А.И. Иноземцев

МНОГОМЕРНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Учебное пособие

Москва 2023

УДК 517.983.
И67

И67 Иноземцев А.И. Многомерные частно-интегральные операторы в анизотропных пространствах Лебега. — Москва: ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева, 2023. — 79 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Войтицкий В.И., доцент кафедры высшей математики, института экономики и управления АПК.

Учебное пособие содержит основные понятия функционального анализа и включает в себя систематическое изложение теории частно-интегральных и линейных частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега и в пространствах непрерывных функций.

В учебном пособии изучаются критерии и достаточные условия действия частно-интегральных и линейных частно-интегральных операторов, а также оценка их нормы в различных функциональных пространствах. Установленные свойства операторов применяются к исследованию уравнений содержащих такие операторы в некоторых задачах математической физики.

Учебное пособие будет полезным для научных работников, аспирантов и студентов экономических и технических направлений, интересующихся теорией функции действительного переменного и функциональным анализом.

Библиогр. 17 назв.

УДК 517.983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **5**

ГЛАВА I. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА **7**

1 Некоторые понятия теории множеств 7

2 Топологические пространства 11

3 Метрические пространства 14

4 Пространства с мерой. Интеграл Лебега 16

5 Линейные пространства 19

6 Нормированные пространства 21

7 Квазинормированные пространства 22

8 Гильбертовы пространства 23

9 Линейные отображения 25

ГЛАВА II. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА **28**

10 Примеры функциональных пространств 28

11 Пространства Лебега 37

12 Анизотропные пространства Лебега 40

13 Квазинормированные пространства 47

ГЛАВА III. ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА **53**

14 Частно-интегральные операторы 53

15 Частно-интегральные операторы в пространствах Лебега 56

16 Достаточные условия ограниченности частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега 59

17 Достаточные условия ограниченности линейных частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега 63

ГЛАВА IV. ЛИНЕЙНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ **67**

18 Достаточные условия действия 67

19 Алгебра частно-интегральных операторов 71

20 Операторы Вольтерра с многомерными частно-интегральными операторами в $C(D)$ 74

ЛИТЕРАТУРА **76**

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит основы теории частно-интегральных и линейных частно-интегральных операторов вида

$$K_\alpha u(x) = \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha)\, u(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)\, dt_\alpha, \tag{1}$$

$$K = \sum_\alpha K_\alpha \tag{2}$$

соответственно, в различных функциональных пространствах, к которым приводятся некоторые задачи математической физики.

Характерная особенность этого уравнения связана с интегрированием неизвестной функции $u(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)$ под знаком интеграла не по всем, а по части переменных. В (1) $x \in \mathbb{R}_n$, α — мультииндекс, состоящий из элементов одного из 2^n подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Операторы (1) и (2) — не интегральные и не компактные даже в случае непрерывного ядра $k_\alpha(x, t_\alpha)$. Поэтому уравнения, содержащие операторы (1) и (2) существенно отличаются от обычных интегральных уравнений. Интегральный оператор

$$Iu(x) = \int\limits_D k(x, t)\, u(t)\, dt$$

с ядром $k(x, t)$ является частным случаем частно-интегрального оператора (1) при $\alpha = (1, 2, \ldots, n)$, $(\bar\alpha = \varnothing)$ т.е.

$$K_{(1,2,\ldots,n)} u(x) = \int\limits_D k_{(1,2,\ldots,n)}(x, t)\, u(t)\, dt,$$

где $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — свободные от интегрирования переменные, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — переменные интегрирования. Линейные и нелинейные операторы и уравнения с частными интегралами изучались в монографиях [7], [8], [10], [11], [17], в этих же книгах содержится и библиография работ по теории операторов и уравнений с частными интегралами.

В учебном пособии изучаются: критерии и достаточные условия действия операторов в пространстве функций. Установленные свойства операторов применяются к исследованию линейных интегральных уравнений с частными интегралами, в частности, к изучению интегрального оператора (1) .

Учебное пособие разделено на 17 параграфов, объединенных в четыре главы.

Глава 1 начинается с основ теории функционального анализа и функций действительного переменного. Приведены основные понятия, определения и теоремы. В главе 2 приведены примеры двух основных классов функциональных пространств: пространства Лебега и анизотропные пространства Лебега, а так же пространство непрерывных функций как подкласс пространства существенно ограниченных функций. Основное содержание третьей главы связано с исследованием частно-интегральных и линейных частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега. Глава 4 посвящена исследованию линейных частно-интегральных операторов в пространствах непрерывных функций $C(D)$.

Автор надеется, что данное учебное пособие будет полезным научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов, интересующимся функциональным анализом, интегральными уравнениями и их приложениями.

Автор благодарен д.ф.-м.н., профессору Л.Н. Ляхову за постановку задачи исследования линейных частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега.

ГЛАВА I
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. Некоторые понятия теории множеств

Определение 1.1.1. Множеством называется любая совокупность объектов произвольной природы.

Множества бывают конечные $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, содержащие конечное число объектов ($a_i \in A, \; i = \overline{1,n}$) и бесконечные $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$, количество объектов которых неограниченно ($b_j \in B, \; j = 1, 2, \ldots$). Мощностью конечного множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, называется количество элементов этого множества $|A| = n$. Мощности бесконечных множеств сравниваются с мощностью наименьшего бесконечного множества $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Бесконечные множества могут быть счетными $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, 2\mathbb{Z}, \ldots)$ мощность которых равна $\aleph_0$ и несчетными $(\mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots)$ мощность которых называется континуум и равна $c = 2^{\aleph_0}$. Пустым множеством называется множество не содержащее ни одного элемента $\varnothing$, универсальным множеством называется такое множество, которое содержит все **исследуемые** объекты U.

Основными операциями, которые можно выполнять над множествами, являются:

1. объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = B$ — множество, содержащее все элементы множеств $A_i \, i = \overline{1,n}$;
2. пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = B$ — множество, состоящее из элементов, содержащихся во всех множествах $A_i, i = \overline{1,n}$;
3. разность $A \backslash B = C$ — множество, содержащее элементы мно-

жества A без элементов множества B;

4. дополнением множества A называется множество $\bar{A}$ элементов $U \backslash A$ $(A \backslash B = A \cap \bar{B})$;

5. декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = B$ множество упорядоченных наборов n элементов по одному из каждого множества $B = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = \overline{1, n}\}$.

Определение 1.1.2. Отображением множества X на Y $(f\colon X \to Y)$ называется любое соответствие элементам множества X элементов множества Y.

Множество X называется областью определения, а множество Y — областью значений отображения f. Образом отображения f называется множество $\mathrm{Im} f = \{y = f(x) \mid x \in X\} = f(X) \subset Y$. Прообразом элемента $b \in B$ при отображении f называется множество $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Прообразом отображения f называется множество $f^{-1}(Y_0) = \bigcup\limits_{y \in Y_0 \subset Y} f^{-1}(y)$.

Классификация отображений:

1. по способу отображения: иньективные, сюрьективные и биективные (взаимно однозначные);

2. по типу отображаемых множеств: функция, функционал и оператор.

Определение 1.1.3. Отображение $f\colon X \to Y$ называется иньективным, если для всех $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Определение 1.1.4. Отображение $f\colon X \to Y$ называется сюрьективным, если $\mathrm{Im} f = Y$.

Определение 1.1.5. Отображение $f\colon X \to Y$ называется биективным, если оно иньективно и сюрьективно.

Определение 1.1.6. Отображение $f\colon X \to Y$ числового множества X в числовое множество Y называется **функцией**.

Определение 1.1.7. Отображение $f\colon X \to Y$ множества элементов произвольной природы X в числовое множество Y называется **функционалом**.

Определение 1.1.8. Отображение $f\colon X \to Y$ множества элементов произвольной природы X в множество элементов произвольной природы Y называется **оператором**.

Любая функция является функционалом, любой функционал — оператором, т.е. понятие оператора более широкое.

На множестве A может быть определено некоторое отношение, представляющее собой совокупность ω упорядоченных пар (x, y) элементов из A, т.е. $x\omega y \Leftrightarrow (x, y) \in \omega$. Примеры отношений: $=, \leq, <, \subset, \subseteq, \equiv, \sim$.

Свойства отношений:

1. рефлексивность $a\omega a$;

2. антирефлексивность $\overline{a\omega a}$;

3. симметричность $a\omega b \Rightarrow b\omega a$;

4. антисимметричность $a\omega b \wedge b\omega a \Rightarrow a = b$;

5. асимметричность $a\omega b \Rightarrow \overline{b\omega a}$;

6. транзитивность $a\omega b \wedge b\omega c \Rightarrow a\omega c$;

7. связность $a \neq b \Rightarrow a\omega b \vee b\omega a$.

Виды отношений:

1. отношение эквивалентности (выполняются свойства: рефлексивность, симметричность, транзитивность);
2. отношение предпорядка (рефлексивность, транзитивность);
3. отношение частичного порядка (рефлексивность, транзитивность, антисимметричность);
4. отношение строгого порядка (антирефлексивность, транзитивность, антисимметричность);
5. отношение линейного порядка (связность, рефлексивность антисимметричность).

Вещественный, комплексный и функциональный анализ использует различные виды множеств, но чаще используются расширенная область вещественных или комплексных чисел ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ с присоединенными символами $-\infty, +\infty$ или ∞ соответственно). Если A — некоторое подмножество частично упорядоченного множества M, то его мажорантой называется такой элемент $x \in M$, что $a \leq x$ для всех $a \in A$. Мажоранта x множества A называется его верхней гранью, если она является наименьшей из всех мажорант и обозначается $x = \sup A$. Если мажоранты не существует, то в качестве верхней грани A принимается $+\infty$. Нижней гранью A называется наибольшая из всех минорант (c такое, что $a \geq c$ для всех $a \in A$) и обозначается $c = \inf A$. Если миноранты множества не существует, то в качестве нижней грани A принимается $-\infty$. Причем $\sup \varnothing = -\infty, \inf \varnothing = +\infty$. Если A — бесконечное множество вещественных чисел, то через $\overline{\lim} A$ обозначается нижняя грань всех таких чисел b, что лишь конечное число чисел из A превосходит b, аналогично $\underline{\lim} A$ обозначается верхняя грань всех таких чисел c, что лишь конечное число чисел из A меньше c. Элемент $x \in A$ называется максимальным, если из $x \leq y$ вытекает $y \leq x$. Каждое частично упорядоченное множество содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество (Хаусдорф). Если каждое линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества $(M; \leq)$ имеет мажоранту, то в M существует максимальный элемент (Цорн). Каждое множество может быть вполне упорядочено (Цермело).

§2. Топологические пространства

Определение 1.2.1. Топологическим пространством называется множество X в котором выделена система множеств S, которые называются открытыми, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\varnothing \subset S,\ X \subset S$;
2. если $A_i \subset S,\ i = 1, 2, \ldots,$ то $\bigcup\limits_i A_i \subset S$ (т.е. объединение любого числа открытых множеств — есть открытое множество);
3. если $A_1, A_2 \subset S$, то $A_1 \cap A_2 \subset S$ (т.е. пересечение конечного числа открытых множеств — есть открытое множество).

Если множество A — открыто т.е. $A \subset S$, то $B = X \backslash A$ — замкнуто. Система замкнутых множеств T пространства, в котором введена топология S удовлетворяет условиям:

1. $\varnothing \subset T,\ X \subset T$;
2. если $B_i \subset T,\ i = 1, 2, \ldots,$ то $\bigcap\limits_i A_i \subset S$ (т.е. пересечение любого числа замкнутых множеств — есть замкнутое множество);

3. если $B_1, B_2 \subset T$, то $B_1 \cup B_2 \subset B$ (т.е. объединение конечного числа замкнутых множеств — есть замкнутое множество).

Направление (некоторое бесконечное множество) элементов $\{x_i\}$ топологического пространства X сходится к $x \in X$ ($\lim\limits_i x_i = x$) если любая окрестность точки x содержит бесконечное множество элементов направления $\{x_i\}$, x называется пределом направления $\{x_i\}$. Если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку направления $\{x_i\}$, то точка x называется предельной точкой направления. Если для любого направления $\{x_i\} \subset F$ сходящегося к x в топологическом пространстве X, предел $x \in F$, то F — замкнутое множество. Единственность предела направления в топологическом пространстве X обеспечивает его хаусдорфовость, т.е. для любых двух точек $x, y \in X$ существуют их окрестности U_x и U_y такие, что $U_x \cap U_y = \varnothing$. Вместо понятия **направления** в топологическом пространстве X можно использовать понятие **последовательности** если любая точка пространства X обладает счетной фундаментальной системой окрестностей.

Свойства топологических пространств:

1. множество, состоящее из единственной точки, замкнуто;
2. у любых двух несовпадающих точек x и y существует непересекающиеся окрестности;
3. для каждого замкнутого множества A и произвольной точки $x \notin A$ существуют непересекающиеся окрестности;
4. у любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют непересекающиеся окрестности.

Виды топологических пространств:

1. хаусдорфово, если выполняются свойства 1 и 2;
2. регулярное, если выполняются свойства 1 и 3;
3. нормальное, если выполняются свойства 1 и 4.

Если существует биективное отображение открытых множеств одного топологического пространства X в другое топологическое пространство Y, то эти пространства называются гомеоморфными. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества $E \subset X$, если существует такое открытое множество $A \subset X$, что $x \in A \subset E$. Любое множество топологического пространства X в котором точка x является внутренней, называется окрестностью этой точки A_x. Точка x топологического пространства X называется точкой прикосновения множества $E \subset X$, если для любой окрестности этой точки $A_x \cap E \neq \varnothing$. Если точка x — точка прикосновения множества $E \subset X$ и $|A_x \cap E| = \aleph_0$ или c, то x — предельная тока множества E. Множество всех точек прикосновения множества E называется его замыканием и обозначается $\bar{E}$.

Одним из важных свойств топологических пространств является свойство компактности.

Определение 1.2.2. Топологическое пространство X называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами $\bigcup\limits_{i} A_i = X$ можно выбрать конечное подпокрытие $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = X$.

Топологическое пространство X является компактным, тогда и только тогда, когда каждое направление в X имеет предельную точку. Множество $K \subset X$ называется компактным, если из любой последовательности $\{x_n\}$ точек из $x_n \in K$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность. Если предел каждой из этой последовательности принадлежит K, то множество K называется бикомпактным или компактным в себе.

Свойства бикомпактных пространств:

1. для того чтобы топологическое пространство было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы каждое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имело непустое пересечение;

2. замкнутое подмножество бикомпактного пространства бикомпактно;

3. образ бикомпактного пространства при непрерывном отображении бикомпактен;

4. бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто;

5. непрерывное взаимно однозначное отображение бикомпактного пространства в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом;

6. бикомпактное хаусдорфово пространство нормально;

7. вещественная непрерывная функция, заданная на бикомпактномм пространстве, достигает своих верхней и нижней граней.

Одним из классов топологических пространств являются метрические пространства.

§3. Метрические пространства

Определение 1.3.1. Множество X называется метрическим пространством, если каждой паре элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $\rho_X(x, y)$ (расстояние между элементами x и y) удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам метрики):

1. $\rho_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (аксиома тождества);

2. $\rho_X(x, y) = \rho_X(y, x)$ (аксиома симметрии);

3. $\rho_X(x, y) \leq \rho_X(x, z) + \rho_X(z, y)$ (аксиома треугольника).

Шаром $B_r(x_0)$ (или замкнутым шаром $\bar{B}_r(x_0)$) с центром в точке x_0 и радиусом r называется множество точек $x \in X$ таких, что $\rho_X(x, x_0) < r$ $(\rho_X(x, x_0) \leq r)$. Пусть $n \in \mathbb{N}, x \in X$, тогда совокупность множеств $B_{1/n}(x)$ образует базис множества X. $\rho_X(x, y)$ — непрерывное отображение своих аргументов, т.е. $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$ следует $\rho_X(x_n, y_n) \to \rho_X(x_0, y_0)$. Метрическое пространство — хаусдорфово, нормально.

Если топология некоторого пространства порождает метрика, то это пространство называется метризуемым. Не все топологические пространства метризуемы. Одна и та же топология может порождаться разными метриками.

Определение 1.3.2. Последовательность элементов $\{x_n\}$ метрического пространства X называется фундаментальной (или сходящейся в себе) если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_0(\varepsilon)$ такое, что для любых $n, n > N_0(\varepsilon)$ следует $\rho_X(x_n, x_m) < \varepsilon$.

В метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Метрическое пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Любая сходящаяся последовательность полного пространства является фундаментальной.

Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in D \subset X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \in D$ из $\rho_X(x, x_0) < \delta$ следует $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Отображение f называется непрерывным на D, если оно непрерывно в каждой точке этого множества. Два метрических пространства X и Y называются изометричными, если между их элементами существует биекция, сохраняющая расстояния. Пространство X называется сепарабельным, если в нем существует счетное плотное подмножество ($\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}[x]$ в $C[a, b]$ и др.). Не все метрические пространства сепарабельны. Компактное метрическое пространство полно и сепарабельно.

§4. Пространства с мерой. Интеграл Лебега

Определение 1.4.1. Алгеброй Σ множества T, называется множество его подмножеств удовлетворяющих условиям:

1. для любых $A, B \in \Sigma$ следует $A \cup B \in \Sigma$;
2. для любого $A \in \Sigma$ следует $\bar{A} = T \backslash A \in \Sigma$.

Из этих условий следует, что объединение и пересечение конечного числа подмножеств — снова подмножество T, причем $\varnothing \in \Sigma$, $T \in \Sigma$. Алгебра Σ называется σ-алгеброй, если из $A_n \in T$ $(n \in \mathbb{N})$, следует $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$, и как следствие $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Определение 1.4.2. Функция $\varphi\colon \Sigma \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$ называется аддитивной функцией множества, если

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \varphi(A_n),$$

и счетно-аддитивной, если

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Функция φ — неотрицательна, если для любого $A \in T$, следует $\varphi(A) \geq 0$. $\varphi(\varnothing) = 0$. Неотрицательная счетно-аддитивная функция множества μ, заданная на Σ называется мерой. Мера называется конечной, если $\mu(T) < \infty$; σ-конечной, если $T = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_n,\ A_n \in \Sigma,\ \mu(A_n) < \infty$; полной, если $A \subset B \in \Sigma,\ \mu(B) = 0$, тогда $A \in \Sigma,\ \mu(A) = 0$.

Множества из σ-алгебры Σ называются измеримыми. Вещественная функция $f(t)$ называется измеримой относительно Σ, если для любого числа $c \in \mathbb{R}$ измеримы множества $\{t \in T\colon f(t) > a\}$, $\{t \in T\colon f(t) < a\}$, $\{t \in T\colon f(t) \geq a\}$, $\{t \in T\colon f(t) \leq a\}$. Функция вида $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, \chi_{A_i}(t)$ называется измеримой конечнозначной функцией относительно Σ. Для любой измеримой функции $f(t)$ существует последовательность конечнозначных функций $\{f_n\}$ такая, что для любого $t \in T$, $f_n(t) \to f(t),\ |f_n(t)| \leq |f(t)|$. Класс измеримых функций $f(t)$, которым сопоставляется некоторое конечное число (интеграл Радона) $\int\limits_T f(t)\, d\varphi(t)$ называется классом суммируемых функций по функции φ. Отличие интеграла Радона от Лебега заключается в том, что в интеграле Радона (Лебега-Стильтьеса) интегрирование производится не по мере, а по произвольной счетно-аддитивной функции множества, которая может принимать и отрицательные значения. Некоторое свойство выполняется почти всюду, если оно выполняется всюду кроме, может быть, множества, мера которого равна нулю. Функции $f(t)$ и $g(t)$ эквивалентны, если они равны почти всюду, т.е. $\mu\left(\{t \in T\colon f(t) \neq g(t)\}\right) = 0$. Последовательность измеримых функций $f_n(t)$ почти всюду сходится к функции $f(t)$, если $\mu\left(\{t\colon f_n(t) \nrightarrow f(t)\}\right) = 0$. Последовательность измеримых функций $f_n(t)$ сходится по мере μ к измеримой функции $f(t)$ на множестве $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$, если $\mu\left(\{t \in A\colon |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\}\right) = 0$, $n \to \infty$. Если последовательность сходится почти всюду, то она сходится и по мере, а если сходится по мере, то существует подпоследовательность, которая сходится почти всюду.

Пусть $y(t)$ — конечнозначная функция, тогда ее интегралом Лебега называется число

$$\int_T y(t)\, d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \chi_{A_i}(t).$$

Интегралом Лебега измеримой неотрицательной функции $f(t)$ относительно меры μ называется число

$$\int_T f(t)\, d\mu(t) = \sup \left\{ \int_T f_s(t)\, d\mu(t) \right\},$$

где $\{f_s(t)\}$ — все конечнозначные функции, такие что $f_s(t) \leq f(t)$. Если функция $f(t)$ произвольного знака, то ее можно представить в виде $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$; (или $\int_T f(t)\, d\mu(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_T f_s(t)\, d\mu(t)$, где $\{f_s(t)\}$ — последовательность конечнозначных функций, сходящихся по мере к функции $f(t)$.) Интеграл Лебега можно определить следующим образом:

$$\int_T f(t)\, d\mu(t) = \sup_{A_i} \left\{ \sum_i \inf(f(A_i))\mu(A_i) \right\},$$

$$\int_T f(t)\, d\mu(t) = \inf_{B_j} \left\{ \sum_i \sup(f(B_j))\mu(B_j) \right\},$$

где $\{A_i\}_{i=1}^n \in T$ — всевозможные конечные разбиения множества T, B_j — всевозможные конечные покрытия множества T.

Пусть $A \subset (S, \Sigma_S, \nu)$, $B \subset (T, \Sigma_T, \mu)$, тогда призведением мер ν и μ называется мера λ такая, что $\lambda(A \times B) = \nu(A)\mu(B)$. Для суммируемой функции $f(s,t)$ относительно меры λ выполняется равенство $\int\limits_{S\times T} f(s,t)\,d\lambda(s,t) = \int\limits_S \left(\int\limits_T f(s,t)\,d\mu(t)\right) d\nu(s)$ (теорема Фубини).

§5. Линейные пространства

Линейным пространством над полем P называется множество элементов V удовлетворяющих основной группе алгебраических законов:

1. для любых $a \in V$ и $b \in V$, существует и единственный элемент $a + b \in V$ (замкнутость операции сложения);
2. для любых $a, b, c \in V$ выполняется $(a+b)+c = a+(b+c)$ (закон ассоциативности сложения);
3. для любого $a \in V$, существует (и единственный) элемент $0 \in V$, что $a + 0 = a$ (нейтральный элемент по операции сложения);
4. для любого $a \in V$, существует (и единственный) элемент $\tilde{a} \in V$, что $a + \tilde{a} = 0$ (обратный элемент);
5. для любых $a, b \in V$ выполняется $a + b = b + a$ (закон коммутативности сложения);
6. для любого $a \in V$ и любого $\lambda \in P$, существует и единственный элемент $\lambda a \in V$ (замкнутость операции умножения на число);
7. для любого $a \in V$ и любых $\lambda, \mu \in P$, выполняется равенство $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a = \mu(\lambda)a$ (ассоциативность умножения на число);

8. для любого $a \in V$ выполняется $1 \cdot a = a$;

9. для любого $a \in V$ и любых $\lambda, \mu \in P$, выполняется равенство $(\lambda+\mu)a = \lambda a+\mu a$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);

10. для любого $\lambda \in P$ и любых $a, b \in V$, выполняется равенство $\lambda(a+b) = \lambda a+\lambda b$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Свойства 1)-6) называется аксиомами линейного пространства V, 8)-10) — свойства операций. Линейные пространства могут состоять из математических объектов различной природы (векторы, матрицы, полиномы, функции и т.д.).

Классификация линейных пространств:

1. по размерности пространства: конечномерные и бесконечномерные;

2. по числовому полю P над которым берется пространство V: вещественное $P = \mathbb{R}$ и комплексное $P = \mathbb{C}$.

Определение 1.5.1. Система элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in P$ не все равные нулю одновременно, такие что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$. Если же данное равенство выполняется только в случае нулевых коэффициентов, то элементы называются линейно независимыми.

Свойства линейной зависимости:

1. система $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из элементов системы линейно выражается через остальные элементы (т.е. является их линейной ком-

бинацией), т.е. существуют числа $\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n \in P$ что выполняется равенство $a_i = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{i-1} a_{i-1} + \beta_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \beta_n a_n$;

2. если система $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ содержит нулевой элемент или два одинаковых элемента, то система линейно зависима;

3. если некоторая подсистема системы элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ линейно зависима, то и вся система линейно зависима;

4. если вся система линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.

Максимально линейно независимой системой элементов, называется такая система добавление любого элемента к которой обращает ее в линейно зависимую систему. Базисом пространства V называется любая максимально линейно независимая система элементов, через которую можно линейно выразить любой другой элемент данного пространства. Размерностью пространства V ($\dim V$) называется количество элементов в базисе пространства.

§6. Нормированные пространства

Определение 1.6.1. Линейное пространство V называется нормированным, если каждому элементу $x \in V$ поставлено в соответствие действительное число $\|x\|$, которое называется нормой этого числа и удовлетворяет следующим условиям (аксиомам нормы):

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (однородность);

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (аксиома треугольника).

Из определения сходимости последовательности в метрических пространствах следует определение сходимости последовательности в нормированных: последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 по норме, если $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$. Линейное нормированное пространство V называется банаховым пространством (или пространством Банаха, пространством типа B), если оно является полным в смысле сходимости по норме.

Из определения непрерывности отображения в метрических пространствах следует определение непрерывности в нормированных: пусть V_1 и V_2 — нормированные пространства. Отображение $f\colon V_1 \to V_2$ называется непрерывным в точке $x_0 \in D \subset V_1$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \in D$ из $\|x - x_0\|_{V_1} < \delta$ следует $\|f(x) - f(x_0)\|_{V_2} < \varepsilon$ *отображение f непрерывно в точке $x_0 \in D \subset V_1$, если для любой последовательности элементов $\{x_n\} \subset D$ сходящейся к x_0 по норме пространства V_1, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к элементу $f(x_0)$ по норме пространства V_2, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = x_0$. Отображение f называется непрерывным на D, если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

§7. Квазинормированные пространства

Определение 1.7.1. Квазинормой на V, называется неотрицательный функционал $\|\cdot\|$, сопоставляющий каждому $x \in V$ число $\|x\| \geq 0$ такое, что

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$, θ — почти всюду нулевая функция;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq c(\|x\| + \|y\|)$.

Квазинорма $\|\cdot\|$ монотонна, если $|x| \le |y| \Rightarrow \|x\| \le \|y\|$. Квазинорма задает топологию на X с базисом окрестностей вида $\{x \in X \colon \|x\| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$. При $c = 1$ квазинорма является нормой, где метрика $d(x, y) = \|x - x_0\|$ определяет топологию.

§8. Гильбертовы пространства

Пусть V — некоторое линейное пространство и x, y — любые два его элемента, тогда скалярным произведением элементов x и y называется функционал $F \colon (x, y) \to (x, y) \in P$, где $P = \mathbb{R}$ (евклидово пространство) или $\mathbb{C}$ (унитарное пространство), удовлетворяющий условиям:

1. $(x, x) \ge 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2. $(x, y) = (y, x)$, $\Big((x, y) = \overline{(y, x)}$ *при* $P = \mathbb{C}\Big)$;
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

Используя скалярное произведение, можно определить норму в пространстве V: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, удовлетворяющая всем аксиомам нормы. Отдельно выделим одно из свойств скалярного произведения: неравенство Коши-Буняковского $|(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

Определение 1.8.1. Гильбертовым пространством называется полное нормированное пространство H, норма которого порождена скалярным произведением.

Гильбертово пространство может быть вещественным или комплексным (в зависимости от выбора поля коэффициентов $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), конечно или бесконечно мерным (в зависимости от максимального числа линейно независимых элементов пространства).

Если $(x, y) = 0$ для ненулевых x и y, то эти элементы называются ортогональными $x \perp y$. Если H_1 и H_2 — подпространства гильбертова пространства H и для любых $x \in H_1,\ y \in H_2$ выполняется равенство $(x, y) = 0$, то подпространства H_1 и H_2 ортогональны $H_1 \perp H_2$. H_2 называется ортогональным дополнением H_1, если $H_1 \perp H_2,\ H_1 \cup H_2 = H$.

Свойства ортогональности:

1. $0 \perp x$ для любого x;

2. $x \perp x$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3. $x \perp y_i,\ i = \overline{1, n}$, то $x \perp \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$;

4. $y_n \to y$ и $x \perp y_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$, тогда $x \perp y$.

Обобщенная теорема Пифагора:

Пусть $x = \sum\limits_i x_i$, где x_i — попарно ортогональные элементы (ортонормальная система элементов), а сумма может быть конечной или бесконечной, тогда $\|x\|^2 = \sum\limits_i \|x_i\|^2$. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ сходится тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2$ сходится.

Пусть пространство H сепарабельно, т.е. в нем существует счетный базис y_i, который ортогонализировать в базис x_i, все элементы которого попарно ортогональны. Пусть $\{x_i\}$ — ортонормальная система. Числа вида $a_i = (x, x_i),\ i = 1, 2, \ldots$ называются коэффициентами Фурье, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ называется рядом Фурье элемента x. $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ — проекция элемента x на подпространство H_n. Имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leq \|x\|^2,$$

в котором переходя к пределу $n \to \infty$ получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \leq \|x\|^2$$

(если имеет знак равенства, то получим равенство Парсеваля или x удовлетворяет условию замкнутости).

§9. Линейные отображения

Пусть X и Y — нормированные пространства.

Определение 1.9.1. Отображение (функция, функционал, оператор) $K\colon X \to Y$ называется линейным, если выполняются условия:

1. для любого $x \in X$ и $\lambda \in P$, $K(\lambda x) = \lambda K(x)$ (однородность);
2. для любых $x_1, x_2 \in X$, $K(x_1 + x_2) = K(x_1) + K(x_2)$ (аддитивность).

Эти условия можно заменить одним $K(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha K(x_1) + \beta K(x_2)$.

Частные случаи линейных операторов: $E(x) = 0$ — нулевое отображение, $I(x) = x$ — единичное отображение, $K(x) = \lambda x$ — отображение подобия.

Далее будем рассматривать линейные отображения на примерах линейных операторов.

Линейное оператор $K\colon X \to Y$ называется ограниченным, если для любого $x \in X$ существует постоянная C такая, что

$$\|K(x)\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

Линейный оператор K непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен. Число

$$C_0 = \sup_{\|x\|_X=1} \|K(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|K(x)\|_Y$$

называется нормой линейного оператора и обозначается $\|K\|$. Эта норма удовлетворяет всем аксиомам нормы в банаховом пространстве $B(X,Y)$ непрерывных линейных операторов. Ядром линейного оператора $K\colon X \to Y$ называется множество $kerK = \{x \in X\colon K(x) = 0 \in Y\}$. Размерность ядра называется дефектом оператора. Коядром линейного оператора $K\colon X \to Y$, называется фактор-множество $cokerK = Y/(ImX)$. Оператор называется нетеровым, если его образ замкнут и размерности ядра и коядра конечны, если размерности ядра и коядра конечны и совпадают, то оператор называется фредгольмовым.

Теорема Рисса. Для любого линейного функционала $f(x)$ в гильбертовом пространстве H, существует и единственный элемент $y \in H$ с нормой $\|y\| = \|f\|$ такой, что $f(x) = (x,y)$.

Теорема Хана-Банаха. Пусть $f(x)$ — линейный функционал, с областью определения $Dom(f) \subset X$, и существует функционал $p(x) \geq 0$ такой, что $|f(x)| \leq p(x)$ при $x \in Dom(f)$, $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ при $\lambda \geq 0, x, y \in X$. Тогда существует линейный функционал $F(x)$ $Dom(F) = X$ такой, что $F(x) = f(x)$ при $x \in Dom(f)$, $|F(x)| \leq p(x), x \in X$.

$F(x)$ — продолжение функционала $f(x)$ на все пространство X, $f(x)$ — сужение функционала $F(x)$ на $Dom(f)$.

Слабой производной (производной Гато) оператора $K\colon X \to Y$ в точке $x_0 \in Dom(K)$ называется непрерывный линейный оператор $K'(x_0)\colon X \to Y$ такой, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K(x_0+\varepsilon x) - K(x_0)}{\varepsilon} = K'(x_0)x.$$

Сильной производной (производной Фреше) оператора $K\colon X \to Y$ в точке $x_0 \in Dom(K)$ называется линейный непрерывный оператор $K'(x_0)\colon X \to Y$ удовлетворяющий условию

$$K(x_0 + x) - K(x_0) = K'(x_0)x + \varepsilon(x),$$

где $\lim\limits_{\|x\| \to 0} \frac{\|\varepsilon(x)\|}{\|x\|} = 0$. Из дифференцируемости по Фреше оператора K в точке x_0 следует его дифференцируемость по Гато.

Пусть $K\colon \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$. Слабой производной отображения K по направлению вектора $e \in \mathbb{R}_n$ называется оператор $\frac{\partial K(x)}{\partial e} = \lim\limits_{0<\varepsilon\to 0} \frac{K(x+\varepsilon e)-K(x)}{\varepsilon}$. Если e — один из базисных векторов: $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$, то производная по направлению e_j называют частной производной $\frac{\partial K(x)}{\partial x_j} = D_j K$.

ГЛАВА II
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§10. Примеры функциональных пространств

1. Пространство $E_n = \{x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство упорядоченных последовательностей чисел над $\mathbb{P}$ с нормой $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{1/2}$. Если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то E_n — n-мерное евклидово пространство, если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то E_n — n-мерное унитарное пространство, или n-мерное гильбертово пространство;

2. Пространство $l_p^n = \{x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство последовательностей, где $1 \leq p < \infty$, $n \in N$ с нормой $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\right)^{1/p}$;

3. Пространство $l_\infty^n = \{x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство последовательностей, где $n \in N$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|\}$;

4. Пространство $l_p = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$, где $1 \leq p < \infty$, с нормой $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p\right)^{1/p}$;

5. Пространство $l_\infty = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_i |\alpha_i|$;

6. Пространство $c = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых сходящихся последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_i |\alpha_i|$;

7. Пространство $c_0 = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых сходящихся к нулю последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_i |\alpha_i|$;
8. Пространство $bv = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = |\alpha_1| + \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{i+1} - a_i| < \infty$;
9. Пространство $bv_0 = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых сходящихся к нулю последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{i+1} - a_i| < \infty$;
10. Пространство $bs = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_n \left| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \right| < \infty$;
11. Пространство $cs = \{\{\alpha_i\} | \alpha_i \in \mathbb{P}\}$ — линейное пространство числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ для которых ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ сходится с нормой $\|x\| = \sup\limits_n \left| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \right| < \infty$;
12. Пространство $B(X, \Sigma)$ равномерных пределов конечных линейных комбинаций характеристических функций множеств из Σ с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$, где X — некоторое множество, Σ — алгебра подмножеств X, f — скалярная функция, определенная на X;
13. Пространство $B(X)$ состоит из ограниченных линейных скалярных функций, определенных на X с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$;

14. Пространство $C(X)$ состоит из ограниченных непрерывных скалярных функций, определенных на X с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$. Если достигается наибольшая грань, то $\|f\| = \max\limits_{x\in X}|f(x)|$;

15. Пространство $ba(X,\Sigma)$ состоит из ограниченных аддитивных скалярных функций, определенных на X с нормой $\|\mu\| = v(\mu, X)$, где $v = \sup\sum\limits_{i=1}^{n}|\mu(E_i)|$ — полная вариация μ на X, E_i — попарно непересекающиеся множества из Σ, таких,что $E_i \subset X$;

16. Пространство $ca(X,\Sigma)$ состоит из счетно аддитивных скалярных функций, определенных на X с нормой $\|\mu\| = v(\mu, X)$. Σ — σ-алгебра подмножеств X;

17. Пространство $rca(X)$ состоит из регулярных счетно аддитивных скалярных функций множества, определенных на σ-алгебре борелевских множеств из X с нормой $\|\mu\| = v(\mu, X)$;

18. Пространство $L_p(X,\Sigma,\mu) = L_p(X,\Sigma), v(\mu)$ состоит из определенных на X μ-измеримых скалярных функций f с нормой $\|f\| = \left(\int\limits_X |f(x)|^p\mu(dx)\right)^{1/p} < \infty$, где $1 \leq p < \infty$, μ — положительная мера;

19. Пространство $L_\infty(X,\Sigma,\mu)$ состоит из существенно ограниченных относительно μ скалярных функций f с нормой $\|f\| = ess\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$;

20. Пространство $L_p(\rho) = L_p(D;\rho)$ — пространство измеримых на $D \subset \mathbb{R}_n$ функций $f(x)$ для которых $\|f\| = \left(\int\limits_D \rho(x)|f(x)|^p\mu(dx)\right)^{1/p} < \infty$, где $1 \leq p < \infty$, $\rho(x)$ —

неотрицательная функция (вес). $L_p(\rho)$ — весовое пространство Лебега является банаховым пространством, т.к. $\|f\|_{L_p(\rho)} = \|\rho^{1/p}f\|_{L_p(D)}$. Аналог неравенства Гельдера: $\int\limits_D |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_{L_p(\rho)} \cdot \|g\|_{L_q(\rho^{1-q})}$;

21. Пространство $H^\lambda = H^\lambda(D)$ содержит функции, удовлетворяющие на D условию Гельдера фиксированного порядка λ (показатель Гельдера): $|f(x_1) - f(x_2)| \le A|x_1 - x_2|$, $x_1, x_2 \in D$, A — константа. Норма в H^λ при $0 \le \lambda \le 1$ определяется равенством $\|f\| = \max\limits_{x\in D} |f(x)| + \sup\limits_{x_1\neq x_2\in D} \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|^\lambda}$, $H^0(D) = C(D)$, $H^1(D)$ — липшицевый класс, при $\lambda > 1$ $H^\lambda = \{f(x) = const\}$.

    Глобальное условие Гельдера (для бесконечного D: $|f(x_1 - x_2)| \le A\frac{|x_1-x_2|^\lambda}{(1+|x_1|)^\lambda(1+|x_2|)^\lambda}$). В этом случае норма $\|f\| = \max\limits_{x\in D} |f(x)| + \sup\limits_{x_1\neq x_2\in D} (1+|x_1|)^\lambda(1+|x_2|)^\lambda \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|^\lambda}$. H^λ — не сепарабельное пространство;

22. Пространство функций $h^\lambda = h^\lambda(D) = \{f(x)\colon \lim\limits_{x_2\to x_1} \frac{f(x_1)-f(x_2)}{|x_1-x_2|^\lambda} = 0\}$;

23. Пространство $H^\lambda(\rho) = H^\lambda(D;\rho)$ — весовое пространство Гельдера, содержит функции $f(x)$ такие, что $\rho(x)f(x) \in H^\lambda(D)$. Функции этого пространства представимы в виде $f(x) = \frac{f(x_0)}{\rho(x)}$, где $f(x_0) \in H^\lambda(D)$. Норма: $\|f\| = \|f_0\|_{H^\lambda}$. $H^\lambda(\rho)$ — не сепарабельное пространство;

24. Пространтсво $BV(E)$ состоит из всех определенных на E скалярных функций ограниченной вариации с нормой $\|f\| = |f(a+)| + v(f,E)$, где $E = [a,b]$ (или $(a,b], [a,b), (a,b)$), $a \ge -\infty, b \le +\infty$.

25. Пространтсво $NBV(E) \subset BV(E)$ состоит из всех определенных на E скалярных функций ограниченной вариации с нормой $\|f\| = v(f,E)$, для которых при любом $x_0 \in E$, $\lim\limits_{x \to x_0 + \varepsilon} f(x) = f(x_0)$ и $f(a+) = 0$;

26. Пространтсво $AC(E) \subset BV(E)$ состоит из всех определенных и абсолютно непрерывных на E скалярных функций ограниченной вариации с нормой $\|f\| = |f(a+)| + v(f,E)$. Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\sum\limits_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$ следует $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$, где (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots$ — произвольные попарно непересекающиеся подинтервалы E. Класс $AC(E)$ совпадает с классом первообразных интегрируемых по Лебегу функций $f(x) \in AC(E) \Leftrightarrow f(x) = c + \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt$, $\int\limits_a^b |\varphi(t)|\,dt < \infty$.

27. Класс $AC^n(E)$ состоит из непрерывно дифференцируемых на D функций $f(x)$ до порядка $n-1$, причем $f^{(n-1)}(x) \in AC(E)$;

28. Пространство $C^n(E)$ содержит определенные на E скалярные функции, имеющие n ограниченных непрерывных производных с нормой $\|f\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{x \in E} |f^{(i)}(x)|$, где E — замкнутый интервал, $n \in N$. Если достигается наибольшая грань, то $\|f\| = \max\limits_{x \in E} \sum\limits_{i=1}^{n} |f^{(i)}(x)|$;

29. Пространство H^λ при $\lambda > 1$: $\lambda = m + \sigma$, где $m = 0, 1, 2, \ldots,$ $0 < \sigma \le 1$, $\|f\|_{H^\lambda} = \|f\|_{C^m} + \|f\|_{H^\sigma}$, где $f(x) \in C^m(D)$ и $f^{(m)}(x) \in H^\sigma(D)$;

30. Пространство $H^{\lambda,k} = H^{\lambda,k}(D)$ содержит функции $f(x)$

для которых $f(x) \in C^m(D)$ и $|f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)| \le A|h|^\sigma \left(\ln \frac{1}{|h|}\right)^k$, $|h| < 1/2$, $k \in \mathbb{R}_+$, где $\lambda = m + \sigma$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $0 < \sigma \le 1$, с нормой $\|f\|_{H^{\lambda,k}} = \|f\|_{C^m} + \sup\limits_{x, x+h \in D,\ |h|<1/2} \frac{|f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)|}{|h|^\sigma \left(\ln \frac{1}{|h|}\right)^k}$;

31. Пространство $h^{\lambda,k} \subset H^{\lambda,k}$ содержит функции $f(x)$, для которых $\lim\limits_{h \to 0} \frac{|f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)|}{|h|^\sigma \left(\ln \frac{1}{|h|}\right)^k}$, $x + h, x \in D$, $0 < |h| < 1/2$;

32. Пространство $A(D)$ содержит ограниченные и непрерывные на замыкании открытого множества D комплексные функции, которые являются аналитическими с нормой $\|f\| = \sup\limits_{z \in D} |f(z)|$;

33. Пространство AP — линейное пространство непрерывных почти периодических функций вещественного переменного с нормой $\|f\| = \sup\limits_{-\infty < t < +\infty} |f(t)|$. Функция $f(t)$ называется почти периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $L > 0$, что каждый интервал вещественной оси длиной не меньше L содержит такую точку x, что $|f(t) - f(t + x)| < \varepsilon$ при $-\infty < t < \infty$.

34. Гильбертово пространство — линейное векторное пространство V над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, с функционалом $(\cdot, \cdot)$ определенным на $V \times V$, который удовлетворяет свойствам (см. главу I).

    Пример в E_n: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_i$,

    Пример в l_2: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \bar{\beta}_j$,

    Пример в $L_2(X, \Sigma, \mu)$: $(f, g) = \int\limits_X f(x) g(\bar{x})\, \mu(dx)$;

35. Пространство $TM(X,\Sigma,\mu)$ состоит из определенных на X вполне измеримых функций f, где μ — положительная мера. Метрикой в $TM(X,\Sigma,\mu)$ является $\rho(f,g)=|f-g|$, где $|f|=\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+arctg\,\mu(S(|f|>\alpha))\}$, $S(|f|>\alpha)=\{s\in S\colon |f(s)|>\alpha\}$;

36. Пространство s состоит из числовых последовательностей $x=\{a_i\}$ с метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$, где $|x|=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\alpha_i|}{1+|\alpha_i|}$;

37. Пространство $L_{p,\,loc}(D)$, где $p\geq 1$ содержит измеримые функции $f(x)\in L_p(K)$, где K — любой компакт в D.

38. Пространство Соболева $W_p^m(D)=\{f(x)\in L_p(D)\,|\,D^\alpha f\in L_p(D),|\alpha|\leq m\}$, где $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ — длина мультииндекса α, $m\in\mathbb{N}$, $p\in[0,\infty]$, $D^\alpha f(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}f(x)}{\partial^{\alpha_1}x_1\,\partial^{\alpha_2}x_2\ldots\partial^{\alpha_n}x_n}$. $W_p^m(D)$ — пространство, образованное пополнением пространства $\{f(x)\in C^m(\Omega)\,|\,\|f\|_{m,p}<\infty\}$, по норме $\|f\|_{m,p}=\begin{cases}\left(\sum\limits_{0\leq\alpha\leq m}\|D^\alpha f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}, & p\in[1,\infty),\\ \max\limits_{0\leq\alpha\leq m}\|D^\alpha f\|_\infty, & p=\infty.\end{cases}$. Пространство $W_p^m(D)$ полно при $1\leq p\leq\infty$, рефлексивно при $1<p<\infty$, сепарабельно при $1\leq p<\infty$ и гильбертово при $p=2$, причем $(u,v)=\sum\limits_{0\leq|\alpha|\leq m}(D^\alpha u,D^\alpha v)$.

39. Идеальные пространства

Пусть $\mathcal{M}(\Omega,\Sigma,\mu)$ — пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций на Ω, где (Ω,Σ,μ) — σ-конечная полная мера. Пространство $\mathcal{M}$ линейно, полуупорядоченно $x,y\in\mathcal{M},\ x\leq y$ если $x(t)\leq y(t)$ почти всюду на Ω. Для $x\in\mathcal{M}$ считаем $|x|=|x(t)|$. $\mathcal{M}$ — полное пространство в

метрике
$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\mu(\Omega_n)}\int\limits_{\Omega_n}\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,d\mu(t),$$
где $\Omega_n\in\Sigma,\ \Omega=\bigcup_n\Omega_n,\ \Omega_n\cap\Omega_m=\varnothing$ при $n\neq m,\ \mu(\Omega_n)\neq 0$.

Идеальным пространством (ИП) Ω называется линейное множество X в $\mathcal{M}$ такое, что из $x\in X, y\in\mathcal{M}, |y|\le|x|$ следует $y\in X$.

Носителем функции x называется множество $supp\ x=\{t\in\Omega\colon x(t)\neq 0\}$. Носитель пространства X — это наименьшее измеримое множество, вне которого все функции из X равны нулю. Носители определяются с точностью до множества нулевой меры.

Пусть Ω — носитель пространства X, обозначим $X(\Omega)$. ИП с монотонной квазинормой называется квазинормированным идеальным пространством (КНИП), причем $\|x\|=\||x|\|$. Топология КНИП метризуема и при $c>1$. Обычным образом вводятся понятия сходящейся последовательности, последовательности Коши, полноты. Полное КНИП называется квазибанаховым идеальным пространством КБИП.

40. Пространства Орлича

Классом Орлича называют множество $L_M^0=\left\{x\in\mathcal{M}(\Omega,\Sigma,\mu)\colon \int\limits_{\Omega}M(|x(\omega)|)\,d\mu<+\infty\right\}$, где $M(u)$ — N-функция, т.е. она четна и удовлетворяет условиям
$$\lim_{u\to 0}\frac{M(u)}{u}=0,\quad \lim_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u}=\infty.$$
Дополнительная к N-функции $M(u)$ определяется равенством $M^*(u)=\sup\{uv-M(v)\colon -\infty<v<+\infty\}$. $M^*(u)$ — N-

функция, причем $M^{**}(u) = M(u)$. Любая N-функция является возрастающей на $[0,\infty)$ и выполняется неравенство Юнга $|uv| \leq M(u) + M^*(v)$. N-функция удовлетворяет Δ_1 условию, если существуют такие постоянные $k > 0$ и $u_0 > 0$, что при $u, v \geq u_0$ выполняется неравенство $M(uv) \leq kM(u)M(v)$; и удовлетворяет Δ_2 условию, если $M(2u) \leq kM(u)$. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной мерой. Класс Орлича линеен, когда выполняется Δ_2 условие, при этом $L_\infty \subset L_M^0$. Для любой функции $x \in L_M^0$ имеет место интегральное неравенство Иенсена

$$M\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int\limits_\Omega x(\omega)\,d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)}\int\limits_\Omega M(x(\omega))\,d\mu.$$

Через $L_M = L_M(\Omega)$ обозначим множество классов эквивалентных функций $x \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mu)$, для каждой из которых найдется такое число $\lambda = \lambda(x) > 0$, что $\int_\Omega M\left(\frac{|x(\omega)|}{\lambda}\right) d\mu < \infty$. L_M — БИП относительно любой из эквивалентных норм: норма Орлича

$$\|x\|_O = \sup\left\{\int\limits_{\Omega |xy|\,d\mu:\ \int_\Omega M^*(|y|) \leq 1}\right\}$$

норма Люксембурга

$$\|x\|_L = \inf\left\{\lambda\colon\ \inf_\Omega M\left(\frac{|x(\omega)|}{\lambda}\right)\,d\mu \leq 1\right\},$$

причем $\|x\|_L \leq \|x\|_O \leq 2\|x\|_L$. L_M сепарабельно, если N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 условию. Для любой пары функций $u \in L_M$, $v \in L_{M^*}$ справедливо неравенство Гельдера $\left|\int_\Omega u(\omega)v(\omega)\,d\mu\right| \leq \|u\|_{L_M}\|v\|_{L_{M^*}}$, т.е. $L_M \subset L_1$.

41. Пространство Марцинкевича $M_\varphi = M_\varphi(\Omega) = \left\{x\colon \|x\|_{M_\varphi} = \sup\limits_{D\subset\Omega} \frac{\varphi(\mu(D))}{\mu(D)} \int_D |x(\omega)|\, d\omega, \right\}$ где x измеримая на Ω Φ-функция (неубывающая, определенная на $(0,\infty)$ функция, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{\lambda\to 0}\varphi(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)} = 0$). Дополнительная для $\varphi\in\Phi$ определяется равенством $\varphi^*(\lambda) = \lambda/\varphi(\lambda)\in\Phi$.

42. Пространство Лоренца — двойственное к пространству Марцинкевича, состоящее из измеримых на Ω функций x с конечной нормой $\|x\|_{\Lambda_\varphi} = \sup\{|(x,y)|\colon \|y\|_{M_{\varphi^*}} \le 1\}$. Λ_φ и M_{φ^*} — двойственные друг к другу совершенные БИП.

§11. Пространства Лебега

Пусть $p\in[1,\infty)$, $D=(a,b)\subset\mathbb{R}$, тогда множество $L_p = L_p(D)$ всех измеримых на D функций $f(x)$, для которых $\int\limits_D |f(x)|^p\,dx < \infty$ является линейным нормированным пространством с нормой $\|f\|_{L_p(D)} = \left\{\int\limits_D |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$ (выполняются все аксиомы линейного пространства и аксиомы нормы).

В случае $p=\infty$, получим $\|f\|_{L_\infty(D)} = ess\sup\limits_{x\in D}|f(x)|$, где $ess\sup|f(x)| = \inf\limits_{N}\sup\limits_{x\in D\setminus S}|f(x)|$ — существенный супремум функции $|f(x)|$, где S — множество нулевой меры. Существенным супремумом $ess\sup$ или $vrai\sup$ функции $f\colon D\to\mathbb{R}$ называется нижняя грань множества чисел a, что $f(x)\ge a, x\in D$ почти всюду, или $ess\sup f = \inf\{a\in\mathbb{R}\colon \mu(\{x\colon f(x)>a\})=0\}$. Далее $1\le p\le\infty$ две функции из $L_p(D)$ равны если они равны почти всюду.

Свойства пространства $L_p(D)$

1. неравенство Минковского

$$\|f+g\|_{L_p(D)} \leq \|f\|_{L_p(D)} + \|g\|_{L_p(D)},$$

неравенство треугольника в $L_p(D)$ (знак равенства возможен, если функции f и g линейно зависимы);

2. однородность $\|c \cdot f\|_{L_p(D)} = |c| \cdot \|f\|_{L^p(D)}$;

3. полнота пространства $L_p(D)$:

пусть $f_k \in L_p(D)$ и $\lim\limits_{k,l\to\infty} \|f_k - f_l\|_{L_p(D)} = 0$, то существует функция $f_* \in L_p(D)$, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f_*\|_{L_p(D)} = 0$;

4. неравенство Гельдера

$$\int\limits_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_{L_p(D)} \cdot \|g(x)\|_{L_q(D)},$$

где $f(x) \in L_p(D)$, $g(x) \in L_q(D)$, p и q — сопряженные числа, т.е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (при $p = 0$, $q = \infty$ и наоборот).

Обобщенное неравенство Гельдера

$$\int\limits_D \left|\prod_{i=1}^{m} f_i(x)\right| dx \leq \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L_{p_i}(D)},$$

где $f_i(x) \in L_{p_i}(D)$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$.

5. неравенства Кларксона: пусть $f_1, f_2 \in L_p(D)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тогда

1) если $1 < p \leq 2$,

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|^q_{L_p(D)} + \left\|\frac{f_1-f_2}{2}\right\|^q_{L_p(D)} \leq \left(\frac{1}{2}\|f_1\|^p_{L_p(D)} + \frac{1}{2}\|f_2\|^p_{L_p(D)}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

2) если $2 \leq p < \infty$,

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|^p_{L_p(D)} + \left\|\frac{f_1-f_2}{2}\right\|^p_{L_p(D)} \leq \frac{1}{2}\|f_1\|^p_{L_p(D)} + \frac{1}{2}\|f_2\|^p_{L_p(D)};$$

6. если $1 \le p_1 < p_2$, то $L_{p_2}(D) \subset L_{p_1}(D)$ и

$$\|f\|_{L_{p_1}(D)} \le C \cdot \|f\|_{L_{p_2}(D)}, \textit{ где } C = (\mu(D))^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}.$$

7. теорема Фубини (изменение порядка интегрирования):

   пусть $D_1 = (a,b)$, $D_2 = (c,d)$, где $-\infty \le a < b \le \infty$, $-\infty \le c < d \le \infty$ и пусть $f(x,y)$ — измеримая на $D_i \times D_2$ функция. Если сходится хотя бы один из интегралов

$$\int\limits_{D_1} dx \int\limits_{D_2} f(x,y)\,dy, \quad \int\limits_{D_2} dy \int\limits_{D_1} f(x,y)\,dx, \quad \iint\limits_{D_1\times D_2} f(x,y)\,dxdy,$$

   то они совпадают.

8. формула Дирихле (частный случай теоремы Фубини):

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^x f(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_y^b f(x,y)\,dx.$$

9. обобщенное неравенство Минковского:

$$\left\{\int\limits_{D_1} dx \left|\int\limits_{D_2} f(x,y)\,dy\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le \int\limits_{D_2} dy \left\{\int\limits_{D_1} |f(x,y)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

10. непрерывность в целом:

    пусть $f(x) \in L_p(D)$, $0 \le p < \infty$, тогда

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_D |f(x+h) - f(x)|^p\,dx = 0.$$

11. класс $C_0^\infty(D)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в D функций плотен в $L^p(D)$, $0 \le p < \infty$.

12. предельный переход под знаком интеграла:
$$\lim_{h\to 0}\int_D f(x,h)\,dx = \int_D \lim_{h\to 0} f(x,h)\,dx,$$
где существует суммируемая мажоранта $F(x)$ такая, что $|f(x,h)| \le F(x) \in L^1(D)$;

13. последовательность $\{f_k\} \in L_p(D)$ слабо сходится к $f \in L_p(D)$, если $\int\limits_D f_k\varphi\,dx = \int\limits_D f\varphi\,dx$, для любых $\varphi \in L_q(D)$.

Важным подпространством пространства $L_\infty(D)$ является пространство $C(D)$ — пространство равномерно непрерывных на D функций с нормой $\|f\|_{C(D)} = \sup\limits_{x\in D}|f(x)|$. Заметим, что равномерно непрерывная функция будет непрерывной, если D — компакт.

§12. Анизотропные пространства Лебега

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i \ge 1$. Рассмотрим множество измеримых функций $L_{\mathbf{p}}(D)$, где $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, для которых существует и конечен интеграл
$$\left(\int\limits_{a_n}^{b_n}\left(\int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dt_{n-1}\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dt_n\right)^{\frac{1}{p_n}},$$
где D — параллелепипед в $\mathbb{R}_n$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Множество $L_{\mathbf{p}}(D)$ $(1 \le p \le \infty)$ удовлетворяет всем аксиомам нормы и является полным, т.е. является банаховым функциональным пространством с нормой $L_{\mathbf{p}}(D) = \Big\|\dots\|f\|_{L_{p_1}(D_1)}\dots\Big\|_{L_{p_n}(D_n)} =$
$$\left(\int\limits_{a_n}^{b_n}\left(\int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dt_{n-1}\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dt_n\right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Заметим, что при равных компонентах вектора $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) = (p, p, \ldots, p)$ анизотропное пространство обратится в пространство Лебега $L_{\mathbf{p}}(D) = L_p(D)$:

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int\limits_{a_n}^{b_n}\left(\int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \ldots \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} |f(t)|^p \, dt_1\right)^{\frac{p}{p}} \ldots \, dt_{n-1}\right)^{\frac{p}{p}} dt_n\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{a_n}^{b_n}\int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \ldots \int\limits_{a_1}^{b_1} |f(t)|^p \, dt_1 \ldots dt_{n-1} dt_n\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{D} |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_p(D)}.$$

Для любой измеримой функции $f(x)$ и любого $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \infty$, ($\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1), \infty = (\infty, \infty, \ldots, \infty)$) справедливо равенство

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \sup_{\|g\|_{L_{\mathbf{q}}(D)}=1} \int\limits_{D} |f(x)g(x)| \, dx,$$

где $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ — сопряженный для $\mathbf{p}$ мультииндекс, т.е. $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1,\ i = \overline{1, n}$.

Все рассмотренные ранее свойства пространства $L_p(D)$ справедливы и для анизотропного пространства Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$.

Порядок, в котором берутся нормы в анизотропном пространстве Лебега по отдельным переменным, является существенным так как даже в простейшем случае

$$\left(\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1} \, dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \neq \left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2} |f(t)|^{p_2} \, dt_1\right)^{\frac{p_1}{p_2}} dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

а именно при $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ имеет место неравенство

$$\left(\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}|f(t)|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \le \left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2}|f(t)|^{p_2}\,dt_1\right)^{\frac{p_1}{p_2}}dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}} \tag{12.1}$$

или при $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$, $\|f\|_{L_{(p_1,p_2)}(D_1\times D_2)} \le \|f\|_{L_{(p_2,p_1)}(D_2\times D_1)}$.

Рассмотрим ранжирование некоторых компонентов мультииндекса $\mathbf{p}$ и соответствующих перестановок переменных интегрирования, допуская, что координаты аргумента функции неизменны, расположены в произвольном порядке, как и соответствующие этим переменным компоненты мультииндекса $\mathbf{p}$. (в этом принципиальное отличие от подхода Романовского, предполагающего перестановку координат аргумента функции.)

Пусть $D_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{R}_1$ и $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n \in \mathbb{R}_n$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$ и пусть мультииндекс $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ состоит из действительных чисел p_i, $1 < p_i < \infty$. Предположим, что $f = f(t) \in L_{\mathbf{p}}(D)$. Введем обозначения

$$f_0 = f$$

$$f_1 = \left(\int\limits_{D_1}|f|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\int\limits_{D_1}|f_0|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$f_2 = \left(\int\limits_{D_2}\left(\int\limits_{D_1}|f|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} = \left(\int\limits_{D_2}f_1^{p_2}\,dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$f_i = \left(\int\limits_{D_i}\ldots\left(\int\limits_{D_1}|f|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\ldots dt_i\right)^{\frac{1}{p_i}} = \left(\int\limits_{D_i}f_{i-1}^{p_i}\,dt_i\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$f_n = \|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int\limits_{D_n} f_{n-1}^{p_n}\, dt_n\right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Выражение f_i будем называть *i-ым уровнем анизотропной $L_{\mathbf{p}}$-нормы функции f*. Таким образом

f_0 — нулевой уровень (совпадает с функцией),

$f_1 = \left(\int\limits_{D_1} |f|^{p_1}\, dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\int\limits_{D_1} |f_0|^{p_1}\, dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}}$ — первый уровень,
и т.д.,

$f_i = \left(\int\limits_{D_i} f_{i-1}^{p_i} dt_i\right)^{\frac{1}{p_i}}$ — i-ый уровень,
и, наконец,

$f_n = \left(\int\limits_{D_n} f_{n-1}^{p_n}\, dt_1\right)^{\frac{1}{p_n}}$ —n-ый уровень, равный полной $L_{\mathbf{p}}$-норме функции f.

Как видим, в этих обозначениях любой i-ый уровень просто выражается через $(i-1)$-ый уровень полной нормы. Этим мы воспользуемся для доказательства следующего утверждения.

Лемма 1.12.1. (о частичном ранжировании $L_{\mathbf{p}}$-нормы [3]). *Предположим, что $p_m = \max\{p_i, p_{i+1}, \dots, p_{m-1}, p_m\}$. Тогда для любого $1 \le i < m$ выполняется неравенство*

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = f_n \le \left\{\int\limits_{D_n} \dots \left[\int\limits_{D_i} \left(\int\limits_{D_m} f_{i-1}^{p_m}\, dt_m\right)^{\frac{p_i}{p_m}} dt_i\right]^{\frac{p_{i+1}}{p_i}} \dots dt_n\right\}^{\frac{1}{p_n}}. \tag{12.2}$$

Другими словами — любой из уровней полной нормы может определятся наибольшей степенью p_m в наборе чисел $(p_i, p_{i+1}, \ldots, p_m)$ при этом исходная $L_{\mathbf{p}}$-норма функции окажется не больше частично ранжированной нормы.

□ Для любого $m < n$ можем написать полную $L_{\mathbf{p}}$-норму функции f в виде

$$f_n = \left\{ \int\limits_{D_n} \ldots \left[\int\limits_{D_m} \left(\int\limits_{D_{m-1}} f_{m-2}^{p_{m-1}}\, dt_{m-1} \right)^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} dt_m \right]^{\frac{p_{m+1}}{p_m}} \ldots\, dt_n \right\}^{\frac{1}{p_n}} .$$

Отметим, что здесь наименьшее $m = 2$ при этом правая часть неравенство (12.2) будет иметь внутренним интегралом выражение

$$f_1 = \left(\int\limits_{D_1} |f_0|^{p_1}\, dt_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\int\limits_{D_1} |f|^{p_1}\, dt_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} ,$$

являющееся первым уровнем полной нормы; но тогда неравенство (12.2) окажется равенством, которое заведомо справедливо и, поэтому, далее считаем, что $m > 2$.

По предположению $1 < p_{m-1} \le p_m < \infty$. Воспользуемся неравенством (12.1) для соседних уровней $m-1$ и m. В результате получим

$$\left[\int\limits_{D_m} \left(\int\limits_{D_{m-1}} f_{m-2}^{p_{m-1}}\, dt_{m-1} \right)^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} dt_m \right]^{\frac{p_{m+1}}{p_m}} \le$$

$$\le \left[\int\limits_{D_{m-1}} \left(\int\limits_{D_m} f_{m-2}^{p_m}\, dt_m \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} dt_{m-1} \right]^{\frac{p_{m+1}}{p_{m-1}}} .$$

Тогда

$$f_n \le \left\{ \int\limits_{D_n} \dots \left[\int\limits_{D_{m-1}} \left(\int\limits_{D_m} f_{m-2}^{p_m} \, dt_m \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} dt_{m-1} \right]^{\frac{p_{m+1}}{p_{m-1}}} \dots dt_n \right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

Как видим, мы поменяли порядок интегрирования по переменным t_{m-1}, t_m в выражении полной нормы f_n. При этом интегрирование по t_m оказалось на уровень ниже т.е. на $(m-1)$-ом уровне. А т.к. $p_m = \max\{p_i, p_{i+1}, \dots, p_{m-1}, p_m\}$, то данный процесс последовательной попарной перестановки порядка интегрирования в выражении полной нормы f_n можно продолжить до любого уровня $i < m$, если только известно, что $p_i \le p_m$. При этом интеграл по переменной t_m окажется на месте i-го интеграла (по переменной t_i):

$$f_n \le \left\{ \int\limits_{D_n} \dots \left[\int\limits_{D_i} \left(\int\limits_{D_m} f_{i-1}^{p_m} \, dt_m \right)^{\frac{p_i}{p_m}} dt_i \right]^{\frac{p_{i+1}}{p_i}} \dots dt_n \right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

Таким образом получено неравенство (12.2). ■

Теорема 1.12.1. (о полном ранжировании $L_{\mathbf{p}}$-нормы) *Пусть функция $f = f(t_1, t_2, \dots, t_n) \in L_{\mathbf{p}}(D)$ и $D = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$. И пусть $\mathbf{p}^* = (p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_n})$ — мультииндекс, полученный ранжированием мультииндекса $\mathbf{p}$: $p_{\alpha_i} \ge p_{\alpha_{i+1}}$. Тогда*

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left\{ \int\limits_{D_n} \left(\int\limits_{D_{n-1}} \dots \left(\int\limits_{D_1} |f|^{p_1} \, dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dt_{n-1} \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dt_n \right\}^{\frac{1}{p_n}} \le$$

$$\leq \left\{ \int\limits_{D_{\alpha_n}} \left(\int\limits_{D_{\alpha_{n-1}}} \ldots \left(\int\limits_{D_{\alpha_1}} |f|^{p_{\alpha_1}} \, dt_{\alpha_1} \right)^{\frac{p_{\alpha_2}}{p_{\alpha_1}}} \ldots \, dt_{\alpha_{n-1}} \right)^{\frac{p_{\alpha_n}}{p_{\alpha_{n-1}}}} dt_{\alpha_n} \right\}^{\frac{1}{p_{\alpha_n}}},$$

где $D^* = (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \times \ldots \times (a_{\alpha_n}, b_{\alpha_n})$. *Т.е.*

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|f\|_{L_{\mathbf{p}^*}(D^*)} \,. \tag{12.3}$$

$\square$ Пусть $p_{\alpha_1} = \max\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Тогда из леммы о частичном ранжировании $L_{\mathbf{p}}(D)$-нормы вытекает неравенство (12.3), где интеграл по t_{α_1} оказывается первым уровнем $L_{\mathbf{p}}(D)$-нормы функции f. Аналогичное действие производим с интегралами над первым уровнем f_{α_1} полной $L_{\mathbf{p}}(D)$-нормы. Получим неравенство, где первые два уровня $L_{\mathbf{p}}(D)$-нормы занимают интегралы по t_{α_1} и t_{α_2}. Продолжая это действие, в конечном итоге получим неравенство (12.3). $\blacksquare$

Неравенство Гельдера для ранжированной $L_{\mathbf{p}}(D)$-нормы содержит

Теорема 1.12.2. *Пусть* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i > 1$ *и* $\mathbf{q}$ *сопряженный мультииндекс. И пусть* $\varphi \in L_{\mathbf{p}}(D)$ *и* $\psi \in L_{\mathbf{q}}$. *Тогда*

$$\int\limits_D |\varphi(t) \ \psi(t)| \ dt \leq \|\varphi\|_{L_{\mathbf{p}^*}(D^*)} \ \|\psi\|_{L_{\mathbf{q}^*}(D^*)} \,, \tag{12.4}$$

где $\mathbf{p}^*$ *— мультииндекс, ранжированный по невозрастанию, а* $\mathbf{q}^*$ *— мультииндекс, ранжированный по неубыванию.*

$\square$ Очевидно

$$\int\limits_D |\varphi(t) \ \psi(t)| \ dt = \int\limits_{D^*} |\varphi(t) \ \psi(t)| \ dt \,.$$

Здесь переменные интегрирования в правой части равенства расставлены в соответствии с ранжированием мультииндекса $\mathbf{p}$. Теперь неравенство (12.4) вытекает из неравенства Гельдера для анизотропных норм:

$$\int\limits_{D^*} |\varphi(t)\ \psi(t)|\ dt \le \|\varphi\|_{L_{\mathbf{p}^*}(D^*)}\ \ \|\psi\|_{L_{\mathbf{q}^*}(D^*)}\,,$$

При этом, в связи с выполнением условия сопряжения параметров мультииндексов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и сопряжения мультииндексов $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$, получаем два неравенства

$$\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_{\alpha_i}} \ge 0\,, \quad \frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_{\alpha_i}} \le 0\,,$$

из которых следует, что мультииндексы $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$ получены ранжированием мультииндексов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ в противоположных смыслах. ■

§13. Квазинормированные пространства

Пусть $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций на Ω, где (Ω, Σ, μ) — σ-конечная полная мера. Пространство $\mathcal{M}$ линейно, полуупорядоченно $x, y \in \mathcal{M},\ x \le y$ если $x(t) \le y(t)$ почти всюду на Ω. Для $x \in \mathcal{M}$ считаем $|x| = |x(t)|$. $\mathcal{M}$ — полное пространство в метрике

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu(\Omega_n)} \int\limits_{\Omega_n} \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|}\, d\mu(t),$$

где $\Omega_n \in \Sigma,\ \Omega = \bigcup_n \Omega_n,\ \Omega_n \cap \Omega_m = \varnothing$ при $n \ne m,\ \mu(\Omega_n) \ne 0$.

Идеальным пространством (ИП) Ω называется линейное множество X в $\mathcal{M}$ такое, что из $x \in X, y \in \mathcal{M}, |y| \le |x|$ следует $y \in X$.

Носителем функции x называется множество $supp\ x = \{t \in \Omega\colon x(t) \ne 0\}$. Носитель пространства X — это наименьшее измеримое множество, вне которого все функции из X равны нулю. Носители определяются с точностью до множества нулевой меры.

Напомним, что квазинормой на V, называется неотрицательный функционал $\| \cdot \|$, сопоставляющий каждому $x \in V$ число $\|x\| \geq 0$ такое, что

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$, θ — почти всюду нулевая функция;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

3. $\|x + y\| \leq c(\|x\| + \|y\|)$.

Квазинорма $\| \cdot \|$ монотонна, если $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$. Квазинорма задает топологию на X с базисом окрестностей вида $\{x \in X \colon \|x\| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$. При $c = 1$ квазинорма является нормой, где метрика $d(x, y) = \|x - x_0\|$ определяет топологию.

Пусть Ω — носитель пространства X, обозначим $X(\Omega)$. ИП с монотонной квазинормой называется квазинормированным идеальным пространством (КНИП), причем $\|x\| = \||x|\|$. Топология КНИП метризуема даже при $c > 1$. Обычным образом вводятся понятия сходящейся последовательности, последовательности Коши, полноты. Полное КНИП называется квазибанаховым идеальным пространством КБИП.

Свойства КНИП X

1. сходящаяся по квазинорме к $x \in X$ последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к x и по мере;

2. каждая последовательность Коши $\{x_n\} \subset X$ сходится по мере к функции $x \in \mathcal{M}$, т.е. каждое КНИП X непрерывно вложено в пространство $\mathcal{M}$, а каждое ограниченное по квазинорме

множество $E \subset X$ ограничено в линейном топологическом пространстве $\mathcal{M}$;

3. если последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к x по квазинорме, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, неотрицательная функция $r \in X$ и числовая последовательность $\{\varepsilon_k\} \downarrow 0$ такие, что $|x_{n_k} - x| < \varepsilon_k r$;

4. если $0 \leq x_n \uparrow$ — последовательность Коши в X, то $\{x_n\}$ сходится к $x \in X$ по квазинорме и существует $x = \sup x_n \in X$.

Квазинорма в КНИП X порядково непрерывна, если $0 \leq x_n \downarrow \Rightarrow \|x_n\| \to 0$; монотонно полна, если $0 \leq x_n \uparrow$ и $\|x_n\| \leq a < \infty \Rightarrow \exists \sup x_n \in X$; порядково полунепрерывна, если $0 \leq x_n \uparrow x \in X \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$. Если квазинорма порядково непрерывна, то множество $\{y = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{E_k} \colon E_k \in \Sigma, E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j), \chi_{E_k} \in X, k = 1, 2, \ldots\}$ в КНИП X. Если квазинорма монотонно полна в КНИП X, то это КБИП X. Квазинорма порядково полунепрерывна в КНИП X тогда и только тогда, когда для кажной последовательности $\{x_n\} \in X$, сходящейся по мере к $x \in X$, выполнено неравенство $\|x\| \leq \underline{\lim} \|x_n\|$. Единичный шар $B_X = \{x \in X \colon \|x\| \leq 1\}$, где X — КНИП с монотонной порядково полунепрерывной квазинормой, замкнут в $\mathcal{M}$, т.е. если последовательность $\{x_n\} \subset B_X$ сходиться по мере к $x \in X$, то $x \in B_X$. $L^p([0,1])$ $(0 < p < 1)$ — ненормируемое КБИП с порядково непрерывной, монотонной и порядково полунепрерывной квазинормой.

КНИП X называется почти совершенным если квазинорма порядково полунепрерывна; совершенное, если кавазинорма монотонна и порядково полунепрерывна; правильно, если порядково непрерывна; вполне правильно, если порядково непрерывна и монотонна.

Квазинорма абсолютно непрерывна, если $\lim\limits_{n\to\infty}\|\chi_{\Omega_n}x\| = 0$ или $\lim\limits_{\mu(D)\to 0}\|\chi_D x\| = 0$ $(\mu(\Omega)<\infty, D\subset\Omega, D\in\Sigma)$, где $\{\Omega_n\}$ — убывающая последовательность измеримых множеств с пустым пересечением, χ_{Ω_n} — характеристическая функция множества $\Omega_n\subset\Omega$.

Множество
$E\subset X$ абсолютно ограниченно, если $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in E}\|\chi_{\Omega_n}x\| = 0$ или $\lim\limits_{\mu(D)\to 0}\sup\limits_{x\in E}\|\chi_D x\| = 0$ $(\mu(\Omega)<\infty, D\subset\Omega, D\in\Sigma)$, где $\{\Omega_n\}$ — убывающая последовательность измеримых множеств с пустым пересечением. В правильном КБИП $X = X(\Omega)$ сходимость $x_n\to x$ по квазинорме равносильна сходимости $x_n\to x$ по мере и абсолютной ограниченности множества $\{x_n\}$. Множество E в правильном КБИП X компактно тогда и только тогда, когда оно компактно по мере и абсолютно ограничено.

Пусть $X = X(\Omega)$ и $Y = Y(\Omega)$ — КБИП. $Y/X = \{c\colon \forall x\in X,\ cx\in Y,\ \|c\|_{Y/X} = \sup\{\|cx\|_Y\colon \|x\|\leq 1\}\}$, где c — измеримые на Ω функции. Y/X — КБИП. Двойственным к КИП $Z = Z(\Omega)$ пространством называется пространство $Z'(\Omega) = \left\{f\colon suppf\subset\Omega, \forall z\in Z, \|f\|_{Z'} = \sup\left\{|(f,z)| = \left|\int\limits_\Omega f(t)z(t)\,d\mu\right|\colon \|z\|_Z\leq 1\right\}<\infty\right\}$.

Пусть $u_0(t)\in\mathcal{M}(\Omega,\Sigma,\mu)$ — неотрицательная измеримая функция. Пространства $Eu_0 = \{x(t)\colon \|x\|_{Eu_0} = \inf\{\lambda\colon |x|\leq\lambda u_0\}<\infty\}$, где $x(t)$ — измеримые на Ω функции, и $E'u_0 = \{x(t)\colon \|x\|_{E'u_0} = \int\limits_\Omega |x(t)|u_0(t)\,d\mu\}$ совершенные, двойственные друг к другу пространство, причем $E'u_0$ — правильное.

Операции пересечения и суммы КНИП определяются следующим образом:

1. $X_1 \cap X_2 = \{x \in X_1 \cap X_2 \colon \|x\|_{X_1 \cap X_2} = \max\{\|x\|_{X_1}, \|x\|_{X_2}\} < \infty\}$;

2. $X_1 + X_2 = \{x = x_1 + x_2, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \colon \|x\|_{X_1 + X_2} = \inf\{\|x_1\|_{X_1} + \|x_1\|_{X_2}\} < \infty\}$.

Пусть T и S — заданные множества с выделенными в них σ-алгебрами $\Sigma(T)$ и $\Sigma(S)$, на которых заданы полные σ-конечные и счетно-аддитивные меры μ и ν, $\mu \times \nu$ — произведение этих мер, определенное на произведении $\Sigma(T) \times \Sigma(S)$ σ-алгебр $\Sigma(T)$ и $\Sigma(S)$, $\mathcal{M}(T \times S)$ — пространство измеримых на $T \times S$ функций. Пусть $X = X(T)$ и $Y = Y(S)$ — КНИП. Пространством со смешанными квазинормами называется пространство $Y[X]$ всех измеримых по совокупности переменных функций $x(t, s)$ на $T \times S$, удовлетворяющих условиям:

1. почти при всех s функция $x(\cdot, x) \in X$;

2. $\|x(\cdot, s)\|_X \in Y$.

В $Y[X]$ вводится квазинорма $\|x\|_{Y[X]} = \|\|x(\cdot, s)\|_X\|_Y$. $Y[X]$ — КНИП, т.к. квазинорма монотонна. Пусть $Y(X)$ — пространство ν измеримых вектор-функций $x(s)$ со значениями в X таких, что $x \to \|x(s)\|_X \in Y$. $\|x\|_{Y(X)} = \|x\|_{Y[X]}$, т.е. $Y(X)$ изометрически вкладывается в $Y[X]$ и совпадает при отождествлении элементов и если X, Y — порядково непрерывны.

Важнейшим примером пространства со смешанными квазинормами является пространство $L_{\mathbf{p}}$, где $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $(0 < p_1, p_2 \leq \infty)$. Оно состоит из измеримых на $T \times S$ функций $x(t, s)$, для которых конечна квазинорма $\|x\|_{L_{\mathbf{p}}} = \|\|x(\cdot,s)\|_{L_{p_1}}\|_{L_{p_2}}$, где

$$\|z\|_{L_{p_i}} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\Omega} |z(\omega)|^{p_i}\, d\omega\right)^{1/p_i}, & 0 < p_i < \infty \\ ess \sup |z(\omega)|, & p_i = \infty. \end{cases}$$

При $p_1, p_2 \geq 1$ $L_{\mathbf{p}}$ — БИП. Этот случай более подробно рассмотрен в предыдущем параграфе, при $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ в многомерном пространстве, такие пространства называются анизотропными пространствами Лебега. Если хотя бы одно из чисел $p_i < 1$, то $L_{\mathbf{p}}$ — КНИП, топология в котором определяется метрикой

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_{L_{\mathbf{p}}}^{p_2}, & 0 < p_2 \leq 1, p_1 \geq p_2, \\ \|x-y\|_{L_{\mathbf{p}}}^{p_1}, & 0 < p_2 \leq 1, 0 < p_1 < p_2, \\ \|x-y\|_{L_{\mathbf{p}}}^{p_2}, & 0 < p_1 \leq 1, p_1 \geq p_2 > 0, \\ \|x-y\|_{L_{\mathbf{p}}}^{p_1}, & 0 < p_1 \leq 1, p_1 < p_2. \end{cases}$$

В КНИП $L_{\mathbf{p}}$ квазинорма абсолютна непрерывна и обладает свойствами порядковой непрерывности и монотонности при $0 < p_1, p_2 < \infty$; и не абсолютно непрерывна, но обладает свойствами монотонности и порядковой полунепрерывности, если хотя бы одно $p_i = \infty$. $L_{\mathbf{p}}$ — КБИП т.к. квазинорма монотонна.

ГЛАВА III
ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

§14. Частно-интегральные операторы

Частные интегралы (далее примем обозначение ЧИ) в $\mathbb{R}_n$ будем изучать в следующем виде [1, 13, 14, 15]

$$(K_\alpha^{(m)}u)(x) = \int\limits_{D_\alpha^{(m)}} k_\alpha(x;t_\alpha)\; u(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)\, dt_\alpha, \quad 1 \le m < n\,,$$

где t_α переменные интегрирования частного интеграла, $x_{\bar\alpha}$ — (n-m) мерный вектор, номера координат которого не совпадают с номерами переменных интегрирования t_α и

$$D_\alpha^{(m)} = D_{\alpha_1}^{(1)} \times \ \ldots \ \times D_{\alpha_m}^{(1)} = (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \times \ldots \times \ (a_{\alpha_m}, b_{\alpha_m})$$

— m-мерный параллелепипед с гранями параллельными координатным плоскостям.

Вначале рассмотрим самые простые способы определения многомерных линейных частно-интегральных операторов (далее примем сокращения — ЛЧИ-операторов). Начнем с двумерных. Такие операторы определены в [7], в виде суммы операторов

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + K_3,$$

действие каждого из них на функцию $u = u(x),\ x = (x_1, x_2)$ определено выражениями

$$K_0 \ : \quad (K_0u)(x) = k_0(x)u(x), \tag{14.1}$$

$$K_1 \ : \quad (K_1u)(x) = \int\limits_{D_1} k_1(x,t_1)u(t_1,x_2)\,dt_1, \tag{14.2}$$

$$K_2 : \quad (K_2u)(x) = \int\limits_{D_2} k_2(x, t_2)u(x_1, t_2)\, dt_2, \tag{14.3}$$

$$K_3 : \quad (K_{1,2}u)(x) = \iint\limits_{D_{1,2}} k_{1,2}(x; t_1, t_2)u(t_1, t_2)\, dt_1dt_2, \tag{14.4}$$

где функция $u = u(x)$ определена на прямоугольнике конечных размеров $D_{1,2} = D_1 \times D_2 = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, нижний индекс показывает порядок переменных интегрирования в частном интеграле (вообще говоря, такой порядок может быть различным).

Как видим, здесь оператор K_0 — оператор умножения на функцию (не интегральный, и не оператор с частными интегралами), K_1, K_2 — ЧИ-операторы, K_3 — интегральный оператор, но не ЧИ-оператор.

Теперь приведем пример трехмерного ЛЧИ-оператора. Также как в предыдущем случае в общем виде он представляет собой сумму оператора умножения на функцию, шесть ЧИ-операторов и интегрального оператора:

$$\begin{aligned}(Ku)(x) = (K_0u)(x) + (K_1u)(x) + (K_2u)(x) + (K_3u)(x) +\\ + (K_4u)(x) + (K_5u)(x) + (K_6u)(x) + (K_7u)(x),\end{aligned} \tag{14.5}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3$, а

$$\begin{aligned}
K_0 :& \qquad (K_0u)(x) = k_0(x)\, u(x),\\
K_1 :& \qquad (K_1u)(x) = \int\limits_{D_1} k_1(x; t_1)\ u(t_1, x_2, x_3)\, dt_1,\\
K_2 :& \qquad (K_2u)(x) = \int\limits_{D_2} k_2(x; t_2)\ u(x_1, t_2, x_3)\, dt_2,\\
K_3 :& \qquad (K_3u)(x) = \int\limits_{D_3} k_3(x; t_3)\ u(x_1, x_2, t_3)\, dt_3,\\
K_4 :& \qquad (K_{1,2}u)(x) = \iint\limits_{D_{1,2}} k_{1,2}(x; t_1, t_2)\ u(t_1, t_2, x_3)\, dt_1dt_2,
\end{aligned}$$

$$K_5: \qquad (K_{1,3}u)(x) = \iint\limits_{D_{1,3}} k_{1,3}(x; t_1, t_3)\ u(t_1, x_2, t_3)\, dt_1 dt_3,$$
$$K_6: \qquad (K_{2,3}u)(x) = \iint\limits_{D_{2,3}} k_{2,3}(x; t_2, t_3)\ u(x_1, t_2, t_3)\, dt_2 dt_3,$$
$$K_7: \qquad (K_{1,2,3}u)(x) = \iiint\limits_{D_{1,2,3}} k_{1,2,3}(x; t)\ u(t)\, dt_1 dt_2 dt_3.$$

Здесь интегрирование происходит по интервалам

$(a_i, b_i),\ \ i = \{1,\ 2,\ 3\}$ и областям

$D_{1,2,3} = D_1 \times D_2 \times D_3 = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3),$

$D_{1,2} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, $D_{1,3} = (a_1, b_1) \times (a_3, b_3)$, $D_{2,3} = (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$.

При этом функция $u{=}u(x)$ определена на параллелепипеде $D^{(3)}_{1,2,3}$. Как видим, здесь оператор K_0 — не интегральный и не ЧИ, $K_1, K_2, K_3, K_{1,2}, K_{1,3}, K_{2,3}$ — ЧИ-операторы, $K_{1,2,3}$ — интегральный оператор.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$ размерности $n > 3$ мы используем следующее определение частного интеграла:

$$(K_\alpha u)(x) = \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha)\, u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)\, dt_\alpha, \tag{14.6}$$

где α — мультииндекс, который включает в себя некоторые m $(0 \le m \le n)$ натуральных чисел из $1, 2, \ldots, n$. $\bar{\alpha}$ — дополняющий до $1, 2, \ldots, n$ мультииндекс. Одна из особенностей этого обозначения заключается в следующем. Подстрочечные индексы α и $\bar{\alpha}$ представляют собой наборы номеров переменных, расположенных в порядке возрастания, но в этих наборах возможны пропуски, например (1,3,5,6,7, …) . Но при этом координаты вектора $(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$ содержат номера переменных подряд и без пропусков. Например, если $\alpha = 2$, то $(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) = (x_1, t_2, x_3, x_4 \ldots, x_n)$.

ЛЧИ-оператор в $\mathbb{R}_n$, $n > 3$ будет обозначен следующей суммой [16]

$$K = \sum_{\alpha} K_\alpha, \tag{14.7}$$

здесь количество слагаемых K_α при данном и фиксированном m равно числу сочетаний C_n^m, а размерность мультииндекса α меняется от 1 до числа m. Если размерность m равна n, то соответствующее $\alpha = (1, 2, \ldots, n)$, а соответствующий этому индексу оператор представляет собой интегральный оператор

$$(K_\alpha u)(x) = (K_{1,2,\ldots,n} u)(x) = \int\limits_D k_{1,2,\ldots,n}(x;t)\ u(t)\,dt.$$

Если размерность m равна 0, то соответствующее $\alpha = \varnothing$, а соответствующий этому индексу оператор представляет собой оператор умножения на функцию

$$(K_\alpha u)(x) = (K_0 u)(x) = k_0(x)\ u(x).$$

§15. Частно-интегральные операторы в пространствах Лебега

Вначале ответим на вопрос, каким образом проявляется анизотропность функций при работе с ЧИ [1]. Приведем простой пример на основе частного интеграла по первой переменной в $\mathbb{R}_2$

$$(K_1 u)(x) = \int\limits_{D_1} k_1(x;t_1)\, u(t_1, x_2)\, dt_1.$$

Применив неравенство Гельдера с показателями $p,\ q\ :\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, получим

$$|(K_1 u)(x)| \le \left(\int\limits_{D_1} |k_1(x;t_1)|^q\, dt_1\right)^{1/q} \left(\int\limits_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p\, dt_1\right)^{1/p}.$$

Отсюда

$$\|K_1 u\|_{L_p(D)} \leq \left(\int\limits_D \left(\int\limits_{D_1} |k_1(x;t_1)|^q \, dt_1 \right)^{p/q} \int\limits_{D_1} |u(t_1,x_2)|^p \, dt_1 \; dx \right)^{1/p} .$$

Как видим, если бы функция u не зависела от x_2 (в этом случае это просто интегральный оператор), то мы получили бы нужный результат

$$\|K_1 u\|_{L_p(D)} \leq \|k_1\|_{L_q\left(D_1; L_p(D_{1,2})\right)} \; \|u\|_{L_p(D_1)},$$

в котором от ядра k_1 уже требуется принадлежность анизотропному классу Лебега $L_{\mathbf{r}}(D_1, D_{1,2})$ при $\mathbf{r} = (q,p)$.

Если же функция u все же зависит от x_2, то необходимо вновь применить неравенство Гельдера. Тогда имеем

$$\|K_1 u\|_{L_p(D)} = \left(\int\limits_D \left| \int\limits_{D_1} k_1(x;t_1)\, u(t_1,x_2)\, dt_1 \right|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_D \left(\int\limits_{D_1} |k_1(x;t_1)|^q \, dt_1 \right)^{p/q} \int\limits_{D_1} |u(t_1,x_2)|^p \, dt_1 \; dx \right)^{1/p} .$$

Здесь внешний интеграл берется по области $D = D_1 \times D_2$, а Функция u не зависит от x_1, поэтому, предположив, что двойной интеграл равен повторному (что, вообще говоря, не умоляет общности рассуждений), мы получим

$$\|K_1 u\|_{L_p(D)} \leq \left[\int\limits_{D_2} \int\limits_{D_1} |u(t_1,x_2)|^p \, dt_1 \; \times \right.$$

$$\times\left(\int\limits_{D_1}\left(\int\limits_{D_1}|k_1(x;t_1)|^q\,dt_1\right)^{p/q}dx_1\right)\,dx_2\Bigg]^{1/p}.$$

Теперь к внешнему интегралу по D_2 применим неравенство Гельдера с теми же показателями $p,\ q\ :\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. В результате имеем неравенство

$$\|K_1u\|_{L_p(D)}\le\left[\int\limits_{D_2}\left(\int\limits_{D_1}|u(t_1,x_2)|^p\,dt_1\right)^{p^2/p}dx_2\right]^{\frac{1}{p^2}}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{D_2}\left(\int\limits_{D_1}\left(\int\limits_{D_1}|k_1(x;t_1)|^q\,dt_1\right)^{p/q}dx_1\right)^{pq/p}dx_2\right]^{1/pq}.$$

Определение анизотропной нормой в $\mathbb{R}_2$, $\mathbf{r}=(r_1,r_2)$ следующее

$$\|f\|_{L_{\mathbf{r}}}(\varnothing)=\left[\int\limits_{D_2}\left(\int\limits_{D_1}|f|^{r_1}\,dx_1\right)^{r_2/r_1}dx_2\right]^{1/r_2}.$$

Воспользуемся этим определением, тогда предыдущее неравенство примет вид

$$\|K_1u\|_{L_p(D)}\le\|k_1\|_{L_{(q,p,pq)}(D_1,D_1,D_2)}\ \|u\|_{L_{(p,p^2)}(D_1,D_2)}\,.$$

Как видим, чтобы действие такого частного интеграла оказалось ограниченным, надо потребовать от ядра K и функции u принадлежности классу функций с разными свойствами по переменным своего аргумента. Обе нормы справа этого неравенства оказались анизотропными.

Анализируя полученный результат, приходим к выводу о вполне естественном проявлении анизотропных свойств ядра частного интеграла и функции, к которой этот ЧИ применяется, даже если рассматривать эту конструкцию ЧИ в обычных нормах пространства Лебега. Разумеется естественно предположить, что изучение конструкций частных интегралов в более общих классах Лебега (по сравнению с изотропными классами) является интересным и актуальным продолжением исследований интегральных уравнений с линейными интегральными операторами, содержащие частные интегралы.

В учебном пособии исследуются действия ЧИ и ЛЧИ вида (14.6) и (14.7) соответственно в нормах пространства $L_{\mathbf{p}}$ в $\mathbb{R}_2$, затем в $\mathbb{R}_3$. Полученные сведения позволяют сформулировать вид оценок общего плана для работы в $\mathbb{R}_n$ при любых $n \geq 2$.

§16. Достаточные условия ограниченности частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега

В работах А.С. Калитвина был введен критерий непрерывности действия ЧИ операторов в пространствах непрерывных функций. В качестве обобщения этого критерия в данной работе вводится **правило** которому удовлетворяет ядро k_α ЧИ оператора и функции u для которых соответствующий ЧИ-оператор ограничен в $L_{\mathbf{p}}(D)$. Обозначим $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\mathbf{p}_\alpha = (p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_m})$, $\mathbf{q}_\alpha = (q_{\alpha_1}, q_{\alpha_2}, \ldots, q_{\alpha_m})$, $\frac{1}{p_{\alpha_i}} + \frac{1}{q_{\alpha_i}} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Правило ограниченного действия ЧИ-оператора $K_\alpha^{(m)}$ в анизотропных пространствах Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$ [1, 16].

1. Правило для функций $u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$:

   1) по переменным интегрирования $t_\alpha = (t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \ldots, t_{\alpha_m})$ функция $u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$ должна иметь конечные $L_{\mathbf{p}_\alpha}$-нормы $\mathbf{p}_\alpha =$

$(p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_m})$;

2) по свободным от интегрирования переменным $x_{\bar\alpha}$ функция $u(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)$ должна иметь конечные $L_{\mathbf{p}^2_{\bar\alpha}}$-нормы, $\mathbf{p}^2_{\bar\alpha} = (p^2_{\bar\alpha_1}, \dots, p^2_{\bar\alpha_{n-m}})$.

2. Правило для ядер $k_\alpha(x_\alpha, x_{\bar\alpha}; t_\alpha)$ ЧИ-операторов $K^{(m)}_\alpha$:

1) по переменным интегрирования t_α ядро k_α должно иметь конечные $L_{\mathbf{q}_\alpha}$-нормы;

2) по переменным интегрирования x_α ядро $k_\alpha(x; t_\alpha)$ должно иметь конечные $L_{\mathbf{p}_\alpha}$-нормы;

3) по свободным от интегрирования переменным $x_{\bar\alpha} = (x_{\bar\alpha_1}, \dots, x_{\bar\alpha_{n-m}})$ ядро $k_\alpha(x; t_\alpha)$ должно иметь конечные $L_{\mathbf{p}_{\bar\alpha}\mathbf{q}_{\bar\alpha}}$-нормы $\mathbf{p}_{\bar\alpha}\mathbf{q}_{\bar\alpha} = (p_{\bar\alpha_1}\, q_{\bar\alpha_1}, \dots, p_{\bar\alpha_{n-m}}\, q_{\bar\alpha_{n-m}})$.

Данные правила получаются с многократным применением неравенства Гельдера к функции $K_\alpha u$. Используя эти правила, получим неравенства в которых отражены достаточные условия ограниченности действия ЧИ анизотропных пространствах Лебега в $\mathbb{R}_n$:

$$\|K_\alpha u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le \|k_\alpha\|_{L_{(\mathbf{q}_\alpha; \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_{\bar\alpha}\mathbf{q}_{\bar\alpha})}\left(D^{(n+m)}_{(\alpha;1,2,\dots,n)}\right)} \|u\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha; \mathbf{p}^2_{\bar\alpha})}(D^{(n)}_{\alpha,\bar\alpha})}.$$

Для частных случаев частно-интегральных операторов $K_0, K_{(1,2,\dots,n)}$ получим:

$$\|K_0 u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le \|k_0\|_{L_{(p_1q_1, p_2q_2, \dots, p_nq_n)}(D)} \|u\|_{L_{\mathbf{p}^2}(D)},$$

$$\|K^{(n)}_{1,2,\dots,n}\, u\,\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le \|k_{1,2,\dots,n}\|_{L_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}(D\times D)} \|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}.$$

В случае ЧИ-операторов, заданных в $\mathbb{R}_2$ имеем [13]

$$\|(K_0 u)\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2})} \le \|k_0\|_{L_{(p_1q_1,\ p_2q_2,)}(D_{1,2})}\ \|u\|_{L_{(p^2_1,\ p^2_2)}(D_{1,2})},$$

$$\|(K_1^{(1)}u)\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2})} \le \|k_1\|_{L_{(q_1,p_1,p_2q_2)}(D_{1,1,2})}\|u\|_{L_{(p_1,p_2^2)}(D_{1,2})},$$

$$\|(K_2^{(1)}u)\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2})} \le \|k_2\|_{L_{(q_2,p_1q_1,p_2)}(D_{2,1,2})}\|u\|_{L_{(p_2,p_1^2)}(D_{2,1})},$$

$$\|K_{1,2}^{(2)}\, u\,\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2})} \le \|k_{1,2}\|_{L_{(q_1,q_2,p_1,p_2)}(D_{1,2,1,2})}\|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2})}.$$

В случае ЧИ-операторов, заданных в $\mathbb{R}_3$: [14]

$$\|K_0u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2,3})} \le \|k_0\|_{L_{(p_1q_1,p_2q_2,p_3q_3)}(D_{1,2,3})}\|u\|_{L_{(p_1^2,p_2^2,p_3^2)}(D_{1,2,3})},$$

$$\|K_1u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2,3})} \le \|k_1\|_{L_{(q_1,p_1,p_2q_2,p_3q_3)}(D_{1,1,2,3})}\|u\|_{L_{(p_1,p_2^2,p_3^2)}(D_{1,2,3})},$$

$$\|K_2u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2,3})} \le \|k_2\|_{L_{(q_2,p_1q_1,p_2,p_3q_3)}(D_{2,1,2,3})}\|u\|_{L_{(p_2,p_1^2,p_3^2)}(D_{2,1,3})},$$

$$\|K_3u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2,3})} \le \|k_3\|_{L_{(q_3,p_1q_1,p_2q_2,p_3)}(D_{3,1,2,3})}\|u\|_{L_{(p_3,p_1^2,p_2^2)}(D_{3,1,2})},$$

$$\|K_{1,2}u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2,3})} \le \|k_{1,2}\|_{L_{(q_1,q_2,p_1,p_2,p_3q_3)}(D_{1,2,1,2,3})}\ \|u\|_{L_{(p_1,p_2,p_3^2)}(D_{1,2,3})},$$

$$\|K_{1,3}u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2,3})} \le \|k_{1,3}\|_{L_{(q_1,q_3,p_1,p_2q_2,p_3)}(D_{1,3,1,2,3})}\ \|u\|_{L_{(p_1,p_3,p_2^2)}(D_{1,3,2})},$$

$$\|K_{2,3}u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2,3})} \le \|k_{2,3}\|_{L_{(q_2,q_3,p_1q_1,p_2,p_3)}(D_{2,3,1,2,3})}\ \|u\|_{L_{(p_2,p_3,p_1^2)}(D_{2,3,1})},$$

$$\|K_{1,2,3}u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2,3})} \le \|k_{1,2,3}\|_{L_{(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)}(D_{1,2,3,1,2,3})}\ \|u\|_{L_{(p_1,p_2,p_3)}(D_{1,2,3})}.$$

Можно привести описание метода построения анизотропных пространств функций и ядер для оценки нормы ЧИ-оператора $K_\alpha^{(m)}$ в общем случае [1]

$$\|K_\alpha^{(m)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left\| \int\limits_{D_\alpha^{(m)}} k_\alpha(x;t_\alpha)u(x_{\bar\alpha},t_\alpha)\,dt_\alpha \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)},$$

где $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$, $1\le\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n\le n$, $t_\alpha=(t_{\alpha_1},t_{\alpha_2},\ldots,t_{\alpha_m})$ — переменные, по которым производится интегрирование, $x_{\bar\alpha}$ — переменные x_i вектора x с оставшимися индексами, причем переменные $(x_{\bar\alpha},t_\alpha)$ расставлены в порядке возрастания индексов. Для вычисления нормы сначала необходимо воспользоваться неравенством Гельдера для переменных t_α, т.е. m раз, получим

$$\|K_\alpha^{(m)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} =$$

$$= \left\| \left\{ \int\limits_{D_{\alpha_m}} \left[\dots \left(\int\limits_{D_{\alpha_1}} |k_\alpha(x;t_\alpha)|^{q_{\alpha_1}}\, dt_{\alpha_1} \right)^{\frac{q_{\alpha_2}}{q_{\alpha_1}}} \dots \right]^{\frac{q_{\alpha_m}}{q_{\alpha_{m-1}}}} dt_{\alpha_m} \right\}^{\frac{1}{q_{\alpha_m}}} \times \right.$$

$$\left. \left\{ \int\limits_{D_{\alpha_m}} \left[\dots \left(\int\limits_{D_{\alpha_1}} |u(x_{\bar\alpha},t_\alpha)|^{p_{\alpha_1}}\, dt_{\alpha_1} \right)^{\frac{p_{\alpha_2}}{p_{\alpha_1}}} \dots \right]^{\frac{p_{\alpha_m}}{p_{\alpha_{m-1}}}} dt_{\alpha_m} \right\}^{\frac{1}{p_{\alpha_m}}} \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}.$$

Обозначим внутренние множители функциями $\tilde{k}_\alpha(x)$ и $\tilde{u}(x_{\bar\alpha})$, соответственно, получим

$$\|K_\alpha^{(m)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left\| \tilde{k}_\alpha(x)\tilde{u}(x_{\bar\alpha}) \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}.$$

При вычислении нормы

$$\|K_\alpha^{(m)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left\{ \int\limits_{D_n} \left[\dots \left(\int\limits_{D_1} \left| \tilde{k}_\alpha(x)\tilde{u}(x_{\bar\alpha}) \right|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right\}^{\frac{1}{p_n}}$$

необходимо последовательно рассматривать интегрирование функций $\tilde{k}_\alpha(x)$ и $\tilde{u}(x_{\bar\alpha})$ по переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Функция $\tilde{u}(x_{\bar\alpha})$ зависит от переменных $x_{\bar\alpha}$ и не зависит от переменных x_α. Если очередное интегрирование производится по переменной $x_i \in x_{\bar\alpha}$, то будет применяться неравенство Гельдера, если $x_i \in x_\alpha$, то функция $\tilde{u}(x_{\bar\alpha})$ не интегрируется, а выносится за знак интеграла по переменной x_i. В первом случае происходит домножение в показателе подынтегрального выражения для функции $\tilde{k}_\alpha(x)$ на q_i, и в итоге получаем показатель $p_i q_i$, а для функции $\tilde{u}(x_{\bar\alpha})$ на p_i, и в итоге получаем показатель p_i^2; во втором случае домножения показателя подынтегрального выражения для функции $\tilde{k}_\alpha(x)$ на q_i не происходит, и показатель остается равным p_i, а для функции $\tilde{u}(x_{\bar{\alpha}})$ домножения не происходит (показатель p_i умножается на $1/p_i$). В итоге получим

$$\|K_\alpha^{(m)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le \|\tilde{k}_\alpha(x)\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha,\ \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}})}(D)} \|\tilde{u}(x_{\bar{\alpha}})\|_{L_{\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar{\alpha}}}(D_{\bar{\alpha}})}.$$

Возвращаемся к функциям $k_\alpha(x;t_\alpha)$ и $u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$ с учетом показателей для переменных t_α получим

$$\|K_\alpha^{(m)}\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le \|k_\alpha\|_{L_{(\mathbf{q}_\alpha;\ \mathbf{p}_\alpha,\ \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D)} \|u\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha;\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})},$$

где показатели $\mathbf{p}_\alpha$, $\mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}$ расставлены по порядку возрастания мультииндексов, т.е. справедливы правила ограниченного действия.

§17. Достаточные условия ограниченности линейных частно-интегральных операторов в анизотропных пространствах Лебега

Оценим норму ЛЧИ-оператора (14.7) в анизотропном пространстве Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$. [1, 16] Из оценок норм операторов K_0, $K_\alpha^{(m)}$, $K_{1,2,\ldots,n}^{(n)}$ вытекает, что функция u должна принадлежать одновременно разным лебеговым классам: $u \in L_{(p_1^2,p_2^2,\ldots,p_n^2)} \cap \ldots \cap L_{(\mathbf{p}_\alpha,\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar{\alpha}})} \cap \ldots \cap L_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}$. Введем мультииндекс $\mathbf{r}$, который может принимать одно из значений $(p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2)$, $\ldots, (\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar{\alpha}})$, $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Обозначим через $\mathcal{L}_{\mathbf{r}}(D)$ класс функций с конечной нормой

$$\|u\|_{\mathbf{r}} = \max_{\mathbf{r}} \|u\|_{L_{\mathbf{r}}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}\,.$$

Теорема 1.17.1. *Пусть* $u \in \mathcal{L}_{\mathbf{r}}(D)$, *а ядра* $k_\alpha(x;t_\alpha)$ *частно-интегральных операторов* K_α *принадлежат пространствам* $L_{(\mathbf{q}_\alpha;\ \mathbf{p}_\alpha,\ \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D)$, *и пусть* $C_\alpha = \|k_\alpha\|_{L_{(\mathbf{q}_\alpha;\ \mathbf{p}_\alpha,\ \mathbf{p}_{\bar{\alpha}}\mathbf{q}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D)}$, *тогда ЛЧИ-оператор K непрерывен как оператор из $\mathcal{L}_{\mathbf{r}}(D)$ в $L_{\mathbf{p}}(D)$, причем*

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A_1\|u\|_{\mathbf{r}}\,, \;\; A_1 = \sum_{\alpha} C_\alpha.$$

$\square$ Для ЛЧИ-оператора $Ku = K_0u + \sum\limits_{\alpha} K_\alpha^{(m)}u + K_{1,2,\ldots,n}^{(n)}u$, воспользовавшись неравенством Минковского для суммы функций, получим

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left\| K_0u + \sum_{\alpha} K_\alpha^{(m)}u + K_{1,2,\ldots,n}^{(n)}u \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq$$

$$\leq \|K_0u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} + \sum_{\alpha} \left\| K_\alpha^{(m)}u \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} + \left\| K_{1,2,\ldots,n}^{(n)}u \right\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}\,.$$

Обозначив $C_\alpha = \|k_\alpha\|_{L_{(\mathbf{q}_\alpha;\ \mathbf{p}_\alpha,\ \mathbf{p}_{\bar\alpha}\mathbf{q}_{\bar\alpha})}(D_\alpha \times D)}$, воспользуемся оценкой каждого слагаемого, полученного выше, имеем неравенство

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq \|k_0\|_{L_{\mathbf{pq}}(D_{1,2,\ldots,n}^{(n)})}\, \|u\|_{L_{\mathbf{p^2}}(D_{1,2,\ldots,n}^{(n)})} +$$

$$+ \sum_{\alpha} \|k_\alpha\|_{L_{(\mathbf{q}_\alpha;\mathbf{p}_{\bar\alpha},\mathbf{p}_{\bar\alpha}\mathbf{q}_{\bar\alpha})}(D_\alpha^{(m)} \times D_{1,2,\ldots,n}^{(n)})}\, \|u\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha,\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar\alpha})}(D_\alpha^{(m)} \times D_{\bar\alpha}^{(n-m)})} +$$

$$+ \|k_{1,2,\ldots,n}\|_{L_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}(D_{1,2,\ldots,n}^{(n)} \times D_{1,2,\ldots,n}^{(n)})} \|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{1,2,\ldots,n}^{(n)})} \leq \sum_{\alpha} C_\alpha\, \|u\|_{\mathbf{r}} = A_1\|u\|_{\mathbf{r}}\,.$$

$\blacksquare$

Следствие 1.17.1. *Пусть*

$$A_2 = C_0 + A \sum_{\alpha \neq 0} C_\alpha, \;\; \textit{где } A = \max_{\alpha}\Big\{ \prod_{i=1}^{m} [\mu(D_{\alpha_i})]^{\frac{1}{p_{\alpha_i}} - \frac{1}{p^2_{\alpha_i}}} \Big\},$$

тогда справедлива оценка

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A_2 \max_{\alpha} \left\{ \|u\|_{L_{(\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\alpha};\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar\alpha})}(D_\alpha \times D_{\bar\alpha})} \right\}.$$

☐ Воспользуемся неравенством (12.1) для анизотропных норм с мультииндексами $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ при $r_i \le \rho_i$

$$\|f\|_{L_{\mathbf{r}}(D_{1,2,\ldots,n})} \le [\mu(D_{1,2,\ldots,n})]^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}} \|f\|_{L_\rho(D_{1,2,\ldots,n})}, \qquad (17.1)$$

получим

$$\|u\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha;\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar\alpha})}(D_\alpha\times D_{\bar\alpha})} \le M_\alpha \|u\|_{L_{(\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_\alpha;\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar\alpha})}(D_\alpha\times D_{\bar\alpha})},$$

где $M_\alpha = \prod\limits_{i=1}^{m} [\mu(D_{\alpha_i})]^{\frac{1}{p_{\alpha_i}}-\frac{1}{p^2_{\alpha_i}}}$. Пусть $A = \max\limits_\alpha\{M_\alpha\}$ и $A_2 = C_0 + A\sum\limits_{\alpha\neq 0} C_\alpha$, тогда из теоремы 1.17.1 следует

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le \sum_\alpha C_\alpha \|u\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha;\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar\alpha})}(D_\alpha\times D_{\bar\alpha})} \le C_0\|u\|_{L_{\mathbf{p^2}}(D)} +$$

$$+A\sum_{\alpha\neq 0} C_\alpha \|u\|_{L_{(\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_\alpha;\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar\alpha})}(D_\alpha\times D_{\bar\alpha})} = A_2 \max_\alpha \left\{ \|u\|_{L_{(\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_\alpha;\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar\alpha})}(D_\alpha\times D_{\bar\alpha})} \right\}.$$

То есть класс функций $\mathcal{L}_{\mathbf{r}}(D)$ можно сузить до множества $\bigcap\limits_\alpha L_{(\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_\alpha;\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar\alpha})}(D_\alpha\times D_{\bar\alpha})$. ■

С использованием теоремы о ранжировании получим:

Следствие 1.17.2. *Пусть* $\mathbf{p}_\beta = (p_{\beta_1}, p_{\beta_2}, \ldots, p_{\beta_n})$ *— мультииндекс, такой, что* $p_{\beta_1} \ge p_{\beta_2} \ge \ldots \ge p_{\beta_n}$, *тогда справедливо неравенство*

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le A_2 \|u\|_{L_{\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_\beta}(D^{(n)}_\beta)}.$$

☐ Воспользуемся теоремой о ранжировании анизотропной нормы Лебега и свойством 6 стр.24, получим

$$\max_\alpha \left\{ \|u\|_{L_{(\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_\alpha;\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar\alpha})}(D_\alpha\times D_{\bar\alpha})} \right\} = \|u\|_{L_{\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_\beta}(D^{(n)}_\beta)},$$

тогда из следствия 1.17.1 получим неравенство

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \le A_2 \|u\|_{L_{\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_\beta}(D^{(n)}_\beta)}. \quad ■$$

Замечание 1.17.1. *Если при любых* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *выполняется неравенство* $p_i^2 \geq p_j$, *то*

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A_2 \|u\|_{L_{\mathbf{p^2}}(D^{(n)}_{1,2,\ldots,n})}.$$

$\square$ Для доказательства данного утверждения необходимо для каждой компоненты p_k мультииндекса $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ поочередно, начиная с первой проверять условия:

1. $p_k \in p_\alpha$, тогда, используя свойство 6, стр. 24, можно компоненту p_k заменить на p_k^2, тогда $\|u\|_{L_{(\mathbf{p}_\alpha;\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})} \leq A \|u\|_{L_{(\tilde{\mathbf{p}}_\alpha;\mathbf{p}^{\mathbf{2}}_{\bar{\alpha}})}(D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}})}$, где $\tilde{p}_\alpha$ — то же самое, что и p_α с k-ой компонентой, возведенной в квадрат;

2. $p_k \in p_{\bar{\alpha}}$, тогда p_k уже возведено в квадрат и $p_k^2 \geq p_i$ для любого $i = \{1, 2 \ldots, n\}$. По теореме о ранжировании анизотропной нормы Лебега и неравенства (17.1), можно поменять порядок интегрирования так, что интегрирование в норме функции u по переменной x_k и показателем p_k^2 будет осуществляться на k-ом шаге.

В итоге, после поочередной проверки компонентов p_k мультииндекса $\mathbf{p}$, получим норму функции u в пространстве $L_{(p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2)}(D_{1,2\ldots,n})$.

Таким образом, справедливо неравенство

$$\|Ku\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leq A_2 \|u\|_{L_{(p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2)}(D^{(n)}_{1,2,\ldots,n})}. \quad \blacksquare$$

ГЛАВА IV
ЛИНЕЙНЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

§18. Достаточные условия действия

Пусть $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ — компакт, $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций с нормой $\|u\| = \max\limits_{t \in D} |u(x)|$. $C(D)$ — банахово пространство.

Будем рассматривать свойства оператора (14.7) в $C(D)$ [2, 4, 5, 6]. Для этого оператора справедлив аналог теоремы Банаха о непрерывности интегрального оператора.

Через $S(D)$ обозначим пространство измеримых и почти всюду конечных функций на D, $S(D)$ является полным метрическим пространством, сходимость в котором совпадает со сходимостью по мере, причем $C(D) \subset S(D)$.

Теорема 1.18.1. [2] *Если оператор K действует в $C(D)$, то он непрерывен.*

$\square$ Достаточно показать замкнутость оператора K. Пусть $(u_n) \subset C(D)$, $u_n \to u_0$ и $Ku_n \to y_0$. Покажем, что $Ku_0 = y_0$. Так как $u_n \to x_0$, то последовательность (u_n) ограничена в $C(D)$. Поэтому найдется такое число r, что $|u_n(t)| \leq \|u_n\| \leq r$. Тогда при почти всех $t \in D$ последовательность $k_0(t)\, u_n(t)$ сходится к $k_0(t)\, u_0(t)$, а сходящаяся при почти всех t к функции $k_\alpha(x, t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$ последовательность функций $k_\alpha(x, t_\alpha) u_n(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)$ ограничена функцией $r\,|k_\alpha(x, t_\alpha)|$, которые интегрируемы на D_α соответственно в силу свойств интеграла Лебега. Из предельного перехода под знаком интеграла (теорема Лебега), получаем сходимость последовательности $(K_\alpha u_n)(t)$ почти при всех t к функции $(K_\alpha u_0)(t)$.

Тогда последовательность функций $(Ku_n)(t)$ сходится к функции $(Ku_0)(t)$ в $S(D)$. По предположению $Ku_n \to y_0$. Так как $C(D) \subset S(D)$ и в метрическом пространстве $S(D)$ $Ku_n \to Ku_0$ и $Ku_n \to y_0$, то в силу единственности предела $Ku_0 = y_0$.

Таким образом, оператор K замкнут. По теореме Банаха о замкнутом графике он непрерывен.■

Определение 1.18.1. *Измеримые функции $k_\alpha(x, t_\alpha)$ принадлежат $C(L^1(D_\alpha))$, если*

$$\sup_{D} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha)|\, dt_\alpha = L_\alpha < \infty \tag{18.1}$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|t - t^0\| < \delta$ вытекает

$$\int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha) - k_\alpha(x^0, t_\alpha)|\, dt_\alpha < \varepsilon. \tag{18.2}$$

Теорема 1.18.2. [2] *Пусть функция $k_0(x)$ непрерывна на D, а ядра $k_\alpha(x, t_\alpha)$ из $C(L^1(D_\alpha))$. Тогда K является непрерывным линейным оператором на $C(D)$.*

□ Покажем, что интегралы $\int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha) u(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)\, dt_\alpha$ существуют и конечны. Пусть $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная непрерывная функция, тогда при каждых фиксированных значениях m переменных она является функцией из $C(D)$ оставшихся $n-m$ переменных. Отсюда и условия теоремы вытекает, что при всех $x \in D$ функции $k_\alpha(x, t_\alpha) u(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)$ суммируемы по t_α на D_α соответственно. Следовательно, при всех $x \in D$, интегралы $\int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha) u(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)\, dt_\alpha$ конечны и определены.

Покажем, что оператор K действует в $C(D)$. Пусть $u \in C(D)$, покажем, что $Ku \in C(D)$. Непрерывность функции $K_0 u$ очевидна. Докажем непрерывность функции $K_\alpha u$. Так как функция u непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что из $\|t - t^0\| < \delta_1$ следует $|u(x) - u(x^0)| < \varepsilon$. Отсюда и условий принадлежности $C(L^1(D_\alpha))$ ядер $k_\alpha(x, t_\alpha)$ при $\|x - x^0\| < \delta_2$, где $\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\}$, имеем

$$\left| \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)\, dt_\alpha - \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x^0, t_\alpha) u(x^0_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)\, dt_\alpha \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha)| |u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) - u(x^0_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)|\, dt_\alpha +$$

$$+ \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha) - k_\alpha(x^0, t_\alpha)| |u(x^0_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)|\, dt_\alpha \leq \epsilon \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha)|\, dt_\alpha +$$

$$+ \|u\| \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha) - k_\alpha(x^0_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)|\, dt_\alpha \leq \varepsilon(L_\alpha + \|u\|).$$

Так как ε — произвольное положительное число, то из последнего неравенства вытекает непрерывность функции $K_\alpha u$.

Таким образом, функция Ku непрерывна, т.е. $Ku \in C(D)$. Линейность оператора K очевидна. Тогда по теореме 1.18.1 K — непрерывный оператор на $C(D)$. ■

Неравенство (18.2) выполняется, если $k_\alpha(x, t_\alpha$ — непрерывные по совокупности переменных функции.

Теорема 1.18.3. [2] *Пусть* $\|k_\alpha(x, \cdot)\|_{L_{p_\alpha}} \leq A_\alpha < \infty$, *где* $x \in D$, $1 < p_{\alpha_i} < \infty$, A_α — *некоторые постоянные. Если* $\tau_{S_\alpha} = \varphi_{S_\alpha}(x)$ — *конечное число поверхностей разрыва ядер* $k_\alpha(x, t_\alpha)$, $\varphi_{S_\alpha}(x)$ —

набор непрерывных функций $\varphi^j_{S_\alpha}(x)$ *таких, что* $\tau_j = \varphi^j_{S_\alpha}(x)$, *то ядра* $k_\alpha(x,t_\alpha)$ *принадлежат* $C(L^1(D_\alpha))$.

Теоремы 1.18.1 – 1.18.2 содержат достаточные условия действия в пространстве $C(D)$ линейного оператора (14.7) с многомерными частными интегралами. При получении необходимых и достаточных условий действия оператора (14.7) в пространстве непрерывных функций существенную роль играет теорема Радона, согласно которой линейный непрерывный в пространстве $C(D)$ оператор A представим в виде многомерного интеграла Стильтьеса

$$(Ax)\,(t) = \int\limits_D u(t)\,dg(x,t)$$

с интегрирующей функцией $g(x,t)$ слабо непрерывной по x и ограниченной вариации по t.

Пусть

$$g(x,t) = \sum_\alpha \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x,\bar{t}_\alpha)\,d\bar{t}_\alpha\,\chi(x_{\bar\alpha},t_\alpha), \tag{18.3}$$

$$\chi(x_{\bar\alpha},t_\alpha) = \begin{cases} 1, & \forall\alpha\ t_\alpha \ge x_\alpha > a_\alpha \text{ или } t_\alpha > x = a_\alpha, \\ 0, & \exists\alpha\ t_\alpha < x_\alpha \text{ или } t_\alpha = x_\alpha = a_\alpha. \end{cases}$$

Очевидно, $g(x,v_\alpha) = 0$, где v_α — вершины параллелепипеда $D = \prod\limits_{i=1}^n [a_i,b_i]$, при $k=2^n$, $v_{2^n} = b$

$$g(x,b) = \sum_\alpha \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x,t_\alpha)\,dt_\alpha.$$

$$B(x) = \sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha)\, dt_\alpha,$$

$$B_\beta(x) = \int\limits_{D} u_\beta \, dg(x,t) = \sum_{\alpha} (-1)^{dim D_{a\xi i}} \left\{ \int\limits_{D_{a\xi i}} g(x,t)\, du_\beta \Bigg|_{\bar{D}_{a\xi i}} \right\}. \tag{18.4}$$

Пусть

$$\gamma(x) = \sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(x, t_\alpha)|\, dt_\alpha. \tag{18.5}$$

Теорема 1.18.4. [2] *Для действия линейного оператора (14.7) в пространстве $C(D)$ необходимо и достаточно, чтобы функция (18.5) была ограничена, а функции (18.4) непрерывны при каждом фиксированном t. При выполнении этих условий оператор (14.7) непрерывен и его норма определяется равенством*

$$\|K\| = \sup_{D} \gamma(x). \tag{18.6}$$

В случае $n = 2$ непрерывность действия и достаточные условия и критерий действия операторов с частными интегралами в $C(D)$ были рассмотрены в работах [7, 8, 9, 10, 11, 17].

§19. Алгебра частно-интегральных операторов

Для оператора (14.7) получен критерий ограниченного действия в пространстве $C(D)$, $D \subset \mathbb{R}_n$ (см. [2, 4]). Этот критерий является обобщением критерия, полученного в работах [7, 8, 9, 10, 11, 17] в случае $\mathbb{R}_2$.

Теорема 1.19.1. *Представление оператора с многомерными частно-интегральными операторами в виде (14.7) единственно.*

Рассмотрим пространство $\mathcal{L}(C)$ непрерывных линейных операторов, действующих в пространстве $C(D)$ непрерывных на D функций с обычными алгебраическими операциями и нормой, $\mathcal{L}_n(C)$ — подпространство операторов вида (14.7). Достаточно полное описание входящих в подпространство $\mathcal{L}_n(C)$ операторов дает критерий ограниченного действия.

Теорема 1.19.2. *$\mathcal{L}_n(C)$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{L}(C)$.*

Пространство $\mathcal{L}(C)$ с операцией композиции операторов является банаховой алгеброй.

Теорема 1.19.3. *Подпространство $\mathcal{L}_n(C)$ является подалгеброй алгебры операторов $\mathcal{L}(C)$. При этом, если $\mathscr{K} \in \mathcal{L}_n(C)$, где*

$$(\mathscr{K} x)(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_\alpha} k_{j\alpha}(x, t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}, t_\alpha})\, dt_\alpha, \tag{19.1}$$

то линейный оператор $K = K_\beta K_\alpha$ также является оператором с многомерными частными интегралами.

Подалгебра $\mathcal{L}_n(C)$ не является идеалом алгебры $\mathcal{L}(C)$. Для этого достаточно рассмотреть композиции операторов из $\mathcal{L}_n(C)$ с оператором $A\colon u(x) \to u(x_0)$, который ставит в соответствие каждой непрерывной функции функцию-константу, равную значению этой функции в некоторой фиксированной точке.

Каждый из операторов $K \in \mathcal{L}_n(C)$ является суммой 2^n операторов K_α: оператора K_0 умножения на некоторую функцию, 2^n-2 частично интегральных операторов $K_1, \ldots, K_{(1,2,\ldots,n-1)}$ и интегрального оператора $K_{(1,2,\ldots,n)}$. Следующий пример показывает, что если K является непрерывным линейным оператором в пространстве $C(D)$, то каждое из его слагаемых может не являться таковым.

Пример 1.19.1. [10, 11, 17] Рассмотрим оператор K в случае $n = 2$, пусть он определен равенством

$$(Ku)(x_1, x_2) =$$

$$= \begin{cases} u(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in V_1, \\ 2(2x_1 - 1)^{-1} \int\limits_{0.5}^{x_1} u(t_1, x_2)\, dt_1, & (x_1, x_2) \in V_2, \\ 2(2x_2 - 1)^{-1} \int\limits_{0.5}^{x_2} u(x_1, t_2)\, dt_2, & (x_1, x_2) \in V_3, \\ 4(2x_2 - 1)^{-1}(2x_1 - 1)^{-1} \int\limits_{0.5}^{x_1} \int\limits_{0.5}^{x_2} u(t_1, t_2)\, dt_2 dt_1, & (x_1, x_2) \in V_4, \end{cases}$$

где $V_1 = [0, 0.5] \times [0, 0.5]$, $V_2 = (0.5, 1] \times [0, 0.5]$, $V_3 = [0, 0.5] \times (0.5, 1]$, $V_4 = (0.5, 1] \times (0.5, 1]$. K является оператором с многомерными частными интегралами (14.7), действующим в $C(D)$, с функциями

$$k_0(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in V_1, \\ 0, & (x_1, x_2) \in V_2 \cup V_3 \cup V_4, \end{cases}$$

$$k_1(x_1, x_2, t_1) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \in V_1 \cup V_3 \cup V_4, \\ 2(2x_1 - 1)^{-1}, & 0.5 < t_1 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 0.5, \\ 0, & 0.5 \le x_1 < t_1 \le 1,\ 0 \le t_2 \le 0.5, \end{cases}$$

$$k_2(x_1, x_2, t_2) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \in V_1 \cup V_2 \cup V_4, \\ 2(2x_2 - 1)^{-1}, & 0.5 < t_2 \le x_2 \le 1,\ 0 \le x_1 \le 0.5, \\ 0, & 0.5 \le x_2 < t_2 \le 1,\ 0 \le x_1 \le 0.5, \end{cases}$$

$$k_{1,2}(x_1, x_2, t_1, t_2) =$$

$$
= \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \in V_1 \cup V_2 \cup V_3, \\ 4(2x_2-1)^{-1}(2x_1-1)^{-1}, & 0.5 < t_1 \le x_1 \le 1, \text{ и} \\ & 0.5 < t_2 \le x_2 \le 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}
$$

Из действия в $C(D)$ оператора K с частными интегралами, следует его непрерывность. Очевидно, операторы K_0, K_1, K_2, $K_{1,2}$ не действуют в $C(D)$.

Пусть $\mathcal{L}_{k_\alpha}(C)$ — совокупность действующих в пространстве $C(D)$ операторов K_α. Рассмотрим пространство операторов, составленное из прямых сумм $W = \sum\limits_{\alpha} \mathcal{L}_{k_\alpha}(C) = \mathcal{L}_{k_0}(C) \oplus \mathcal{L}_{k_1}(C) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{k_{(1,2,\ldots,n)}}(C)$.

Теорема 1.19.4. *Пространство W является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{L}_n(C)$.*

§20. Операторы Вольтерра с многомерными частно-интегральными операторами в $C(D)$

Операторами Вольтерра с многомерными частными интегралами назовем операторы вида

$$
(Kx)(t) = \sum_{\alpha \neq 0} \int\limits_{\Omega_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)\, dt_\alpha, \tag{20.1}
$$

где $\Omega_\alpha = \prod\limits_{\alpha} [a_\alpha, \tau_\alpha]$, $a_\alpha \le t_\alpha \le b_\alpha$, $\Omega_\alpha \subset D_\alpha$, $k_\alpha(x, t_\alpha)$ — измеримые по совокупности переменных функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Оператор (20.1) является частным случаем оператора (14.7). При $\Omega_\alpha \subset D_\alpha$ оператор (20.1) получается из оператора

(14.7), если $k_0(x) \equiv 0$, а ядра

$$\bar{k}_\alpha(x, t_\alpha) = \begin{cases} k_\alpha(x, t_\alpha) & \text{при } t_\alpha \le x_\alpha, \\ 0 & \text{при } t_\alpha > x_\alpha. \end{cases}$$

Будем использовать и другую форму записи оператора Вольтерра

$$(Kx)(t) = \sum_{\alpha \neq 0} \int\limits_{\Omega_\alpha} k_\alpha(t, S_\alpha) x(s_\alpha) \, dS_\alpha. \tag{20.2}$$

Для оператора (20.1) при $\Omega_\alpha \subset D_\alpha$ получаются следующие равенства

$$B(x) = \sum_\alpha \int\limits_{\Omega_\alpha} k_\alpha(x, t_\alpha) \, dt_\alpha,$$

$$B_\beta(x) = \int\limits_{\Omega} u_\beta \, dg(x, t) = \sum_\alpha (-1)^{dim \Omega_{a\xi i}} \left\{ \int\limits_{\Omega_{a\xi i}} g(x, t) \, du_\beta \Bigg|_{\bar{\Omega}_{a\xi i}} \right\}, \tag{20.3}$$

$$\gamma(x) = \sum_\alpha \int\limits_{\Omega_i} |k_\alpha(x, t_\alpha)| \, dt_\alpha. \tag{20.4}$$

Из теоремы 1.18.4 следует

Теорема 1.20.1. *Оператор Вольтерра (20.1) с $\Omega_\alpha \subset D_\alpha$ действует в пространстве $C(D)$ в том и только в том случае, когда при каждом фиксированном $a_\alpha \le \xi_\alpha \le b_\alpha$ функции (20.3) непрерывны, а функция (20.4) ограничена. При этом оператор (20.1) непрерывен и его норма определяется равенством*

$$\|K\| = \sup_D \gamma(x). \tag{20.5}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Иноземцев, А.И. Уравнения в частных интегралах в анизотропных пространствах Лебега. Диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — "Вещественный, комплексный и функциональный анализ" , КФУ. — Казань, 2021, 102 с.

[2] Иноземцев, А.И. Критерий определенности на $C(D)$ линейных операторов с многомерными частными интегралами / А.И. Иноземцев // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. — 2014. — №5 (176). — Вып. 34. — С. 17 – 26.

[3] Иноземцев, А.И. Ранжированное неравенство Гельдера в анизотропных классах Лебега / А.И. Иноземцев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, №1, Январь – Март, – Воронеж: Издательской дом ВГУ. — 2020. — С. 61 – 66.

[4] Калитвин, А.С. Оператор-функции с многомерными частными интегралами / А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. — 2014. — №25(196). — Вып. 37. — С. 19 – 29.

[5] Калитвин, А.С. О нетеровости, фредгольмовости и обратимости линейных операторов и уравнений с многомерными частными интегралами / А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев // Научнотехнический вестник Поволжья. №5 2018 г. — Казань: Научно-технический вестник Поволжья, — 2018. — С. 17 — 21.

[6] Калитвин, А.С. О нетеровости, фредгольмовости и обратимости двух классов линейных операторов и уравнений с многомерными частными интегралами / А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев // Научно-технический вестник Поволжья. №5 2018г. — Казань: Научно-технический вестник Поволжья, — 2018. — С. 22 — 24.

[7] Калитвин, А.С. Линейные операторы с частными интегралами [Текст] / А.С. Калитвин. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

[8] Калитвин, А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами [Текст] / А.С. Калитвин. — Липецк: ЛГПУ, 2002. — 208 с.

[9] Калитвин, А.С. Операторы и уравнения с частными интегралами и их приложения [Текст]: дисс. ... д. ф.–м. н. 01.01.02. / А.С. Калитвин. — Липецк, 2003. — 267 с.

[10] Калитвин, А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра – Фредгольма с частными интегралами [Текст] / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. — Липецк: ЛГПУ, 2006. — 177 с.

[11] Калитвин, А.С. Линейные уравнения с частными интегралами. C – теория [Текст] / А.С. Калитвин, Е.В. Фролова. — Липецк: ЛГПУ, 2004. — 195 с.

[12] Kalitvin, A.S. About integral equations with multidimensional partial integrals / A.S. Kalitvin, A.I. Inozemtsev, V.A. Kalitvin // Jornal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2020. — Vol. 249. — № 6. — P. 954 – 966.

[13] Lyakhov, L.N. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two-dimensional Case / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev // Jornal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2020. — Vol. 247. — № 6. — P. 888 – 892.

[14] Lyakhov, L.N. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. II: Multidimensional Case / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev // Jornal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2020. — Vol. 247. — № 6. — P. 893 – 899.

[15] Lyakhov, L.N. About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$ / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev, N.I. Trusova // Jornal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2020. — Vol. 251. — № 6. — P. 839 – 849.

[16] Lyakhov, L.N. Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev // Jornal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2021. — Vol. 255. — № 6. — P. 715 – 725.

[17] Appell, J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations [Text] / J.M. Appell, A.S. Kalit-vin, P.P. Zabrejko. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.p.