют известная сила  $\vec{F}_{u2}$  инерции, известный момент  $M_{u2}$  пар сил инерции, неизвестные реакции в шарнирах  $B$  и  $C$ . Для нахождения тангенциальной составляющей  $\vec{F}_{21}^\tau$  следует использовать условие равенства нулю суммы



- 1) векторов сил; 2) алгебраических моментов сил относительно точки  $B$ ;
- 3) алгебраических моментов сил относительно точки  $S_2$ ; 4) алгебраических моментов сил относительно точки  $C$ ; 5) величин, не указанных выше.

**Задание 7.** На звенья структурной группы 2-3 в плоскости показанного чертежа действуют известные внешние силы  $\vec{F}_{u2}$ ,  $\vec{F}_{u3}$  инерции, пары сил инерции с моментами  $M_{u2}$ ,  $M_{u3}$ , пара сил технологического сопротивления с моментом  $\mathfrak{M}$ , неизвестные реакции в концевых шарнирах  $B$  и  $D$ . Тангенциальную составляющую  $\vec{F}_{30}^\tau$  реакции в шарнире  $D$  находят из условия равенства нулю суммы



- 1) алгебраических моментов сил относительно точки  $C$ ;
- 2) алгебраических моментов сил относительно точки  $D$ ;
- 3) алгебраических моментов сил относительно точки  $B$ ; 4) векторов сил,

действующих на группу из звеньев 2, 3; 5) величин, не указанных выше.

**Задание 8.** Нормальную составляющую  $\vec{F}_{21}^n$  реакции в шарнире  $B$  механизма в задании 7 определяют из условия равенства нулю суммы

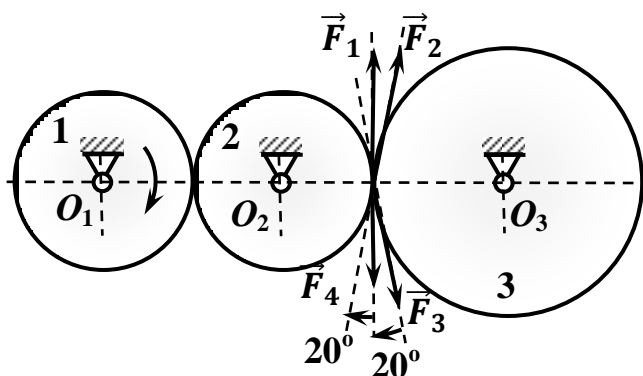
1) векторов сил, действующих на звено 2; 2) алгебраических моментов сил относительно точки  $D$ ; 3) векторов сил, действующих на группу из звеньев 2, 3; 4) алгебраических моментов сил, действующих на звено 2, относительно точки  $C$ ; 5) величин, не указанных выше.

**Задание 9.** Реакцию в шарнире  $C$  механизма в задании 7 находят из условия равенства нулю суммы

1) векторов сил, действующих на группу из звеньев 2, 3; 2) алгебраических моментов сил, действующих на звено 2, относительно точки  $B$ ; 3) алгебраических моментов сил, действующих на звено 3, относительно точки  $D$ ; 4) векторов сил, действующих на звено 3; 5) величин, не указанных выше.

**Задание 10.** При равномерном вращении по часовой стрелке ведущего колеса 1, преодолевающего сопротивление вращению, на ведомое эвольвентное цилиндрическое колесо 3 со стороны паразитного колеса 2 на изображенной схеме действует сила

1)  $\vec{F}_1$ ; 2)  $\vec{F}_2$ ; 3)  $\vec{F}_3$ ; 4)  $\vec{F}_4$ .

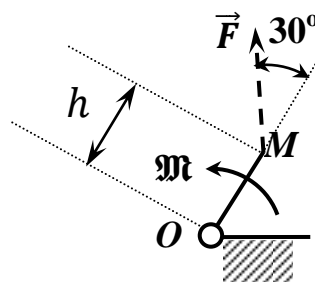


**Задание 11.** При равнозамедленном вращении ведущего колеса 1 по часовой стрелке в задании 10 и отсутствии сил сопротивления на тяжелое ведомое эвольвентное цилиндрическое колесо 3 со стороны паразитного колеса 2 действует сила

1)  $\vec{F}_1$ ; 2)  $\vec{F}_2$ ; 3)  $\vec{F}_3$ ; 4)  $\vec{F}_4$ .

**Задание 12.** Движение звеньям механизма, передается от изображенного на рисунке кривошипа  $OM$  длиной  $h$ , равной 0,1 м, на который действует пара сил, момент  $\mathfrak{M}$  которых равен 4 Н м.

Движение звеньев механизма не изменится, если



вместо пары сил к концу  $M$  кривошипа приложить силу  $\vec{F}$ , линия действия которой образует угол  $30^\circ$  с осью  $OM$ , а величина равна

- 1) 20 Н; 2) 40 Н; 3) 80 Н; 4) не 20 Н, не 40 Н, не 80 Н.

#### Номера заданий и правильных ответов теста к главе 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	4	1	4	4	1	3	4	2	2	3

### 14.7. Тест по главе 7

*Задание 1.* Движущими силами в механизме служат

- 1) активные силы; 2) активные и пассивные силы; 3) внешние силы;  
4) не внешние, не активные, не пассивные силы.

*Задание 2.* Единица измерения осевого момента инерции звена механизма выражается так:

- 1) н·м; 2) кг·м; 3) н·м<sup>2</sup>; 4) кг·м<sup>2</sup>; 5) иная единица измерения.

*Задание 3.* Между приведенным моментом инерции  $J_p$  и осевым моментом инерции  $J$  звена имеют место соотношения

- 1)  $J_p > J$ ; 2)  $J_p < J$ ; 3)  $J_p = J$ ; 4)  $J_p > J$  или  $J_p < J$  или  $J_p = J$ .

*Задание 4.* В кривошипно-ползунном механизме ползун массы 2 кг имеет скорость 4 м/с. Момент инерции ползуна, приведенный к оси кривошипа, вращающегося с угловой скоростью 2 рад/с, равен

- 1)  $2\pi$  кг м<sup>2</sup>; 2) 8 кг м<sup>2</sup>; 3) 4 кг м<sup>2</sup>; 4) больше 10 кг м<sup>2</sup>.

*Задание 5.* Пусть  $J$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $t$  – время, приведенный момент инерции, угловая скорость, угол поворота кривошипа. Дифференциальное уравнение движения плоского кривошипного механизма с одной степенью свободы при отсутствии нагрузки записывается так:

1)  $J \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ}{d\varphi} = 0$ ; 2)  $\frac{d(J\omega)}{d\varphi} = 0$ ; 3)  $\frac{d(J\omega^2)}{dt} = 0$ ; 4)  $J \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ}{dt} = 0$ ;

- 5) уравнением, отличным от приведенных выше.

*Задание 6.* При установившемся движении механизма

- 1) работа внешних сил за некоторый промежуток времени равна нулю;
- 2) кинетическая энергия механизма не изменяется;
- 3) работа внешних и внутренних сил за любой промежуток времени равна нулю;
- 4) утверждения, перечисленные выше, не справедливы.

*Задание 7.* За время разгона

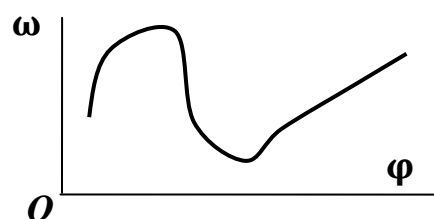
- 1) работа внешних сил положительна;
- 2) кинетическая энергия механизма не изменяется;
- 3) работа внешних и внутренних сил равна нулю;
- 4) утверждения, перечисленные выше, не справедливы.

*Задание 8.* Кинетическая энергия механизма за период установившегося движения

- 1) возрастает;
- 2) не изменяется;
- 3) убывает;
- 4) не определяется.

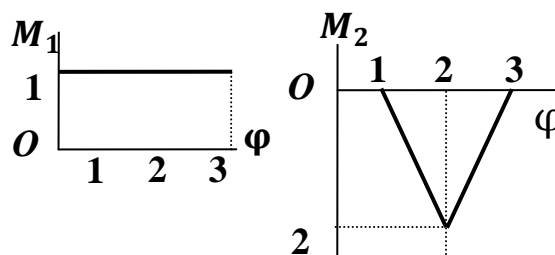
*Задание 9.* В режиме установившегося движения показанный на рисунке участок графика зависимости угловой скорости от угла поворота кривошипа соответствует

- 1) циклу;
- 2) двум циклам;
- 3) трем циклам;
- 4) участку, не соответствующему одному, двум и трем циклам.



*Задание 10.* На кривошип действует пара сил с моментом  $M_1$  со стороны двигателя и пара сил сопротивления с моментом  $M_2$ , графики которых показаны на рисунке. На участке поворота кривошипа от 0 до 3 радиан кинетическая энергия механизма

- 1) уменьшилась;
- 2) не изменилась;
- 3) увеличилась;
- 4) изменилась неопределенно.



**Номера заданий и правильных ответов теста к главе 7**

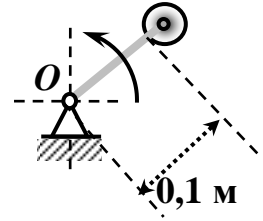
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>3</b>



## 14.8. Тест по главе 8

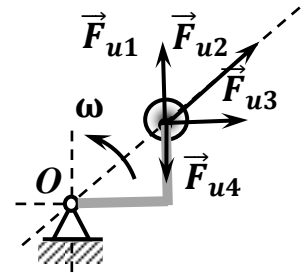
**Задание 1.** На роторе, вращающемся с угловой скоростью 100 рад/с, установлен противовес в виде однородного шара диаметром 0,02 м и массы 0,1 кг. Величина центробежной силы инерции противовеса, удаленного от оси вращения на расстоянии 0,1 м, равна

1) 1,1 Н; 2) 100 Н; 3) 110 Н; 4) не 1,1 Н, не 100 Н, не 110 Н.



**Задание 2.** На шар, укрепленный на роторе, вращающемся вокруг оси  $O$ , действует центробежная сила инерции

1)  $\vec{F}_{u1}$ ; 2)  $\vec{F}_{u2}$ ; 3)  $\vec{F}_{u3}$ ; 4)  $\vec{F}_{u4}$ .



**Задание 3.** Дисбаланс звена не зависит от

1) массы звена; 2) эксцентриситета звена; 3) угловой скорости звена; 4) веса звена.

**Задание 4.** Динамической балансировке подвергают

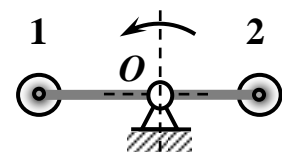
1) маховик; 2) шнек дозатора; 3) циркулярную пилу; 4) шкив.

**Задание 5.** Параллелограмм (треугольник) амплитуд позволяет определить

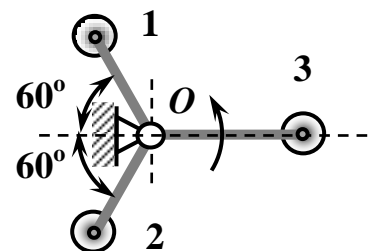
1) амплитуду качаний из-за неуравновешенности ротора;  
2) коэффициент пропорциональности;  
3) амплитуду качаний из-за вращения первого груза;  
4) амплитуду качаний из-за вращения второго груза.

**Задание 6.** Ротор состоит из невесомого диаметрального стержня и укрепленного на его конце груза 1, центр масс которого удален от оси  $O$  вращения ротора на 0,2 м. Для уравновешивания ротора массой 1 кг на другом конце стержня установлен противовес 2 массой 2,5 кг на расстоянии от оси вращения ротора, равном

1) 0,2 м; 2) 0,08 м; 3) 1,3 м; 4) 0,5 м;  
5) числу, отличному от указанных выше.

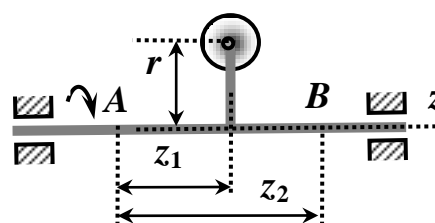


**Задание 7.** Ротор состоит из двух невесомых радиальных стержней, образующих угол  $120^\circ$  между собой, и укрепленных на их концах грузов 1, 2, центры масс которых удалены от оси вращения ротора на 0,1 м. Для уравнивания ротора с грузами 1, 2, массы которых равны по 10 кг, на третьем стержне, образующем углы  $120^\circ$  с другими, установлен противовес 3 массой 5 кг на расстоянии от оси вращения ротора, равном



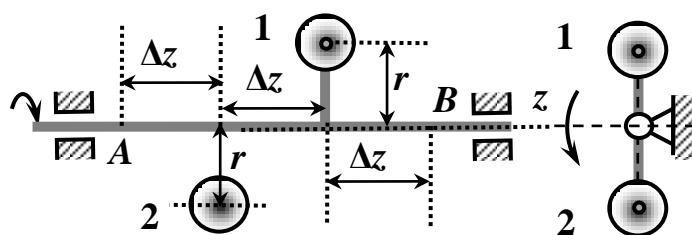
- 1) 0,2 м; 2) 0,1 м; 3) 0,85 м; 4) 0,6 м;
- 5) числу, отличному от указанных выше.

**Задание 8.** На роторе, вращающемся с угловой скоростью 10 рад/с, закреплен груз массой 20 кг на расстоянии  $r$  от оси вращения, равном 0,4 м. Если расстояние  $z_2$  между точками A и B на оси равно 1,5 м, а осевое расстояние  $z_1$  от груза до точки A равно 1 м, то величина момента силы инерции груза относительно точки B равна



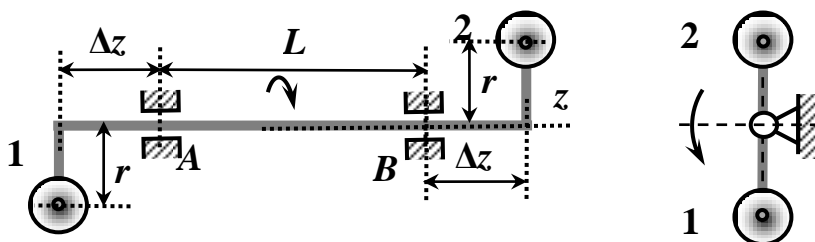
- 1) 400 Н м; 2) 120 Н м; 3) 80 Н м; 4) 200 Н м;
- 5) числу, отличному от указанных выше.

**Задание 9.** На роторе, вращающемся с угловой скоростью 10 рад/с, закреплены грузы 1, 2 массой 50 кг на расстояниях  $r$  от оси вращения, равных 0,25 м. Если осевое расстояние  $\Delta z$  от точки A до груза и между грузами равно 1 м, то величина суммы моментов сил инерции грузов относительно точки A равна



- 1) 500 Н м; 2) 375 Н м; 3) 250 Н м; 4) 1250 Н м; 5) числу, отличному от указанных выше.

**Задание 10.** Двухконсольный ротор с выносами  $\Delta z$ , равными 0,1 м, состоит из двух грузов 1, 2 массой по 20 кг,



закрепленных на концах ротора на расстояниях  $r$  от оси вращения, равных 0,5 м. Если при расстоянии  $L$  между опорами, равном 0,2 м, динамическая реакция опоры  $B$  равна 500 Н, то угловая скорость вала ротора равна

1) 25 рад/с; 2) 5 рад/с; 3) 50 рад/с; 4) 12,5 рад/с; 5) числу, отличному от указанных выше.

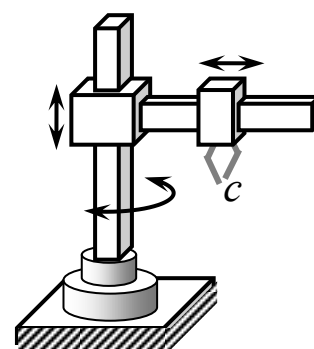
### Номера заданий и правильных ответов теста к главе 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	2	3	2	2	2	1	1	4	2

## 14.9. Тест по главе 9

*Задание 1.* В качестве обобщенных координат манипулятора робота, изображенного на рисунке, удобно выбрать

1) декартовы координаты; 2) цилиндрические координаты; 3) сферические координаты; 4) угловые (ангулярные) координаты; 5) антропоморфные или иные координаты.



*Задание 2.* В манипуляторе из задания 1 число избыточных связей равно

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) больше 2.

*Задание 3.* Число избыточных контурных связей в манипуляторе с разомкнутой кинематической цепью равно

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0, 1, 2 или больше 2.

*Задание 4.* Число избыточных контурных связей в манипуляторе с замкнутой кинематической цепью равно

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0, 1, 2 или больше 2.

*Задание 5.* Если  $n$ ,  $p_1$ ,  $q$  – числа подвижных звеньев, одноподвижных пар и избыточных связей манипулятора соответственно, то число  $W$  его степеней свободы определяется формулой

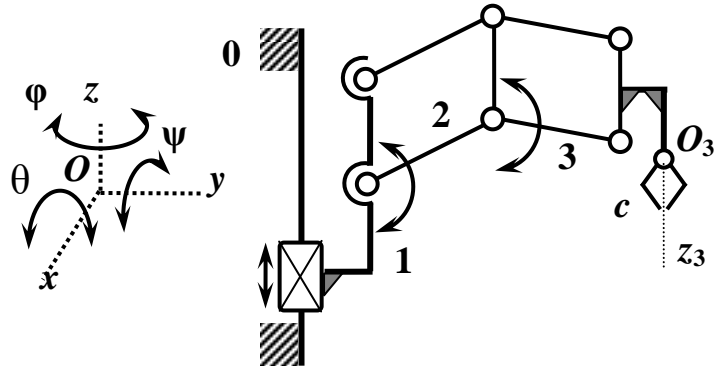
1)  $W = q + 3n - 2p_1$ ; 2)  $W = q + 6n - 5p_1$ ; 3)  $W = 6n - 5p_1$ ;

4)  $W = 3n - 2p_1$ .

*Задание 6.* Число степеней свободы манипулятора в задании 1 равно

- 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) не 3, не 4, не 5.

**Задание 7.** Формула строения манипулятора робота, схема которого изображена на рисунке, имеет вид



- 1)  $W = [z_{10} + 2 \div 3, c]$ ;
- 2)  $W = [z_{10} + 2 \div 3, c] + [x_{21} + 3, c] + [x_{32} + c]$ ;
- 3)  $W = [z_{10} + 2 \div 3, c] + [\theta_{21} + 3, c] + [\theta_{32} + c]$ ;
- 4)  $W = [z_{10} + 2 \div 3, c] + [\varphi_{21} + 3, c] + [\varphi_{32} + c]$ ;
- 5) отличный от приведенных выше.

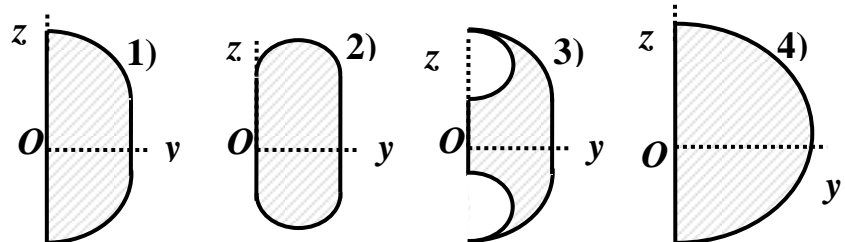
**Задание 8.** Заданная ориентация схвата в задании 7 с осью  $O_3z_3$  в системе координат  $Oxyz$  обеспечивается

- 1) только поворотом звена 3 относительно звена 2; 2) синхронными поворотами звеньев 2 и 3; 3) синхронными движениями звеньев 1, 2, 3; 4) не зависит от движений звеньев 1, 2, 3.

**Задание 9.** Чтобы найти координаты центра схвата манипулятора робота в задании 7 по известным координатам в системе отсчета, связанной со звеном 3, потребуется осуществить

- 1) три итерации; 2) две итерации; 3) одну итерацию; 4) ноль или больше трех итераций.

**Задание 10.** Зона обслуживания манипулятора робота в задании 7 при поворотах звеньев в абсолютных движениях в пределах изображенных круговых стрелок показана на рисунке



- 1); 2); 3); 4).

**Номера заданий и правильных ответов теста к главе 9**

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>3</b>

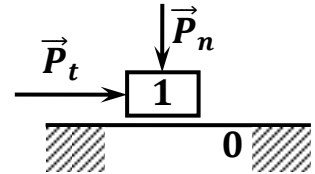
## 14.10. Тест по главе 10

*Задание 1.* Коэффициент трения скольжения при сухом трении не зависит от

1) материалов звеньев; 2) относительной скорости звена; 3) площади соприкосновения звеньев; 4) шероховатости поверхностей.

*Задание 2.* Сила трения скольжения между ползуном 1 и стойкой 0 на изображенном рисунке не зависит от

1) материалов звеньев 0, 1; 2) наличия между звеньями 0, 1 смазки; 3) силы  $\vec{P}_t$ ; 4) силы  $\vec{P}_n$ .



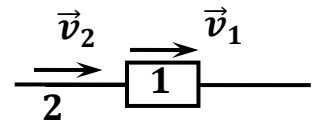
*Задание 3.* Опорную часть вала на его конце, воспринимающую радиальную нагрузку, называют

1) пятой; 2) цапфой; 3) вкладышем; 4) шейкой;  
5) не пятой, не цапфой, не вкладышем, не шейкой.

*Задание 4.* Ползун весом 10 Н находится на горизонтальной плоскости. К ползуну приложена горизонтальная сила величиной 1,1 Н. Если коэффициент трения покоя и трения скольжения равны 0,11 и 0,1 соответственно, то ползун будет находиться в состоянии

1) покоя; 2) равномерного движения; 3) движения с ускорением 0,1 м/с<sup>2</sup>; 4) движения с ускорением 0,01 м/с<sup>2</sup>; 5) состоянии, отличном от перечисленных выше.

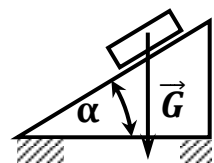
*Задание 5.* Ползушка 1, показанная на рисунке, перемещается по направляющей вправо со скоростью  $\vec{v}_1$  величиной 5 м/с; при этом направляющая также движется вправо со скоростью  $\vec{v}_2$  величиной 6 м/с. Сила трения, действующая на ползун, направлена



1) влево; 2) вверх; 3) вниз; 4) вправо.

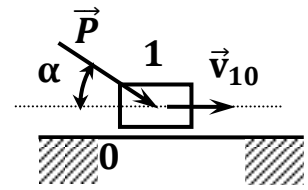
*Задание 6.* Наклонная плоскость, показанная на рисунке, является самотормозящей, если при коэффициенте трения скольжения 0,15 угол  $\alpha$  наклона плоскости к горизонту равен

1) 8°; 2) 12°; 3) 14°; 4) 16°; 5) значению, не указанному



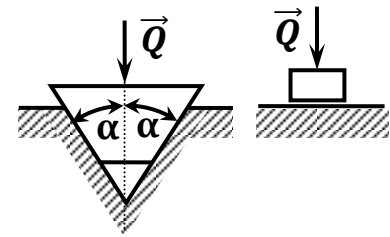
выше.

**Задание 7.** Ползун 1, массой которого можно пренебречь, движется относительно стойки 0 под действием силы  $\vec{P}$ , направленной под углом  $\alpha$  к плоскости стойки, как показано на рисунке. Движение ползуна – равномерное, если при коэффициенте трения скольжения 0,25 угол  $\alpha$  равен



- 1)  $26^\circ$ ; 2)  $46^\circ$ ; 3)  $56^\circ$ ; 4)  $76^\circ$ ; 5) значению, не указанному выше.

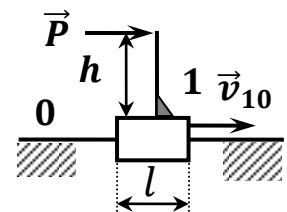
**Задание 8.** Невесомый ползун, прижимаемый вертикальной силой  $\vec{Q}$ , как показано на рисунке, перемещается в горизонтальном направлении по клиновидной направляющей с углом  $\alpha$ , равном  $45^\circ$  (рис. слева) и по горизонтальной плоскости (рис. справа). В первом случае сила трения больше, чем во втором случае, в



- 1) 1,4; 2) 2,4; 3) 4,5; 4) 45;

5) с точностью до одного знака после запятой в число раз, отличное от приведенных выше.

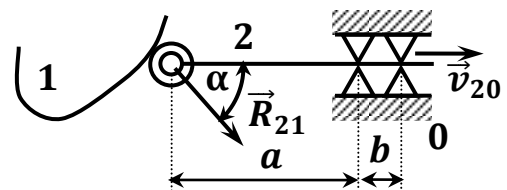
**Задание 9.** Невесомый ползун 1 с базой  $l$ , равной 0,5 м, движется вдоль горизонтальной направляющей стойки 0 под действием горизонтальной силы  $\vec{P}$ , как показано на рисунке. Коэффициент трения скольжения между ползуном и стойкой равен 0,125. Движение ползуна – равномерное, если плечо  $h$  силы относительно центра ползуна равно



- 1) 2 м; 2) 1,25 м; 3) 0,5 м; 4) 0,25 м;

- 5) значению, отличному от указанных выше.

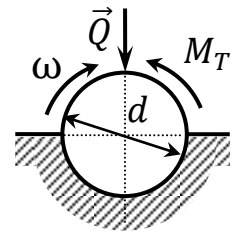
**Задание 10.** Невесомый толкатель 2, показанный на рисунке, перемещается поступательно с постоянной скоростью  $\vec{v}_{20}$  под действием силы  $\vec{R}_{21}$ , действующей со стороны кулачка 1, преодолевая трение со стойкой 0 с коэффициентом трения скольжения 0,3. При отношении  $a/b$ , равном 4, угол  $\alpha$ , образуемый векторами  $\vec{R}_{21}$  и  $\vec{v}_{20}$ , равен



- 1)  $0^\circ$ ; 2)  $10,3^\circ$ ; 3)  $20,3^\circ$ ; 4)  $30,3^\circ$ ;

5) с точностью до одного знака после запятой значению, отличному от указанных выше.

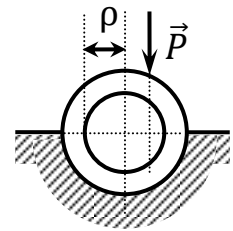
**Задание 11.** Вращающийся вал находится под действием радиальной силы  $\vec{Q}$  величиной 100 Н, как показано на рисунке. Коэффициент трения вала со втулкой равен 0,1. Момент  $M_T$  сил трения относительно оси вращения вала равен 0,5 Н м, если диаметр  $d$  вала равен



- 1) 0,05 м; 2) 0,1 м; 3) 0,15 м; 4) 0,2 м;

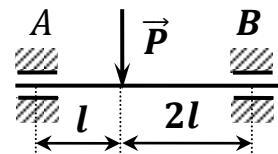
5) значению, отличному от указанных выше с точностью до двух знаков после запятой.

**Задание 12.** На горизонтальный вал действует вертикальная сила  $\vec{P}$ , как показано на рисунке. Если плечо силы относительно оси вращения меньше радиуса  $\rho$  круга трения, то вал находится в состоянии



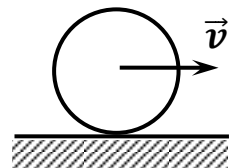
- 1) равномерного вращения; 2) замедленного вращения;  
3) ускоренного вращения; 4) покоя.

**Задание 13.** Горизонтальный вал весом  $\vec{P}$  величиной 600 Н вращается с частотой 300 об/мин. Как показано на рисунке, центр масс вала отстоит от правой опоры  $B$  вдвое дальше, чем от левой опоры  $A$ ; диаметр вала в левой опоре равен 0,06 м, в правой – 0,04. Если коэффициент трения вала во вращательных парах равен 0,1, то мощность, связанная с трением, равна



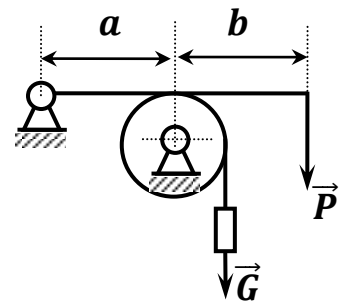
1) 50,2 Вт; 2) 100,5 Вт; 3) 94,2 Вт; 4) 75,4 Вт; 5) значению, отличному от указанных выше с точностью до одного знака после запятой.

**Задание 14.** Диск перекатывается по горизонтальному рельсу с начальной скоростью, равной 2 м/с, как показано на рисунке. Если коэффициент трения качения равен 0,0001 м, то до остановки диск совершит следующее число полных оборотов:



1) 97,4; 2) 974; 3) 487; 4) 48,7; 5) с точностью до одного знака после запятой значению, отличное от указанных выше.

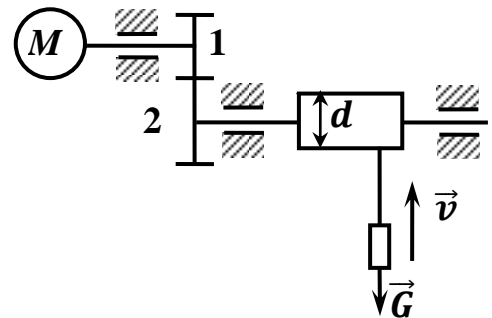
**Задание 15.** Колодочный тормоз, показанный на рисунке, состоит из шкива, к тросу которого подвешен груз весом  $\vec{G}$  величиной 5000 Н, и рычага в виде горизонтального бруса, к концу которого приложена вертикальная сила  $\vec{P}$ .



Расстояния  $a, b$  по горизонтали от оси шкива до оси вращения рычага и точки приложения силы равны 0,2 м и 0,3 м, коэффициент трения между брусом и шкивом равен 0,2. Для удержания груза необходима сила, равная

- 1) 2000 Н; 2) 10000 Н; 3) 400 Н; 4) 5000 Н;
- 5) значению, отличному от указанных выше.

**Задание 16.** Груз  $\vec{G}$  весом 20 кН равномерно поднимается со скоростью 1,5 м/с барабаном лебедки диаметром  $d$ , равным 0,25 м. Барабан, показанный на рисунке, приводится во вращение редуктором с колесами 1, 2, числа зубьев которых равны соответственно 20 и 120. При КПД лебедки, равном 0,75, вращающий момент на роторе двигателя  $M$  лебедки равен



- 1) 833,3 Н м; 2) 416,7 Н м; 3) 555,6 Н м; 4) 2500 Н м; 5) с точностью до одного знака после запятой значению, отличному от указанных выше.

### Номера заданий и правильных ответов теста к главе 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	3	2	3	4	1	4	1	1	3	2	4	1	3	2	3



## Библиографический список

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1975.
2. Белов М. И., Пылаев Б. В. Теоретическая механика. М.: ИЦ РИОР НИЦ ИНФРА-М, 2017.
3. Воробьев Е. И., Попов С. А., Шевелева Г. И. Механика промышленных роботов: учеб. пособие для вузов: в 3 кн /Под ред. К. В. Фролова, Е. И. Воробьева. М.: Высшая школа, 1988.
4. Промышленные роботы агрегатно-модульного типа / Е. И. Воробьев [и др.]. М.: Машиностроение, 1988.
5. Теория механизмов / В. А. Гавриленко [и др.]. М.: Высшая школа, 1973.
6. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976.
7. Горов Э.А., Гайдай С.А., Лушников С.В. Типовой лабораторный практикум по ТММ. М.: Машиностроение, 1990.
8. Крейнс М. А., Розовский М. С. Зубчатые механизмы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
8. Кожевников С. Н., Есипенко Я. И. Раскин Я. М. Механизмы. М.: Машиностроение, 1976.
9. Лачуга Ю. Ф., Воскресенский А. Н., Чернов М. Ю. Теория механизмов и машин. Кинематика, динамика и расчет. М.: КолосС, 2005.
10. Левитский Н. И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1990.
11. Озол О. Г. Теория механизмов и машин. М. : Наука, 1984.
12. Решетов Л. Н. Самоустанавливающиеся механизмы: справочник. М.: Машиностроение, 1979.
13. Теория механизмов и машин. Терминология. Буквенные обозначения величин. М.: Наука, 1984.

14. Толстошеев А. К. Теория строения механизмов. Брянск: Изд-во БГТУ, 2001.
15. Турбин Б. И, Карлин В. Д. Теория механизмов и машин. М.: Высшая школа, 1968.
16. Теория механизмов и механика машин/ К. В. Фролов [и др.]. М.: Высшая школа, 1998.
17. Шахинпур М. Курс робототехники. М.: Мир, 1990.
18. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1976.
19. Гузенков П. Г. Детали машин. М.: Высшая школа, 1982.
20. Л. И. Седов. Механика сплошной среды. том II. Учебник. М.: Наука, 1976.
21. Корн Г., Корн Т.. Справочник по математике. М.: Наука, 1974.
22. К. Джонсон. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.

*По вопросам приобретения книг обращайтесь:*  
**Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):**  
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1  
Тел. (495) 280-15-96; факс (495) 280-36-29  
E-mail: books@infra-m.ru

**Отдел «Книга—почтой»:**  
тел. (495) 280-15-96 (доб. 246)

---

*Учебное издание*

**Белов Михаил Иванович  
Сорокин Сергей Васильевич**

# **ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

Учебное пособие

*Публикуется в авторской редакции*

Подписано в печать 25.10.2017.  
Формат 60×90/16. Гарнитура Times.  
Бумага офсетная. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 20,13. Уч.-изд. л. 21,16.  
Тираж 500 экз. (I-100). Заказ № 00129.  
Цена свободная.

ТК 676522 — 945036 — 251017

ООО «Издательский Центр РИОР»  
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В.  
info@rior.ru www.rior.ru

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»  
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1.  
Тел.: (495) 280-15-96. Факс: (495) 280-36-29.  
E-mail: books@infra-m.ru <http://www.infra-m.ru>

Отпечатано в типографии

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»  
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1  
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29