

ISBN 978-5-6049097-2-0



9 785604 909720

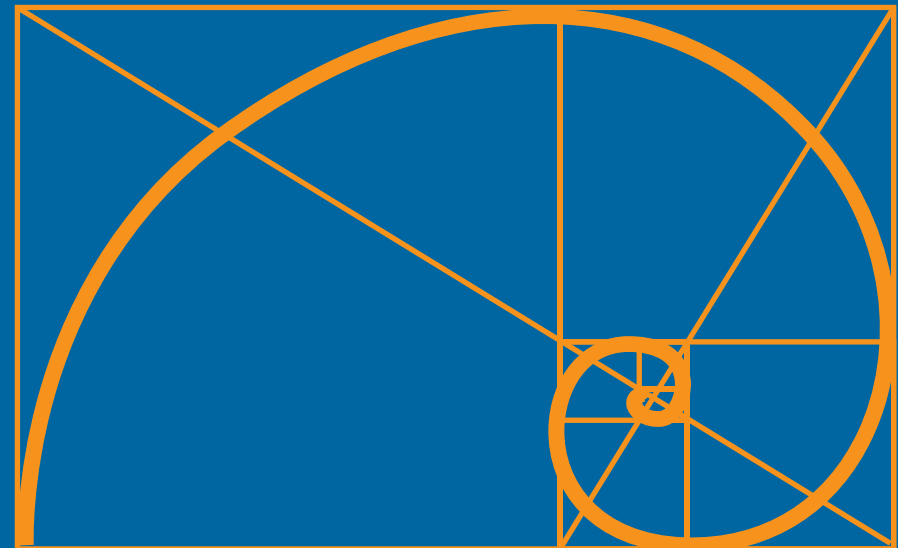
Ю. А. СУДНИК
В. В. СОЛДАТОВ

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ю. А. СУДНИК
В. В. СОЛДАТОВ

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие



Ю. А. СУДНИК

В. В. СОЛДАТОВ

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Москва
ООО «Мегаполис»
2022

УДК 681.516.7+517.91
ББК 32.965-05я73
С 89

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, профессор кафедры электро-снабжения и электротехники имени академика И. А. Будзко института механики и энергетики имени В. П. Горячкина ФГБОУ ВО РГАУ–МСХА имени К. А. Тимирязева **В. И. Загинайлов**

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры электрооборудования и электротехнических систем ФГБОУ ВО РГАЗУ **О. А. Липа**

Судник Ю. А., **Солдатов В. В.**

С 89 Системы автоматического управления: учебное пособие / Ю. А. Судник, **В. В. Солдатов** / ФГБОУ ВО РГАУ–МСХА имени К. А. Тимирязева. – М. : ООО «Мегаполис», 2022. – 490 с.

ISBN 978-5-6049097-2-0

В учебном пособии изложены основы теории автоматического управления, включающие общие сведения о системах управления и их математических моделях, методы анализа и синтеза линейных и нелинейных систем. Основное внимание уделяется методам робастного и адаптивного управления технологическими процессами, эффективным в условиях неполноты информации о характеристиках управляемых объектов и действующих на них возмущений. Изложение теоретического материала сопровождается примерами.

Для студентов технических вузов, обучающихся по направлению «Агроинженерия» и направленности «Автоматизация и роботизация технологических процессов»

УДК 681.516.7+517.91
ББК 32.965-05я73

ISBN 978-5-6049097-2-0

© Судник Ю. А.

Солдатов В. В., 2022

© ООО «Мегаполис», 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	8
В1. Основные понятия теории управления	8
В2. Классификация систем автоматического управления	11
В3. Типовые алгоритмы управления	19
В4. Тест В	22
Глава I. Методы математического описания объектов управления	24
1.1. Дифференциальные уравнения объектов управления.....	24
1.2. Передаточные функции объектов управления.....	43
1.3. Частотные характеристики объектов управления.....	49
1.4. Переходные характеристики объектов управления.....	53
1.5. Тест 1.....	63
Глава II. Динамические звенья и их характеристики	66
2.1. Виды динамических звеньев.....	66
2.2. Способы соединения динамических звеньев.....	81
2.3. Применение динамических звеньев при синтезе типовых регуляторов.....	85
2.4. Применение динамических звеньев при математическом моделировании объектов управления.....	87
2.5. Тест 2.....	91
Глава III. Закрытые системы управления	94
3.1. Уравнения и передаточные функции замкнутых систем.....	94
3.2. Критерии устойчивости линейных стационарных систем.....	106
3.3. Оценка запаса устойчивости замкнутых систем.....	118
3.4. Переходные процессы в замкнутых системах и оценка их качества.....	128
3.5. АЧХ замкнутых систем и их свойства.....	131
3.6. Тест 3.....	139
Глава IV. Статистические характеристики систем управления	142
4.1. Случайные процессы и их статистические характеристики.....	142
4.2. Стационарные случайные процессы и их свойства.....	147
4.3. Частотное представление стационарных случайных процессов.....	150
4.4. Статистические характеристики стационарных выходных случайных сигналов в частотном представлении.....	155
4.5. Спектральный анализ эффективности типовых регуляторов.....	159
4.6. Тест 4.....	165
Глава V. Выбор критериев качества управления технологическими процессами	167
5.1. Проблема выбора критериев управления.....	167

5.2. Экономический критерий качества управления технологическими процессами.....	169
5.3. Многокритериальный оптимум управления для односвязных линейных стационарных систем.....	172
5.4. Многокритериальный оптимум управления для многосвязных линейных стационарных систем.....	179
5.5. Критерии качества управления энергоемкими технологическими процессами.....	181
5.6. Тест 5.....	184
Глава VI. Условия робастности линейных стационарных систем управления.....	185
6.1. Требования к АЧХ замкнутых систем в условиях статистической неопределенности.....	185
6.2. Инвариантные системы управления.....	191
6.3. Условия робастности для систем с полной обратной связью по состоянию и оценка их эффективности.....	197
6.4. Обобщение условий робастности для систем с неполной обратной связью по состоянию.....	210
6.5. Тест 6.....	215
Глава VII. Методы расчета параметров настройки регуляторов на основе условий робастности.....	217
7.1. Методы расчета параметров настройки регуляторов при ограничениях на расположение доминирующих полюсов.....	217
7.2. Методы расчета параметров настройки регуляторов при ограничениях на величину показателя колебательности.....	265
7.3. Применение интегрального квадратичного критерия для достижения робастности систем управления.....	288
7.4. Тест 7.....	296
Глава VIII. Совершенствование методов и систем робастного управления технологическими процессами.....	298
8.1. Коррекция управления по отношению к задающим воздействиям.....	298
8.2. Коррекция управления по отношению к контролируемым Возмущениям.....	303
8.3. Расчет параметров настройки регуляторов в системах с неточно заданными параметрами объекта.....	312
8.4. Особенности управления объектами с распределенными параметрами.....	326
8.5. Зависимость перемещений регулирующего органа системы управления от значения показателя колебательности.....	330
8.6. Тест 8.....	332

Глава IX. Дискретные системы управления.....	335
9.1. Разностные уравнения дискретных систем.....	335
9.2. Передаточные функции и частотные характеристики дискретных систем.....	345
9.3. Дискретные законы управления.....	351
9.4. Устойчивость и запас устойчивости линейных дискретных систем.....	359
9.5. Условия робастности линейных дискретных систем.....	369
9.6. Методы расчета параметров настройки линейных дискретных систем на основе условий робастности.....	378
9.7. Тест 9.....	386
Глава X. Системы адаптивного управления.....	389
10.1. Проблемы адаптивного управления.....	389
10.2. Активная идентификация объектов в односвязных непрерывных системах управления.....	391
10.3. Оптимизация пробных сигналов при активной идентификации замкнутых систем управления.....	398
10.4. Активная идентификация каскадных и многосвязных непрерывных систем управления.....	406
10.5. Активная идентификация объектов в дискретных системах управления.....	409
10.6. Методы адаптивной настройки регуляторов.....	415
10.7. Тест 10.....	417
Глава XI. Нелинейные системы управления.....	419
11.1. Необходимость в нелинейных моделях объектов.....	419
11.2. Элементы систем со статическими и динамическими нелинейными характеристиками.....	423
11.3. Устойчивость состояния равновесия нелинейных систем.....	428
11.4. Применение методов Ляпунова для исследования устойчивости состояний равновесия.....	432
11.5. Частотный критерий устойчивости замкнутых нелинейных систем.....	436
11.6. Метод гармонического баланса.....	441
11.7. Условия робастности для систем с нелинейными статическими характеристиками.....	447
11.8. Условия робастности для систем с динамическими нелинейностями.....	454
11.9. Тест 11.....	462
Итоговый тест.....	465
Список литературы.....	467
Приложение 1. Доказательства математических утверждений.....	468
Приложение 2. Ответы на тесты.....	488

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория автоматического управления изучает *общие законы целенаправленного преобразования материальных, энергетических и информационных потоков* в объектах различной природы, входящих в состав управляемых технических систем.

При этом управление может быть автоматическим или автоматизированным, в зависимости от того, какую роль в этом процессе играет человек. Если ему принадлежит ведущая роль, то система называется автоматизированной, в противном случае – автоматической. Однако совершенно без участия человека автоматические системы не могут функционировать в течение неопределенно долгого времени, т.к. при появлении той или иной неисправности они выходят из строя, или же им может потребоваться перенастройка ввиду изменившихся условий работы.

Тем не менее, благодаря усилиям ученых и инженеров, занимающихся проблемами управления, роль человека в этих процессах постоянно уменьшается.

Так, например, методы технической диагностики помогают автоматически предотвращать возможные неисправности, а перенастройку систем управления также можно осуществлять без вмешательства человека благодаря появлению адаптивных систем.

В результате многие из применяемых на практике систем удалось перевести из разряда автоматизированных в разряд автоматических.

Одной из главных проблем при создании автоматических систем является все возрастающая сложность управляемых технологических процессов, обуславливающая разнообразие взаимодействий между материальными и энергетическими потоками объектов и окружающей их среды. Это приводит к появлению различных неопределенностей, обусловленных неполнотой информации об указанных взаимодействиях.

Необходимо отметить, что немало математически изящных теорий автоматического управления не получили широкого практического применения, т. к. требовали весьма детальной информации о характеристиках управляемого объекта и действующих на него возмущениях.

Осознание причины неудач при попытках использования этих теорий привело к созданию высокоэффективных методов робастного и адаптивного управления технологическими объектами, позволяющих ограничиться минимальным объемом информации об управляемых системах.

Отметим, что слово робастный происходит от английского слова *robust*, означающего: крепкий, сильный, грубый.

Настоящая книга посвящена изложению методов робастного и адаптивного управления, как взаимно дополняющих друг друга и благодаря этому особенно эффективных.

Чтобы представить теоретические положения в наиболее наглядном виде, их изложение сопровождается многочисленными примерами.

В целях облегчения самоконтроля за усвоением учебного материала в конце каждой главы приводятся тесты.

В основе учебного пособия лежат курсы лекций по теории автоматического управления, прочитанные в разные годы авторами книги.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

В.1. Основные понятия теории управления

Условно обособленную совокупность элементов материального мира, процессы в которой подвергаются *целенаправленным* воздействиям, называют *управляемым объектом*.

Управляемый объект и *управляющее устройство*, т. е. устройство для реализации целенаправленных воздействий, образуют *систему управления*.

Управление объектом обычно состоит в выработке управляющим устройством команд, реализация которых обеспечивает достижение цели управления с учетом существующих ограничений. Так, например, управление автобусом заключается в организации его передвижения по заданному маршруту при соблюдении условий безопасности водителя и пассажиров, а также требований существующего графика движения.

Состояние объекта в отношении цели управления и учитываемых ограничений отчасти определяется текущими значениями некоторого числа контролируемых переменных, получивших название *выходных величин объекта*. При управлении автобусом водителю приходится изменять его пространственные координаты и скорость движения, чтобы обеспечить прохождение заданного маршрута движения в течение установленного времени, т. е. достичь цели управления. Следовательно, в этом случае выходными величинами являются векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$, характеризующие соответственно расположение в пространстве и скорость центра масс автобуса, где t – переменная времени. образуем из координат векторов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$, вектор $\mathbf{y}(t)$, который назовем вектором выходных величин. Поскольку векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ имеют по три координаты, то в рассматриваемом случае вектор $\mathbf{y}(t)$ имеет шесть координат.

Однако наряду с вектором выходных величин $y(t)$ существуют и другие величины, влияющие на достижение цели управления, значения которых недоступны непосредственному контролю. В случае с автобусом к ним относится состояние его узлов и деталей, которое не контролируется водителем по приборам в процессе движения. Тем не менее, внезапно возникшая неисправность двигателя или ходовой части автобуса может помешать водителю выполнить график движения.

Совокупность величин полностью определяющих состояние объекта в отношении цели управления и учитываемых ограничений называется *вектором состояния* $x(t)$. Обычно число координат вектора $x(t)$ значительно превышает число координат вектора $y(t)$. Это объясняется технической сложностью организации всеобъемлющего контроля за состоянием управляемых объектов, а также величиной необходимых финансовых затрат.

Технологических требования к производственному процессу, реализуемому на управляемом объекте, характеризуются некоторыми заданными значениями выходных величин, т. е. вектором $y_{зд}(t)$. Поэтому цель управления в идеале можно сформулировать как выполнение следующего равенства:

$$y(t) = y_{зд}(t). \quad (B.1.1)$$

Однако всегда существуют влияющие на объект и исходящие со стороны внешней среды воздействия, которые приводят к нежелательным отклонениям выходных величин от их заданных значений, т. е. к нарушению равенства (B.1.1). Эти воздействия называют *возмущающими* или просто возмущениями.

При движении автобуса к действующим на него возмущениям относятся дефекты дорожного покрытия, изменения рельефа местности, наличие вблизи других транспортных средств и т. д.

Совокупность возмущающих воздействий удобно рассматривать как координаты вектора, который называется *вектором возмущений* $y(t)$. Если число координат вектора состояния $x(t)$ принять равным n , где n – целое положительное число, то число координат вектора $y(t)$ не может быть больше, чем n , т. к. его дополнительные координаты не влияют на вектор $y(t)$. Следовательно, векторы $x(t)$ и $y(t)$ в общем случае имеют одинаковую размерность n .

Векторы выходных величин $y(t)$ и задания $y_{зд}(t)$ также имеют одинаковую размерность q , которая не превышает n , т. е. всегда выполняется неравенство $q \leq n$.

Для оценки отклонения вектора $y(t)$ от вектора $y_{зд}(t)$ вводится q -мерный вектор *ошибки управления* $\varepsilon(t)$, который определяется равенством

$$\varepsilon(t) = y_{зд}(t) - y(t), \quad (\text{В.1.2})$$

и характеризует качество управления.

Наряду с возмущающими воздействиями $y(t)$ существуют разнообразные *помехи*, которые не оказывают непосредственного влияния на вектор состояния $x(t)$, но влияют на точность измерения его координат измерительной аппаратурой при формировании вектора $y(t)$. Наличие помех обусловлено шумами датчиков, используемых при измерении координат вектора $x(t)$, а также наводками в линиях связи. Для математического описания помех используется q -мерный вектор $\xi(t)$.

Процесс измерения координат вектора состояния $x(t)$ характеризует *уравнение выхода*, которое можно представить в виде

$$y(t) = Cx(t) - \xi(t),$$

где C – матрица состава измерений размерности $(q \times n)$.

Изменение выходных величин, т. е. вектора $y(t)$ в соответствии с целью управления (и, в частности, поддержание их на постоянном уровне) осуществляется подачей на объект специально организуемых *управляющих воздействий*, образующих вектор $u(t)$. Для возможности организации этих воздействий всякий объект снабжается специально предусмотренными для этой цели *управляющими органами*.

Например, в автобусе для управления величиной скорости имеются педали тормозов и педали изменения подачи топлива в двигатель, а также ручка переключения редуктора коробки передач; для управления направлением движения – рулевая колонка. Каждый из управляющих органов отвечает входу управления объекта. Поэтому размерность r вектора $u(t)$ равна числу таких входов. В примере с автобусом $r = 4$.

Управление, осуществляемое без участия человека, называют *автоматическим*, а техническое устройство, выполняющее в этом случае функции управления, – автоматическим управляющим устройством или *контроллером*; объект управления и контроллер во взаимодействии друг с другом образуют *систему автоматического управления* (САУ).

Характерной чертой современного подхода при исследовании процессов и проектировании объектов является описание их как систем. Понятие «система» употребляется часто в широком смысле (система знаний, система управления, система счисления и др.). Существует множество определений понятия «система», однако все они сходятся на том, что система – это некоторая совокупность элементов или устройств, находящихся в отношениях и связях между собой и образующих определенную целостность, единство.

Элемент системы – это ее простейшая неделимая часть. Ответ на вопрос, что является элементом системы, зависит от цели рассмотрения исследуемого объекта. Любая система может быть рассмотрена как элемент системы более высокого порядка, в то время как ее элементы могут выступать в качестве систем более низкого порядка.

В.2. Классификация систем автоматического управления

Для ознакомления с основными видами систем автоматического управления и соответствующей терминологией рассмотрим классификацию САУ по ряду признаков, существенных с точки зрения теории автоматического управления.

Существуют всего два принципа управления. Один из них называется *управлением по возмущению*, а другой *управлением по отклонению*.

Рассмотрим, как реализуется принцип управления по возмущению.

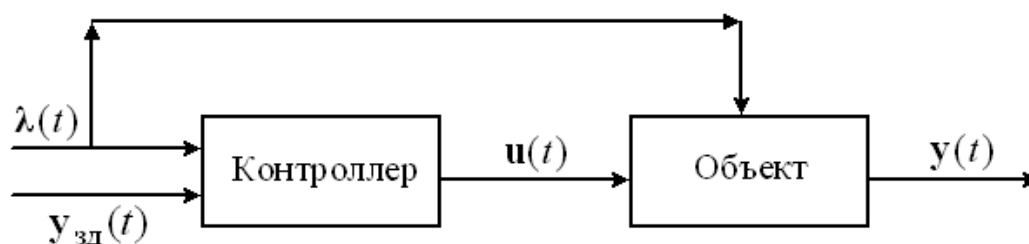


Рисунок В.1 – Разомкнутая система управления

В этом случае (рисунок В.1) контроллер получает информацию о цели управления в виде изменяющегося со временем векторного сигнала $y_{зд}(t)$ и возмущающих воздействиях $\lambda(t)$. На основании этой информации он формирует вектор управляющих воздействий $u(t)$ таким образом, чтобы достигалась цель управления, т.е. выполнялось равенство (В.1.1). Поскольку контроллер не получает информацию о векторе $y(t)$, необходимую для проверки выполнения данного равенства, то он должен располагать математической моделью управляемого объекта, устанавливающей взаимосвязь между векторами входных воздействий $u(t)$, $\lambda(t)$ и вектором выходных сигналов $y(t)$, а также алгоритмом управления, позволяющим определить вектор $u(t)$ на основании информации о векторах $y_{зд}(t)$ и $\lambda(t)$.

Системы управления по возмущению называются *разомкнутыми*, т. к. у них отсутствует передача информации с выхода системы на ее вход.

Достоинством разомкнутых систем является высокое быстродействие управления, поскольку они реагируют непосредственно на причину (изменение вектора $\lambda(t)$) появления ошибки управления $\varepsilon(t)$, а не на ее следствие (изменение вектора $\lambda(t)$). Однако математическая модель управляемого объекта и информация о векторе $\lambda(t)$ должны быть достаточно достоверными, чтобы с требуемой точностью обеспечить выполнение равенства (В.1.1). На практике такая достоверность обычно недостижима ввиду допусков на изготовление деталей объекта, изменчивости его параметров (например, коэффициента теплопередачи котла в результате зашлаковки поверхностей нагрева) и наличия неконтролируемых возмущений. Поэтому разомкнутые системы управления применяются крайне редко.

Рассмотрим системы, реализующие принцип управления по отклонению.

В этом случае в структуру системы управления вводится дополнительный канал, по которому контроллер получает информацию о действительных значениях координат вектора $\lambda(t)$ в каждый момент времени; что позволяет контроллеру при появлении ошибки управления $\varepsilon(t)$ изменить управляющее воздействие $u(t)$ таким образом, чтобы обеспечить выполнение требования

$$K(\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{extr}, \quad (\text{B.2.1})$$

где $K(\boldsymbol{\varepsilon})$ – некоторая скалярная функция от вектора ошибки управления $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, называемая **критерием управления**, который численно характеризует степень успешности достижения системой управления поставленной перед ней цели.

Соответствующая функциональная схема системы управления приведена на рисунке В.2, причем канал, по которому информация с выхода объекта подается на вход контроллера, называется каналом обратной связи, или просто **обратной связью**.

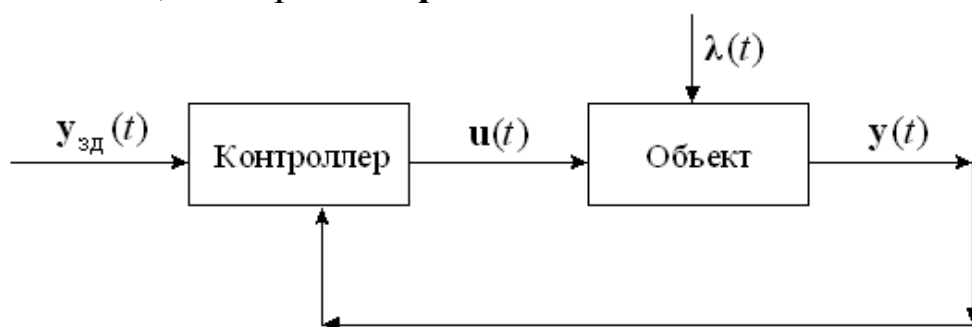


Рисунок В.2 – Замкнутая система управления

В системах управления с обратной связью имеется замкнутый контур циркуляции сигналов, поэтому такие системы получили название **замкнутых**.

Замкнутые системы способны обеспечивать высокое качество управления при наличии неконтролируемых координат у вектора $\boldsymbol{\lambda}(t)$. Следовательно, обратная связь – это средство управления при неполной информации, придающее системе свойство **адаптивности** (приспосабливаемости) к изменениям условий ее работы.

Однако быстродействие замкнутых систем ниже, чем у разомкнутых, т.к. они реагируют лишь на следствие (изменение вектора $y(t)$) воздействия на объект возмущений $\boldsymbol{\lambda}(t)$ и принципиально не способны предотвратить появление ошибки управления $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$. Поэтому для них цель управления формулируется в виде требования (В.2.1).

На практике проблема управления, как правило, разделяется на несколько взаимосвязанных, но в то же время относительно самостоятельных подпроблем, что приводит к расчленению системы управления на более мелкие взаимодействующие между собой подсистемы. Такое скоординированное между собой расчленение проблем и систем управления получило название **декомпозиции**.

Как правило, из общей проблемы управления выделяется подпроблема минимизации вредного влияния на достижение цели управления действующих на объект неконтролируемых возмущений, а также погрешностей математической модели объекта. Эта подпроблема при использовании замкнутых систем управления решается на основе информации, получаемой контроллером по каналу обратной связи и получила название задачи регулирования объекта, а часть системы управления, выполняющая эту задачу, – подсистемы регулирования.

В результате такой декомпозиции проблемы управления контроллер расчленяется на два блока:

1. *Регулирующий*, осуществляющий функции регулирования; этот блок обычно называется автоматическим регулятором, или просто *регулятором*.

2. *Командный*, вырабатывающий командное (задающее) воздействие $y_{зд}(t)$ на регулятор, исходя из цели управления.

Структура системы управления в этом случае приобретает указанный на рисунке В.3 вид.

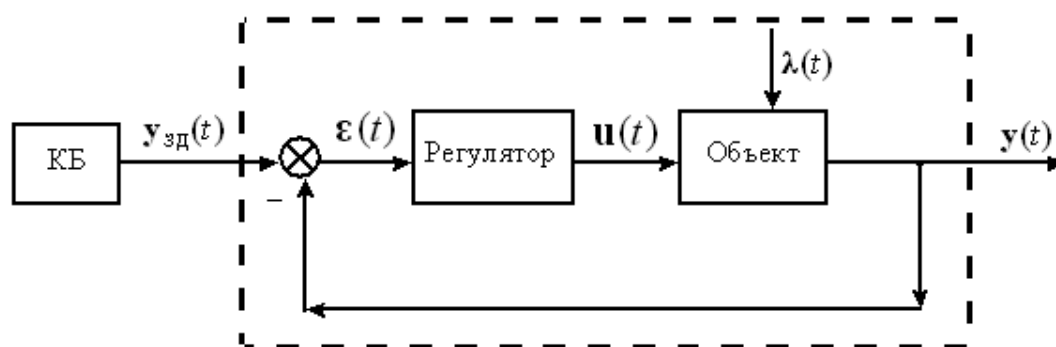


Рисунок В.3 – Декомпозиция замкнутой системы управления

Вырабатываемое командным блоком (КБ) воздействие $y_{зд}(t)$ подается на вход подсистемы регулирования (на рисунке В.3 она очерчена штриховой линией), где на основании векторного сигнала ошибки управления $\epsilon(t)$ регулятор формирует управляющее воздействие $u(t)$.

Понятие «регулирование» является частным случаем более широкого понятия «управление» и заключается в выравнивании отклонений от нормы, каждое значение которой определяется управлением.

Определение координат вектора $\varepsilon(t)$ осуществляется с помощью сумматора, обозначенного на схеме кружочком; причем у концов входящих в сумматор стрелок, соответствующих слагаемым, суммируемым с отрицательным знаком, ставится минус.

Смысл подобного, опосредованного через подсистему регулирования, управления состоит в том, что отклонения управляемых координат вектора $y(t)$ от заданных значений, т. е. соответствующих координат вектора $y_{зд}(t)$, достаточно эффективно устраняются регулятором, так что такую систему управления можно рассматривать как систему управления объектом без возмущений, функции которого теперь выполняет подсистема регулирования в целом.

Таким образом, рассмотренную систему управления можно считать двухуровневой: первый (нижний) уровень образует подсистема регулирования, второй – система управления со структурой, показанной на рисунке В.3, в которой в качестве контроллера выступает командный блок, а в качестве объекта подсистема регулирования.

Такого рода двухуровневые (а в общем случае и многоуровневые) системы управления, у которых верхний уровень выполняет командные функции по отношению к нижестоящему уровню получили название *иерархических систем управления*. Расчленение системы на соподчиненные уровни, на каждом из которых решается своя, относительно простая частная задача управления, позволяет сравнительно просто и эффективно решить общую проблему управления.

В общем случае в двухуровневых иерархических системах управления находящийся на верхнем уровне командный блок не только выдает команды для подсистемы регулирования, как показано на рисунке В.3, но и принимает от нее ответные сигналы, являющиеся своего рода отчетом о степени успешности исполнения полученных команд. Таким ответным сигналом (рисунок В.4) для командного блока является вектор ошибки управления $\varepsilon(t)$, характеризующий, как это можно видеть из выражения (В.1.1), расхождение между поставленной целью управления (В.1.1) и ее практической реализацией.

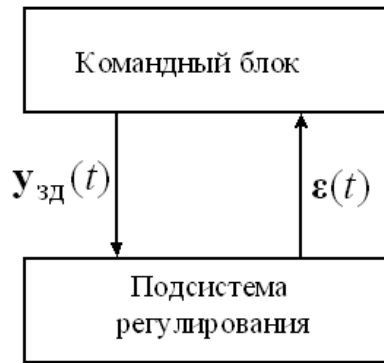


Рисунок В.4 – Двухуровневая иерархическая система управления

Командный блок непрерывно анализирует полученную информацию на основании принятого критерия качества управления $K(\varepsilon)$. На основании такого анализа он может принять решение все оставить без изменений, если качество управления будет признано удовлетворительным, или модифицировать алгоритм управления, если оно окажется недопустимо низким.

Системы управления, способные изменять в процессе функционирования алгоритм управления, приспособляясь, таким образом, к изменяющимся условиям работы, получили название *адаптивных*.

В тех случаях, когда некоторые из возмущающих воздействий доступны непосредственному контролю, целесообразно использовать системы, в которых управление осуществляется как по возмущению, так и по отклонению. Такие системы называются *комбинированными* (рисунок В5). Согласно рисунку В5 в комбинированной системе контролируемое возмущение $\lambda(t)$ поступает на вход так называемого корректирующего устройства, вырабатывающего сигнал $\gamma(t)$, который затем со знаком минус добавляется сумматором к сигналу задания $y_{зд}(t)$. Следовательно, в комбинированной системе ошибка управления определяется равенством

$$\varepsilon(t) = y_{зд}(t) - \gamma(t) - y(t). \quad (В.2.2)$$

Согласно выражению (В.2.2) комбинированная система быстрее реагирует на контролируемое возмущение $\lambda(t)$, т. к. сигнал $\gamma(t)$ оказывает влияние на величину ошибки управления $\varepsilon(t)$ сразу при появлении этого возмущения, еще до того, как оно повлияет на управляемый объект.

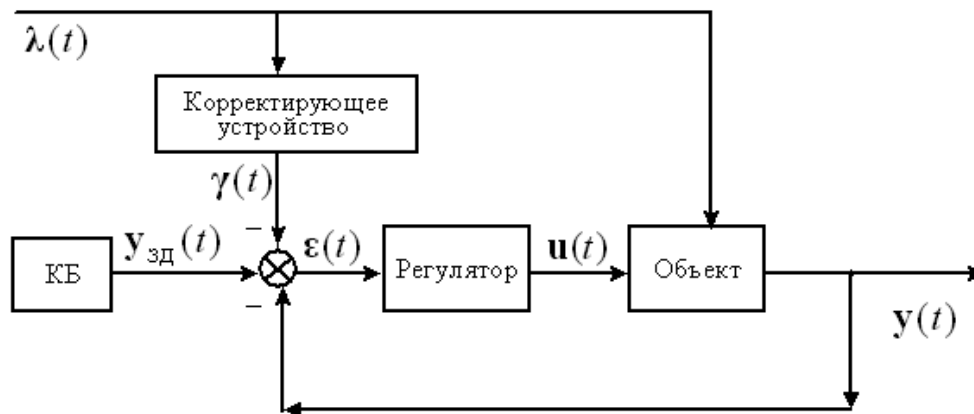


Рисунок В5 – Комбинированная система управления

Системы управления принято также различать по виду задающего воздействия $y_{зд}(t)$.

Если оно постоянно, т.е. не меняется со временем, то такие системы принято называть **системами стабилизации**.

При изменении величины $y_{зд}(t)$ по заранее заданному закону соответствующая система называется **системой программного управления**.

В тех случаях, когда воздействие $y_{зд}(t)$ поступает на вход системы извне и закон его изменения заранее не известен, система называется **следящей**, т.к. ее задачей является обеспечить выполнение равенства $y(t) = y_{зд}(t)$.

В зависимости от величины произведения $r \times q$ системы управления подразделяются на **одномерные** ($r \times q = 1$) и **многомерные** ($r \times q > 1$). Следовательно, к одномерным системам относятся лишь те, у которых объект имеет один вход ($r = 1$) и один выход ($q = 1$). В противном случае система является многомерной.

Многомерные системы, в свою очередь, делятся на системы связанного и несвязанного управления.

Система несвязанного управления имеет несколько управляющих устройств, каждое из которых осуществляет управление своей выходной координатой объекта. При этом все эти устройства не имеют взаимных связей. Последнее, однако, не исключает возможности влияния управляющих устройств друг на друга через объект управления или, например, общий источник питания.

В *системе связанного управления* отдельные управляющие устройства связаны друг с другом внешними связями.

Входящая в состав многомерной системы управления (как связанной, так и несвязанной) отдельная система управления называется *автономной*, если управляемая с ее помощью выходная координата объекта не зависит от значений остальных его координат, так что изменение последних не вызывает изменения этой координаты.

Линейной называется система, которая описывается линейными уравнениями. В противном случае система является *нелинейной*. Чтобы система была нелинейной, достаточно иметь в ее составе хотя бы один элемент, описываемый нелинейным уравнением.

Для линейных систем справедлив *принцип суперпозиции*. Он заключается в том, что реакция системы на любую комбинацию внешних воздействий равна сумме реакции на каждое из этих воздействий, поданных на систему порознь. Благодаря принципу суперпозиции разработана общая теория линейных систем автоматического управления, описываемых линейными дифференциальными уравнениями любого порядка.

К нелинейным системам принцип суперпозиции неприменим. Нет и общей теории нелинейных дифференциальных уравнений, на основе которой могла бы быть создана общая теория нелинейных систем автоматического управления. Существует лишь ряд частных методов для решения некоторых видов нелинейных уравнений невысокого порядка. Вместе с тем, если не ограничивать диапазона изменения входных воздействий, то все реальные системы автоматического управления оказываются нелинейными. Трудность исследования нелинейных систем заставляет упрощать их описание. Желательным пределом такого упрощения является приближенное описание их линейными уравнениями, хотя бы в некоторых из интересующих нас режимов. Это называется *линеаризацией* нелинейных систем. В тех случаях, когда линеаризация невозможна, прибегают к приближенным методам исследования нелинейных систем с учетом их нелинейностей.

Стационарной называется система, все параметры которой не изменяются во времени. *Нестационарная* система – это система с переменными параметрами. При математическом описании нестационарной системы это проявляется в том, что некоторые коэффициенты описывающих ее дифференциальных уравнений являются функциями времени.

В соответствии с данным определением, в отличие от нестационарной системы, реакция стационарной системы на одно и то же воздействие не зависит от момента приложения этого воздействия.

Системы управления бывают непрерывного или дискретного действия в зависимости от вида преобразования сигналов, составляющими систему элементами (звеньями).

Система непрерывного действия, или, короче **непрерывная (аналоговая) система**, состоит только из элементов непрерывного действия, т. е. элементов, выходной сигнал которых изменяется плавно (непрерывно) при плавном изменении входного сигнала.

Система дискретного действия, или **дискретная система**, – это система, содержащая хотя бы один элемент дискретного действия. Элементом дискретного действия называется такой элемент, выходной сигнал которого изменяется дискретно, т. е. скачками, даже при плавном изменении входного сигнала. Скачки выходного сигнала могут происходить либо при прохождении входной величиной определенных пороговых значений (элемент релейного действия), либо через определенный интервал времени (элемент импульсного действия).

В.3. Типовые алгоритмы управления

Автоматическое управление относится к числу наиболее изученных функций автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУТП) и обычно осуществляется по известным типовым алгоритмам управления, преобразующими сигнал ошибки управления $\epsilon(t)$ в управляющее воздействие $u(t)$.

В результате теоретических исследований автоматических систем и многолетней практики автоматизации технологических процессов различных производств были разработаны четыре алгоритма управления, получившие название **типовых**, т. к. на их основе реализуются технические средства управления, серийно выпускаемые промышленностью.

Ввиду широкого практического применения типовых алгоритмов их иногда называют также **законами управления**.

Наиболее простым среди типовых алгоритмов является **пропорциональный алгоритм**, сокращенно называемый П-алгоритмом. Он может быть записан следующим образом:

$$u(t) = K_p \varepsilon(t), \quad (\text{В.3.1})$$

где K_p – коэффициент пропорциональности.

Устройства, реализующие П-алгоритм называются П-регуляторами, а коэффициент K_p – коэффициентом передачи регулятора. Поскольку его конкретное значение определяется в процессе настройки регулятора, то его принято называть также *параметром настройки* П-регулятора.

Несомненным достоинством П-регулятора является его высокое быстродействие, т.к. при появлении на его входе сигнала ошибки $\varepsilon(t)$ он практически мгновенно вырабатывает управляющее воздействие $u(t)$, способствующее уменьшению величины $|\varepsilon(t)|$. Однако при этом он тут же «забывает» о предыстории процесса управления. Поэтому этот вид регуляторов наилучшим образом приспособлен для управления быстропеременными процессами, между значениями которых, даже близкими по времени появления, отсутствует тесная взаимосвязь.

Однако такая информация оказывается весьма полезной при управлении процессами, текущие значения которых существенно зависят от предшествующих. Наиболее характерными представителями таких процессов являются постоянные величины. Поэтому для уменьшения модуля постоянной составляющей (среднего значения) $\varepsilon(t)$, т. е. величины

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \left| \int_0^T \varepsilon(t) dt \right|,$$

где T – период усреднения по времени, был разработан *интегральный алгоритм* управления (И-алгоритм), описываемый формулой

$$u(t) = \frac{K_p}{T_{\text{И}}} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (\text{В.3.2})$$

где $T_{\text{И}}$ – постоянная времени интегрирования.

Отметим, что регулятор, реализуемый на основе И-алгоритма управления, по существу имеет единственный параметр настройки, значение которого определяется отношением $K_p/T_{\text{И}}$.

И-регулятор устраняет постоянную составляющую $\varepsilon(t)$, но, в отличие от П-регулятора, весьма слабо реагирует на мгновенные значения $\varepsilon(t)$, т. к. они учитываются в законе управления (В.3.2) с малым весом Δt .

Для устранения этого недостатка был предложен *пропорционально-интегральный* алгоритм управления (ПИ-алгоритм), задаваемый выражением

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + \frac{K_p}{T_I} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (\text{В.3.3})$$

Как видно из (В.3.3) ПИ-алгоритм представляет собой линейную комбинацию алгоритмов (В.3.1) и (В.3.2). Поэтому он, сохраняя достоинства И-алгоритма, позволяет повысить его быстродействие благодаря введению пропорциональной составляющей ошибки управления.

В целях повышения эффективности управления важно не только своевременно реагировать на мгновенные изменения величины $\varepsilon(t)$ и отслеживать предысторию процесса управления, что собственно и делает ПИ-алгоритм, но желательно также прогнозировать тенденцию изменения $\varepsilon(t)$. Такой прогноз может быть сделан на основе анализа значений производной $d\varepsilon(t)/dt$. Если в момент времени t величина $d\varepsilon(t)/dt$ положительна, то в последующие моменты времени следует ожидать возрастания ошибки управления $\varepsilon(t)$, а в противном случае – ее уменьшения.

Изложенные соображения привели к созданию *пропорционально-интегрально-дифференциального* алгоритма (ПИД-алгоритма) управления, записываемого в виде

$$u(t) = K_p T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + K_p \varepsilon(t) + \frac{K_p}{T_I} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (\text{В.3.4})$$

где T_D – постоянная времени дифференцирования.

Замена ПИ-регулятора на ПИД-регулятор обычно позволяет повысить качество управления, но при этом появляется дополнительный параметр настройки T_D , что несколько усложняет процедуру настройки регулятора. Поэтому ПИ-регуляторы наряду с ПИД-регуляторами достаточно часто применяются на практике.

Следует отметить, что реальные регуляторы по разным причинам лишь приближенно реализуют законы управления (В.3.1)–(В.3.4). Тем не менее, при расчете их параметров настройки обычно считают, что эти законы реализованы точно, а возможные отклонения от них относят к управляемому объекту, т.е. регулятор разбивают на два блока, первый из которых идеально реализует типовой алгоритм управления, а второй изменяет его выходной сигнал таким образом, чтобы он совпадал с выходным сигналом реального регулятора. Этот второй блок и включают условно в состав управляемого объекта, принимая, что его вход совпадает со входом второго блока.

В4. Тест В

1. Систему управления образуют управляемый объект и
 - а) действующие на него возмущения;
 - б) окружающая среда;
 - в) управляющее устройство.
2. Возмущающие воздействия влияют на объект управления и приводят к
 - а) перераспределению в нем материально-энергетических потоков;
 - б) нежелательным отклонениям его выходных величин от заданных значений;
 - в) изменению информационных потоков в системе управления.
3. Ошибка управления характеризует
 - а) качество управления;
 - б) инерционность системы;
 - в) точность измерения значений выходных величин.
4. Наличие помех обусловлено
 - а) появлением ошибки управления;
 - б) шумами датчиков и наводками в линиях связи;
 - в) влиянием на объект внешней среды.
5. Контроллером называется автоматическое устройство, выполняющее функции
 - а) контроля;
 - б) управления;
 - в) измерения.

6. Существуют ... принципа управления.
- а) два;
 - б) три;
 - в) четыре.
7. Основным достоинством разомкнутых систем является
- а) высококачественное управление;
 - б) простота технической реализации;
 - в) высокое быстродействие.
8. Критерий управления численно характеризует степень успешности
- а) достижения системой управления поставленной перед ней цели;
 - б) выбора технических средств управления;
 - в) выбора программных средств управления.
9. Канал, по которому информация с выхода объекта подается на вход контроллера, называется
- а) мультиплексным каналом;
 - б) информационным каналом;
 - в) каналом обратной связи.
10. Понятие «регулирование» является частным случаем более широкого понятия
- а) «системное взаимодействие»;
 - б) «управление»;
 - в) «управление с обратной связью».

ГЛАВА I

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Дифференциальные уравнения объектов управления

При изучении систем управления не следует ограничиваться рассмотрением только их установившихся (статических) режимов – такие режимы должны рассматриваться лишь как частные случаи, более общих, неустановившихся (динамических) режимов. Поэтому математическим аппаратом изучения производственных объектов должен быть аппарат дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения объекта и контроллера являются математической записью их математических моделей, в которых должны найти отражение те их особенности, которые необходимо учитывать для правильного решения поставленной задачи исследования. Поскольку среди всего многообразия видов дифференциальных уравнений общие методы решения имеют лишь линейные дифференциальные уравнения, то при построении математических моделей объектов следует всегда, когда это только возможно, стремиться к построению линейных математических моделей, т.е. к составлению линейных дифференциальных уравнений.

Так как теория автоматического управления оперирует с математическими моделями реальных физических объектов, то ее методы могут применяться к объектам самой разнообразной физической природы, описываемым одинаковыми уравнениями.

Существование в реальных физических системах неустановившихся динамических режимов обусловлено наличием в таких системах емкостей, где аккумулируется вещество или энергия, изменение количества которых не может произойти мгновенно. В зависимости от особенностей движения материально-энергетических потоков внутри управляемых объектов динамические системы делятся на системы: с *распределенными* и *сосредоточенными* параметрами. Для систем с распределенными параметрами необходимо учитывать зависимость скорости указанного движения от геометрических координат, а в случае систем с сосредоточенными параметрами такая зависимость несущественна. Это связано с тем, что распределенность параметров в пространстве сказывается лишь в тех случаях, когда плотности аккумулированного объектом вещества или энергии присуща пространственная неоднородность

Уравнение материально-энергетического баланса для каждой емкости с однородным пространственным распределением накопленного вещества или энергии в неустановившемся режиме (когда содержание вещества или энергии в емкости меняется) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка следующего вида:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F[x(t), u(t), \lambda(t)], \quad (1.1.1)$$

где $x(t)$ – переменная состояния объекта; $u(t)$ – управляющее воздействие; $\lambda(t)$ – возмущающее воздействие на объект, приводящие к изменению его состояния.

Для объектов с сосредоточенными параметрами состояние $x(t)$ зависит лишь от времени и не зависит от пространственных координат.

Если объект с сосредоточенными параметрами содержит не одну, а $n > 1$ (n – целое положительное число) емкостей, то его поведение будет описываться системой из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую можно записать в векторном виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)], \quad (1.1.2)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – n -мерный вектор состояния объекта, координаты которого $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ характеризуют содержание вещества или энергии в каждой емкости в момент времени t ; $\mathbf{u}(t)$ – q -мерный вектор управляющих воздействий, причем $q \leq n$; $\lambda(t)$ – n -мерный вектор возмущающих воздействий.

Функция \mathbf{F} в правой части равенства (1.1.2) также является n -мерным вектором. В тех случаях, когда хотя бы одна из его координат F_k , $k = \overline{1, n}$ окажется нелинейной функцией векторных переменных $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ и $\lambda(t)$ система уравнений (1.1.2) называется нелинейной. Поэтому и описываемый этой системой объект также принято считать нелинейным. Напротив, если все эти функции линейны, то и объект называется линейным.

Рассмотрим пример линейного объекта с сосредоточенными параметрами.

Пример 1.1. Исследуем процесс изменения со временем температуры воздуха $T(t)$ в помещении, обогреваемым электронагревателем, выделяющим мощность $P(t)$. Согласно закону сохранения энергии тепло ΔQ_P выделяемое электронагревателем за время Δt , расходуется на изменение температуры $T(t)$, а также на теплопотери ΔQ_{Π} в более холодную окружающую среду с температурой $T_c(t)$.

Составим уравнение теплового баланса для данного помещения, предполагая, что температура его внутренней воздушной среды повсюду одинакова. В таком случае имеем

$$\Delta Q_P = \Delta Q_T + \Delta Q_C, \quad (1.1.3)$$

причем

$$\Delta Q_P = P(t)\Delta t; \quad \Delta Q_T = C_{\Pi}\Delta T; \quad \Delta Q_C = \alpha[T(t) - T_c(t)]\Delta t, \quad (1.1.4)$$

где C_{Π} и ΔT – соответственно теплоемкость помещения и изменение его температуры $T(t)$ в течении времени Δt ; α – коэффициент теплоотдачи помещения.

Подставив выражения (1.1.4) в уравнение (1.1.3) и выполнив несложные преобразования получим

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = aT(t) + bP(t) + \frac{\alpha}{C_{\Pi}}T_c(t), \quad (1.1.5)$$

где

$$a = \frac{\alpha}{C_{\Pi}}; b = \frac{1}{C_{\Pi}}. \quad (1.1.6)$$

Полагая в уравнении (1.1.5), что $\Delta t \rightarrow 0$ представим его в дифференциальном виде

$$\frac{dT(t)}{dt} = aT(t) + bP(t) + \frac{\alpha}{C_{\Pi}}T_c(t). \quad (1.1.7)$$

Сделав в уравнении (1.1.7) замены

$$T(t) = x(t); P(t) = u(t), \quad (1.1.8)$$

а также

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{C_{\Pi}}T_c(t) &= \lambda(t); \\ ax(t) + bu(t) + \lambda(t) &= F[x(t), u(t), \lambda(t)], \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

представим его в стандартном виде (1.1.1).

Как видно из выражения (1.1.9), в рассматриваемом случае функция F линейно зависит от своих аргументов x , u и λ . Поэтому и объект, движение которого задается уравнением (1.1.7), является линейным и относится к классу объектов с сосредоточенными параметрами, т.к. это уравнение не зависит от пространственных координат.

Рассмотрим также пример нелинейного объекта.

Пример 1.2. Вновь исследуем объект, математическая модель которого была описана в примере 1.1. Однако на этот раз будем считать, что коэффициент теплоотдачи помещения зависит от его температуры T , т. е.

$$\alpha = \beta T + \gamma, \quad (1.1.10)$$

где β и γ – постоянные коэффициенты. После подстановки выражения (1.1.10) в уравнение (1.1.6), (1.1.7) получим

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{C_{\Pi}} \left\{ -\beta T^2(t) + [\beta T_c(t) - \gamma]T(t) + 1 \right\} + bP(t) + \frac{\gamma}{C_{\Pi}}T_c(t) \quad (1.1.11)$$

Выполнив в уравнении (1.1.11) замены (1.1.8), а также подстановки

$$a_2 = \frac{\beta}{C_{\Pi}}; \quad a_1 = \frac{\gamma}{C_{\Pi}}; \quad c = \frac{\beta}{\gamma}; \quad \lambda(t) = \frac{\gamma}{C_{\Pi}} T_c(t),$$

представим его в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_2 x^2(t) + [c\lambda(t) + a_1]x(t) + bu(t) + \lambda(t). \quad (1.1.12)$$

Поскольку функция

$$a_2 x^2(t) + [c\lambda(t) + a_1]x(t) + bu(t) + \lambda(t) = F[x(t), u(t), \lambda(t)]$$

в уравнении (1.1.12) содержит нелинейный член $x^2(t)$, то данное уравнение является нелинейным.

Данный пример показывает, что по мере уточнения существующих зависимостей между входными и выходными сигналами управляемых объектов, отвечающие им математические модели усложняются, и линейные уравнения приходится заменять нелинейными. Поэтому на практике обычно имеют дело с нелинейными объектами.

Но и в этих случаях линейные модели часто оказываются весьма полезными. Дело в том, что нелинейную векторную функцию \mathbf{F} в уравнении (1.1.2) можно приближенно заменить линейной.

Рассмотрим случай, когда векторное возмущающее воздействие $\lambda(t)$ является *аддитивным*, т. е. уравнение (1.1.2) имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] + \lambda(t). \quad (1.1.13)$$

Пусть также для постоянных векторов \mathbf{x}_0 и \mathbf{u}_0 выполняется равенство

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{I}, \quad (1.1.14)$$

где \mathbf{I} – n -мерный нулевой вектор, т. е. вектор, имеющий n координат, каждая из которых равна нулю.

Разложим векторную функцию \mathbf{F} в ряд Тейлора в окрестности векторов \mathbf{x}_0 и \mathbf{u}_0 , ограничившись лишь двумя первыми членами данного разложения. В результате получим

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0), \quad (1.1.15)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} – матрицы размерностей $(n \times n)$ и $(n \times q)$ соответственно, причем

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0; \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}; \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0; \mathbf{u} = \mathbf{u}_0} \quad (1.1.16)$$

Отметим, что элементы A_{kh} и B_{kj} матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} согласно выражениям (1.1.16) задаются равенствами

$$A_{kh} = \left. \frac{\partial F_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_h} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0; \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}; \quad B_{kj} = \left. \frac{\partial F_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0; \mathbf{u} = \mathbf{u}_0}.$$

Введя обозначения

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0; \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$$

уравнение (1.1.13) с учетом равенств (1.1.14) и (1.1.15) представим в виде

$$\frac{d \hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) + \boldsymbol{\lambda}(t). \quad (1.1.17)$$

Уравнение (1.1.17) называется уравнением состояния объекта.

Таким образом, при малых отклонениях векторов $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{u}}$ от положения равновесия объекта $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ уравнение (1.1.13) приближенно можно представить в линейном виде (1.1.17).

Отметим также, что с помощью измерительной аппаратуры не всегда измеряются координаты вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ объекта. Нередко это бывают другие величины, связанные с векторами $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ функциональной зависимостью

$$y_l(t) = \Psi_l[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] + \xi_l(t); \quad l = \overline{1, r}, \quad (1.1.18)$$

где $\xi_l(t)$ – сигналы различных помех, обусловленных шумами датчиков и наводками в линиях связи.

При выполнении процедуры линеаризации равенства (1.1.18) также линеаризуются. Представим их в векторном виде

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Psi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] + \boldsymbol{\xi}(t), \quad (1.1.19)$$

где $\mathbf{y}(t)$, $\boldsymbol{\Psi}$ и $\boldsymbol{\xi}(t)$ – r -мерные векторы ($r \leq n$). Разложим векторную функцию $\boldsymbol{\Psi}$ в ряд Тейлора в окрестности вектора $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, ограничившись при этом лишь двумя первыми членами этого ряда

$$\Psi[\mathbf{x}(t)] \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{C}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{D}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \xi(t), \quad (1.1.20)$$

где

$$\mathbf{y}_0 = \Psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0); \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0; \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}; \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0; \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \dots$$

Используя обозначение

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0,$$

а также приближенное равенство (1.1.20), представим выражение (1.1.19) в линейном виде

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}}(t) + \xi(t), \quad (1.1.21)$$

где матрицы \mathbf{C} и \mathbf{D} имеют соответственно размерности $(r \times n)$ и $(r \times q)$. Обычно матрица \mathbf{C} называется матрицей состава измерений, а уравнение (1.1.21) – уравнением выхода, т. к. оно определяет, регистрируемый измерительной аппаратурой на выходе объекта, вектор $\hat{\mathbf{y}}(t)$.

Уравнения (1.1.21) и (1.1.17) называются *уравнениями движения объекта*, т.к. они описывают процесс изменения его переменных состояния и других, связанных с ними величин.

Линейные уравнения движения объекта

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \lambda(t); \quad (1.1.22)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \xi(t), \quad (1.1.23)$$

отличаются от уравнений (1.1.17), (1.1.21) тем, что переменные в линеаризованных уравнениях имеют вверху «крышечку». Однако в дальнейшем, там, где это не ведет к каким-либо недоразумениям, данное обозначение будем опускать, т. е. в основном будем использовать уравнения (1.1.22) и (1.1.23).

Предположим, что в уравнениях (1.1.22) и (1.1.23) векторные сигналы $\lambda(t)$ и $\xi(t)$ отсутствуют, а величины $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ являются скалярными, т. е. выполняются равенства

$$\mathbf{y}(t) = y_1(t); \quad \mathbf{u}(t) = u_1(t). \quad (1.1.24)$$

Выполнение равенств (1.1.24) означает, что объект имеет лишь один вход и один выход. В таком случае уравнения (1.1.22) и (1.1.23) принимают вид

$$y_1(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + D_{11}u_1(t); \quad (1.1.25)$$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u_1(t), \quad (1.1.26)$$

где \mathbf{b} – n -мерный вектор, а \mathbf{C} – матрица размерности $(1 \times n)$.

Координаты $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ вектора $\mathbf{x}(t)$ можно выразить через $y_1(t)$, $u_1(t)$ и их производные по времени до $n-1$ порядка включительно.

Действительно, продифференцировав по времени уравнение (1.1.25) получим

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + D_{11} \frac{du_1(t)}{dt}. \quad (1.1.27)$$

После подстановки в уравнение (1.1.27) выражения для $d\mathbf{x}(t)/dt$ из уравнения (1.1.26) имеем

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{b}u_1(t) + D_{11} \frac{du_1(t)}{dt}.$$

В результате, для определения координат вектора $\mathbf{x}(t)$ получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = y_1(t) - D_{11}u_1(t); \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \frac{dy_1(t)}{dt} - \mathbf{C}\mathbf{b}u_1(t) - D_{11} \frac{du_1(t)}{dt}; \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(t) = \frac{d^{n-1}y_1(t)}{dt^{n-1}} - \mathbf{C}\mathbf{b} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k u_1(t)}{dt^k} - D_{11} \frac{d^{n-1}u_1(t)}{dt^{n-1}}. \end{cases} \quad (1.1.28)$$

Система (1.1.28) имеет решение лишь в тех случаях, когда ранг матрицы

$$M_{\text{нб}} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.1.29)$$

равен n . Матрица $M_{\text{нб}}$ называется матрицей наблюдаемости и

имеет размерность $(n \times n)$, т. к. размерности каждой из составляющих ее матриц \mathbf{C} , \mathbf{CA} , ..., \mathbf{CA}^{n-1} равны $(1 \times n)$.

Задача восстановления координат вектора $\mathbf{x}(t)$ по результатам регистрации выходных сигналов объекта $\mathbf{y}(t)$ и управляющих воздействий $\mathbf{u}(t)$ получила название *задачи наблюдения*, если возмущениями $\lambda(t)$ и помехами $\xi(t)$ можно пренебречь.

Таким образом, восстановление всех координат вектора $\mathbf{x}(t)$ оказывается принципиально возможным в тех случаях, когда задача наблюдения разрешима, т. е. объект управления вполне наблюдаем (ранг матрицы $M_{\text{нб}}$ равен n).

Приведем простейшие примеры.

Пример 1.3. Пусть система описывается следующими уравнениями:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = u_1(t); \quad y_1(t) = x_1(t).$$

В этом случае имеем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \ 0].$$

Поскольку вектор состояния системы $\mathbf{x}(t)$ имеет две координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$, то ее размерность $n = 2$. Следовательно, матрица наблюдаемости $M_{\text{нб}}$, заданная выражением (1.1.29), принимает вид

$$M_{\text{нб}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}.$$

Так как

$$\mathbf{CA} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 1],$$

то

$$M_{\text{нб}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В рассмотренной системе управляемый объект полностью наблюдаем, т. к. ранг матрицы $M_{\text{нб}}$ равен двум.

Пример 1.4. Пусть система задана уравнениями

$$\frac{dx_1(t)}{dt} x_2(t); \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = u_1(t); \quad y_1(t) = x_2(t).$$

В этом случае изменилась только матрица $C = [0 \ 1]$. Следовательно,

$$CA = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0].$$

В результате получим

$$M_{\text{нб}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В данной системе объект не вполне наблюдаем, т. к. детерминант матрицы $M_{\text{нб}}$ равен нулю. В рассматриваемом случае измеряется координата $x_2(t)$, т. е. скорость изменения координаты $x_1(t)$. Поэтому значение самой величины $x_1(t)$ остается неопределенным.

Вернемся к рассмотрению системы (1.1.28), полагая управляемый объект вполне наблюдаемым. Поскольку находящиеся в правой части системы уравнений (1.1.28) выражения линейно зависят от $y_1(t)$, $u_1(t)$ и их производных по времени до $n - 1$ порядка включительно, то через линейную комбинацию этих же величин окажутся выраженными и координаты вектора $x(t)$. Тогда после их подстановки в уравнение (1.1.26) получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k y_1(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k u_1(t)}{dt^k}, \quad (1.1.30)$$

где α_k и β_k – постоянные коэффициенты. Уравнение (1.1.30) устанавливает взаимосвязь между входной $u_1(t)$ и выходной $y_1(t)$ величинами объектов, причем порядок старшей производной в его правой части не должен превышать ее порядок в левой части данного уравнения, т. к. в противном случае объект невозможно реализовать технически.

Многомерные линейные стационарные объекты, имеющие q входов и r выходов, описываются системой линейных уравнений, аналогичных уравнению (1.1.30), т. е.

$$\sum_{k=0}^{n_h} \alpha_{hk} \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{n_j} \beta_{jk} \frac{d^k u_j(t)}{dt^k}; \quad n_h \geq n_j; \quad (h = \overline{1, r}; j = \overline{1, q}), \quad (1.1.31)$$

где n_h и n_j – положительные целые числа; h и j – номера выходов и входов объекта.

Рассмотрим также обратную задачу. Пусть одномерный объект, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k y_1(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k u_1(t)}{dt^k} + \lambda_n(t), \quad (1.1.32)$$

где $\lambda_n(t)$ – возмущающее воздействие, требуется описать в пространстве состояний, т. е. перейти к системе уравнений (1.1.25) и (1.1.26).

Тогда требуемый переход можно выполнить, воспользовавшись обозначениями

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = x_{k+1}(t), \quad k = \overline{1, n-1}; \quad (1.1.33)$$

$$\frac{du_k(t)}{dt} = u_{k+1}(t), \quad k = \overline{1, n-1}; \quad (1.1.34).$$

Выражения (1.1.33) и (1.1.34) определяют координаты вектора состояния $x(t)$ и вектора управляющих воздействий $u(t)$ для объекта (1.1.32).

Полагая, что

$$C_{11} = 1; \quad C_{hk} = D_{hk} = 0, \quad (h > 1, k > 1); \quad \xi(t) \equiv 0,$$

запишем уравнение (1.1.23) в скалярном виде

$$y_1(t) = x_1(t) + D_{11}u_1(t), \quad (1.1.35)$$

где C_{hk} и D_{hk} – элементы матриц \mathbf{C} и \mathbf{D} соответственно.

Подставив в уравнение (1.1.32) выражение (1.1.35) получим

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k x_1(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n (\beta_k - \alpha_k D_{11}) \frac{d^k u_1(t)}{dt^k} + \lambda_n(t). \quad (1.1.36)$$

Выберем значение величины D_{11} так, чтобы выполнялось равенство

$$D_{11} = \frac{\beta_n}{\alpha_n}. \quad (1.1.37)$$

С учетом выражения (1.1.37) уравнение (1.1.36) представим в виде

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k x_1(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \frac{d^k u_1(t)}{dt^k} + \lambda_n(t). \quad (1.1.38)$$

где

$$\gamma_k = \beta_k - \alpha_k D_{11}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (1.1.39)$$

Воспользовавшись обозначениями (1.1.33) и (1.1.34) уравнение (1.1.38) запишем следующим образом:

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_n} x_k(t) + \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_{k-1}}{\alpha_n} u_k(t) + \lambda_n(t). \quad (1.1.40)$$

Обозначив

$$A_{nk} = - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_n}; \quad B_{nk} = \frac{\gamma_{k-1}}{\alpha_n}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.1.41)$$

уравнение (1.1.40) приведем к виду

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{nk} x_k(t) + \sum_{k=1}^n B_{nk} u_k(t) + \lambda_n(t). \quad (1.1.42)$$

Кроме того, полагая

$$A_{nk} = \begin{cases} 1, & h = k + 1; \\ 0, & h \neq k + 1; \end{cases} \quad B_{kh} = 0; \quad \lambda_k(t) \equiv 0, \quad (1.1.43)$$

$$(k = \overline{1, n-1}, h = \overline{1, n}),$$

уравнения (1.1.33) также представим в виде, аналогичным (1.1.42), т. е.

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n A_{kh} x_h(t) + \sum_{k=1}^n B_{kh} u_h(t) + \lambda_k(t), \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (1.1.44)$$

Уравнения (1.1.42) и (1.1.44) с учетом выражений (1.1.39), (1.1.41) и (1.1.43) представляют собой запись матрично-векторного уравнения движения объекта (1.1.22) в скалярном виде.

Таким образом, при отсутствии шумов и помех уравнения (1.1.22), (1.1.23) эквивалентны уравнению (1.1.32). Если пренебрегать шумами и помехами недопустимо, то указанная эквивалентность имеет место лишь в тех случаях, когда в уравнении (1.1.32) порядок старшей производной в правой части ниже, чем в левой, т. е. $\beta_n = 0$. При этом шумы и помехи добавляются к возмущающим воздействиям.

Перейдем к рассмотрению линейных объектов с пространственно распределенными параметрами.

Пример 1.5. Пусть помещение длины l обогревается двумя электрообогревателями, расположенными в его торцах, как показано на рисунке 1.1.

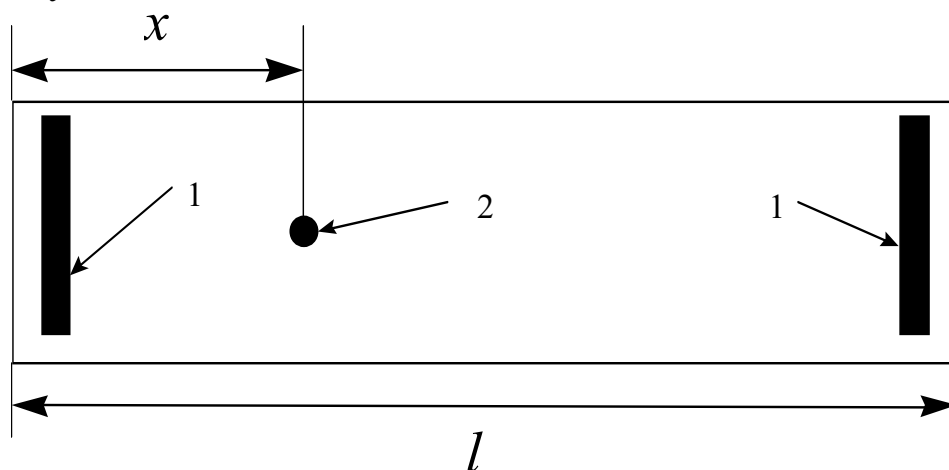


Рисунок 1.1 – Система обогрева помещения:
 1 – электрообогреватель; 2 – датчик температуры

Для измерения температуры воздуха в помещении применяется датчик температуры, удаленный от левого обогревателя на расстояние x . Предположим также, что теплопотери через пол, потолок и боковые стены помещения пренебрежимо малы. В таком случае температура в помещении зависит от времени t и единственной пространственной координаты x . Поэтому уравнение температуропроводности, которому удовлетворяет измеряемая датчиком температура $T(x, t)$, принимает вид

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.1.45)$$

где a^2 – коэффициент температуропроводности внутренней воздушной среды помещения.

Влияние обогревателей на температуру $T(x, t)$, учтем с помощью граничных условий

$$T(0, t) = u_1(t); \quad T(l, t) = u_2(t), \quad (1.1.46)$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – заданные функции времени, определяющие температуру на поверхности обогревателей.

Таким образом, рассмотренный пример показывает, что объекты с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, решения которых зависят не только от времени, но и от пространственных координат. Наличие такой зависимости позволяет учесть пространственную неоднородность аккумулированных объектом запасов вещества и энергии.

Для простоты обычно предполагают, что взаимодействие между частями составной системы осуществляется мгновенно. Однако во многих случаях время взаимодействия важно учитывать даже для определения качественного поведения системы.

Рассмотрим простой пример, показывающий, как пространственная распределенность параметров системы, сказывается на ее динамических свойствах.

Пример 1.6. Допустим, что помещение отапливается с помощью водяной системы обогрева, причем теплоноситель (горячая вода) поступает по трубам от котельной, удаленной от помещения на расстояние l . Пусть скорость циркуляции теплоносителя по трубам равна V , тогда взаимосвязь его температур на входе в систему обогрева помещения $y(t)$ и на выходе из котельной $u(t)$ устанавливается следующим равенством:

$$y(t) = u(t - \tau), \quad (1.1.47)$$

где τ – постоянная времени транспортного запаздывания, причем $\tau = l/V$

Отметим, что при выводе соотношения (1.1.47) предполагалось, что теплотери при транспортировке теплоносителя пренебрежимо малы.

Объекты с транспортным запаздыванием нередко встречаются на практике. К их числу относятся ленточные транспортеры, линии связи и даже финансовые потоки, т. к. перечисление денежных средств от отправителя к их получателю осуществляется с временной задержкой.

Рассмотрим также весьма важное свойство объектов, которое необходимо учитывать при постановке задачи управления, которую можно сформулировать в виде следующего требования: найти управляющее воздействие $\mathbf{u}(t)$, позволяющее перевести объект из начального состояния $\mathbf{x}(t_0)$ в заданное конечное состояние $\mathbf{x}(t_1)$ в течение конечного интервала времени $[t_0, t_1]$.

В тех случаях, когда решение данной задачи существует, объект называется *полностью управляемым*. В противном случае объект называется не вполне управляемым.

Оказывается, что в ряде практически важных случаев об управляемости объектов можно судить по описывающим их дифференциальным уравнениям.

Рассмотрим линейный стационарный объект, уравнение состояния которого имеет вид

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (1.1.48)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – n -вектор состояния объекта; $\mathbf{u}(t)$ – q -вектор управляющих воздействий; \mathbf{A} и \mathbf{B} постоянные матрицы размерности $(n \times n)$ и $(n \times q)$ соответственно.

Чтобы проверить управляемость рассматриваемого объекта следует составить матрицу управляемости

$$\mathbf{M}_{уп} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (1.1.49)$$

размерности $(n \times nq)$. Далее требуется определить *ранг* этой матрицы. Напомним, что с этой целью рассматриваются миноры матрицы (1.1.49). В том случае, если какой-нибудь из ее миноров порядка k не равен нулю, а все миноры более высокого порядка равны нулю, то число k и будет являться рангом этой матрицы.

Существует *теорема Калмана*, согласно которой, если ранг матрицы $\mathbf{M}_{уп}$ равен n , то объект (1.1.48) является полностью управляемым.

Рассмотрим примеры определения управляемости объектов.

Пример 1.7. Пусть объект описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + u(t). \end{cases} \quad (1.1.50)$$

Согласно (1.1.50) имеют место равенства

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1.51)$$

С учетом выражения (1.1.49) и равенств (1.1.51) имеем

$$\mathbf{M}_{\text{уп}} = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$\det \mathbf{M}_{\text{уп}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0,$$

то ранг матрицы $\mathbf{M}_{\text{уп}}$ равен 2 и объект (1.1.50) полностью управляем.

Пример 1.8. Предположим, что объект описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u(t); \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1.1.52)$$

Из уравнений (1.1.52) следует, что

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1.53)$$

Принимая во внимание выражение (1.1.49) и равенства (1.1.53) получим

$$\mathbf{M}_{\text{уп}} = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ввиду того, что

$$\det \mathbf{M}_{\text{уп}} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

то ранг матрицы $\mathbf{M}_{\text{уп}}$ равен 1 и поэтому объект (1.1.52) не вполне управляем.

Понятие управляемости имеет важное значение для теории оптимальных систем. Но оно полезно и для получения более полного представления о свойствах исследуемого или проектируемого объекта.

Наряду с дифференциальными уравнениями для описания объектов управления используются и дифференциальные операторы, т. к. операторная форма представления взаимосвязи между входным $u(t)$ и выходным $y(t)$ сигналами объекта нередко оказывается более удобной.

В отличие от функций, устанавливающих соответствие между числами, операторы устанавливают соответствие между функциями. Например, результат дифференцирования функции $f(t)$ по времени можно представить в виде

$$\frac{df(t)}{dt} = pf(t), \quad (1.1.54)$$

где

$$p \equiv \frac{d}{dt}(\dots).$$

Может показаться, что форма записи операции дифференцирования по времени в виде равенства (1.1.54) не содержит ничего нового. Но, по внешнему виду, она похожа на умножение функции $f(t)$, на число p . Причем эта аналогия проявляется еще более отчетливо при записи в операторном виде производных по времени высших порядков. Например, вторая производная по времени от функции $f(t)$ может быть представлена, как

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = p [pf(t)] = p^2 f(t), \quad (1.1.55)$$

где

$$p^2 \equiv \frac{d^2}{dt^2}(\dots).$$

Для иллюстрации применения операторной формы записи дифференциальных уравнений, описывающих объекты управления, рассмотрим пример.

Пример 1.9. Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t). \quad (1.1.56)$$

Воспользовавшись обозначениями (1.1.54) и (1.1.55) уравнение (1.1.56) запишем в операторном виде

$$a_2 p^2 y(t) + a_1 p y(t) + a_0 y(t) = b_1 p u(t) + b_0 u(t). \quad (1.1.57)$$

Далее, полагая

$$D_1(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0; \quad D_2(p) = b_1 p + b_0,$$

представим уравнение (1.1.57) следующим образом:

$$D_1(p)y(t) = D_2(p)u(t), \quad (1.1.58)$$

где $D_1(p)$ и $D_2(p)$ представляют собой линейные дифференциальные операторы, т. к. являются линейными функциями от оператора p .

Сопоставив равенства (1.1.57) и (1.1.58), нетрудно убедиться, что форма записи (1.1.58) более компактна.

Но имеются и другие основания для использования операторов при описании управляемых объектов.

Пусть

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}, \quad (1.1.59)$$

тогда

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau, \quad (1.1.60)$$

где t_0 – некоторый начальный момент времени.

Представив равенство (1.1.59) в виде

$$f(t) = pF(t),$$

равенство (1.1.60) запишем, как

$$F(t) = p^{-1}f(t),$$

где

$$p^{-1} \equiv \int_{t_0}^t (\dots) d\tau, \quad (1.1.61)$$

обозначает оператор интегрирования по времени. При этом обозначение p^{-1} указывает на то, что операция интегрирования обратная операции дифференцирования.

Воспользовавшись обозначением (1.1.61), взаимосвязь между входным $u(t)$ и выходным $y(t)$ сигналами объекта, описываемого уравнением (1.1.58), установим с помощью следующего равенства:

$$y(t) = \frac{D_2(p)}{D_1(p)} u(t) = W(p)u(t), \quad (1.1.61)$$

где выражение

$$W(p) = \frac{D_2(p)}{D_1(p)},$$

представляет собой интегро-дифференциальный оператор.

С учетом равенства (1.1.61) объект, описываемый уравнением (1.1.56) можно изобразить в виде структурной схемы, представленной на рисунке 1.2.

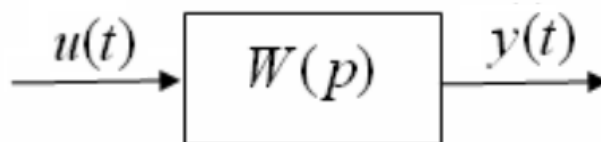


Рисунок 1.2 – Структурная схема объекта управления

На рисунке 1.2 стрелки обозначают входной и выходной сигналы, а оператор $W(p)$ определяет их взаимосвязь. По существу структурная схема в наглядном виде изображает способ преобразования сигналов в объекте.

1.2. Передаточные функции объектов управления

Для исследования процессов, связанных с изменением материально-энергетических потоков в объектах необходимо получить решения его уравнений движения. С точки зрения простоты получения решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и компактности их представления наибольшими преимуществами обладает метод, основанный на интегральном преобразовании Лапласа.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ – n -вектор состояния объекта, тогда его изображение $\tilde{\mathbf{x}}(s)$, т. е. результат применения к нему преобразования Лапласа, определяется выражением

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t) e^{-st} dt, \quad (1.2.1)$$

где s – комплексное число, причем $\operatorname{Re} s > 0$.

По изображению $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ можно восстановить оригинал, т. е. вектор $\mathbf{x}(t)$, если воспользоваться обратным преобразованием Лапласа

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{\mathbf{x}}(s) e^{st} ds,$$

где γ – положительное вещественное число.

Однако обратное преобразование Лапласа используется не столь часто как прямое, т.к. представление информации о динамике управляемых процессов в виде их изображений во многих случаях лучше отвечает специфическим особенностям задач управления.

Отметим, что для преобразования Лапласа используют сокращенное символическое обозначение

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = L\{\mathbf{x}(t)\},$$

а обратное преобразование Лапласа обозначают как

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}\{\tilde{\mathbf{x}}(s)\}.$$

Применим преобразование Лапласа к уравнениям движения объекта (1.1.22) и (1.1.23), предполагая при этом, что помехи и возмущения отсутствуют, а начальные условия нулевые, т. е.

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{I}. \quad (1.2.2)$$

В результате для изображений, входящих в эти уравнения векторов, получим систему, но уже не дифференциальных, а алгебраических уравнений

$$s\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(s); \quad (1.2.3)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(s). \quad (1.2.4)$$

Действительно, поскольку при $\operatorname{Re} s > 0$ выполняются равенства

$$L\left\{\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} d\mathbf{x}(t) = e^{-st}\mathbf{x}(t)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)de^{-st} = \mathbf{x}(0) + s\tilde{\mathbf{x}}(s),$$

то с учетом (1.2.2) имеем

$$L\left\{\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right\} = \mathbf{I} + s\tilde{\mathbf{x}}(s) = s\tilde{\mathbf{x}}(s).$$

Следовательно, в результате применения преобразования Лапласа уравнение (1.1.22) представляется в виде (1.2.3).

Из уравнения (1.2.3) нетрудно получить выражение для вектора $\tilde{\mathbf{x}}(s)$. Для этого представим это уравнение в виде

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(s), \quad (1.2.5)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица размерности $(n \times n)$, т. е. матрица, все элементы которой, располагающиеся на главной диагонали равны единице, а остальные – нулю.

Умножим обе части равенства (1.2.5) на матрицу $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$, обратную матрице $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

Поскольку

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{E}; \quad \mathbf{E}\tilde{\mathbf{x}}(s) = \tilde{\mathbf{x}}(s),$$

то

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(s). \quad (1.2.6)$$

Обозначим

$$\mathbf{W}_{ux}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (1.2.7)$$

тогда выражение (1.2.6) принимает вид

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{W}_{ux}(s)\tilde{\mathbf{u}}(s). \quad (1.2.8)$$

Функция $\mathbf{W}_{\text{ик}}(s)$ комплексной переменной s называется матричной передаточной функцией объекта, отвечающей каналу передачи векторных сигналов $\tilde{\mathbf{u}}(s) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(s)$, причем на вход данного канала поступает изображение $\tilde{\mathbf{u}}(s)$ сигнала $\mathbf{u}(t)$, а на его выходе появляется изображением $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ сигнала $\mathbf{x}(t)$.

При нулевых начальных условиях с помощью передаточной функции $\mathbf{W}_{\text{ик}}(s)$ можно по изображению $\tilde{\mathbf{u}}(s)$ входного сигнала $\mathbf{u}(t)$ определить изображение $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ выходного сигнала $\mathbf{x}(t)$, воспользовавшись для этого выражением (1.2.8).

При наличии возмущающих воздействий $\lambda(t)$ желательно установить, как они влияют на состояние объекта. Для этого воспользуемся уравнением состояния (1.1.22). Применяв к нему преобразование Лапласа, получим уравнение для изображений

$$s\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(s) + \tilde{\lambda}(s). \quad (1.2.9)$$

Затем, действуя так же, как и при выводе формулы (1.2.6), из уравнения (1.2.9) получим

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(s) + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\tilde{\lambda}(s). \quad (1.2.10)$$

Полагая, что

$$\mathbf{W}_{\lambda\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}, \quad (1.2.11)$$

выражение (1.2.10) с учетом уже введенного обозначения (1.2.7) представим в виде

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{W}_{\lambda\mathbf{x}}(s)\tilde{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{W}_{\lambda\mathbf{x}}(s)\tilde{\lambda}(s), \quad (1.2.12)$$

где функция $\mathbf{W}_{\lambda\mathbf{x}}(s)$ называется передаточной функцией канала $\tilde{\lambda}(s) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(s)$, т. к. она определяет влияние вектора $\tilde{\lambda}(s)$ на вектор $\tilde{\mathbf{x}}(s)$.

Как видно из выражения (1.2.12), на вектор $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ одновременно оказываются воздействия по двум каналам $\tilde{\mathbf{u}}(s) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(s)$ и $\tilde{\lambda}(s) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(s)$. С точки зрения эффективности управления воздействия $\tilde{\lambda}(s)$ являются нежелательными, и чтобы уменьшить их влияние на состояние объекта, применяются воздействия $\tilde{\mathbf{u}}(s)$.

Получим теперь выражение для скалярной передаточной функции $W_{\text{иу}}(s)$, отвечающей каналу $\tilde{u}_1(s) \rightarrow \tilde{y}_1(s)$ объекта, описы-

ваемого дифференциальным уравнением (1.1.30). После применения к этому уравнению преобразования Лапласа имеем

$$\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k s^k \right) \tilde{y}_1(s) = \left(\sum_{k=0}^n \beta_k s^k \right) \tilde{u}_1(s). \quad (1.2.13)$$

Поскольку

$$W_{\text{ny}}(s) = \frac{\tilde{y}_1(s)}{\tilde{u}_1(s)},$$

то, воспользовавшись равенством (1.2.13) определим искомую передаточную функцию

$$W_{\text{ny}}(s) = \frac{\sum_{k=0}^n \beta_k s^k}{\sum_{h=0}^n \alpha_h s^h}. \quad (1.2.14)$$

Получим передаточные функции для многомерного линейного объекта (1.1.31). После применения к системе уравнений (1.1.31) преобразования Лапласа получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left(\sum_{k=0}^{n_h} \alpha_{hk} s^k \right) \tilde{y}_h(s) = \left(\sum_{k=0}^{n_j} \beta_{jk} s^k \right) \tilde{u}_j(s); \quad (1.2.15)$$

$$n_h \geq n_j; \quad (h = \overline{1, r}; j = \overline{1, q}).$$

Согласно (1.2.15) передаточная функция $W_{jh}^{\text{об}}(s)$, отвечающая каналу объекта с j входом и h выходом, задается выражением

$$W_{jh}^{\text{об}}(s) = \frac{\tilde{y}_h(s)}{\tilde{u}_j(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_j} \beta_{jk} s^k}{\sum_{k=0}^{n_h} \alpha_{hk} s^k}. \quad (1.2.16)$$

Совокупность передаточных функций (1.2.16) определяет матрицу $\mathbf{W}^{\text{об}}(s)$ размерности $(r \times q)$.

Как видно из выражений (1.2.14) и (1.2.16) передаточные функции объектов с сосредоточенными параметрами представляют

собой отношение двух полиномов от комплексной переменной s , причем степень полинома числителя не должна превышать степени полинома знаменателя.

Для иллюстрации методов нахождения передаточных функций объектов с распределенными параметрами рассмотрим пример.

Пример 1.10. Применим к уравнению (1.1.45) и граничным условиям (1.1.46) преобразование Лапласа.

В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$s\tilde{T}(x, s) = a^2 \frac{d^2\tilde{T}(x, s)}{dx^2}, \quad (1.2.17)$$

где $\tilde{T}(x, s)$ – изображение величины $T(x, t)$.

Граничные условия (1.1.32) принимают вид

$$\tilde{T}(0, s) = \tilde{u}_1(s); \quad \tilde{T}(l, s) = \tilde{u}_2(s). \quad (1.2.18)$$

Решение уравнения (1.2.17) будем искать в виде

$$\tilde{T}(x, s) = C(s)e^{\lambda(s)x}, \quad (1.2.19)$$

где $C(s)$ и $\lambda(s)$ – некоторые неизвестные функции комплексной переменной s .

Подставляя выражение (1.2.19) в уравнение (1.2.17), получим для функции $\lambda(s)$ алгебраическое уравнение

$$a^2\lambda^2(s) = s,$$

откуда

$$\lambda(s) = \pm \frac{\sqrt{s}}{a}. \quad (1.2.20)$$

С учетом выражений (1.2.19) и (1.2.20) решение уравнения (1.2.17) можно представить в виде

$$\tilde{T}(x, s) = A(s)e^{x\sqrt{s/a}} + B(s)e^{-x\sqrt{s/a}}, \quad (1.2.21)$$

где $A(s)$ и $B(s)$ – неизвестные функции.

Воспользовавшись для определения $A(s)$ и $B(s)$ в (1.2.21) граничными условиями (1.2.18) приходим к системе из двух линейных уравнений

$$\begin{cases} A(s) + B(s) = \tilde{u}_1(s); \\ A(s)e^{l\sqrt{s/a}} + B(s)e^{-l\sqrt{s/a}} = \tilde{u}_2(s). \end{cases} \quad (1.2.22)$$

Решив систему (1.2.22) получим

$$A(s) = \tilde{u}_1(s) \frac{e^{-l\sqrt{s/a}}}{e^{-l\sqrt{s/a}} - e^{l\sqrt{s/a}}} - \tilde{u}_2(s) \frac{1}{e^{-l\sqrt{s/a}} - e^{l\sqrt{s/a}}}; \quad (1.2.23)$$

$$B(s) = \tilde{u}_2(s) \frac{1}{e^{-l\sqrt{s/a}} - e^{l\sqrt{s/a}}} - \tilde{u}_1(s) \frac{e^{l\sqrt{s/a}}}{e^{-l\sqrt{s/a}} - e^{l\sqrt{s/a}}}. \quad (1.2.24)$$

Подставляя выражения (1.2.23) и (1.2.24) в равенство (1.2.21) представим его в виде

$$\tilde{T}(x, s) = \frac{\text{sh}[(l-x)\sqrt{s/a}]}{\text{sh}(l\sqrt{s/a})} \tilde{u}_1(s) + \frac{\text{sh}(x\sqrt{s/a})}{\text{sh}(l\sqrt{s/a})} \tilde{u}_2(s), \quad (1.2.25)$$

где sh – обозначение функции гиперболического синуса, причем

$$\frac{\text{sh}[(l-x)\sqrt{s/a}]}{\text{sh}(l\sqrt{s/a})} = \frac{e^{(l-x)\sqrt{s/a}} - e^{-(l-x)\sqrt{s/a}}}{e^{l\sqrt{s/a}} - e^{-l\sqrt{s/a}}};$$

$$\frac{\text{sh}(x\sqrt{s/a})}{\text{sh}(l\sqrt{s/a})} = \frac{e^{x\sqrt{s/a}} - e^{-x\sqrt{s/a}}}{e^{l\sqrt{s/a}} - e^{-l\sqrt{s/a}}}.$$

Обозначим

$$W_1(x, s) = \frac{\text{sh}[(l-x)\sqrt{s/a}]}{\text{sh}(l\sqrt{s/a})}; \quad (1.2.26)$$

$$W_2(x, s) = \frac{\text{sh}(x\sqrt{s/a})}{\text{sh}(l\sqrt{s/a})}, \quad (1.2.27)$$

тогда величины $W_1(x, s)$ и $W_2(x, s)$ отвечают передаточным функциям каналов $\tilde{u}_1(s) \rightarrow \tilde{V}_1(x, s)$ и $\tilde{u}_2(s) \rightarrow \tilde{V}_2(x, s)$, причем

$$\tilde{V}_1(x, s) + \tilde{V}_2(x, s) = \tilde{T}(x, s). \quad (1.2.28)$$

Действительно, поскольку

$$W_1(x, s) = \frac{\tilde{V}_1(x, s)}{\tilde{u}_1(s)}; \quad W_2(x, s) = \frac{\tilde{V}_2(x, s)}{\tilde{u}_2(s)},$$

то с учетом (1.2.25) – (1.2.27) приходим к равенству (1.2.28).

1.3. Частотные характеристики объектов управления

Наряду с передаточными функциями к динамическим характеристикам объектов относятся их частотные характеристики.

Важную роль при изучении динамики объектов играют комплексные частотные характеристики (КЧХ). Если задана передаточная функция объекта $W_{об}(s)$, то его КЧХ можно определить, полагая $s = i\omega$, где i – мнимая единица, а ω – круговая (циклическая) частота. В отличие от передаточной функции $W_{об}(s)$, КЧХ объекта $W_{об}(i\omega)$, допускает наглядное графическое представление на комплексной плоскости.

График КЧХ принято называть *годографом* КЧХ. Для его построения на мнимой и вещественной координатных осях откладываются соответственно значения $i \operatorname{Im} W_{об}(i\omega)$ и $\operatorname{Re} W_{об}(i\omega)$, определяющие мнимую и вещественную координаты точки годографа КЧХ при заданном значении частоты ω .

Пример 1.11. Предположим, что передаточная функция объекта $W_{об}(s)$ задана выражением

$$W_{об}(s) = \frac{K_{об}}{(1 + Ts)^4}, \quad (1.3.1)$$

$$\text{где } K_{об} = 1,2; T = 0,01 \text{ с.} \quad (1.3.2)$$

Согласно равенству (1.3.1) имеем

$$W_{об}(i\omega) = \frac{K_{об}}{(1 + iT\omega)^4} = K_{об} \frac{(1 - iT\omega)^4}{(1 + T^2\omega^2)^4} \dots$$

В таком случае

$$\operatorname{Re} W_{об}(i\omega) = K_{об} \frac{(1 - 6T^2\omega^2 + T^4\omega^4)}{(1 + T^2\omega^2)^4}; \quad (1.3.3)$$

$$\operatorname{Im} W_{об}(i\omega) = 4K_{об}T\omega \frac{(1 - T^2\omega^2)}{(1 + T^2\omega^2)^4}. \quad (1.3.4)$$

Подставив в равенства (1.3.3) и (1.3.4) значения параметров, заданные равенствами (1.3.2) и придавая переменной ω значения от 0, до ∞ построим годограф КЧХ объекта, представленный на рисунке 1.3.

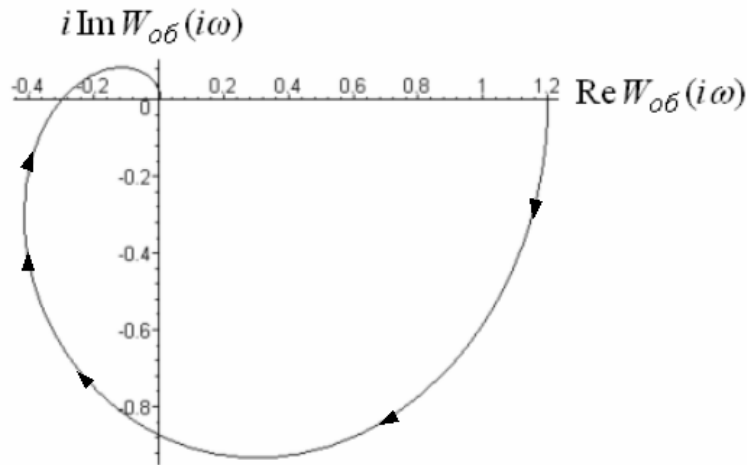


Рисунок 1.3 – Годограф КЧХ объекта

Как видно из рисунка 1.3, годограф КЧХ объекта начинается при $\omega = 0$ на вещественной оси в точке $(1,2; i0)$ и заканчивается при $\omega = \infty$ в начале координат.

КЧХ объекта широко используются при анализе систем управления на устойчивость, а также при расчетах параметров настройки регуляторов.

Поскольку каждое значение КЧХ объекта $W_{об}(i\omega)$ является комплексным числом, имеющим вещественную $\text{Re}W_{об}(i\omega)$, и мнимую $\text{Im}W_{об}(i\omega)$ части, то

$$W_{об}(i\omega) = \text{Re}W_{об}(i\omega) + i \text{Im}W_{об}(i\omega). \quad (1.3.5)$$

Комплексное число $W_{об}(i\omega)$ можно представить не только в обычном виде (1.3.5), но и в так называемой тригонометрической форме, т. е.

$$W_{об}(i\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}, \quad (1.3.6)$$

где амплитуда $A(\omega)$ и фаза $\varphi(\omega)$ КЧХ объекта задаются равенствами

$$A(\omega) = \sqrt{[\text{Re}W_{об}(i\omega)]^2 + [\text{Im}W_{об}(i\omega)]^2}; \quad (1.3.7)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{\text{Im}W_{об}(i\omega)}{\text{Re}W_{об}(i\omega)}. \quad (1.3.8)$$

Величины $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ называются *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) и *фазо-частотной характеристикой*

(ФЧХ) объекта. Они определяют реакцию объекта на *гармонические* воздействия (сигналы), т. е. воздействия, изменяющиеся со временем по закону синуса или косинуса.

Действительно, пусть на вход линейного объекта с постоянными параметрами поступает гармонический сигнал

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t + \psi),$$

тогда на его выходе появится гармонический сигнал вида

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где u_0 и y_0 – амплитуды, а ψ и φ – фазы входного и выходного сигналов объекта. В отсутствие помех и шумов взаимосвязь между характеристиками входного и выходного сигналов объекта определяется выражениями

$$y_0(\omega) = A(\omega)u_0; \varphi_0(\omega) = \psi + \varphi(\omega). \quad (1.3.9)$$

Согласно выражениям (1.3.9) АЧХ и ФЧХ характеризуют соответственно изменение амплитуды и фазы входного сигнала $u(t)$ при его прохождении через канал передачи объекта $u(t) \rightarrow y(t)$.

Пример 1.12. Определим АЧХ и ФЧХ для объекта с передаточной функцией (1.3.1). Воспользовавшись выражениями (1.3.7) и (1.3.8) получим для АЧХ и ФЧХ рассматриваемого объекта следующие аналитические выражения:

$$A(\omega) = \frac{K_{об}}{(1 + T^2\omega^2)^2}; \varphi(\omega) = -4\text{arctg}(T\omega).$$

Подставляя в эти выражения значения параметров, заданные равенствами (1.3.2) и изменяя значения переменной ω от 0 до ∞ , построим графики АЧХ и ФЧХ рассматриваемого объекта, представленные соответственно на рисунках 1.4 и 1.5.

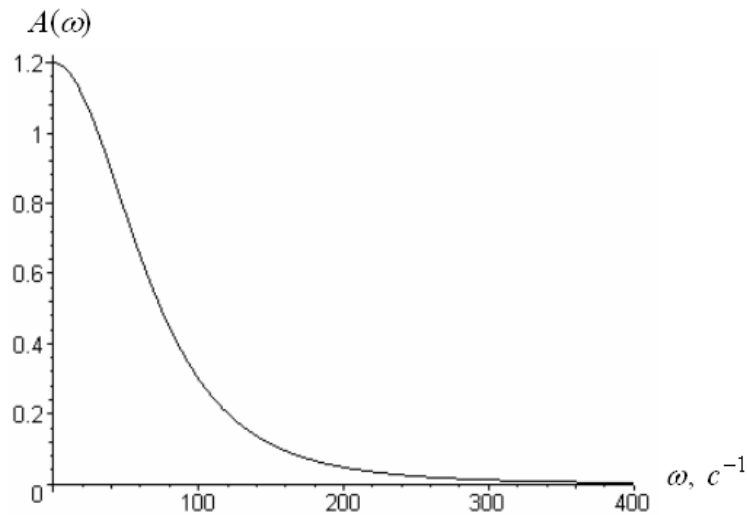


Рисунок 1.4 – АЧХ объекта

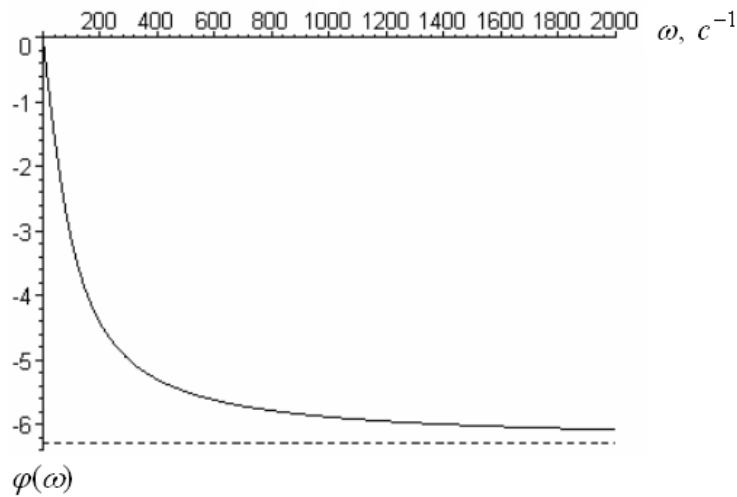


Рисунок 1.5 – ФЧХ объекта

Как видно из рисунка 1.4, с ростом ω амплитуда $y_0(\omega)$ выходного сигнала $y(t)$ монотонно убывает до нуля. Кроме того, согласно рисунку 1.5 при этом увеличивается отрицательный набег фазы этого сигнала до предельной величины -2π .

Важные свойства АЧХ и ФЧХ устанавливает следующая теорема:

Теорема 1.1. Пусть $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ соответственно АЧХ и ФЧХ линейного стационарного объекта, тогда выполняются равенства

$$A(-\omega) = A(\omega); \quad (1.3.10)$$

$$\varphi(-\omega) = \varphi(\omega). \quad (1.3.11)$$

Доказательство теоремы 1.1. приводится в приложении 1.

Согласно теореме 1.1 АЧХ и ФЧХ линейных стационарных объектов является соответственно четными и нечетными функциями частоты.

Наряду с уже рассмотренными частотными характеристиками используются и так называемые *расширенные частотные характеристики*. Выражения для них также можно получить, используя передаточную функцию объекта $W_{об}(s)$.

В первом случае комплексный аргумент s передаточной функции $W_{об}(s)$ следует представить в виде $s = -m\omega + i\omega$, где $m \geq 0$. Тогда комплексная функция $W_{об}(-m\omega + i\omega)$ называется *расширенной по m частотной характеристикой*, а показатель m называют величиной *относительного демпфирования*.

Характеристики $W_{об}(-m\omega + i\omega)$ используются при определении колебательности объектов управления, т. к. позволяют определить самую высокую частоту колебаний, совершаемых объектом при *свободном движении*, т. е. в отсутствие управляющих и возмущающих воздействий.

Во втором случае комплексный аргумент s передаточной функции $W_{об}(s)$ следует представить в виде $s = -\eta + i\omega$, где $\eta \geq 0$. Тогда комплексная функция $W_{об}(-\eta + i\omega)$ называется *расширенной по η частотной характеристикой*, а величину η называют *величиной абсолютного демпфирования*.

Характеристики $W_{об}(-\eta + i\omega)$ используются при определении скорости затухания колебаний, совершаемых объектом при свободном движении.

1.4. Переходные характеристики объектов управления

К динамическим характеристикам объекта относятся также *временные характеристики*.

Рассмотрим временные характеристики объекта, которые называются *переходными*. Такое название объясняется тем, что эти характеристики описывают процесс перехода объекта из одного установившегося состояния в другое под влиянием внешних воздействий.

Реакцию объекта на единичное ступенчатое входное воздействие называют *переходной характеристикой объекта* (рисунок 1.6) и обозначают $h(t)$.

Под *реакцией объекта* понимается изменение его выходной величины, обусловленное лишь входным воздействием, т. е. в отсутствие свободного движения объекта и возмущающих воздействий.



Рисунок 1.6 – Получение переходной характеристики объекта

Единичное ступенчатое воздействие $1(t)$ описывается следующим выражением:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0; \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

График функции $1(t)$ представлен на рисунке 1.7.

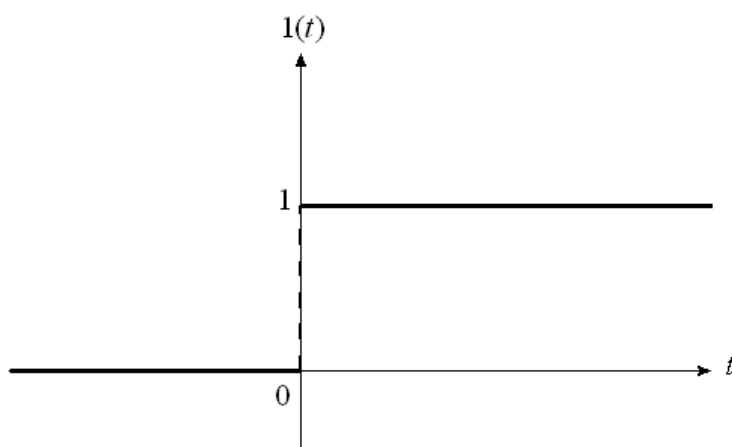


Рисунок 1.7 – Единичное ступенчатое воздействие

Установим взаимосвязь между переходной характеристикой объекта $h(t)$ и его передаточной функцией $W_{об}(s)$. Для этого воспользуемся, вытекающим из определения передаточной функции $W_{об}(s)$, равенством

$$\tilde{h}(s) = W_{об}(s) \tilde{1}(s), \quad (1.4.2)$$

где $\tilde{h}(s)$ и $\tilde{1}(s)$ – изображения по Лапласу функций $h(t)$ и $1(t)$ соответственно.

Применив, с учетом выражения (1.4.1), преобразование Лапласа к функции $l(t)$ получим

$$\tilde{l}(s) = \frac{1}{s}. \quad (1.4.3)$$

После подстановки выражения (1.4.3) в равенство (1.4.2) имеем

$$\tilde{h}(s) = \frac{W_{об}(s)}{s}. \quad (1.4.4)$$

В результате применения к равенству (1.4.4) обратного преобразования Лапласа приходим к выражению

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{W_{об}(s)}{s} e^{st} ds, \quad (1.4.5)$$

которое и устанавливает искомую взаимосвязь.

Взаимосвязь между $h(t)$ и КЧХ объекта $W_{об}(i\omega)$ устанавливает следующая теорема:

Теорема 1.2. *Для линейных стационарных объектов, передаточные функции которых $W_{об}(s)$ не имеют особенностей при $\text{Re } s > 0$, т. е. в правой комплексной полуплоскости, выполняется равенство*

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \text{Re } W_{об}(i\omega) d\omega. \quad (1.4.6)$$

Доказательство теоремы 1.2 приводится в приложении 1.

Отметим, что согласно теореме 1.2 должно выполняться равенство

$$h_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = W_{об}(0),$$

где $h_{уст}$ – установившееся значение переходной характеристики $h(t)$.

Действительно, чем большее значение принимает переменная времени t , тем точнее выполняется равенство

$$h(t) \approx \text{Re } W_{об}(0) \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega = W_{об}(0) \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega,$$

где ε – малое положительное число. Поскольку интеграл

$$W_{об}(0) \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega,$$

ввиду быстрых осцилляций функции $\sin(\omega t)$ принимает весьма малые значения, то

$$h(t) \approx W_{об}(0) \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega = W_{об}(0) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega = W_{об}(0),$$

т. к.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}, \quad (t > 0).$$

Рассмотрим пример определения переходной характеристики объекта $h(t)$ с помощью выражения (1.3.6).

Пример 1.13. Построим график переходной характеристики объекта $h(t)$, передаточная функция которого $W_{об}(s)$ имеет вид

$$W_{об}(s) = \frac{K_{об}}{(1 + Ts)^3},$$

причем $K_{об} = 1,5$; $T = 10$ с. В таком случае

$$\operatorname{Re} W_{об}(i\omega) = K_{об} \frac{(1 - 3T^3 \omega^3)}{(1 + T^2 \omega^2)^3}.$$

Поскольку знаменатель передаточной функции $W_{об}(s)$ обращается в нуль лишь при $s = -1/T = -0,1 \text{ с}^{-1}$, то эта функция не имеет особенностей при $\operatorname{Re} s > 0$. Следовательно, при построении графика $h(t)$ допустимо использовать выражение (1.4.6). Этот график представлен на рисунке 1.8, причем пунктирной линией показана асимптота $h_{уст} = K_{об}$, к которой функция $h(t)$ неограниченно приближается при $t \rightarrow \infty$.

На основании экспериментально снятой переходной характеристики объекта, часто ее называют **кривой разгона**, можно получить аналитическое выражение для передаточной функции канала управления или дифференциальное уравнение. Эта задача называется **задачей идентификации** объекта по кривой разгона.

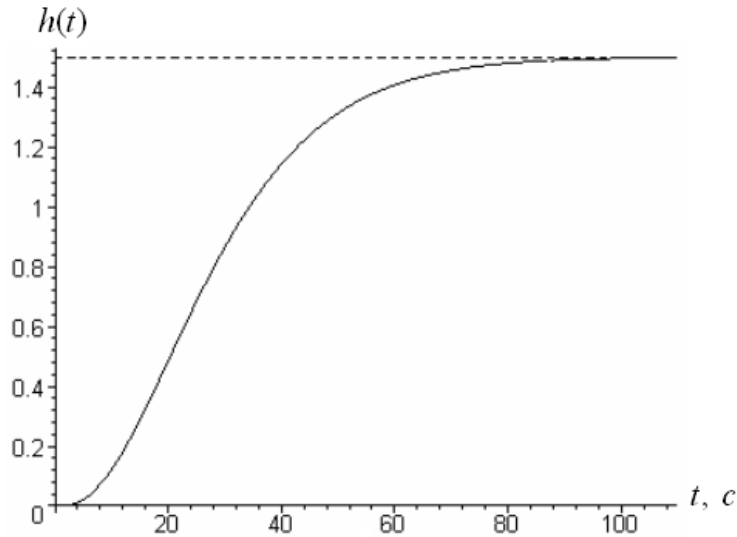


Рисунок 1.8 – Переходная характеристика (кривая разгона) объекта

Рассмотрим один из методов ее решения. Предположим, что идентифицируемый объект достаточно точно описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t - \tau), \quad (1.4.7)$$

отвечающим инерционному звену с транспортным запаздыванием.

Согласно уравнению (1.4.7) передаточная функция идентифицируемого объекта имеет вид

$$W_{об}(s) = W_{uy}(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{u}(s)} = \frac{ke^{-\tau s}}{1 + Ts}. \quad (1.4.8)$$

Определим переходную функцию $h(t)$ данного объекта, воспользовавшись выражением (1.4.5) и принимая при этом во внимание равенство (1.4.8).

В результате получим

$$h(t) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{(t-\tau)s}}{s(1 + Ts)} ds = \begin{cases} k [1 - e^{-(t-\tau)/T}], & t > \tau; \\ 0, & t \leq \tau, \end{cases} \quad (1.4.9)$$

Значение постоянной времени транспортного запаздывания τ в выражении (1.4.9) определяют по графику кривой разгона (рис. 1.9), измерив время, прошедшее с момента подачи на вход объекта единичного ступенчатого воздействия, до появления на его выходе реакции на это воздействие.

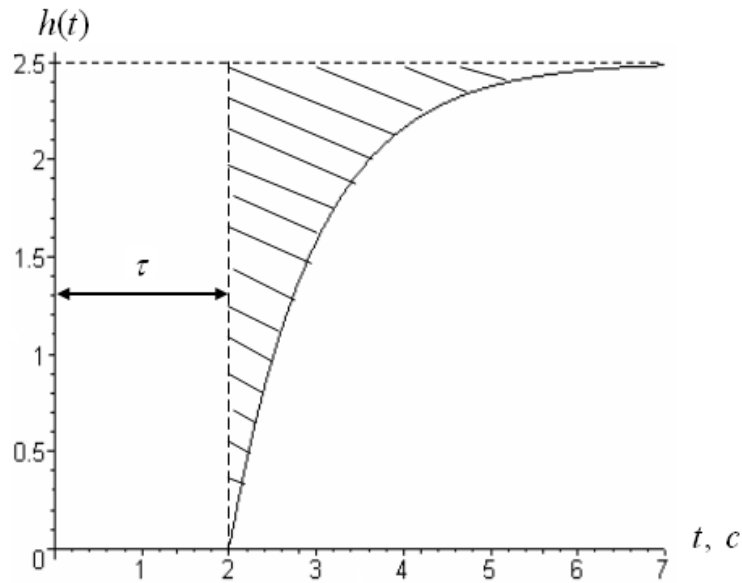


Рисунок 1.9 – Идентификация объекта по кривой разгона

Для определения коэффициента передачи объекта k достаточно измерить установившееся значение $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$, т. к. $k = h(\infty)$.

Чтобы определить постоянную времени T необходимо измерить заштрихованную на рисунке 1.9 площадь ΔS_T и воспользоваться аналитическим выражением для переходной характеристики инерционного звена с запаздыванием (1.4.9).

Поскольку согласно выражению (1.4.9) имеет место равенство $k - h(t) = ke^{-(t-\tau)/T}$,

то

$$\Delta S_T = \int_{\tau}^{\infty} [k - h(t)] dt = kT. \quad (1.4.10)$$

Используя равенство (1.4.10) установим, что

$$T = \frac{\Delta S_T}{k}.$$

Таким образом, располагая экспериментально полученным графиком кривой разгона объекта, можно определить значения параметров в выражениях для дифференциального уравнения (1.4.7) или передаточной функции (1.4.8). После того, как искомые значения установлены, желательно проверить, насколько правильным является выбор дифференциального уравнения (1.4.7) для описания динамики объекта. Для этого следует, используя выражение (1.4.9),

расчетным способом построить график функции $h(t)$, а затем сравнить его с полученным в процессе эксперимента. Если результат такого сравнения окажется неприемлемым, то необходимо выбрать вместо (1.4.7) более подходящее уравнение.

Наряду с рассмотренным, существуют и другие методы идентификации объектов управления по кривым разгона. Однако всем им присущи весьма серьезные недостатки, т.к. для экспериментального получения переходных характеристик необходимо разомкнуть охватывающие объект контуры обратных связей, используемые при решении задач управления. Но в таком случае объект становится неуправляемым, а значит и неработоспособным. Кроме того, на результаты экспериментов по снятию переходных характеристик влияют возмущающие воздействия и различного рода помехи. Повысить достоверность полученных характеристик можно при помощи их усреднения. Для этого эксперименты на объекте приходится повторять многократно. Поэтому затраты времени на их проведение оказываются весьма значительными, что далеко не всегда приемлемо, из-за длительного вмешательства в производственные процессы.

Наряду с переходной характеристикой $h(t)$ часто используется **импульсная переходная характеристика** $g(t)$, которая представляет собой реакцию объекта на дельта-импульс $\delta(t)$, т. е. в идеале бесконечно короткий, но имеющий бесконечно большую амплитуду импульс, существующий в момент времени $t = 0$, площадь под «графиком» которого равна единице (естественно, в соответствующих единицах измерения, в которые в качестве сомножителя входит время).

С определенной степенью приближения импульсные переходные характеристики могут быть определены экспериментально: постановка этого эксперимента не отличается от постановки эксперимента по определению переходных характеристик, только вместо ступенчатого подается воздействие в виде достаточно короткого (продолжительностью $-\Delta\tau/2 < t < \Delta\tau/2$) и сильного (амплитуды A) импульса. Результат эксперимента, т.е. график реакции объекта $y(t)$ на входное воздействие $u(t) \approx \delta(t)$ должен быть приведен к импульсу единичной интенсивности, т. е. каждая ордината графика $y(t)$ должна быть разделена на площадь входного импульса $S_{\text{им}} = A\Delta\tau$. Следовательно, выполняется приближенное равенство

$$W(t) = A\Delta\tau.$$

Импульсная переходная характеристика объекта $g(t)$, связана с его переходной характеристикой $h(t)$ и передаточной функцией $W_{об}(s)$.

Действительно, при подаче на вход объекта единичного ступенчатого воздействия $1(t)$ выполняются равенства

$$u(t) = 1(t); \quad y(t) = h(t).$$

Подставив их в связывающее входной и выходной сигналы объекта дифференциальное уравнение (1.1.30) получим

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k 1(t)}{dt^k}. \quad (1.4.11)$$

Если на вход объекта подается воздействие $\delta(t)$, то

$$u(t) = \delta(t); \quad y(t) = g(t), \quad (1.4.12)$$

и дифференциальное уравнение (1.1.30) принимает вид

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k g(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k}. \quad (1.4.13)$$

Поскольку ввиду (1.4.1) имеет место равенство

$$\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t),$$

то, продифференцировав по времени уравнение (1.4.11) получим

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k}{dt^k} \left[\frac{dh(t)}{dt} \right] = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k}. \quad (1.4.14)$$

Сопоставив уравнения (1.4.12) и (1.4.14) установим, что

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (1.4.15)$$

Что касается передаточной функции $W_{об}(s)$, то, исходя из ее определения, запишем следующее равенство:

$$W_{об}(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{u}(s)}. \quad (1.4.16)$$

Применив к равенствам (1.4.12) преобразование Лапласа по времени представим их в виде

$$\tilde{u}(s) = 1; \quad \tilde{y}(s) = \tilde{g}(s). \quad (1.4.17)$$

Подставив изображения, заданные выражениями (1.4.17), в равенство (1.4.16) имеем

$$\tilde{g}(s) = W_{об}(s).$$

Таким образом, искомая взаимосвязь между $g(t)$ и другими динамическими характеристиками объекта $h(t)$ и $W_{об}(s)$ устанавливается выражениями (1.4.15) и (1.4.18).

Чтобы проиллюстрировать методы построения импульсных переходных характеристик $g(t)$ рассмотрим пример.

Пример 1.14. Построим график функции $g(t)$ для объекта, рассмотренного в примере 1.13. Для этого воспользуемся равенством (1.4.15), подставив в него выражение (1.4.6). В результате имеем

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) \operatorname{Re} W_{об}(i\omega) d\omega. \quad (1.3.19)$$

График $g(t)$, полученный в результате выполнения численных расчетов с использованием выражения (1.4.19) представлен на рис. 1.10.

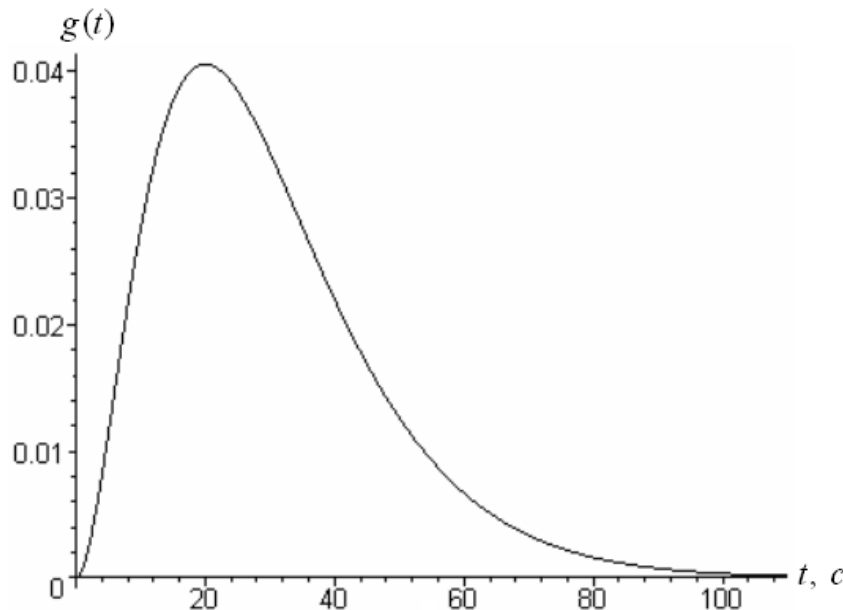


Рисунок 1.10 – Импульсная переходная характеристика объекта.

Как видно из рис. 1.10, функция $g(t)$ имеет один максимум, достигаемый согласно выражению (1.4.15) в точке перегиба переходной характеристики $h(t)$, т.к. именно в этой точке угол наклона касательной к кривой $h(t)$ максимален.

Важное значение импульсной переходной характеристики объекта $g(t)$ обусловлено еще и тем, что с ее помощью можно определить реакцию объекта не только на стандартные воздействия $1(t)$ и $\delta(t)$, но и на воздействие произвольного вида $f(t)$. В этом случае выходной сигнал объекта $y(t)$ определяется выражением

$$y(t) = \int_0^t g(\xi)f(t - \xi)d\xi, \quad (1.4.20)$$

которое получило название *интеграла Дюамеля* или *свертки* функций $g(t)$ и $f(t)$.

Полагая в (1.4.20), что $f(t) = 1(t)$ с учетом равенств (1.4.1) представим данное выражение в виде

$$h(t) = \int_0^t g(\xi)d\xi. \quad (1.4.21)$$

Покажем, как импульсную переходную характеристику объекта $g(t)$ можно использовать для анализа его устойчивости. Причем объект называется *устойчивым*, если ограниченные входные сигналы создают ограниченные сигналы на его выходе.

Это важное свойство объектов управления, которое необходимо учитывать при их проектировании.

Но прежде установим справедливость равенства

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)f(t - \xi)d\xi. \quad (1.4.22)$$

Действительно, поскольку $f(t - \xi) = 0$ при $\xi > t$, то выполняется равенство

$$\int_t^{\infty} g(\xi)f(t - \xi)d\xi = 0. \quad (1.4.23)$$

После сложения равенств (1.4.20) и (1.4.23) получим

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\xi) f(t - \xi) d\xi. \quad (1.4.24)$$

Кроме того, при $\xi < 0$ отсутствует сигнал на входе объекта, а значит, отсутствует и сигнал на его выходе, т. е. $g(t) = 0$. В таком случае имеем

$$\int_{-\infty}^0 g(\xi) f(t - \xi) d\xi = 0. \quad (1.4.25)$$

Выполнив операцию сложения равенств (1.4.24) и (1.4.25) приходим в итоге к равенству (1.4.22).

Ввиду того, что входные воздействия ограничены, должно выполняться неравенство

$$|f(t - \xi)| \leq \beta, \quad (1.4.26)$$

где β – некоторая положительная вещественная константа. Тогда, исходя из равенства (1.4.22), получим

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(t - \xi) d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi)| |f(t - \xi)| d\xi. \quad (1.4.27)$$

С учетом неравенств (1.4.26) и (1.4.27) имеем

$$|y(t)| \leq \beta \int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi)| d\xi. \quad (1.4.28)$$

Из неравенства (1.4.28) следует, что выходной сигнал объекта $y(t)$ ограничен, если выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi)| d\xi < \infty. \quad (1.4.29)$$

Таким образом, достаточным условием для устойчивости линейного стационарного объекта является выполнение неравенства (1.4.29).

1.5. Тест 1

1. Для систем с распределенными параметрами необходимо учитывать

а) зависимость скорости движения материально-энергетичес-

ких потоков внутри управляемых объектов от геометрических координат;

б) пространственное расположение датчиков, измеряющих выходные сигналы объекта;

в) зависимость динамических характеристик материально-энергетических потоков внутри управляемых объектов от геометрических координат

2. Возмущающее воздействие называется аддитивным, если оно влияет на

а) координаты вектора состояния системы управления;

б) координаты вектора управляющих воздействий;

в) скорости изменения координат вектора состояния системы управления.

3. Задача восстановления координат вектора состояния по результатам регистрации выходных сигналов объекта и управляющих воздействий получила название задачи

а) управления;

б) наблюдения;

в) восстановления.

4. С точки зрения простоты получения решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и компактности их представления наибольшими преимуществами обладает метод, основанный на

а) интегральном преобразовании Лапласа;

б) разложении решений этих уравнений в ряды Тейлора;

в) интегральном преобразовании Фурье.

5. Передаточные функции объектов с сосредоточенными параметрами представляют собой отношение

а) двух комплексных чисел;

б) двух вещественных чисел;

в) двух полиномов от комплексной переменной.

6. Частотные характеристики объектов относятся к классу

а) статических характеристик;

б) динамических характеристик;

в) выходных характеристик.

7. Гармонический сигнал изменяется со временем по закону

а) Ома;

б) синуса или косинуса;

в) гармонии.

8. Переходные характеристики объектов относятся к классу

а) временных характеристик;

б) частотных характеристик;

в) важнейших характеристик.

9. Импульсная переходная характеристика объекта представляет собой его реакцию на

а) гармоническое воздействие;

б) единичное ступенчатое воздействие;

в) дельта-импульс.

10. Объект называется устойчивым, если ограниченные входные сигналы создают ... сигналы на его выходе.

а) неограниченные;

б) ограниченные;

в) гармонические.

ГЛАВА II

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

2.1. Виды динамических звеньев

Для любых систем, в которых протекают процессы управления (технические системы или живые организмы), характерна одна общая черта: отдельные элементы этих систем взаимосвязаны так, что передают друг другу некоторые сообщения о происходящих в них процессах посредством сигналов, т.е. информации. По этому признаку можно установить глубокое сходство и единство процессов управления.

Информация всегда связана с некоторым материальным носителем (физической величиной). В технических системах материальные носители информации называют носителями сигналов (например, электрическое напряжение и ток, давление, механическое перемещение и др.), которые можно изменять в соответствии с передаваемой информацией. Конструктивные элементы системы должны преобразовывать одни физические величины (и соответствующие им сигналы) в другие. Этот процесс отражается в кибернетическом понятии звена.

Звено – это входящий в систему автоматического управления элемент, в котором входной сигнал преобразуется в выходной по определенному закону или правилу. Схематически звенья изображаются в виде блоков, причем такое изображение не отражает особенностей их конструкции. Интерес представляет только связь между воздействием на вход звена и его реакцией на выходе. Такой

подход позволяет создавать модели элементов различных технических или природных систем и имитировать их поведение, что значительно облегчает поиск эффективных методов управления.

Непременное условие, которое должно соблюдаться при членении системы на звенья, состоит в соблюдении правила односторонней передачи воздействий. Это означает, что выходная величина любого звена системы зависит от изменения его входной величины, однако обратное влияние выходной величины непосредственно через рассматриваемое звено на входную величину должно отсутствовать.

Среди всего разнообразия звеньев особого внимания заслуживают так называемые элементарные звенья, описываемые дифференциальными уравнениями нулевого, первого и второго порядков, поскольку из таких звеньев чаще всего строятся математические модели систем управления.

Идеальное усилительное (безынерционное) звено. Уравнение данного звена имеет вид

$$y(t) = ku(t), \quad (2.1.1)$$

где k – коэффициент усиления или передачи, а $u(t)$ и $y(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы.

Определим передаточную функцию $W(s)$ безынерционного звена. Для этого применим к уравнению (2.1.1) преобразование Лапласа

$$\tilde{y}(s) = k\tilde{u}(s).$$

Исходя из равенства (2.1.2) установим, что

$$W(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{u}(s)} = k.$$

Получим выражения для переходных характеристик рассматриваемого звена. Подадим на его вход единичное ступенчатое воздействие $1(t)$, т. е. $u(t) = 1(t)$. Тогда уравнение (2.1.1) принимает вид

$$h(t) = k1(t).$$

Дифференцируя переходную характеристику $h(t)$ по времени согласно выражению (1.3.15) определим импульсную переходную характеристику звена

$$g(t) = k\delta(t).$$

Выполнив в равенстве (2.1.3) замену $s = i\omega$ получим выражение для КЧХ звена

$$W(i\omega) = k. \quad (2.1.4)$$

Исходя из выражений (1.3.6) – (1.3.8) и (2.1.4) определим АЧХ и ФЧХ данного звена

$$A(\omega) = k; \quad \varphi(\omega) = 0.$$

Примерами безынерционных звеньев могут служить жесткие механические и гидравлические передачи, электронный усилитель сигналов на низких частотах, гироскоп и некоторые другие измерительные датчики.

Идеальное интегрирующее звено. Уравнение и передаточная функция звена имеют вид

$$y(t) = k_I \int_0^t u(\tau) d\tau; \quad W(s) = \frac{k_I}{s},$$

где k_I – коэффициент передачи.

Переходная и импульсная переходная характеристика определяются выражениями

$$h(t) = k_I t 1(t); \quad g(t) = k_I 1(t). \quad (2.1.5)$$

Частотные характеристики рассматриваемого звена представимы в виде

$$W(i\omega) = -i \frac{k_I}{\omega}; \quad A(\omega) = \frac{k_I}{\omega}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

Примером такого звена является двигатель с переменной частотой вращения вала, скорость перемещения поршня которого может считаться пропорциональной смещению штока золотника.

Идеальное дифференцирующее звено: Уравнение и передаточная функция звена имеют вид

$$y(t) = k_D \frac{du(t)}{dt}; \quad W(s) = k_D s,$$

где k_D – коэффициент передачи.

Переходная и импульсная переходная характеристика задаются выражениями

$$h(t) = k_D \delta(t); \quad g(t) = k_D \frac{d\delta(t)}{dt}.$$

Частотные характеристики идеального дифференцирующего звена:

$$W(i\omega) = i\omega k_D; \quad A(\omega) = k_D \omega; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.1.6)$$

В реальных системах характеристики идеального дифференцирующего звена можно реализовать лишь с той или иной степенью приближения, т.к. порядок правой части его дифференциального уравнения больше чем левой. Поэтому, например, согласно (2.1.6) амплитуда выходного сигнала данного звена неограниченно увеличивается с ростом частоты, что требует бесконечной энергии.

Апериодическое (инерционное) звено: Уравнение и передаточная функция звена:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t); \quad W(s) = \frac{k}{1 + Ts}, \quad (2.1.7)$$

где T – постоянная времени; k – коэффициент передачи.

Получим формулу для переходной характеристики апериодического звена, воспользовавшись выражением (1.4.9), в котором полагаем $\tau = 0$.

В результате имеем

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T})l(t). \quad (2.1.8)$$

График переходной функции $h(t)$ апериодического звена представлен на рисунке 2.1, где $k = 2$, а $T = 10$ с.

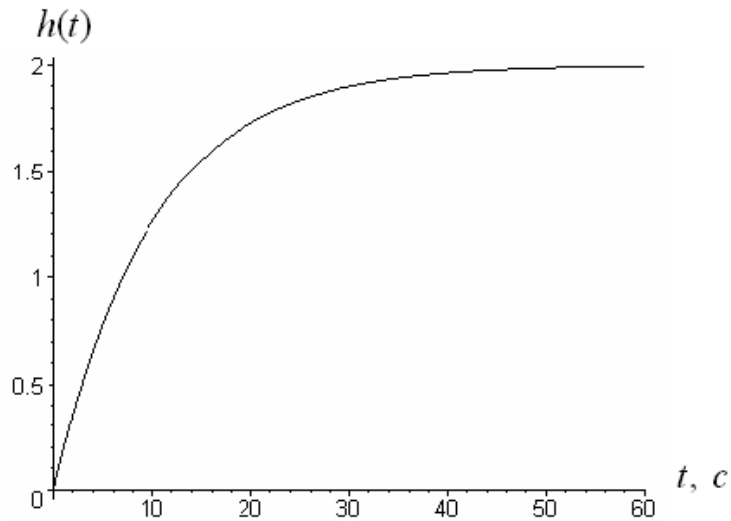


Рисунок 2.1. – переходная характеристика аperiodического звена

Обратим внимание, что в отличие от звеньев, описываемых дифференциальными уравнениями более высоких порядков, переходная характеристика аperiodического звена, как видно из рисунка 2.1, не имеет точки перегиба.

Продифференцировав по времени равенство (2.1.8) получим выражение для импульсной переходной функции звена

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = ke^{-t/T} 1(t).$$

Вид импульсной переходной функции $g(t)$ для аperiodического звена показан на рисунке 2.2, где $k = 2$, $T = 10$ с.

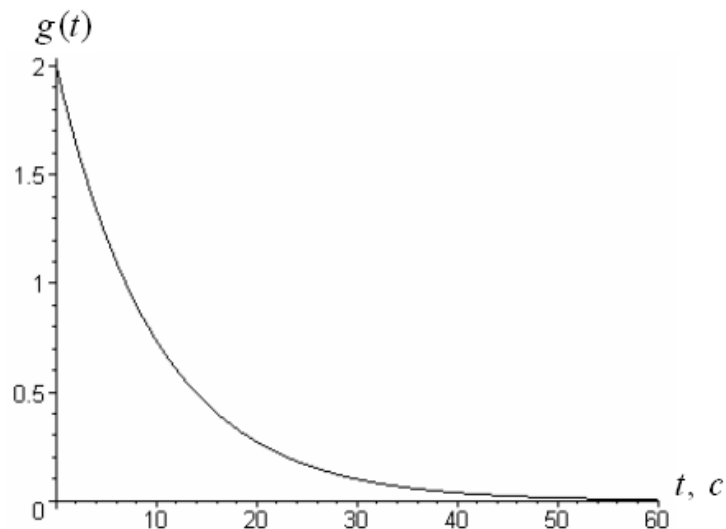


Рисунок 2.2 – Вид импульсной переходной функции $g(t)$ для аperiodического звена

Частотные характеристики апериодического звена:

$$W(i\omega) = \frac{k}{1+iT\omega}; \quad A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\text{arctg}(T\omega).$$

Примерами апериодического звена являются электродвигатель (в первом приближении), если $u(t)$ – управляющее напряжение, $y(t)$ – угловая скорость вала, а также цепочка LR , в которой $u(t)$ – входное напряжение, а $y(t)$ – ток в цепи.

Инерционное интегрирующее звено. Уравнение и передаточная функция звена:

$$T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = ku(t); \quad W(s) = \frac{k}{s(1+Ts)},$$

где T – постоянная времени; k – коэффициент передачи.

Переходные характеристики имеют вид

$$h(t) = k \left[t - T(1 - e^{-t/T}) \right] 1(t); \quad g(t) = k(1 - e^{-t/T}) 1(t). \quad (2.1.9)$$

Сопоставив выражения (2.1.5) и (2.1.9) приходим к выводу, что за счет постоянной времени T вместо идеального интегрирования получается интегрирование с инерционным запаздыванием.

Частотные характеристики звена:

$$W(i\omega) = -\frac{ik}{\omega(1+iT\omega)}; \quad A(\omega) = \frac{k}{\omega\sqrt{1+T^2\omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(T\omega).$$

Примером инерционного интегрирующего звена является электродвигатель, если выходной величиной считать угол поворота вала двигателя.

Инерционное дифференцирующее звено. Уравнение и передаточная функция звена:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}; \quad W(s) = \frac{ks}{1+Ts},$$

где T – постоянная времени; k – коэффициент передачи.

Переходные характеристики данного звена имеют вид

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} 1(t); \quad g(t) = \frac{k}{T} \left[\delta(t) - \frac{1}{T} e^{-t/T} \right] 1(t).$$

Частотные характеристики звена:

$$W(i\omega) = \frac{ik\omega}{1+iT\omega}; \quad A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(T\omega).$$

Здесь мы видим реальное ограничение амплитуды выходного сигнала звена при увеличении частоты.

Для того, чтобы свойства инерционного дифференцирующего звена приблизились к свойствам идеального, необходимо одновременно увеличивать коэффициент передачи k и уменьшать постоянную времени T так, чтобы их произведение оставалось постоянным $kT = k_D$. Отметим, что в размерность k_D входит время.

Примерами такого типа звена являются обычная цепочка RC , трансформатор, механический демпфер с пружиной.

Интегродифференцирующее звено первого порядка: Уравнение и передаточная функция звена имеют вид

$$T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \left[u(t) + T_2 \frac{du(t)}{dt} \right]; \quad (2.1.10)$$

$$W(s) = k \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s},$$

где k – коэффициент передачи; T_1 и T_2 – постоянные времени.

Получим аналитическое выражение для переходной характеристики $h(t)$ рассматриваемого звена, исходя непосредственно из дифференциального уравнения (2.1.10).

Пусть на вход звена подается единичное ступенчатое воздействие $1(t)$, т. е. $u(t) = 1(t)$, тогда для его выходного сигнала $y(t)$ должно выполняться равенство $y(t) = h(t)$. С учетом этих равенств уравнение (2.1.10) перепишем следующим образом:

$$T_1 \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = k \left[1(t) + T_2 \frac{d1(t)}{dt} \right]. \quad (2.1.11)$$

Поскольку $d1(t)/dt = \delta(t)$, то уравнение (2.1.11) принимает вид

$$T_1 \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = k [1(t) + T_2 \delta(t)]. \quad (2.1.12)$$

Уравнение (2.1.12) с учетом выражения (1.4.1) и того, что $\delta(t) = 0$ при $t \neq 0$ распадается на следующие два уравнения:

$$T_1 \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = k, \quad t > 0; \quad (2.1.13)$$

$$T_1 \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = 0, \quad t < 0. \quad (2.1.14)$$

Поскольку при $t < 0$ отсутствуют как воздействия на звено, так и его свободное движение, то

$$h(-0) = 0. \quad (2.1.15)$$

Чтобы решить уравнение (2.1.13) необходимо определить начальное условие при $t = +0$. С этой целью проинтегрируем обе части уравнения (2.1.12) по времени на интервале $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. В результате получим равенство

$$T_1 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dh(t)}{dt} dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(t) dt = k \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 1(t) dt + kT_2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt. \quad (2.1.16)$$

Для дельта-функции $\delta(t)$ при любых положительных значениях ε выполняется равенство

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1. \quad (2.1.17)$$

С учетом выражения (1.4.1) имеем

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 1(t) dt = \varepsilon. \quad (2.1.18)$$

Кроме того, имеет место очевидное равенство

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dh(t)}{dt} dt = h(\varepsilon) - h(-\varepsilon). \quad (2.1.19)$$

После подстановки выражений (2.1.17) – (2.1.19) в равенство (2.1.16) получим

$$T_1[h(+\varepsilon) - h(-\varepsilon)] = k\varepsilon + kT_2 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(t)dt. \quad (2.1.20)$$

Поскольку функция $h(t)$ принимает на интервале интегрирования $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$ лишь конечные значения, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(t)dt = 0. \quad (2.1.21)$$

Полагая в равенстве (2.1.20), что $\varepsilon \rightarrow 0$ и принимая во внимание соотношение (2.1.21), получим

$$h(+0) = h(-0) + k \frac{T_2}{T_1},$$

откуда с учетом нулевого начального условия (2.1.15) имеем

$$h(+0) = k \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.1.22)$$

Равенство (2.1.22) можно рассматривать как начальное условие для дифференциального уравнения (2.1.13). Решив это уравнение с учетом начального условия (2.1.22) получим

$$h(t) = k \left[1 + \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) e^{-t/T_1} \right]; t > 0. \quad (2.1.23)$$

Кроме того, решив уравнение (2.1.14) с начальным условием (2.1.15) имеем

$$h(t) = 0; t < 0. \quad (2.1.24)$$

Объединив равенства (2.1.23) и (2.1.24) в одно, получим для искомой переходной характеристики следующее аналитическое выражение:

$$h(t) = \begin{cases} k \left[1 + \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) e^{-t/T_1} \right], & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (2.1.25)$$

Как видно из выражения (2.1.25) переходная характеристика $h(t)$ при $T_2 < T_1$ возрастает со временем, а при $T_2 > T_1$ – убывает. Соответствующие графики представлены на рисунке 2.3, где $k = 3$, а $T_1 = 1$.

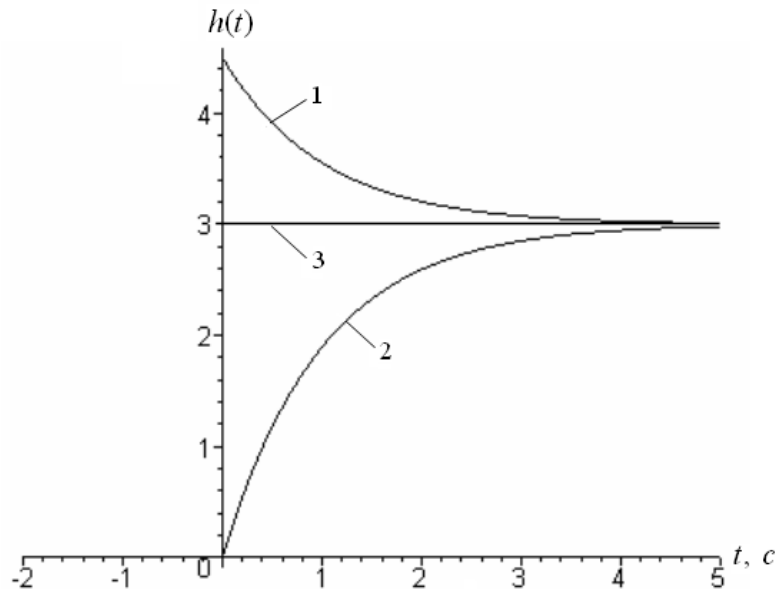


Рисунок 2.3 – Переходные характеристики интегродифференцирующего звена: 1 – $T_2/T_1 = 0,5$; 2 – $T_2/T_1 = 2$; 3 – $T_2/T_1 = 1$

Таким образом, переходные характеристики объектов, у которых входное воздействие $1(t)$ подвергается дифференцированию по времени, претерпевают скачок при $t = 0$. Переходные характеристики объектов, у которых такое дифференцирование отсутствует, плавно возрастают со временем.

Дифференцируя выражение (2.1.25) по времени имеем

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{k}{T_1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) e^{-t/T_1}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Частотные характеристики интегродифференцирующего звена:

$$W(i\omega) = k \frac{1 + iT_2\omega}{1 + iT_1\omega}; \quad A(\omega) = k \sqrt{\frac{1 + T_2^2\omega^2}{1 + T_1^2\omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(T_2\omega) - \text{arctg}(T_1\omega).$$

Апериодическое звено второго порядка. Дифференциальное уравнение и передаточная функция звена:

$$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t); \quad W(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1},$$

причем предполагается, что

$$T_1 \geq 2T_2. \quad (2.1.26)$$

При выполнении неравенства (2.1.26) квадратное уравнение

$$T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 = 0, \quad (2.1.27)$$

называемое также *характеристическим уравнением* звена, имеет два вещественных отрицательных корня

$$s_{1,2} = -\frac{T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}. \quad (2.1.28)$$

Передаточную функцию рассматриваемого звена, разложив ее знаменатель на сомножители, можно представить в виде

$$W(s) = \frac{k}{(1 + T_3 s)(1 + T_4 s)},$$

где

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}.$$

Переходные характеристики звена:

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-t/T_3} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-t/T_4} \right) 1(t);$$

$$g(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} \left(e^{-t/T_3} - e^{-t/T_4} \right) 1(t).$$

Частотные характеристики звена:

$$W(i\omega) = \frac{k}{(1 + iT_3\omega)(1 + iT_4\omega)}; \quad A(\omega) = \frac{k}{(1 + T_3^2\omega^2)(1 + T_4^2\omega^2)};$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(T_3\omega) - \arctg(T_4\omega).$$

Примерами такого звена являются двигатель постоянного тока при учете инерционности цепи якоря, электромашинный усилитель, двойная цепочка LR .

Колебательное звено. Уравнение звена имеет вид

$$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t),$$

причем предполагается

$$T_1 < 2T_2,$$

так что корни характеристического уравнения (2.1.27) – комплексные.

Общепринята запись передаточной функции колебательного звена в виде

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1},$$

где $T = T_2$, $\zeta = \frac{T_1}{2T_2}$, причем $0 < \zeta < 1$, т. к. при $\zeta \geq 1$ звено становится аperiodическим (второго порядка).

Переходные характеристики звена:

$$h(t) = k \left\{ 1 - e^{-\zeta t/T} \left[\cos \left(t \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} \right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(t \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} \right) \right] \right\} 1(t);$$

$$g(t) = \frac{k\zeta}{T\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t/T} \sin \left(t \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} \right) 1(t).$$

Предположим, что $k = 1,8$, $T = 10$ с и построим графики переходных характеристик $h(t)$ и $g(t)$ при различных значениях параметра ζ .

На рисунке 2.4 представлены переходные характеристики колебательного звена.

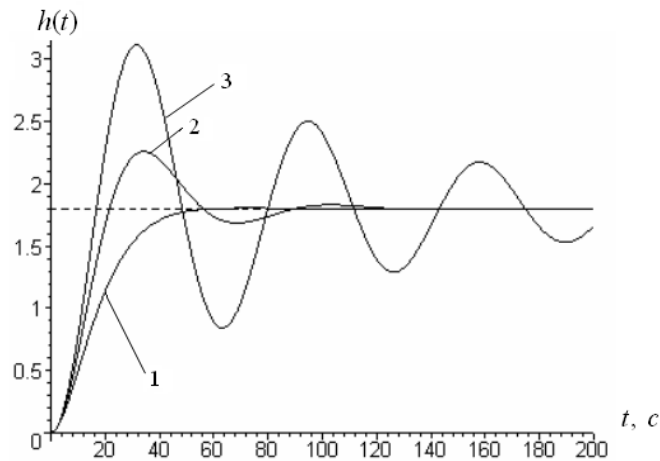


Рисунок 2.4 – Переходные характеристики колебательного звена:
 $1 - \zeta = 0,9$; $2 - \zeta = 0,4$; $3 - \zeta = 0,1$

Согласно рисунку 2.4 с уменьшением значений параметра ζ возрастает амплитуда колебаний переходного процесса на выходе звена, а также уменьшается скорость затухания его колебаний.

На рисунке 2.5 представлены импульсные переходные характеристики колебательного звена.

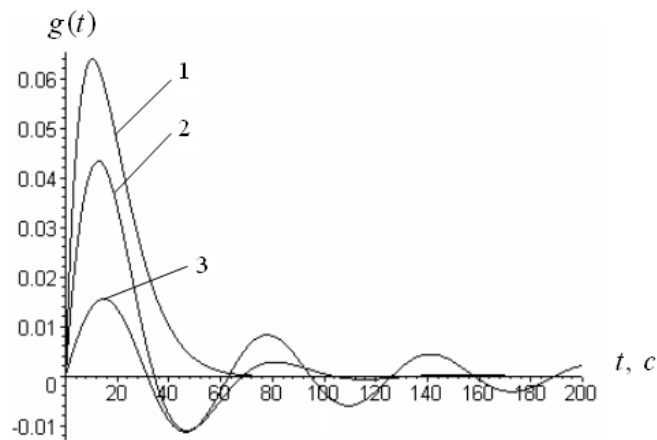


Рисунок 2.5 – Импульсные переходные характеристики колебательного звена: $1 - \zeta = 0,9$; $2 - \zeta = 0,4$; $3 - \zeta = 0,1$

Из рисунка 2.5 видно, что скорость затухания колебаний характеристики $g(t)$ увеличивается с ростом значений параметра ζ , но при этом также возрастают ее максимальные значения, что отличает эту характеристику от характеристики $h(t)$.

Частотные характеристики звена:

$$W(i\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + i2\zeta T\omega};$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}}; \quad (2.1.29)$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{2\zeta T \omega}{1 - T^2 \omega^2}\right).$$

В случае, если $1 > \zeta > 0,707$ амплитуда $A(\omega)$ уменьшается с увеличением ω , т. е. $A(\omega) \leq k$. При $\zeta < 0,707$ появляется «горб» на характеристике $A(\omega)$, который уходит в бесконечность при $\zeta \rightarrow 0$.

Поэтому величина $\zeta = \frac{T_1}{2T_2}$ называется параметром затухания. От-

сюда видна роль постоянных времени T_1 и T_2 в уравнении звена: постоянная T_2 «раскачивает» колебания, а T_1 - «демпфирует» их.

При $\zeta = 0$ колебания становятся незатухающими, а при $\zeta = 1$ колебания вырождаются в апериодический процесс. Частный случай колебательного звена при $\zeta = 0$, когда функции $h(t)$ и $g(t)$ становятся незатухающими (периодическими), носит название консервативного звена.

Графики АЧХ колебательного звена $A(\omega)$ приводятся на рисунке 2.6.

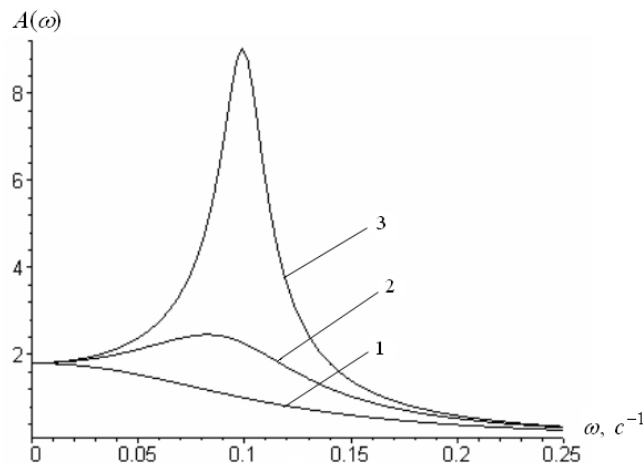


Рисунок 2.6 – АЧХ колебательного звена:

1 – $\zeta = 0,9$; 2 – $\zeta = 0,4$; 3 – $\zeta = 0,1$

Колебательному характеру переходных характеристик $h(t)$ и $g(t)$ соответствует наличие в графике АЧХ резонансного пика при частоте резонанса ω_p . Отношение максимального (пикового) зна-

чения АЧХ к ее значению при нулевой частоте получило, поэтому название *показателя колебательности*:

$$M = \frac{A(\omega_p)}{A(0)}. \quad (2.1.30)$$

Продифференцировав выражение (2.1.29) по ω и приравняв производную к нулю, получим выражение для резонансной частоты системы

$$\omega_p = \frac{1}{T_2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2}. \quad (2.1.31)$$

Подстановка выражения (2.1.31) в формулы (2.1.29) и (2.1.30) приводит к следующей формуле для определения значения частотного показателя колебательности:

$$M = \frac{T_2}{T_1} \sqrt{1 - \left(\frac{T_1}{2T_2} \right)^2}. \quad (2.1.32)$$

Об интенсивности затухания колебаний можно судить также и по величине *относительного демпфирования* (корневому показателю колебательности) m , которая равна модулю отношения вещественной части корней характеристического уравнения (2.1.27) к их мнимой части, т. е.

$$m = \frac{|\operatorname{Re} s_1|}{|\operatorname{Im} s_1|} = \frac{|\operatorname{Re} s_2|}{|\operatorname{Im} s_2|}.$$

С учетом равенства (2.1.28) величину относительного демпфирования m можно выразить через коэффициенты характеристического уравнения звена (2.1.27)

$$m = \frac{T_1}{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}},$$

а приняв во внимание (2.1.32), установить связь между m и $M_{кл}$:

$$M = \frac{1 + m^2}{2m}.$$

Объективно интенсивность затухания колебаний в колебательном звене определяется относительным уменьшением соседних амплитуд A_{k+1} и A_k переходной характеристики $h(t)$ (рисунок 1.20), оцениваемое с помощью показателя

$$\psi = \frac{A_k - A_{k+1}}{A_k}. \quad (2.1.33)$$

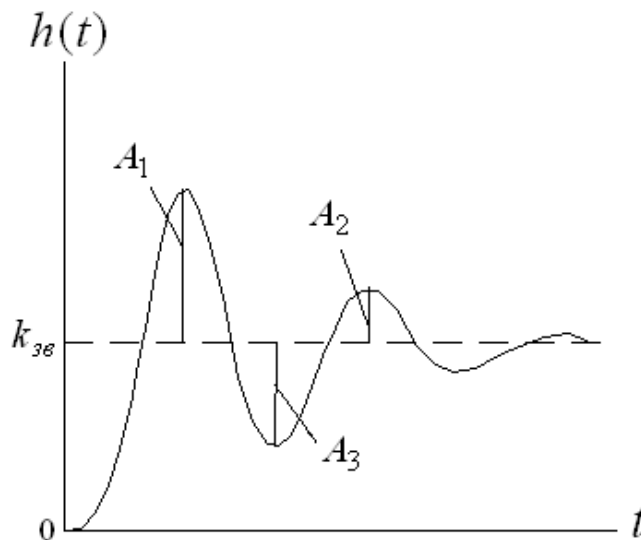


Рисунок 2.7 – Определение показателя ψ по переходной характеристике звена

Этот показатель получил название *степени затухания* колебаний. С учетом того, что $A_{k+1} = A_k e^{-\alpha T_0}$ (где $T_0 = 2\pi / \omega_0$ – период собственных колебаний), формулу (2.1.33) можно представить следующим образом:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi m}. \quad (2.1.34)$$

Таким образом, степень затухания ψ однозначно связана с величиной относительного демпфирования m , а, следовательно, и с частотным показателем колебательности M .

2.2. Способы соединения динамических звеньев

Последовательное соединение звеньев. Покажем, что произведение двух передаточных функций $W_{uv}(s)$ и $W_{vy}(s)$ равно передаточной функции объекта $W_{uv}(s)$, образованного путем последовательного соединения двух объектов (рисунок 2.8.), один из которых имеет передаточную функцию $W_{uv}(s)$ а другой – $W_{vy}(s)$.

Структурная схема рассматриваемого объекта представлена на рисунке 2.8.

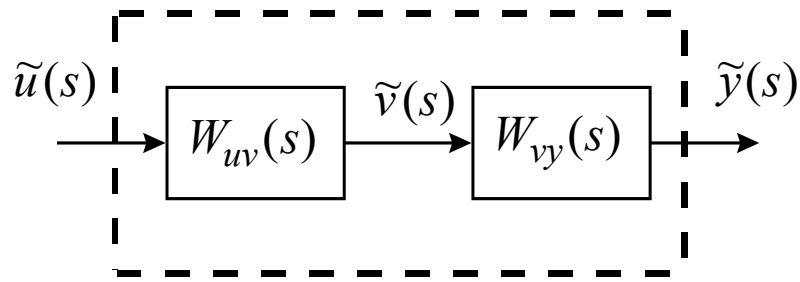


Рисунок 2.8 – Структурная схема последовательного соединения объектов

В целях упрощения анализа динамики управляемых процессов объект разбивают на возможно более простые с точки зрения математического описания звенья, обладающие направленностью действия.

При разбиении объекта на звенья направленного действия математическое описание каждого такого звена может быть составлено без учета связей его с другими звеньями. Соответственно математическое описание всего объекта в целом может быть получено как совокупность составленных независимо друг от друга уравнений или характеристик отдельных звеньев, образующих объект и дополненных уравнениями связи между звеньями.

В результате представления объекта в виде совокупности соединенных между собой звеньев направленного действия, для каждого из которых задан алгоритм (закон) преобразования входных величин в выходные, составляется структурная схема объекта. Она состоит из прямоугольников, изображающих отдельные звенья, и стрелок, соединяющих их выходы и входы согласно существующим между ними связям. Каждому звену структурной схемы сопоставляется описывающее его уравнение или характеристика. Получение структурной схемы является конечной целью математического описания объекта.

Передаточная функция составного объекта $W_{uv}(s)$, представленного на рисунке 2.8, определяется выражением

$$W_{uy}(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{u}(s)}. \quad (2.2.1)$$

Поскольку

$$W_{uv}(s) = \frac{\tilde{v}(s)}{\tilde{u}(s)}; \quad W_{vy}(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{v}(s)},$$

то с учетом выражения (2.2.1) получим равенство

$$W_{uy}(s) = W_{uv}(s)W_{vy}(s).$$

Рассуждая аналогичным образом можно показать, что если имеется n последовательно соединенных объектов с передаточными функциями $W_k(s)$, $k = \overline{1, n}$, то передаточная функция составного объекта $W(s)$ задается равенством

$$W(s) = \prod_{k=1}^n W_k(s). \quad (2.2.2)$$

Параллельное соединение звеньев. Этот способ соединения звеньев представлен на рисунке 2.9.

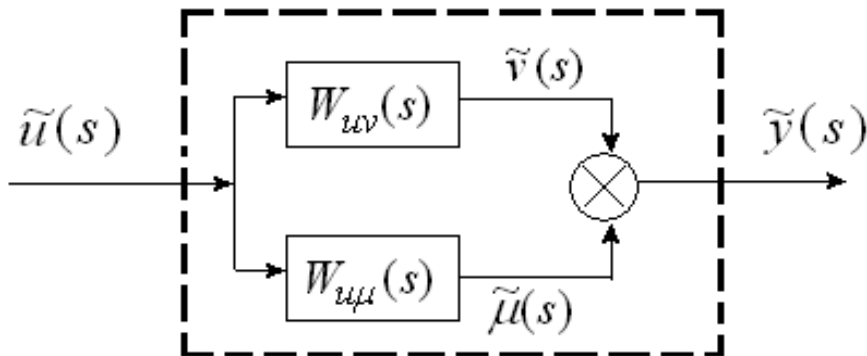


Рисунок 2.9 – Структурная схема параллельного соединения объектов

В данном случае передаточная функция составного объекта $W_{uy}(s)$ определяется выражением

$$W_{uy}(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{u}(s)}. \quad (2.2.3)$$

Кроме того, передаточные функции параллельно соединенных объектов задаются следующими выражениями:

$$W_{uv}(s) = \frac{\tilde{v}(s)}{\tilde{u}(s)}; \quad W_{uu}(s) = \frac{\tilde{\mu}(s)}{\tilde{u}(s)}. \quad (2.2.4)$$

Согласно рис. 2.9. должно выполняться равенство

$$\tilde{y}(s) = \tilde{v}(s) + \tilde{\mu}(s). \quad (2.2.5)$$

С учетом выражений (2.2.4) равенство (2.2.5) принимает вид

$$\tilde{y}(s) = W_{uv}(s)\tilde{u}(s) + W_{u\mu}(s)\tilde{u}(s) = [W_{uv}(s) + W_{u\mu}(s)] \tilde{u}(s). \quad (2.2.6)$$

Принимая во внимание выражение (2.2.3) из равенства (2.2.6) получим

$$W_{uy}(s) = W_{uv}(s) + W_{u\mu}(s). \quad (2.2.7)$$

Таким образом, согласно выражению (2.2.7) передаточная функция объекта, состоящего из двух параллельно соединенных объектов (звеньев) равна сумме их передаточных функций.

Путем аналогичных рассуждений можно показать, что если имеется n последовательно соединенных объектов с передаточными функциями $W_k(s)$, $k = \overline{1, n}$, то передаточная функция составного объекта $W(s)$ задается равенством

$$W(s) = \sum_{k=1}^n W_k(s). \quad (2.2.8)$$

Обратно, если представить передаточную функцию объекта $W(s)$ как сумму передаточных функций $W_k(s)$, $k = \overline{1, n}$, то тем самым исходный объект разбивается на n параллельно соединенных звеньев.

Таким образом, располагая структурной схемой объекта, на которой показан способ соединения составляющих его звеньев, можно определить передаточную функцию объекта, если известны передаточные функции звеньев. Кроме того, при конструировании объектов с желаемыми динамическими свойствами удобно бывает представить его в виде комбинации различных звеньев с известными динамическими характеристиками.

Соединение звеньев по способу обратной связи. При таком соединении одно из звеньев (звено обратной связи) передает сигнал с выхода другого звена на его вход, где они суммируются с входным воздействием соединения (рисунок 2.10). Пусть $W_{zy}(s)$ – передаточная функция звена, а $W_{yx}(s)$ – передаточная функция звена обратной связи, тогда для изображений $\tilde{y}(s)$ и $\tilde{u}(s)$ входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов выполняется равенство

$$\tilde{y}(s) = W_{zy}(s)[\tilde{u}(s) \pm W_{yx}(s)\tilde{y}(s)]. \quad (2.2.9)$$

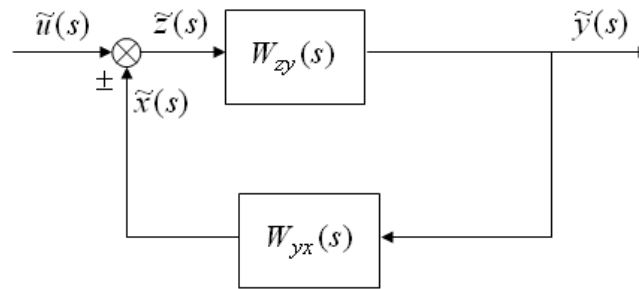


Рисунок 2.10 – Соединение звеньев по способу обратной связи

Согласно равенству (2.2.9) имеем

$$\tilde{y}(s) = \frac{W_{zy}(s)}{1 \mp W_{yx}(s)} \tilde{u}(s). \quad (2.2.10)$$

На основании равенства (2.2.10) можно сделать вывод, что передаточная функция рассматриваемого соединения звеньев $W_{uy}(s)$ определяется выражением

$$W_{uy}(s) = \frac{W_{zy}(s)}{1 \mp W_{yx}(s)}. \quad (2.2.11)$$

Отметим, что обратная связь называется отрицательной, если выполняется равенство

$$\tilde{z}(s) = \tilde{u}(s) - \tilde{x}(s),$$

а при

$$\tilde{z}(s) = \tilde{u}(s) + \tilde{x}(s)$$

обратную связь принято называть положительной.

При наличии отрицательной обратной связи в знаменателе выражения (2.2.11) ставится знак «плюс», а если обратная связь положительная, то знак «минус».

2.3. Применение динамических звеньев при синтезе типовых регуляторов

Типовыми регуляторами называются технические устройства, реализующие типовые алгоритмы (законы) управления. Эти устрой-

ства можно представить в виде одного или нескольких соединенных между собой динамических звеньев, т. е. синтезировать их на основе указанных звеньев.

Рассмотрим, например, пропорциональный алгоритм управления, описываемый уравнением (В.3.1). Сопоставив это уравнение с уравнением идеального усилительного звена (2.1.1), приходим к выводу, что данный алгоритм может быть технически реализован с помощью указанного звена. Причем техническое устройство, реализующее пропорциональный алгоритм управления принято называть П-регулятором.

Передаточная функция П-регулятора аналогична передаточной функции идеального усилительного звена (2.1.3) и имеет следующий вид:

$$W_{II}(s) = K_p. \quad (2.3.1)$$

Точно также интегральный алгоритм управления технически реализуется с помощью идеального интегрирующего звена, причем передаточная функция И-регулятора согласно выражению (В.3.2) представима в виде

$$W_{II}(s) = \frac{K_p}{T_I s}. \quad (2.3.2)$$

Более сложно технически реализовать пропорционально–интегральный алгоритм управления. Для решения этой задачи определим, воспользовавшись выражением (В.3.3), передаточную функцию ПИ-регулятора

$$W_{III}(s) = K_p + \frac{K_p}{T_I s}. \quad (2.3.3)$$

Принимая во внимание, что слагаемые в правой части равенства (2.3.3) представляет собой передаточные функции идеальных усилительного и интегрирующего звеньев, ПИ-регулятор можно представить в виде параллельного соединения этих звеньев, как показано, например, на рисунке 2.9.

Для синтеза ПИД-регулятора на основе динамических звеньев также получим, исходя из выражения (В.3.4), его передаточную функцию

$$W_{\text{ПИД}}(s) = K_p T_D s + K_p + \frac{K_p}{T_I s}. \quad (2.3.4)$$

Анализируя выражение (2.3.4) установим, что ПИД-регулятор реализуется с помощью параллельного соединения идеальных интегрирующего, дифференцирующего и усилительного звеньев.

Отметим, что точная техническая реализация ПИД-регулятора невозможна, т.к. при этом степень полинома числителя передаточной функции регулятора на единицу выше, чем степень полинома ее знаменателя.

Действительно, согласно выражению (2.3.4) имеем

$$W_{\text{ПИД}}(s) = K_p \frac{T_D s^2 + s + \frac{1}{T_I}}{s}.$$

Это означает, что реальная передаточная функция ПИД-регулятора имеет вид

$$W_{\text{рег}}(s) = K_p T_D \frac{s}{1 + T_0 s} + K_p + \frac{K_p}{T_I s}, \quad (2.3.5)$$

где T_0 – постоянная времени «балластного» инерционного звена, подключенного последовательно звену дифференцирования по времени. Однако, при конструировании ПИД-регулятора стараются выполнить условие $T_D \gg T_0$. Поэтому в большинстве случаев «балластное» звено можно не принимать во внимание и вместо реальной передаточной функции (2.3.5) пользоваться идеализированной (2.3.4), как более простой и наглядной.

2.4. Применение динамических звеньев при математическом моделировании объектов управления

Представим объект, описываемый уравнением (1.1.45) и граничными условиями (1.1.46), в виде совокупности последовательно соединенных элементарных динамических звеньев.

Передаточные функции рассматриваемого объекта $W_1(x, s)$ и $W_2(x, s)$, представленные выражениями (1.2.26) и (1.2.27), можно разложить в бесконечные произведения вида

$$W_1(x, s) = k_1 \prod_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x, s); \quad (2.4.1)$$

$$W_2(x, s) = k_2 \prod_{k=1}^{\infty} \Psi_k(x, s), \quad (2.4.2)$$

где

$$k_1 = \frac{l-x}{l}; \quad k_2 = \frac{x}{l}; \quad (2.4.3)$$

$$\Phi_k(x, s) = \frac{1 + \frac{\tau_1}{k^2} s}{1 + \frac{\tau_0}{k^2} s}; \quad \Psi_k(x, s) = \frac{1 + \frac{\tau_2}{k^2} s}{1 + \frac{\tau_0}{k^2} s}. \quad (2.4.4)$$

$$\tau_1 = \left(\frac{l-x}{\pi a} \right)^2; \quad \tau_2 = \left(\frac{x}{\pi a} \right)^2; \quad \tau_0 = \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2; \quad (2.4.5)$$

Поскольку согласно равенствам (2.4.5) величины τ_1 , τ_2 и τ_0 имеют размерность времени, то на основании выражений (2.4.4) приходим к выводу, что функции $\Phi_k(x, s)$ и $\Psi_k(x, s)$ являются передаточными функциями интегро-дифференцирующих звеньев.

Тогда из равенств (2.4.1) и (2.4.2) следует, что каналы управления рассматриваемого объекта можно представить в виде бесконечных цепочек последовательно соединенных интегро-дифференцирующих звеньев.

Таким образом, в рассмотренном случае была продемонстрирована возможность моделирования достаточно сложных объектов с распределенными параметрами с помощью комбинаций элементарных динамических звеньев.

Похожая ситуация наблюдается и для объектов с сосредоточенными параметрами, с тем лишь отличием, что в этом случае можно ограничиться конечным числом последовательно соединенных элементарных объектов (звеньев).

В самом деле, согласно выражению (1.2.14) каждый из полиномов числителя и знаменателя передаточной функции объекта с сосредоточенными параметрами можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^n \beta_k s^k = \beta_n \prod_{k=1}^n (s - s_k); \quad \sum_{h=0}^n \alpha_h s^h = \alpha_n \prod_{h=1}^n (s - s_h), \quad (2.4.6)$$

где s_k и s_h являются корнями следующих уравнений:

$$\sum_{k=0}^n \beta_k s^k = 0; \quad \sum_{h=0}^n \alpha_h s^h = 0. \quad (2.4.7)$$

Если уравнения (2.4.7) имеют лишь действительные отрицательные корни, то выражения (2.4.6) принимают вид

$$\sum_{k=0}^n \beta_k s^k = \beta_0 \prod_{k=1}^n (1 + \tau_k s); \quad \sum_{h=0}^n \alpha_h s^h = \alpha_0 \prod_{h=1}^n (1 + T_h s), \quad (2.4.8)$$

где

$$\tau_k = -\frac{1}{s_k}; \quad T_h = -\frac{1}{s_h}. \quad (2.4.9)$$

Действительно, подставив в выражения (2.4.6) значение $s = 0$ имеем

$$\beta_0 = \beta_n \prod_{k=1}^n (-s_k); \quad \alpha_0 = \alpha_n \prod_{h=1}^n (-s_h). \quad (2.4.10)$$

С учетом выражений (2.4.9) и (2.4.10) нетрудно убедиться в выполнении равенств (2.4.8). В таком случае для передаточной функции (1.2.14) получим следующее выражение:

$$W_{uy}(s) = k \prod_{j=1}^n W_j(s),$$

где

$$k = \frac{\beta_0}{\alpha_0}; \quad W_j(s) = \frac{1 + \tau_j s}{1 + T_j s},$$

причем постоянные τ_j и T_j имеют размерность времени.

Часто математическое описание объектов с распределенными параметрами можно значительно упростить, используя звено транспортного запаздывания, входной $u(t)$ и выходной $y(t)$, сигналы которого связаны соотношением (1.1.47).

Определим передаточную функцию данного звена. Применив к соотношению (1.1.47) преобразование Лапласа получим

$$W(s) = e^{-\tau s}.$$

Оказывается, что рассмотренный выше объект с распределенными параметрами, которому отвечают передаточные функции $W_1(x, s)$ и $W_2(x, s)$, заданные выражениями (1.2.26) и (1.2.27), можно приближенно представить в виде последовательного соединения звена транспортного запаздывания и объекта с сосредоточенными параметрами.

Возможность такого приближения установим на примере передаточной функции $W_2(x, s)$, которую представим следующим образом:

$$W_2(x, s) = W_g(x, s)W_\tau(s), \quad (2.4.11)$$

где

$$W_g(x, s) = k_2 \prod_{h=1}^N \Psi_h(x, s); \quad (2.4.12)$$

$$W_\tau(s) = \prod_{h=N+1}^{\infty} \Psi_h(x, s). \quad (2.4.13)$$

Поскольку при больших значениях h с малой погрешностью выполняется равенство

$$\frac{1}{1 + \frac{\tau_0}{h^2}s} \approx 1 - \frac{\tau_0}{h^2}s,$$

то согласно (2.4.4) имеем

$$\Psi_h(x, s) \approx \left(1 - \frac{\tau_0}{h^2}s\right) \left(1 + \frac{\tau_2}{h^2}s\right) \approx 1 - \frac{\tau_0 - \tau_2}{h^2}s. \quad (2.4.14)$$

Если значение N достаточно велико, то с учетом приближенного равенства (2.4.14) выражение (2.4.13) принимает вид

$$W_\tau(x, s) \approx \prod_{h=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau_0 - \tau_2}{h^2}s\right) \approx 1 - \chi(N)(\tau_0 - \tau_2)s, \quad (2.4.15)$$

где

$$\chi(N) = \sum_{h=N+1}^{\infty} \frac{1}{h^2}. \quad (2.4.16)$$

Поскольку при малых значениях $|s|$ выполняется приближенное равенство

$$e^{-\tau s} \approx 1 - \tau s,$$

то согласно равенствам (2.4.15) и (2.4.16) имеем

$$W_{\tau}(x, s) \approx e^{-\tau s}, \text{ если допустить, что}$$

$$\tau = \chi(N)(\tau_0 - \tau_2).$$

Таким образом, принимая во внимание приближенное равенство (2.4.17) выражение (2.4.11) представим в виде

$$W_2(x, s) \approx W_g(x, s)e^{-\tau s},$$

что и требовалось доказать, т.к. согласно выражениям (2.4.4) и (2.4.12) передаточная функция $W_g(x, s)$ отвечает объекту с сосредоточенными параметрами, т.к. она может быть представлена в виде отношения двух полиномов степени N .

Следовательно, передаточную функцию объекта с распределенными параметрами $W_2(x, s)$ можно с любой заданной точностью представить в виде произведения передаточных функций объекта с сосредоточенными параметрами $W_g(x, s)$ и звена транспортного запаздывания $e^{-\tau s}$.

Для передаточной функции $W_1(x, s)$ можно получить аналогичный результат.

2.5. Тест 2

1. Элементарные звенья описываются дифференциальными уравнениями не выше ... порядка.

- а) первого;
- б) второго;
- в) третьего.

2. Переходная характеристика апериодического звена первого порядка

- а) не имеет точки перегиба;
- б) имеет точку перегиба;

в) имеет точку экстремума.

3. Взаимосвязь между управляющим напряжением и угловой скоростью вращения вала электродвигателя в первом приближении можно описать

а) апериодическим звеном первого порядка;

б) апериодическим звеном второго порядка;

в) колебательным звеном.

4. Характеристическое уравнение апериодического звена второго порядка имеет ... корня.

а) два вещественных положительных;

б) два комплексно-сопряженных;

в) два вещественных отрицательных.

5. В результате представления объекта в виде совокупности соединенных между собой звеньев направленного действия, для каждого из которых задан алгоритм преобразования входных величин в выходные, составляется

а) структурная схема объекта;

б) функциональная схема объекта;

в) сигнальная схема объекта.

6. При последовательном соединении звеньев направленного действия их передаточные функции

а) складываются;

б) делятся;

в) перемножаются.

7. Пропорциональный алгоритм управления может быть технически реализован с помощью

а) апериодического звена первого порядка;

б) идеального усилительного звена;

в) апериодического звена второго порядка.

8. ПИД-регулятор реализуется с помощью ... идеальных интегрирующего, дифференцирующего и усилительного звеньев.

а) последовательного соединения;

б) комбинированного соединения;

в) параллельного соединения.

9. Точная техническая реализация ПИД-регулятора невозможна, т.к. при этом степень полинома числителя передаточной функции регулятора ... степени полинома ее знаменателя.

а) выше;

б) ниже;

в) равна.

10. Часто математическое описание объектов с распределенными параметрами можно значительно упростить, используя

а) колебательное звено;

б) апериодическое звено первого порядка;

в) звено транспортного запаздывания.

ГЛАВА III

ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Уравнения и передаточные функции замкнутых систем

Рассмотрим уравнения и передаточные функции, описывающие односвязную линейную стационарную систему (рисунок 3.1).

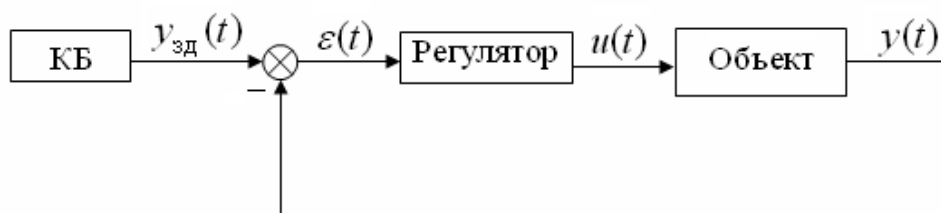


Рисунок 3.1 – Функциональная схема односвязной системы

Дифференциальные уравнения, устанавливающие взаимосвязь между входными и выходными сигналами объекта и регулятора рассматриваемой системы представим в виде

$$\sum_{k=0}^{\sigma} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{h=0}^{\rho} b_h \frac{d^h u(t)}{dt^h}; \quad (3.1.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\nu} q_k \frac{d^k u(t)}{dt^k} = \sum_{h=0}^{\chi} r_h \frac{d^h \varepsilon(t)}{dt^h}, \quad (3.1.2)$$

где a_k , b_h и q_k , r_h – соответственно коэффициенты дифференциальных уравнений объекта и регулятора; $y(t)$ – выходной сигнал объекта, соответствующий управляемому технологическому параметру; $u(t)$ – сигнал управ-

ления, являющийся входным для объекта и выходным для регулятора; $\varepsilon(t)$ – сигнал ошибки управления, поступающий на вход регулятора; σ , ρ , ν и χ положительные целые числа.

Представим уравнения (3.1.1) и (3.1.2) в операторном виде. Для этого в них знаки производных следует заменить оператором дифференцирования по времени $p = d(\dots) / dt$.

В результате указанные уравнения принимают вид

$$\left[\sum_{k=0}^n a_k p^k \right] y(t) = \left[\sum_{h=0}^{\rho} b_h p^h \right] u(t); \quad (3.1.3)$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\xi} q_k p^k \right] u(t) = \left[\sum_{h=0}^{\chi} r_h p^h \right] \varepsilon(t). \quad (3.1.4)$$

Пусть

$$R_{об}(p) = \sum_{h=0}^{\rho} b_h p^h; \quad Q_{об}(p) = \sum_{k=0}^{\sigma} a_k p^k; \quad (3.1.5)$$

$$R_{рег}(p) = \sum_{h=0}^{\chi} r_h p^h; \quad Q_{рег}(p) = \sum_{k=0}^{\nu} q_k p^k, \quad (3.1.6)$$

тогда с учетом (3.1.3) – (3.1.6) взаимосвязь между входом и выходом объекта и регулятора установим с помощью операторных уравнений

$$y(t) = W_{об}(p)u(t); \quad u(t) = W_{рег}(p)\varepsilon(t), \quad (3.1.7)$$

где операторы объекта $W_{об}(p)$ и регулятора $W_{рег}(p)$ определяются выражениями

$$W_{об}(p) = \frac{R_{об}(p)}{Q_{об}(p)}; \quad W_{рег}(p) = \frac{R_{рег}(p)}{Q_{рег}(p)}. \quad (3.1.8)$$

В односвязной замкнутой системе к операторным уравнениям (3.1.5) добавляется уравнение

$$\varepsilon(t) = y_{зд}(t) - y(t). \quad (3.1.9)$$

Исходя из равенств (3.1.7) – (3.1.9) можно установить взаимосвязь между входными и выходными сигналами замкнутой системы.

Например, взаимосвязь между сигналами $y_{зд}(t)$ и $y(t)$ задается выражением

$$\begin{aligned} [Q_{об}(p)Q_{рег}(p) + R_{об}(p)R_{рег}(p)] y(t) = \\ = R_{об}(p)R_{рег}(p)y_{зд}(t). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Обозначим

$$\Delta(p) = Q_{об}(p)Q_{рег}(p) + R_{об}(p)R_{рег}(p), \quad (3.1.11)$$

тогда с учетом выражений (3.1.5), (3.1.6) дифференциальный оператор $\Delta(p)$ представим в виде

$$\Delta(p) = \sum_{k=0}^n \alpha_k p^k, \quad (3.1.12)$$

где α_k – постоянные вещественные коэффициенты, а $n = \sigma + \chi$.

Полагая, что

$$F(t) = R_{об}(p)R_{рег}(p)y_{зд}(t)$$

и принимая во внимание равенства (3.1.10) – (3.1.12) получим

$$\left[\sum_{k=0}^n \alpha_k p^k \right] y(t) = F(t). \quad (3.1.13)$$

После замены в операторном равенстве (3.1.13) операторов p производными по времени получим **дифференциальное уравнение замкнутой системы**

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = F(t). \quad (3.1.14)$$

Уравнение (3.1.14) определяет закон изменения выходного сигнала объекта в зависимости от воздействия $F(t)$.

Для ошибки управления $\varepsilon(t)$, действуя аналогичным образом, приходим к похожему уравнению

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k \varepsilon(t)}{dt^k} = \Theta(t), \quad (3.1.15)$$

где

$$\Theta(t) = Q_{об}(p)Q_{рег}(p)y_{зд}(t).$$

Сопоставив уравнения (3.1.14) и (3.1.15) приходим к выводу, что при изменении сигнала, принимаемого за выходной, левая часть дифференциального уравнения, описывающего закон его изменения, остается неизменной, меняется лишь воздействие, находящееся в правой части данного уравнения.

Установим теперь вид передаточных функций односвязной замкнутой системы. С этой целью применим к операторным уравнениям (3.1.7) преобразование Лапласа.

В результате получим

$$\tilde{y}(s) = W_{об}(s) \tilde{u}(s); \quad \tilde{u}(s) = W_{рег}(s) \tilde{\varepsilon}(s), \quad (3.1.16)$$

где $\tilde{y}_{зд}(s)$, $\tilde{y}(s)$, $\tilde{\varepsilon}(s)$ и $\tilde{u}(s)$ – соответственно изображения по Лапласу сигналов $y_{зд}(t)$, $y(t)$, $\varepsilon(t)$ и $u(t)$; $W_{об}(s)$ и $W_{рег}(s)$ – передаточные функции объекта и регулятора; s – комплексная переменная.

Применив преобразование Лапласа также к уравнению (3.1.9), получим уравнение для изображений

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \tilde{y}_{зд}(s) - \tilde{y}(s). \quad (3.1.17)$$

Воспользовавшись равенствами (3.1.16) и (3.1.17) можно получить выражения для передаточных функций односвязной замкнутой системы.

В расчетах односвязных замкнутых систем используют три основных вида передаточных функций:

1. **Главная** передаточная функция

$$W_{y_{зд}y}(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{y}_{зд}(s)} = \frac{W_{об}(s)W_{рег}(s)}{1 + W_{об}(s)W_{рег}(s)}. \quad (3.1.18)$$

2. Передаточная функция для **ошибки**

$$W_{y_{зд}\varepsilon}(s) = \frac{\tilde{\varepsilon}(s)}{\tilde{y}_{зд}(s)} = \frac{1}{1 + W_{об}(s)W_{рег}(s)}. \quad (3.1.19)$$

3. Передаточная функция по **возмущению** $\lambda(t)$, **действующему со стороны регулирующего органа**, т.е. добавляющегося к сигналу управления $u(t)$

$$W_{\lambda\varepsilon}(s) = \frac{\tilde{\varepsilon}(s)}{\tilde{u}(s) + \tilde{\lambda}(s)} = \frac{W_{o\bar{o}}(s)}{1 + W_{o\bar{o}}(s)W_{pez}(s)}, \quad (3.1.20)$$

где $\tilde{\lambda}(s)$ – изображение по Лапласу сигнала $\lambda(t)$. В этом случае на вход канала управления объекта поступает сигнал $u(t) + \lambda(t)$.

Выполнив преобразование Лапласа для равенств (3.1.8), получим для передаточных функций $W_{o\bar{o}}(s)$ и $W_{pez}(s)$ следующие выражения:

$$W_{o\bar{o}}(s) = \frac{R_{o\bar{o}}(s)}{Q_{o\bar{o}}(s)}; \quad W_{pez}(s) = \frac{R_{pez}(s)}{Q_{pez}(s)}, \quad (3.1.21)$$

где $R_{o\bar{o}}(s)$ и $Q_{o\bar{o}}(s)$ – полиномы (объекты с сосредоточенными параметрами) или трансцендентные функции (объекты с распределенными параметрами); $R_{pez}(s)$ и $Q_{pez}(s)$ – полиномы. Трансцендентные функции характеризуются тем, что их разложения в ряд Тейлора имеют бесконечное число членов, а для полиномов число членов этих разложений является конечным.

На основании выражений (3.1.18) – (3.1.21) можно сделать вывод, что все передаточные функции односвязной системы имеют одинаковый знаменатель

$$\Delta(s) = Q_{o\bar{o}}(s)Q_{pez}(s) + R_{o\bar{o}}(s)R_{pez}(s).$$

Функцию $\Delta(s)$ можно представить в виде

$$\Delta(s) = \sum_{h=0}^n \alpha_h s^h = \alpha_n \prod_{k=1}^n (s - s_k), \quad (3.1.22)$$

где n – положительное целое число, α_h – коэффициенты, а s_k – корни уравнения

$$\Delta(s) = 0. \quad (3.1.23)$$

Уравнение (3.1.23) называется **характеристическим уравнением замкнутой системы**, т.к. его корни s_k , $k = \overline{1, n}$ характеризуют ее важнейшие динамические свойства. Их часто называют также **полюсами** передаточной функции замкнутой системы.

Необходимо отметить, что для систем с распределенными параметрами величина $n \rightarrow \infty$, а в случае систем с сосредоточенными параметрами n является конечным целым числом. Поэтому для си-

стем с сосредоточенными параметрами, заданная выражением (3.1.22), величина $\Delta(s)$ называется *характеристическим полиномом замкнутой системы*.

Пример 3.1. Рассмотрим одновязную систему, функциональная схема которой представлена на рис. 3.1. Предположим, что дифференциальные уравнения системы (3.1.1) и (3.1.2) имеют вид

$$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_{об} u(t);$$

$$T_{И} \frac{du(t)}{dt} = T_{И} K_p \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + K_p \varepsilon(t),$$

где T_1 и T_2 – постоянные времени объекта; $K_{об}$ – коэффициент передачи объекта; $T_{И}$ – постоянная времени регулятора; K_p – коэффициент передачи регулятора.

Определим дифференциальное (3.1.13) и характеристическое (3.1.23) уравнения замкнутой системы. Для этого представим уравнения объекта и регулятора в аналогичном (3.1.3) и (3.1.4) операторном виде

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)y(t) = K_{об} u(t); \quad T_{И} p u(t) = (T_{И} K_p p + K_p) \varepsilon(t).$$

Руководствуясь соотношениями (3.1.3), (3.1.4) и (3.1.5) получим следующие выражения:

$$R_{об}(p) = K_{об}; \quad Q_{об}(p) = T_2^2 p^2 + T_1 p + 1;$$

$$R_{рег}(p) = T_{И} K_p p + K_p; \quad Q_{рег}(p) = T_{И} p.$$

Воспользовавшись равенством (3.1.11) и полученными выражениями имеем

$$\Delta(p) = (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)T_{И} p + K_p K_{об} (T_{И} p + 1) =$$

$$= T_2^2 T_{И} p^3 + T_1 T_{И} p^2 + T_{И} (K_p K_{об} + 1)p + K_p K_{об}.$$

Поскольку

$$F(t) = R_{об}(p)R_{рег}(p)y_{зд}(t) = K_p K_{об} (T_{И} p + 1)y_{зд}(t),$$

то искомое дифференциальное уравнение представим в виде

$$\begin{aligned}
& T_2^2 T_{II} \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + T_1 T_{II} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_{II} (K_p K_{об} + 1) \frac{dy(t)}{dt} + K_p K_{об} y(t) = \\
& = K_p K_{об} T_{II} \frac{dy_{зд}(t)}{dt} + K_p K_{об} y_{зд}(t).
\end{aligned}$$

Чтобы получить характеристическое уравнение замкнутой системы необходимо к левой части ее дифференциального уравнения применить преобразование Лапласа по времени, а затем приравнять полученное выражение нулю.

В результате имеем

$$\Delta(s) = T_2^2 T_{II} s^3 + T_1 T_{II} s^2 + T_{II} (K_p K_{об} + 1) s + K_p K_{об} = 0.$$

Рассмотренный пример показывает, что, коэффициенты как дифференциального, так и характеристического уравнений замкнутой системы зависят от параметров настройки регулятора. Следовательно, изменяя значения этих параметров, можно изменять их решения или корни, добиваясь требуемого качества управления.

Управление замкнутой системой, основанное на достижении заданного расположения корней ее характеристического уравнения (3.1.23), называется **модальным**, т. к. эти корни принято также называть **модами** замкнутой системы.

При нахождении корней характеристического уравнения (3.1.23) часто более удобно пользоваться эквивалентным ему уравнением

$$\Delta_{\varepsilon}(s) = 1 + W_{об}(s)W_{рег}(s) = 0, \quad (3.1.24)$$

которое получается делением (3.1.23) на произведение $Q_{об}(s)Q_{рег}(s)$ и имеет те же корни, что и уравнение (3.1.23).

С помощью передаточных функций (3.1.1) – (3.1.3) по входному сигналу можно при нулевых начальных условиях определить сигнал на выходе канала передачи, динамические свойства которого описываются какой-либо из этих функций.

Например, пусть на вход системы поступает сигнал $y_{уд}(t)$, тогда сигнал на ее выходе $y(t)$ определяется выражением

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} W_{y_{зд}y}(s) \tilde{y}_{зд}(s) ds,$$

где γ – неотрицательное вещественное число.

Определим теперь передаточные функции каскадной системы, функциональная схема которой представлена на рисунке 3.2.

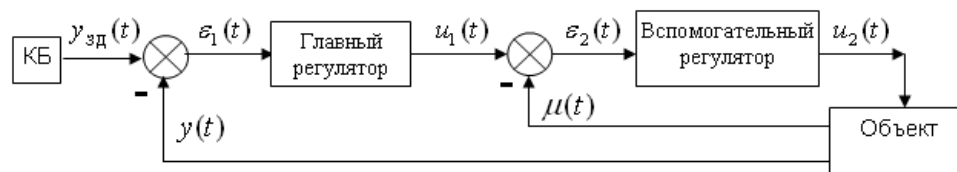


Рисунок 3.2 – Каскадная система управления

В каскадных схемах управления применяются два регулятора, главный и вспомогательный, которым отвечают операторы $W_{\text{рег}}^{\text{гл}}(p)$ и $W_{\text{рег}}^{\text{вс}}(p)$.

Главный регулятор формирует сигнал задания $u_1(t)$ для вспомогательного регулятора, вырабатывающего управляющее воздействие $u_2(t)$, которое влияет как на основную управляемую величину $y(t)$, так и на вспомогательную $\mu(t)$. Однако величина $\mu(t)$ реагирует на возмущающее воздействие $\lambda(t)$ гораздо быстрее, чем $y(t)$. Поэтому сигнал ошибки управления $\varepsilon_2(t)$ вырабатывается со значительным упреждением по времени, т.е. еще до того, как изменение $\lambda(t)$ заметно скажется на основной величине $y(t)$, управляющее воздействие $u_2(t)$ уже изменяется таким образом, чтобы скомпенсировать нежелательное влияние этого возмущения.

Например, при управлении температурой внутренней воздушной средой теплиц изменение метеоусловий оказывает на нее значительное влияние, быстрее всего сказывающееся на температуре остекления теплицы. Поэтому наряду с датчиком температуры, расположенным внутри теплицы, целесообразно использовать датчик, измеряющий температуру на ее поверхности. В этом случае температура внутри теплицы соответствует основной управляемой величине $y(t)$, а температура на поверхности остекления – вспомогательной $\mu(t)$.

Рассмотрим также случай, когда применение каскадной схемы управления позволяет повысить качество управления, благодаря более быстрой установке регулирующего органа в правильное положение, обеспечивающее обработку системой возмущающего воздействия $\lambda(t)$. В этом случае при управлении основной величиной $y(t)$ с помощью специального датчика определяется положение регулирующего органа $\mu(t)$. При данных обстоятельствах применение

схемы управления, представленной на рисунке 3.2, вполне оправдано, т. к. положение рабочего органа исполнительного механизма системы $\mu(t)$ влияет на основную управляемую величину $y(t)$ и его можно установить в заданное положение $u_1(t)$ значительно быстрее, чем сколь-нибудь существенно изменить $y(t)$.

Применение каскадной схемы на практике нередко позволяет значительно повысить эффективность управления по сравнению с простейшей одноконтурной схемой.

При использовании каскадной системы сигнал ошибки управления $\varepsilon_1(t)$ основной величиной $y(t)$ связан с выходным сигналом главного регулятора $u_1(t)$ равенством $\mu(t)$

$$u_1(t) = W_{рег}^{2л}(p)\varepsilon_1(t), \quad (3.1.25)$$

где $W_{рег}^{гл}(p)$ – оператор, отвечающий главному регулятору.

Взаимосвязь сигнала ошибки управления $\varepsilon_2(t)$ вспомогательной величиной $\mu(t)$ с выходным сигналом вспомогательного регулятора $u_2(t)$ устанавливается равенством

$$u_2(t) = W_{рег}^{6с}(p)\varepsilon_2(t), \quad (3.1.26)$$

где $W_{рег}^{вс}(p)$ – оператор, отвечающий вспомогательному регулятору.

Величины ошибок управления $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ задаются выражениями

$$\varepsilon_1(t) = y_{зд}(t) - y(t); \quad (3.1.27)$$

$$\varepsilon_2(t) = u_1(t) - \mu(t). \quad (3.1.28)$$

Основная $y(t)$ и вспомогательная $\mu(t)$ управляемые величины определяются по формулам

$$y(t) = W_{об}^{осн}(p)u_2(t); \quad (3.1.27)$$

$$\mu(t) = W_{об}^{6с}(p)u_2(t), \quad (3.1.28)$$

где $W_{об}^{осн}(p)$ и $W_{об}^{6с}(p)$ – операторы объекта, соответствующие каналам управления основной $x(t)$ и вспомогательной $v(t)$ величинами.

Используя равенства (3.1.23) – (3.1.28) установим, что

$$\begin{aligned} & [1 + W_{об}^{6c}(p)W_{рег}^{6c}(p) + W_{об}^{2l}(p)W_{рег}^{6c}(p)W_{рег}^{2l}(p)] y(t) = \\ & = [W_{об}^{2l}(p)W_{рег}^{6c}(p)W_{рег}^{2l}(p)] y_{зд}(t); \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

$$\begin{aligned} & [1 + W_{об}^{6c}(p)W_{рег}^{6c}(p) + W_{об}^{2l}(p)W_{рег}^{6c}(p)W_{рег}^{2l}(p)] \varepsilon_1(t) = \\ & = [1 + W_{об}^{6c}(p)W_{рег}^{6c}(p)] y_{зд}(t). \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Применим к равенствам (3.1.29) и (3.1.30) преобразование Лапласа по времени. Поскольку при этом операторы преобразуются в передаточные функции, а сигналы – в изображения, то эти равенства принимают вид

$$\begin{aligned} & [1 + W_{об}^{6c}(s)W_{рег}^{6c}(s) + W_{об}^{2l}(s)W_{рег}^{6c}(s)W_{рег}^{2l}(s)] \tilde{y}(s) = \\ & = [W_{об}^{2l}(s)W_{рег}^{6c}(s)W_{рег}^{2l}(s)] \tilde{y}_{зд}(s); \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

$$\begin{aligned} & [1 + W_{об}^{6c}(s)W_{рег}^{6c}(s) + W_{об}^{2l}(s)W_{рег}^{6c}(s)W_{рег}^{2l}(s)] \tilde{\varepsilon}_1(s) = \\ & = [1 + W_{об}^{6c}(s)W_{рег}^{6c}(s)] \tilde{y}_{зд}(s), \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

где $W_{об}^{2l}(s)$ и $W_{об}^{6c}(s)$ – передаточные функции объекта, соответствующие каналам передачи $\tilde{u}_2(s) \rightarrow \tilde{y}(s)$ и $\tilde{u}_2(s) \rightarrow \tilde{\mu}(s)$; $W_{рег}^{2l}(s)$ и $W_{рег}^{6c}(s)$ – передаточные функции главного и вспомогательного регуляторов.

Исходя из равенства (3.1.31) для главной передаточной функции каскадной системы $W_{y_{зд}y}(s)$, отвечающей каналу передачи $\tilde{y}_{зд}(s) \rightarrow \tilde{y}(s)$, получим следующее выражение:

$$W_{y_{зд}y}(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{y}_{зд}(s)} = \frac{W_{об}^{2l}(s)W_{рег}^{6c}(s)W_{рег}^{2l}(s)}{1 + W_{об}^{6c}(s)W_{рег}^{6c}(s) + W_{об}^{2l}(s)W_{рег}^{6c}(s)}. \quad (3.1.33)$$

Воспользовавшись равенством (3.1.32), для передаточной функции каскадной системы $W_{y_{зд}\varepsilon_1}(s)$, характеризующей канал передачи $\tilde{y}_{зд}(s) \rightarrow \tilde{\varepsilon}_1(s)$, получим формулу

$$W_{y_{зд}\varepsilon_1}(s) = \frac{\varepsilon_1(s)}{\tilde{y}_{зд}(s)} = \frac{1 + W_{об}^{6c}(s)W_{рег}^{6c}(s)}{1 + W_{об}^{6c}(s)W_{рег}^{6c}(s) + W_{об}^{2l}(s)W_{рег}^{6c}(s)W_{рег}^{2l}(s)}. \quad (3.1.34)$$

Как видно из выражений (3.1.33) и (3.1.34) передаточные функции каскадной системы $W_{y_{зд}y}(s)$ и $W_{y_{зд}\varepsilon_1}(s)$, также как и передаточные функции рассмотренной выше односвязной системы, имеют одинаковые знаменатели.

Для каскадной системы уравнение эквивалентное характеристическому уравнению принимает вид

$$\Delta_{\varepsilon}(s) = 1 + W_{об}^{6c}(s)W_{рег}^{6c}(s) + W_{об}^{2л}(s)W_{рег}^{6c}(s)W_{рег}^{2л}(s) = 0. \quad (3.1.35)$$

Уравнения (3.1.22) и (3.1.35), эквивалентные характеристическому уравнению замкнутой системы, удобно использовать при расположении ее полюсов в соответствии с определенными требованиями.

Рассмотрим также вспомогательную передаточную функцию $W_{y_{зд}\mu}(s)$, описывающую динамические свойства канала передачи $y_{зд}(t) \rightarrow \mu(t)$ и определяемую следующим выражением:

$$W_{y_{зд}\mu}(s) = \frac{\tilde{\mu}(s)}{\tilde{y}_{зд}(s)} = \frac{W_{об}^{bc}(s)W_{рег}^{bc}(s)W_{рег}^{гл}(s)}{1 + W_{об}^{bc}(s)W_{рег}^{bc}(s) + W_{об}^{гл}(s)W_{рег}^{bc}(s)W_{рег}^{гл}(s)}. \quad (3.1.36)$$

Согласно выражению (3.1.36) передаточная функция $W_{y_{зд}\mu}(s)$ имеет такой же знаменатель, как и рассмотренные выше передаточные функции $W_{y_{зд}y}(s)$ и $W_{y_{зд}\varepsilon_1}(s)$.

Перейдем к рассмотрению многосвязных систем, применяемых в тех случаях, когда имеется несколько управляемых величин и изменение каждой из них влияет на все остальные.

Пусть управляемый объект и регулятор описываются матрицами передаточных функций $\mathbf{W}^{об}(s)$ и $\mathbf{W}^{рег}(s)$ размерностей $(r \times q)$ и $(q \times r)$ соответственно. Тогда вектора изображений ошибок управления $\tilde{\varepsilon}(s)$ и задающих воздействий $\tilde{y}_{зд}(s)$ имеют r координат, а вектор изображений управляющих воздействий $\tilde{u}(s)$ – q координат.

Получим передаточные функции замкнутой системы и уравнение, эквивалентное ее характеристическому уравнению. Для этого составим следующие уравнения для изображений:

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \tilde{y}_{зд}(s) - \tilde{y}(s); \quad (3.1.37)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(s) = \mathbf{W}^{pez}(s)\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s); \quad (3.1.38)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{W}^{ob}(s)\tilde{\mathbf{u}}(s). \quad (3.1.39)$$

На основании уравнений (3.1.38) и (3.1.39) получим

$$\tilde{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{W}^{ob}(s)\mathbf{W}^{pez}(s)\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s). \quad (3.1.40)$$

Подставив выражение (3.1.40) в уравнение (3.1.37) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{зд}(s) &= \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) + \mathbf{W}^{ob}(s)\mathbf{W}^{pez}(s)\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) = \\ &= [\mathbf{E} + \mathbf{W}^{ob}(s)\mathbf{W}^{pez}(s)]\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s), \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

где \mathbf{E} - единичная матрица размерности $(r \times r)$, для которой имеет место равенство

$$\mathbf{E}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s).$$

Решив векторно-матричное уравнение (3.1.41), зависимость вектора $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)$ от вектора $\tilde{\mathbf{y}}_{зд}(s)$ представим в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) = [\mathbf{E} + \mathbf{W}^{ob}(s)\mathbf{W}^{pez}(s)]^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{зд}(s), \quad (3.1.42)$$

где матрица $[\mathbf{E} + \mathbf{W}^{ob}(s)\mathbf{W}^{pez}(s)]^{-1}$ является обратной по отношению к матрице $[\mathbf{E} + \mathbf{W}^{ob}(s)\mathbf{W}^{pez}(s)]$.

На основании равенства (3.1.41) можно сделать вывод, что матричная передаточная функция замкнутой системы $\mathbf{W}_{\mathbf{y}_{зд}\boldsymbol{\varepsilon}}^{3c}(s)$ размерности $(r \times r)$, отвечающая векторному каналу передачи $\tilde{\mathbf{y}}_{зд}(s) \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)$, определяется следующим выражением:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{y}_{зд}\boldsymbol{\varepsilon}}^{3c}(s) = [\mathbf{E} + \mathbf{W}^{ob}(s)\mathbf{W}^{pez}(s)]^{-1}. \quad (3.1.43)$$

Аналогично получается выражение для другой матричной передаточной функции замкнутой системы

$$\mathbf{W}_{\mathbf{y}_{зд}\mathbf{y}}^{3c}(s) = \mathbf{W}^{ob}(s)\mathbf{W}^{pez}(s)[\mathbf{E} + \mathbf{W}^{ob}(s)\mathbf{W}^{pez}(s)]^{-1}, \quad (3.1.44)$$

имеющей размерность $(r \times r)$ и отвечающей векторному каналу передачи $\tilde{\mathbf{y}}_{зд}(s) \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}(s)$.

Поскольку согласно выражениям (3.1.43) и (3.1.44) матричные передаточные функции замкнутой системы $\mathbf{W}_{\mathbf{y}_{зд}\boldsymbol{\varepsilon}}^{3c}(s)$ и $\mathbf{W}_{\mathbf{y}_{зд}\mathbf{y}}^{3c}(s)$ имеют одинаковый знаменатель $\det[\mathbf{E} + \mathbf{W}^{ob}(s)\mathbf{W}^{pez}(s)]$, то в рассматриваемом случае уравнение, эквивалентное характеристическому уравнению замкнутой системы имеет вид

$$\Delta_9(s) = \det [\mathbf{E} + \mathbf{W}^{об}(s)\mathbf{W}^{рез}(s)] = 0, \quad (3.1.45)$$

где \det – означает детерминант от матрицы.

Отметим, что эквивалентные уравнения (3.1.24) и (3.1.45) соответственно для односвязной и многосвязной систем по виду весьма похожи друг на друга.

3.2. Критерии устойчивости линейных стационарных систем

Устойчивая линейная система – это такая система, которая после устранения действующих на нее возмущений прекращает движение и приходит в состояние равновесия. Неустойчивая система не может сколько-нибудь долго находиться в состоянии равновесия – достаточно любого незначительного кратковременного возмущения, для того чтобы она пришла в самостоятельное движение, все больше и больше (монотонно или колебательно) отклоняясь от исходного (равновесного) состояния.

Таким образом, явление неустойчивости – сугубо внутреннее свойство линейных систем, не зависящее от действующих на них возмущений. В соответствии с этим исследование устойчивости системы, выполняемое по ее дифференциальному уравнению (3.1.14), должно производиться при условии, что правая часть этого уравнения приравнена к нулю:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0. \quad (3.2.1)$$

Решение уравнения (3.2.1) во временной области определяется выражением

$$y(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{s_k t}, \quad (3.2.2)$$

где s_k , $k = \overline{1, n}$ – корни характеристического уравнения (3.1.23), а C_k , $k = \overline{1, n}$ – вещественные постоянные, зависящие от начальных условий. Если среди корней уравнения (3.1.23) имеются кратные, то соответствующая им компонента решения $C_k e^{s_k t}$ заменяется на

$$e^{s_k t} \sum_{h=0}^{\theta} C_h t^h ,$$

где θ – кратность корня s_k .

Необходимым и достаточным условием устойчивости (асимптотической устойчивости) линейной стационарной системы является требование, чтобы все вещественные корни характеристического уравнения были отрицательными, а комплексные корни имели отрицательные вещественные части. В этом случае свободное движение системы (3.2.2) будет с течением времени стремиться к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow 0.$$

Графически корни характеристического уравнения изображаются точками на комплексной плоскости; поэтому приведенное определение может быть сформулировано и по-иному: система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости (лежат слева от мнимой оси).

Если среди корней характеристического уравнения имеется один нулевой, а все остальные расположены в левой полуплоскости, свободное движение системы с течением времени также прекращается, однако его стабилизация происходит не обязательно на нулевом уровне; такие системы часто называют **нейтрально-устойчивыми**.

Если среди корней характеристического уравнения имеются два чисто мнимых корня, а все остальные находятся в левой полуплоскости, система находится на **границе устойчивости**. Будучи выведенной, из состояния равновесия, такая система входит в режим незатухающих гармонических колебаний.

Следует подчеркнуть, что в последних двух случаях речь идет только об одном нулевом корне или одной паре мнимых корней. Система, характеристическое уравнение которой имеет два нулевых или две пары одинаковых мнимых корней, будет уже неустойчивой. Это утверждение следует из того, что нулевому корню двойной кратности соответствует компонента решения уравнения (3.2.1) в виде $C_1 + C_2 t$, а паре чисто мнимых корней $\pm i\omega$ двойной кратности

– компонента решения

$$(C_1 + C_2 t) \cos(\omega t) + (C_3 + C_4 t) \sin(\omega t).$$

Пример 3.2. Проанализируем на устойчивость систему, рассмотренную в примере 3.1. При этом значения параметров объекта зададим равенствами

$$T_1 = 10 \text{ с}; \quad T_2 = 1 \text{ с}; \quad K_{об} = 5.$$

Значения параметров настройки регулятора выберем следующим образом:

$$K_p = 6; \quad T_H = 1 \text{ с}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы представим в виде

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= s^3 + \frac{T_1}{T_2^2} s^2 + \left(\frac{K_p K_{об} + 1}{T_2^2} \right) s + \left(\frac{K_{об}}{T_2^2} \right) \frac{K_p}{T_H} = \\ &= s^3 + 10 s^2 + 31 s + 30 = 0. \end{aligned}$$

В этом случае корни характеристического уравнения определяются равенствами

$$s_1 = -2 \text{ с}^{-1}; \quad s_2 = -3 \text{ с}^{-1}; \quad s_3 = -5 \text{ с}^{-1},$$

т. е. все корни вещественные и отрицательные, что свидетельствует об устойчивости анализируемой системы.

При другом выборе значений параметров настройки регулятора

$$K_p = 4,8; \quad T_H = \frac{24}{250} \text{ с},$$

корни характеристического уравнения

$$\Delta(s) = s^3 + 10 s^2 + 25 s + 250 = 0,$$

принимают следующие значения:

$$s_1 = -10 \text{ с}^{-1}; \quad s_2 = -i5 \text{ с}^{-1}; \quad s_3 = i5 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку среди этих корней имеется один вещественный и отрицательный, а остальные два чисто мнимые, то система находится на границе устойчивости.

Рассмотренный пример показывает, что при изменении параметров настройки регулятора изменяется расположение корней характеристического уравнения, влияющее на такой важный показатель работоспособности системы, как устойчивость.

В тех случаях, когда характеристическое уравнение замкнутой системы имеет высокий порядок, нахождение его корней представляет не столь простую задачу, как рассмотренная в примере 3.2. Но из сказанного выше следует, что для суждения об устойчивости системы нет необходимости вычислять корни характеристического уравнения, достаточно только определить, все ли они расположены слева от мнимой оси комплексной плоскости. Решение такой задачи осуществляется с помощью специально разработанных для этой цели *критериев устойчивости*.

Критерий устойчивости Рауса-Гурвица. В наиболее распространенном на практике случае использование этого критерия сводится к составлению из коэффициентов уравнения (3.2.1) матрицы следующего вида:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \alpha_{n-7} & \alpha_{n-9} & \dots & 0 \\ \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-6} & \alpha_{n-8} & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \alpha_{n-7} & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n & \alpha_{n-2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Порядок составления этой матрицы достаточно прост; первая строка заполняется коэффициентами характеристического уравнения с нечетными индексами, а вторая - с четными; каждая последующая пара строк есть повторение предыдущей пары, но сдвинутой на один столбец вправо. Места, где отсутствуют коэффициенты, заполняются нулями.

Анализ устойчивости системы состоит в том, что по этой матрице последовательно проводят вычисление определителей квадратных матриц:

$$\Delta_1 = |\alpha_{n-1}|; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} \\ \alpha_n & \alpha_{n-2} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} \\ \alpha_n & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} \\ 0 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Вычисления следует прекратить, если очередной определитель окажется отрицательным, поскольку это свидетельствует о неустойчивости системы. Если же все n определителей окажутся положительными, то это свидетельствует об устойчивости системы, т. е. условие устойчивости записывается следующим образом:

$$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \dots; \Delta_{n-1} > 0; \Delta_n > \alpha_0 \Delta_{n-1}.$$

В частности, эти условия имеют вид:

1. Для систем первого ($n = 1$) и второго ($n = 2$) порядков условия устойчивости сводятся к положительности коэффициентов характеристического уравнения.

2. Для системы третьего ($n = 3$) порядка характеристическое уравнение принимает вид

$$\Delta(s) = \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0,$$

а условие устойчивости выражается следующими неравенствами:

$$\alpha_3 > 0; \alpha_2 > 0; \alpha_1 > 0; \alpha_0 > 0; \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_3 \alpha_0 > 0.$$

3. Для системы четвертого ($n = 4$) порядка характеристическое уравнение представимо в виде

$$\Delta(s) = \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0,$$

а условие устойчивости выражается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} \alpha_0 > 0; \alpha_1 > 0; \alpha_2 > 0; \alpha_3 > 0; \alpha_4 > 0; \\ \alpha_1(\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_4 \alpha_1) - \alpha_3^2 \alpha_0 > 0. \end{cases}$$

Из рассмотренного критерия следует, что **необходимым, но недостаточным условием устойчивости** является положительность всех коэффициентов уравнения (3.2.1).

Критерий Рауса-Гурвица позволяет не только анализировать устойчивость систем с заданными численными значениями коэффициентов характеристического уравнения, но и решать обратную задачу определения допустимых по условию устойчивости значений этих коэффициентов (или связанных с ними параметров системы). Для этого, очевидно, неравенства (3.2.5), выраженные через неизвестные значения исследуемых коэффициентов, следует заменить равенствами; полученная таким образом система уравнений в пространстве исследуемых коэффициентов определяет границы областей, где выполняются соответствующие неравенства. Пересечение найденных областей (общая область) и определяет область устойчивости системы.

Критерий устойчивости А. В. Михайлова. Будем рассматривать характеристический полином замкнутой системы $\Delta(s)$ как функцию комплексной переменной s , значения которой изменяются при изменении s . В частности, при $s = i\omega$ этот полином принимает следующий вид:

$$\Delta(i\omega) = \sum_{h=0}^n \alpha_h (i\omega)^h = \alpha_0 + \alpha_1(i\omega) + \alpha_2(i\omega)^2 + \dots + \alpha_n (i\omega)^n.$$

При фиксированном значении ω он изображается в комплексной плоскости вектором

$$\Delta(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega); \quad U(\omega) = \operatorname{Re} \Delta(i\omega); \quad V(\omega) = \operatorname{Im} \Delta(i\omega),$$

получившим название *характеристического*; при изменении ω конец характеристического вектора очерчивает кривую – *годограф характеристического вектора*.

Критерий Михайлова формулируется следующим образом: *система устойчива, если при изменении ω от 0 до ∞ годограф характеристического вектора, начинаясь на вещественной положительной полуоси, проходит против часовой стрелки последовательно n квадрантов комплексной плоскости, или, иначе говоря, характеристический вектор поворачивается против часовой стрелки на угол $n\pi/2$.*

С целью иллюстрации применения критерия Михайлова для оценки устойчивости систем рассмотрим пример.

Пример 3.3. Проанализируем на устойчивость систему, имеющую характеристическое уравнение четвертого порядка

$$\Delta(s) = \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0.$$

При $s = i\omega$ характеристический полином $\Delta(i\omega)$ принимает вид

$$\Delta(i\omega) = \alpha_4 \omega^4 - i\alpha_3 \omega^3 - \alpha_2 \omega^2 + i\alpha_1 \omega + \alpha_0.$$

Следовательно, его вещественная и мнимая части задаются выражениями

$$U(\omega) = \alpha_4 \omega^4 - \alpha_2 \omega^2 + \alpha_0; \quad V(\omega) = -\alpha_3 \omega^3 + \alpha_1 \omega.$$

Полагая, что

$$\alpha_0 = 24; \quad \alpha_1 = 50; \quad \alpha_2 = 35; \quad \alpha_3 = 10; \quad \alpha_4 = 1,$$

построим годограф Михайлова, описываемый характеристическим вектором

$$\Delta(i\omega) = \omega^4 - 35\omega^2 + 24 + i(-10\omega^3 + 50\omega),$$

при изменении значения частоты ω от 0 до ∞ . Данный годограф представлен на рисунке 3.3.

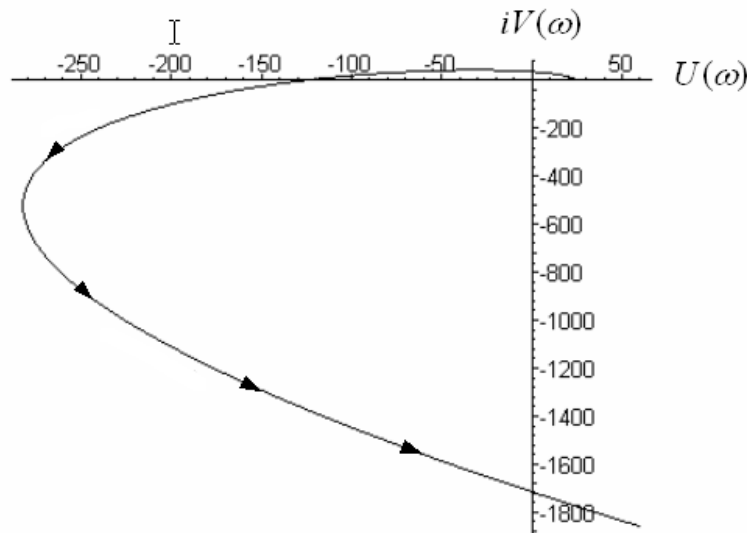


Рисунок 3.3 – Годограф Михайлова

Согласно рисунку 3.3 годограф Михайлова, начавшись на положительной вещественной полуоси, проходит против часовой

стрелки последовательно четыре квадранта комплексной плоскости. Следовательно, исследуемая система является устойчивой.

Рассмотрим также случай, когда коэффициенты характеристического уравнения заданы равенствами

$$\alpha_0 = 100; \quad \alpha_1 = 150; \quad \alpha_2 = 54; \quad \alpha_3 = 6; \quad \alpha_4 = 2.$$

Построим годограф Михайлова, описываемый характеристическим вектором

$$\Delta(i\omega) = 2\omega^4 - 54\omega^2 + 100 + i(-6\omega^3 + 150\omega).$$

Вид этого годографа показан на рисунке 3.4.

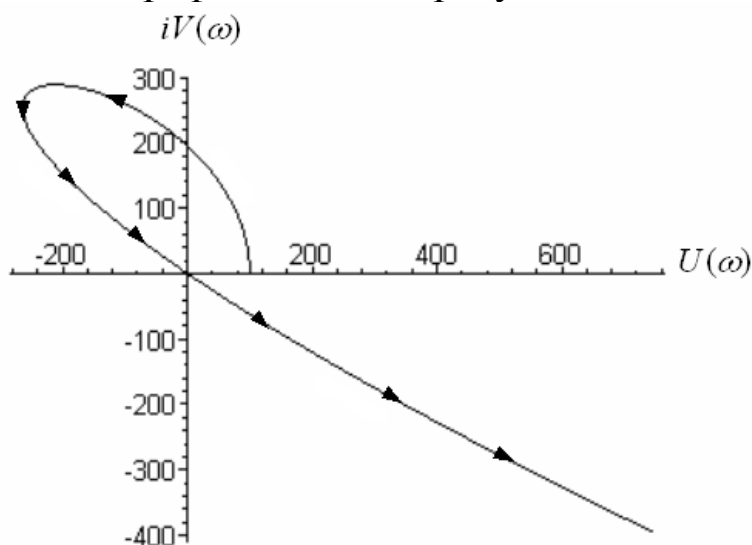


Рисунок 3.4 – Годограф Михайлова

Поскольку годограф Михайлова последовательно проходит все положенные квадранты, кроме одного, пропущенного из-за прохождения через начало координат, то система находится на границе устойчивости, генерируя незатухающие синусоидальные колебания с частотой ω_0 , при которой годограф проходит через начало координат.

Пусть

$$\alpha_0 = 3; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 6; \quad \alpha_3 = 0; \quad \alpha_4 = 3,$$

тогда

$$\Delta(i\omega) = 3\omega^4 - 6\omega^2 + 3.$$

В этом случае система неустойчива, т. к. годограф не может выйти за пределы вещественной оси и пройти положенное число квадрантов комплексной плоскости.

Предположим, что

$$\alpha_0 = 8; \quad \alpha_1 = 3; \quad \alpha_2 = 5; \quad \alpha_3 = 2; \quad \alpha_4 = 7,$$

тогда

$$\Delta(i\omega) = 7\omega^4 - 5\omega^2 + 8 + i(-2\omega^3 + 3\omega).$$

Годограф Михайлова для рассматриваемой системы изображен на рисунке 3.5.

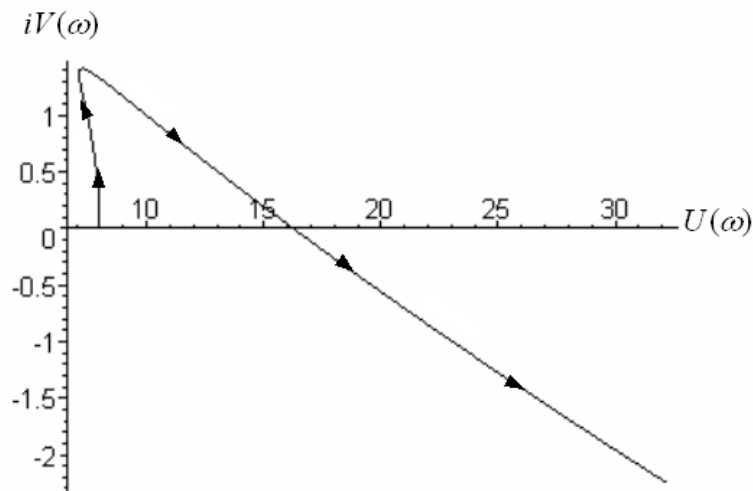


Рисунок 3.5 – Годограф Михайлова

Поскольку годограф Михайлова проходит лишь два квадранта комплексной плоскости и не в надлежащей последовательности, то система неустойчива.

Рассмотренный пример показывает, что в тех случаях, когда известен характеристический полином $\Delta(s)$, критерий Михайлова удобно использовать при анализе систем на устойчивость.

Критерий устойчивости Найквиста. Этот критерий базируется на частотных характеристиках разомкнутой системы, позволяя по их виду судить об устойчивости замкнутой системы.

Рассмотрим различные случаи.

Система, устойчивая в разомкнутом состоянии. Этот случай соответствует системам без астатизма, т.е. передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W_{pc}(s) = W_{об}(s)W_{pez}(s) = \frac{K(\zeta_g s^g + \zeta_{g-1} s^{g-1} + \dots + 1)}{\mu_r s^r + \mu_{r-1} s^{r-1} + \dots + 1}, \quad (3.2.3)$$

где K – коэффициент передачи разомкнутой цепи, а $g < r$.

Для рассматриваемого случая критерий Найквиста формулируется следующим образом: *если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы КЧХ разомкнутой системы $W_{pc}(i\omega) = W_{об}(i\omega)W_{pez}(i\omega)$ не охватывала точку комплексной плоскости с координатами $(-1, i0)$.*

Случаи, когда замкнутая система оказывается устойчивой в соответствии с критерием Найквиста, представлены на рисунках 3.6 и 3.7, причем

$$W_{pc}(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega); \quad P(\omega) = \operatorname{Re} W_{pc}(i\omega);$$

$$Q(\omega) = \operatorname{Im} W_{pc}(i\omega).$$

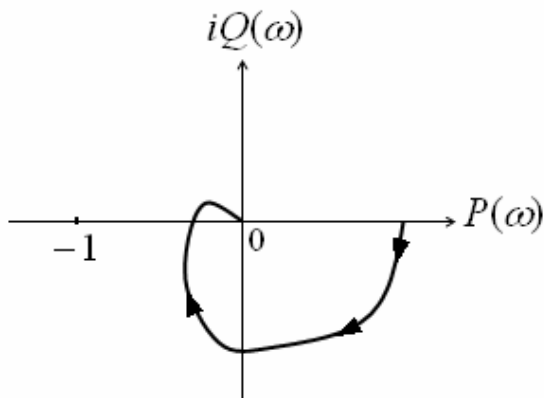


Рисунок 3.6 – Нюмограф КЧХ разомкнутой системы

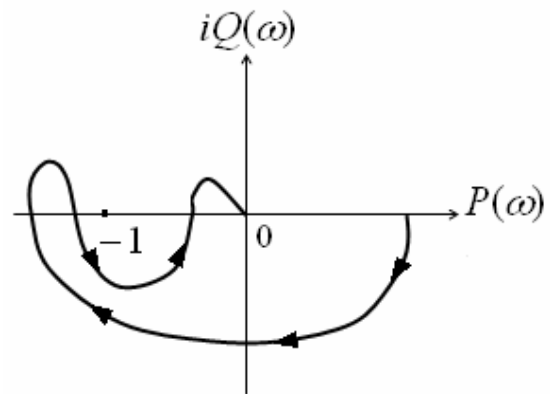


Рисунок 3.7 – Нюмограф КЧХ разомкнутой системы

Вид нюмографа КЧХ разомкнутой системы на рисунке 3.6 отвечает случаю, когда устойчивость системы нарушится только с увеличением коэффициента передачи разомкнутой цепи K , а на рисунке 3.7 – случаю, когда и при уменьшении K система может стать неустойчивой, т. к. согласно (3.2.3) радиус-векторы всех точек КЧХ изменяются пропорционально K . Неустойчивость замкнутой системы иллюстрируется на рисунке 3.8.

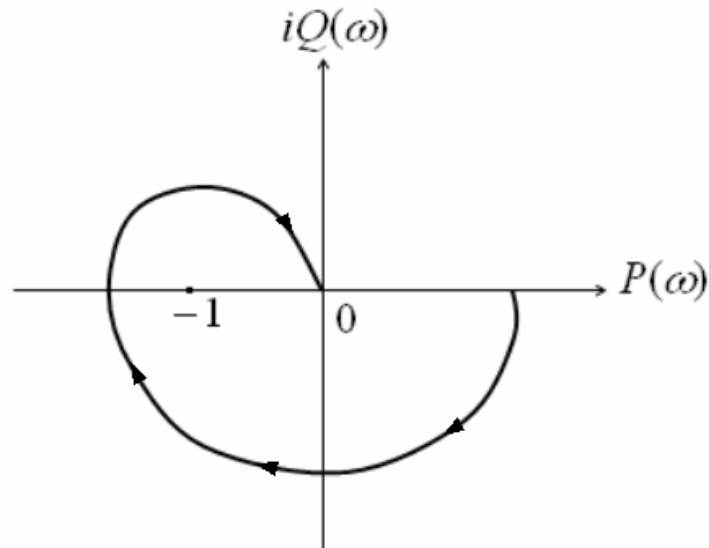


Рисунок 3.8 – Годограф КЧХ

Имея в виду сложные очертания годографа КЧХ, к представленной выше формулировке критерия Найквиста добавляется разъяснение, что надо понимать под термином «неохват точки с координатами $(-1, i0)$ ». Годограф КЧХ может пересекать отрицательную ось левее точки $(-1, i0)$, но тогда число его положительных (сверху вниз) переходов через ось абсцисс левее точки $(-1, i0)$ должно равняться числу отрицательных переходов (снизу вверх).

Система нейтральная в разомкнутом состоянии. Знаменатель передаточной функции разомкнутой системы $W_{pc}(s)$ имеет нулевые корни, а все его остальные корни имеют отрицательные вещественные части, т.е.

$$W_{pc}(s) = \frac{K(\zeta_g s^g + \zeta_{g-1} s^{g-1} + \dots + 1)}{s^v (\mu_r s^{r-v} + \mu_{r-1} s^{r-v-1} + \dots + 1)}, \quad r \geq g.$$

Этот случай соответствует астатическим системам, причем v – степень астатизма. При этом формулировка критерия устойчивости остается такой же, как и для рассмотренного выше случая устойчивой разомкнутой цепи.

Система с неустойчивой разомкнутой цепью. Пусть знаменатель передаточной функции разомкнутой системы $W_{pc}(s)$ имеет l корней с положительными вещественными частями. Тогда для устойчивости замкнутой системы требуется, чтобы КЧХ разомкнутой системы охватывала «опасную» точку с координатами $(-1, i0)$

против часовой стрелки на угол $l\pi$. Другими словами, левее точки $(-1, i0)$ разность между числом положительных и отрицательных переходов КЧХ через вещественную ось комплексной плоскости должна равняться $l/2$.

Например, если $l = 1$, то для устойчивости замкнутой системы КЧХ разомкнутой системы должна иметь вид, показанный на рисунке 3.9 а и б.

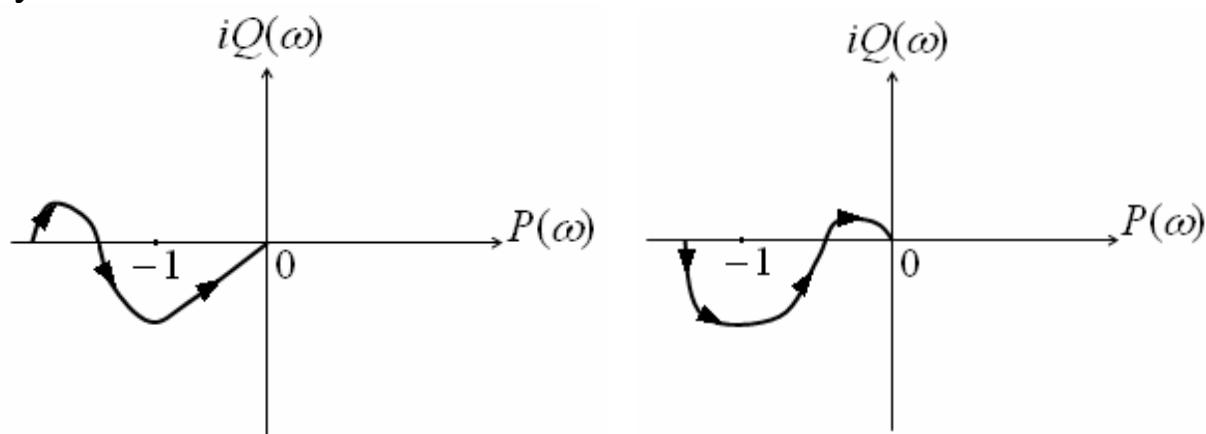


Рисунок 3.9 а,б – КЧХ разомкнутой системы

При этом начальная точка на вещественной оси левее точки $(-1, i0)$ считается как половина перехода.

Случай наличия пары чисто мнимых полюсов передаточной функции разомкнутой системы. Этот случай может сочетаться со случаями расположения всех остальных полюсов слева от мнимой оси или наличия нулевого полюса, или, наконец, наличия полюсов справа. Во всех вариантах формулировки частотного критерия устойчивости замкнутой системы остаются прежними, причем разрыв характеристики в точке мнимого полюса заполняется полуокружностью бесконечного радиуса (рис. 3.10).

Через T на рисунке 3.10 обозначена постоянная времени соответствующего сомножителя $(T^2\omega^2 + 1)$, являющегося источником пары чисто мнимых корней в знаменателе передаточной функции $W_{pc}(s)$ разомкнутой системы.

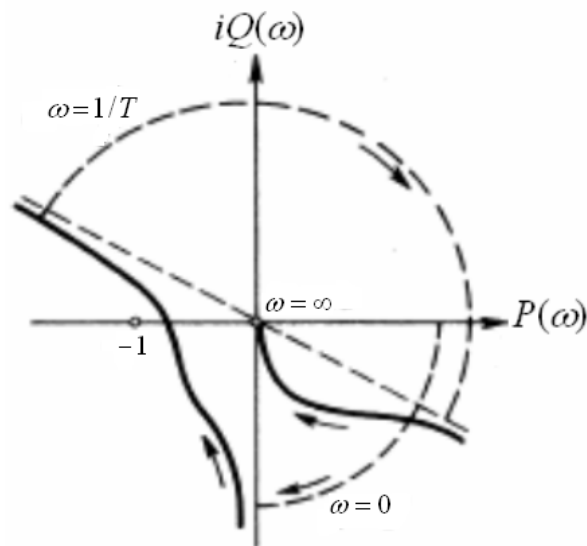


Рисунок 3.10 – Постоянная времени соответствующего сомножителя $(T^2\omega^2+1)$

Следует обратить внимание также на важные преимущества критерия устойчивости Найквиста по сравнению с критериями Рауса-Гурвица и Михайлова:

1. При использовании этого критерия нет необходимости в знании характеристического уравнения замкнутой системы – вся необходимая информация может быть получена экспериментально.
2. Критерий применим для систем с распределенными параметрами и транспортным запаздыванием, передаточные функции которых трансцендентны.

3.3. Оценка запаса устойчивости замкнутых систем

Реально работающие системы управления должны быть не только устойчивыми, но и обладать определенным *запасом устойчивости*, т. е. возникающие в них переходные процессы должны не просто затухать, а затухать достаточно интенсивно.

Как следует из (3.2.2), переходные процессы в динамической системе произвольного порядка представляют собой сумму элементарных компонент – каждому вещественному корню χ характеристического уравнения замкнутой системы соответствует аperiodическая (неколебательная) компонента вида $Ce^{\chi t}$, а каждой паре комплексно-сопряженных корней $\chi \pm i\nu$ - колебательная компонента $Ae^{\chi t} \sin(\nu t + \varphi)$, где A – амплитуда колебаний, ν – частота, а φ

– фаза гармонического колебания. В обоих случаях численным показателем быстроты затухания этих процессов может быть выбрано абсолютное значение вещественной части корня χ . Этот показатель характеризует степень уменьшения соответствующей компоненты переходного процесса в течение любого заданного отрезка времени t (для колебательных компонент – степень уменьшения огибающей колебаний). Для колебательных компонент такой оценки может оказаться недостаточно, так как она не несет никакой информации о характере самих колебаний в пределах огибающих – здесь приходится вводить добавочный показатель, характеризующий колебательность компоненты, например, степень уменьшения двух соседних амплитуд колебания, направленных в одну сторону. Такой показатель уже рассматривался в § 2.1 – он был назван *степенью затухания* собственных колебаний ψ (2.1.33).

Величина ψ зависит от отношения вещественной и мнимой составляющих пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения системы, порождающих рассматриваемую компоненту колебаний, т. е. $\chi/\nu = m$. Это отношение ранее было названо величиной *относительного демпфирования* m соответствующей компоненты собственного переходного процесса системы.

Подчеркнем, что сформулированные показатели интенсивности затухания относятся к отдельным компонентам общего переходного процесса в системе. Тем не менее, при определенных условиях они могут быть использованы и для оценки затухания процесса в целом; в частности, такая ситуация имеет место, когда есть основания предполагать, что среди всех компонент процесса можно выделить одну или несколько *доминирующих компонент*, вносящих наибольший вклад в формирование общего переходного процесса в замкнутой системе. Если, кроме того, доминирующие компоненты обладают наихудшим (по сравнению с другими компонентами) затуханием, то показатели, характеризующие их затухание, могут быть приняты в качестве показателей для всей системы в целом. Исходя из сказанного, можно дать следующие определения:

1. Корневым показателем абсолютного затухания собственных переходных процессов в системе является корневой показатель затухания η компонент, изменение которых определяют корни, расположенные ближе всего к мнимой оси при условии, что все осталь-

ные корни расположены достаточно далеко от нее. Значение показателя η , называемого *величиной абсолютного демпфирования*, определяется выражением

$$\eta = \min_{k=\overline{1,n}} |\operatorname{Re} s_k|, \quad (3.3.1)$$

где n – порядок характеристического уравнения замкнутой системы, а s_k ($k = \overline{1,n}$) – корни этого уравнения. Такое название показатель η получил потому, что его значение определяет скорость затухания всех гармонических составляющих переходного процесса.

2. Корневым показателем *относительного демпфирования* переходных процессов в системе является показатель m , относящийся к его наиболее слабо затухающей гармонической составляющей, для которой отношение χ/ν минимально, т.е.

$$m = \min_{k=\overline{1,n}} |\operatorname{Re} s_k / \operatorname{Im} s_k|. \quad (3.3.2)$$

Согласно выражению (3.3.2) система имеет показатель относительного демпфирования переходных процессов не меньше заданного m , если все корни ее характеристического уравнения располагаются в области (рисунок 3.10), образованной двумя лучами, проведенными в левой полуплоскости под углом к отрицательной вещественной оси, равным $\beta = \operatorname{arctg}(1/m)$.

Таким образом, любое расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы можно достаточно полно охарактеризовать с помощью всего двух показателей η и m , причем η является размерной величиной обратной времени, т. е. ее размерность c^{-1} , а величина m безразмерна.

Графическая интерпретация этих величин представлена на рисунке 3.11.

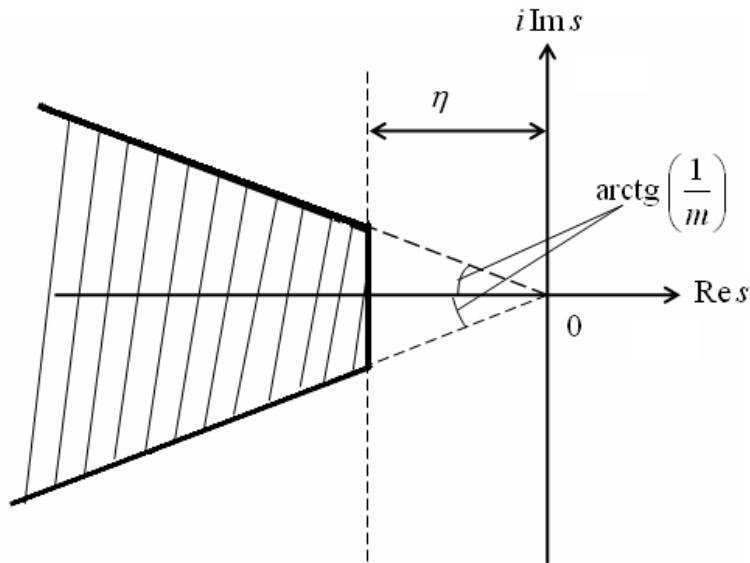


Рисунок 3.11 – Область расположения корней характеристического уравнения системы управления (заштрихованная), заданная показателями η и m

Обеспечить приемлемое качество переходных процессов в системе можно, расположив корни ее характеристического уравнения на комплексной плоскости таким образом, чтобы для показателей η и m , характеризующих запас устойчивости системы, выполнялись следующие неравенства:

$$\eta \geq \eta_{\text{п}} > 0; \quad (3.3.3)$$

$$m \geq m_{\text{п}}, \quad (3.3.4)$$

где $\eta_{\text{п}}$ и $m_{\text{п}}$ – предельно допустимые значения величин η и m соответственно.

Значение размерной величины $\eta_{\text{п}}$ выбирается индивидуально для каждой конкретной системы, а значение $m_{\text{п}}$ обычно задается априорно. На практике значение величины $m_{\text{п}}$ нередко выбирают в интервале 0,221 ... 0,366.

Наряду с показателями η и m для оценки запаса устойчивости часто используют показатель колебательности M , рассмотренный выше в § 2.1.

Для односвязной замкнутой системы величина M определяется выражением

$$M = \max_{0 \leq \omega < \infty} \Phi(\omega) = \max_{0 \leq \omega < \infty} \left| \frac{W_{y_{\text{зд}}} (i\omega)}{W_{y_{\text{зд}}} (i0)} \right|, \quad (3.3.5)$$

где $W_{y_{зд},y}(i\omega)$ – КЧХ односвязной замкнутой системы по каналу передачи воз-
действий с входа на выход.

По мере приближения корней характеристического уравнения замкнутой системы к мнимой оси значения величины M возрастают до бесконечности. Следовательно, при выполнении неравенства

$$M \leq M_{\Pi} \quad (3.3.6)$$

где M_{Π} – предельно допустимое значение величины M , обеспечивается нахождение указанных корней на некотором расстоянии от мнимой оси. На практике значение величины M_{Π} обычно выбирают в интервале 1,45 ... 1,66.

Значение показателя колебательности M достаточно просто проконтролировать, особенно в тех случаях, когда шумы и помехи не оказывают существенного влияния на систему управления. Для этого на вход замкнутой системы по каналу задающего воздействия $y_{зд}(t)$ подают гармонический сигнал вида $y_{зд}(t) = a \sin(\omega t + \varphi_1)$, где a , ω и φ_1 – соответственно амплитуда, циклическая частота и фаза гармонического входного сигнала $y_{зд}(t)$. При этом на выходе системы регистрируется также гармонический сигнал $y(t) = b \sin(\omega t + \varphi_2)$, где b и φ_2 – соответственно амплитуда и фаза выходного сигнала $y(t)$. При этом выполняется равенство $\Phi(\omega) = b/a$.

Амплитуда выходного сигнала $y(t)$ зависит от частоты ω , т. е. $b = b(\omega)$, поэтому, изменяя ω можно определить его резонансное значение ω_p , при котором достигается максимум функции $\Phi(\omega)$, т.е. согласно выражению (3.3.5) она принимает значение M .

Отметим, что при наличии значительных шумов и помех приходится использовать более тонкие корреляционные методы для экспериментальной оценки частотных характеристик замкнутых систем. Эти методы будут рассмотрены ниже при анализе адаптивных систем управления.

Значения показателей η и m определить несколько сложнее. Один из способов заключается в построении математической модели управляемого объекта, используемой при построении расширенных по η и m КЧХ разомкнутой системы $W_{pc}(-\eta + i\omega)$ и $W_{pc}(-m\omega + i\omega)$, где

$$W_{pc}(-\eta + i\omega) = W_{об}(-\eta + i\omega)W_{pez}(-\eta + i\omega); \quad (3.3.7)$$

$$W_{pc}(-m\omega + i\omega) = W_{об}(-m\omega + i\omega)W_{pez}(-m\omega + i\omega). \quad (3.3.8)$$

Задав показателю η в выражении (3.3.7) конкретное численное положительное значение следует построить годограф расширенной КЧХ разомкнутой системы $W_{pc}(-\eta + i\omega)$ и применить к нему обобщенный критерий устойчивости Найквиста, формулируемый следующим образом: система, имеющая в разомкнутом состоянии показатель абсолютного демпфирования не ниже η , сохранит его и после замыкания, если годограф расширенной КЧХ разомкнутого контура $W_{pc}(-\eta + i\omega)$ не охватывает точку комплексной плоскости с координатами $(-1, i0)$.

Согласно представленному критерию, если годограф расширенной КЧХ $W_{pc}(-\eta + i\omega)$ не охватывает точку $(-1, i0)$, то при заданном значении η вместо равенства (3.3.1) выполняется неравенство

$$\eta < \min_{k=\overline{1,n}} |\operatorname{Re} s_k|.$$

При данных обстоятельствах для выполнения (3.3.1) необходимо увеличивать η до тех пор, пока годограф не пройдет через точку $(-1, i0)$.

В тех случаях, когда при заданном значении η годограф расширенной КЧХ $W_{pc}(-\eta + i\omega)$ охватывает точку $(-1, i0)$, то это означает, что вместо равенства (3.3.1) имеет место неравенство

$$\eta > \min_{k=\overline{1,n}} |\operatorname{Re} s_k|.$$

Чтобы обеспечить выполнение (3.3.1) необходимо уменьшать первоначально заданное значение показателя η до тех пор, пока годограф расширенной КЧХ $W_{pc}(-\eta + i\omega)$ не пройдет через точку $(-1, i0)$.

В результате удастся определить такое значение η , при котором выполняется равенство (3.3.1).

Значение показателя m определяется аналогично. Для этого в выражении (3.3.8) ему необходимо также задать определенное численное значение и построить годограф расширенной КЧХ разомкнутого контура $W_{pc}(-m\omega + i\omega)$. Затем следует применить к нему

обобщенный критерий устойчивости Найквиста: система, имеющая в разомкнутом состоянии показатель относительного демпфирования не ниже m , сохранит его и после замыкания, если годограф расширенной КЧХ разомкнутого контура $W_{pc}(-m\omega + i\omega)$ не охватывает точку комплексной плоскости с координатами $(-1, i0)$.

Если годограф расширенной КЧХ $W_{pc}(-m\omega + i\omega)$ при заданном значении m не охватывает точку с координатами $(-1, i0)$, то вместо равенства (3.3.2) имеет место неравенство

$$m > \min_{k=\overline{1,n}} |\operatorname{Re} s_k / \operatorname{Im} s_k|.$$

Следовательно, необходимо уменьшать значение m до тех пор, пока годограф не пройдет через точку $(-1, i0)$.

Когда при заданном значении m годограф расширенной КЧХ $W_{pc}(-m\omega + i\omega)$ охватывает точку с координатами $(-1, i0)$, то вместо равенства (3.3.2) имеет место неравенство

$$m < \min_{k=\overline{1,n}} |\operatorname{Re} s_k / \operatorname{Im} s_k|.$$

В этом случае для выполнения равенства (3.3.2) необходимо увеличивать первоначально выбранное значение m до тех пор, пока годограф не пройдет через точку $(-1, i0)$.

Действуя указанным образом, можно установить значения показателей η и m , характеризующих расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы с точки зрения обеспечения запаса устойчивости.

Пример 3.4. Рассмотрим объект, передаточная функция канала управления которого задана выражением

$$W_{об}(s) = \frac{K_{об}}{(1 + Ts)^6},$$

где $K_{об} = 1,35$; $T = 15$ с.

Для управления данным объектом используется И-регулятор с передаточной функцией

$$W_{И}(s) = K_{И} / s,$$

где $K_{И} = 0,0073822$ с⁻¹.

Используя расширенные КЧХ разомкнутой системы

$W_{pc}(-\eta + i\omega)$ и $W_{pc}(-m\omega + i\omega)$ определим значения показателей η и m .

Полагая $\eta = \eta_1 = 0,003 \text{ c}^{-1}$, построим расширенную по η КЧХ, годограф которой приводится на рисунке 3.12, где приняты следующие обозначения:

$$Q_\eta(\omega) = \text{Im}W_{pc}(-\eta + i\omega); P_\eta(\omega) = \text{Re}W_{pc}(-\eta + i\omega).$$

Поскольку при $\eta = \eta_1$ годограф расширенной КЧХ пересекает отрицательную вещественную полуось правее точки с координатами $(-1, i0)$, т. е. не охватывает ее, то увеличим значение η , выбрав при этом $\eta = \eta_2 = 0,006 \text{ c}^{-1} > \eta_1$.

Как видно из рисунков 3.12, при $\eta = \eta_2$ годограф расширенной КЧХ пересекает отрицательную вещественную полуось левее точки с координатами $(-1, i0)$, т. е. охватывает ее.

Чтобы определить значение η , выберем на этот раз $\eta = \eta_3$, такое, чтобы выполнялись неравенства $\eta_1 < \eta_3 < \eta_2$.

Полагая, что $\eta_3 = 0,0046776 \text{ c}^{-1}$ и построив соответствующую расширенную по η КЧХ разомкнутой системы, годограф которой также представлен на рисунке 3.12, убедимся, что он пересекает отрицательную вещественную полуось в точке с координатами $(-1, i0)$.

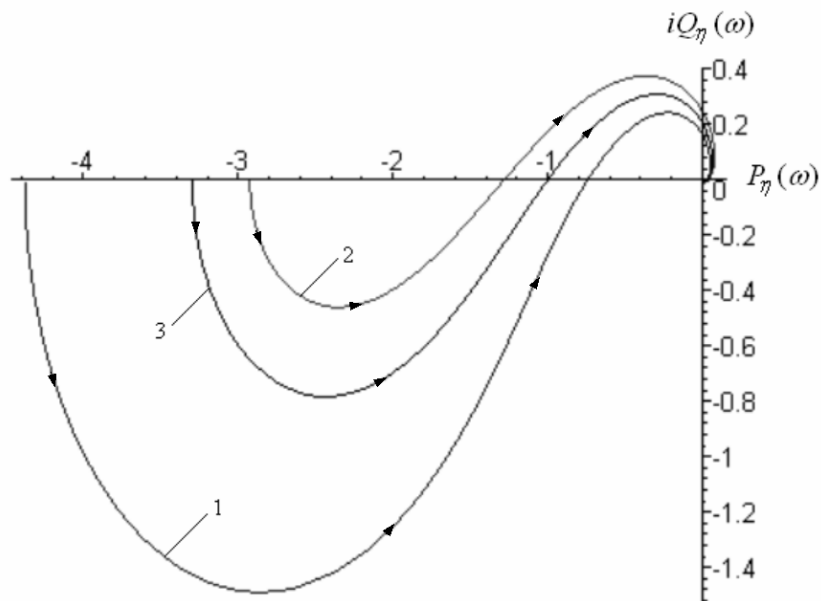


Рисунок 3.12 – Годографы расширенных по η КЧХ разомкнутой системы:

$1 - \eta = \eta_1; 2 - \eta = \eta_2; 3 - \eta = \eta_3$

Следовательно, искомое значение величины η задается равенствами

$$\eta = \eta_3 = 0,0046776 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения значения m рассмотрим семейство расширенных по m КЧХ разомкнутой системы, годографы которых представлены на рисунке 3.13.

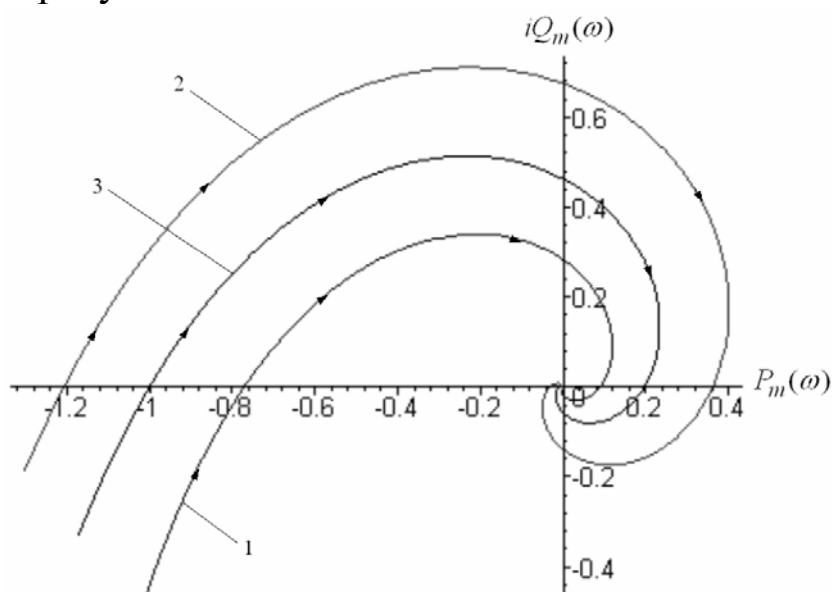


Рисунок 3.13 – Годографы расширенных по m КЧХ разомкнутой системы:

$$1 - m = 0,221; 2 - m = 0,5; 3 - m = 0,366$$

Поскольку истинному значению m отвечает такая расширенная КЧХ, годограф которой проходит через точку с координатами $(-1, i0)$, то согласно рисунку 3.13 оно задается равенством $m = 0,366$.

Рассмотренный пример показал, что применение расширенных КЧХ разомкнутой системы позволяет достаточно просто определить значения показателей η и m .

Необходимо отметить, что показатели η и m характеризуют запас устойчивости системы значительно более полно, чем показатель колебательности M , т. к. позволяют точно установить границы области расположения корней ее характеристического уравнения, которые и определяют устойчивость линейной системы. К тому же показатель колебательности M непосредственно применим лишь для односвязных линейных стационарных систем, а показатели η и m можно использовать для любых линейных стационарных систем.

Укажем на важное обстоятельство, связанное с использованием показателя m , а именно, нарушение ограничения (3.3.4) при рассмотрении систем с пространственно распределенными параметрами. Выше, в § 2.4 было установлено, что передаточные функции объектов с пространственно распределенными параметрами можно сколь угодно точно аппроксимировать передаточными функциями объектов с сосредоточенными параметрами и звеном транспортного запаздывания, т. е. представить в виде

$$W_{об}(s, \mathbf{r}) = W(s)e^{-\tau s}, \quad (3.3.9)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки в пространстве; $W(s)$ – передаточная функция, отвечающая объекту с сосредоточенными параметрами; τ – постоянная времени транспортного запаздывания.

Предположим, что для замкнутой системы с объектом (3.3.9) существует такое значение $m_{\Pi} > 0$, при котором возможно выполнить ограничение (3.3.4). В таком случае $m > 0$ и годограф расширенной КЧХ разомкнутой системы $W_{pc}(-m\omega + i\omega)$ при заданном значении m не должен охватывать точку с координатами $(-1, i0)$.

Проверим возможность выполнения данного требования в области высоких частот, т. е. при $\omega \rightarrow \infty$. Для этого сделаем в выражении (3.3.9) замену $s = -m\omega + i\omega$ и перейдем к пределу

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} W(-m\omega + i\omega)e^{-\tau(-m\omega + i\omega)} &= \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} W(-m\omega + i\omega) \lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{-\tau(-m\omega + i\omega)}. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Поскольку передаточная функция $W(s)$ представляет собой отношение двух полиномов, причем степень полинома числителя не превосходит степени полинома знаменателя, то существуют постоянные величины $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, такие, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |W(-m\omega + i\omega)| \leq C; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |\arg W(-m\omega + i\omega)| \leq C_2. \quad (3.3.11)$$

Кроме того, поскольку $\tau > 0$ и $m > 0$, то выполняются равенства

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| e^{-\tau(-m\omega + i\omega)} \right| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| e^{\tau m\omega} \right| = \infty; \quad (3.3.12)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg e^{-\tau(-m\omega + i\omega)} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (-\tau\omega) = -\infty. \quad (3.3.13)$$

Принимая во внимание равенства (3.3.9) – (3.3.13) приходим к выводу о неограниченном возрастании модуля и убывании фазы расширенной по m КЧХ объекта, что приводит к обязательному охвату точки с координатами $(-1, i0)$ годографом расширенной КЧХ разомкнутой системы $W_{pc}(-m\omega + i\omega)$.

Следовательно, сделанное выше предположение о существовании $m_{II} > 0$ нарушается, и полученное противоречие свидетельствует о невозможности выполнения ограничения (3.3.4) для систем с распределенными параметрами.

Однако отмеченное обстоятельство вовсе не препятствует использованию ограничения (3.3.4) для систем с пространственно распределенными параметрами, т.к. его достаточно выполнить лишь для **доминирующих** корней характеристического уравнения замкнутой системы, оказывающих наибольшее влияние на качество управления.

Пространственная распределенность параметров системы не приводит к нарушению ограничения (3.3.3), т.к. существует конечный предел

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| e^{-\tau(-\eta + i\omega)} \right| = e^{\tau\eta} < \infty.$$

В заключение укажем, что выполнение неравенств (3.3.3) и (3.3.4) или неравенства (3.3.6), позволяет сохранить устойчивость, а значит и работоспособность системы при непредвиденных изменениях (вариациях) параметров управляемого объекта. Поэтому рассмотренные показатели не только характеризуют скорость затухания переходных процессов в системе, но и гарантируют ее работоспособность в случае непредвиденного изменения параметров.

3.4. Переходные процессы в замкнутых системах и оценка их качества

К процессам управления предъявляются следующие три основных требования: по устойчивости, по точности в установившихся режимах и по качеству переходных процессов.

Качество переходных процессов характеризуется, прежде всего, величиной выброса υ_{Π} или перерегулирования σ_{Π} , а также длительностью процесса t_{Π} и его колебательностью ψ_{Π} (степенью затухания колебаний).

Принято рассматривать переходные процессы, возникающие при подаче на вход системы единичного ступенчатого воздействия $1(t)$, т. к. оно весьма часто встречается на практике и принадлежит к числу наиболее тяжелых для отработки системой, т. е. в случае действия на систему возмущения $1(t)$ показатели качества переходных процессов оказываются наиболее низкими. Поэтому нередко системе настраивают таким образом, чтобы обеспечить, по крайней мере, приемлемое качество переходных процессов, возникающих при действии на нее данного возмущения.

Выброс υ_{Π} и перерегулирование σ_{Π} переходного процесса $\theta(t)$, возникающего в системе управления при действии на нее того или иного возмущения, определяются по формулам

$$\upsilon_{\Pi} = \theta_{\max} - \theta_{\text{уст}}; \quad \sigma_{\Pi} = \frac{\theta_{\max} - \theta_{\text{уст}}}{\theta_{\text{уст}}} \cdot 100 \%,$$

где θ_{\max} – максимальное значение величины $|\theta(t)|$, а

$$\theta_{\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t).$$

На практике обычно считают, что система управления настроена правильно, если величина перерегулирования σ_{Π} принимает значение из интервала 10...20 %.

В целях иллюстрации метода определения значений величин $\theta_{\text{уст}}$ и θ_{\max} , используемых при расчете показателей υ_{Π} и σ_{Π} , на рисунке 3.14 приводится переходный процесс $\theta(t)$, возникающий на выходе, представленной на рисунке 3.1 односвязной системы, при действии возмущения $1(t)$ по каналу задания.

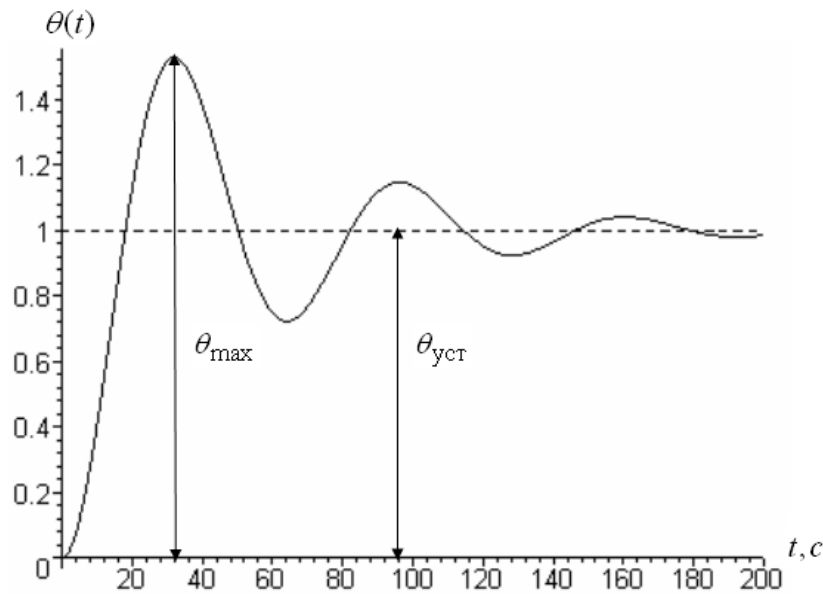


Рисунок 3.14. – Переходный процесс $\theta(t)$

Показатель длительности переходного процесса $t_{\text{п}}$ характеризует быстрдействие системы и определяется, как интервал времени от начала переходного процесса до момента, когда отклонение выходной величины от ее нового установившегося значения $\theta_{\text{уст}}$ становится меньше определенной достаточно малой величины δ (рисунок 3.15). Обычно в качестве δ используют следующую величину:

$$\delta = 0,05 \theta_{\text{уст}}.$$

Часто условия эксплуатации объектов таковы, что требуется достаточно интенсивное затухание колебаний выходной величины $\theta(t)$, т. к. в противном случае повышается вероятность взаимного наложения переходных процессов в системе, вызванных различными кратковременными возмущениями.

Действительно, возмущение может уже давно прекратить оказывать действие на систему, но при слабом затухании переходных процессов она будет еще долго двигаться по инерции.

Значения показателя $\psi_{\text{п}}$, характеризующего колебательность системы, определяются по формуле (2.1.34).

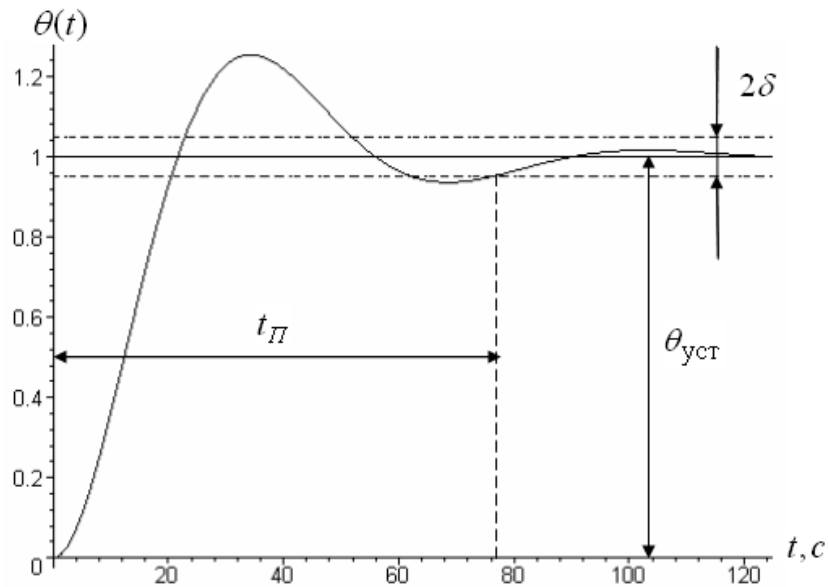


Рисунок 3.15 – Определение длительности переходного процесса

Согласно равенству (2.1.34) для колебательных звеньев второго порядка существует однозначная взаимосвязь между величинами ψ и m . Эта взаимосвязь, но в более сложном виде, сохраняется и для замкнутых стационарных линейных систем, объекты управления которых описываются дифференциальными уравнениями более высоких порядков, чем простое колебательное звено.

С ростом показателя m уменьшаются величины ν_{Π} , σ_{Π} и ψ_{Π} , а величина t_{Π} возрастает. Поэтому часто значение m выбирают так, чтобы величины ν_{Π} , σ_{Π} и ψ_{Π} принимали некоторые приемлемые значения, а значение величины t_{Π} при этом было минимальным.

3.5. АЧХ замкнутых систем и их свойства

Рассмотрим некоторые важные свойства амплитудно-частотных характеристик односвязной замкнутой системы (рисунок 3.1), т. к. эти характеристики тесно связаны с различными показателями качества управления.

Как было установлено выше, данная система имеет три передаточные функции, каждой из которых отвечает определенная АЧХ. В целях наглядной иллюстрации вида этих характеристик рассмотрим пример.

Пример 3.5. Пусть передаточная функция управляемого объекта имеет вид

$$W_{об}(s) = \frac{K_{об}}{(1 + Ts)^3},$$

где $K_{об} = 2$; $T = 15$ с.

Рассмотрим АЧХ систем, включающих избранный объект управления и один из типовых регуляторов. Среди этих регуляторов выберем ПИД-регулятор, поскольку он имеет интегральную составляющую в законе управления, а также П-регулятор, как единственный типовой регулятор, не имеющий такой составляющей.

Чтобы обеспечить необходимый запас устойчивости воспользуемся ограничениями (3.3.3) и (3.3.4), которые представим в виде

$$\eta > 0; m \geq 0,65.$$

Значения параметров настройки ПИД-регулятора с передаточной функцией (2.3.4) зададим следующими равенствами:

$$K_p = 2,3408; T_D = 9,7330 \text{ с}; T_I = 19,579 \text{ с}.$$

Передаточная функция П-регулятора определяется выражением (2.3.1), а значение его параметра настройки установим следующим равенством:

$$K_p = 0,41636.$$

Согласно выражению (3.1.18) при использовании ПИД-регулятора главная передаточная функция системы принимает вид

$$W_{y_{зд}y}(s) = \frac{K_{об}K_p \left(T_D s^2 + s + \frac{1}{T_I} \right)}{\sum_{k=0}^4 \alpha_k s^k}$$

где

$$\alpha_4 = T^3; \alpha_3 = 3T^2; \alpha_2 = 3T + K_{об}K_p T_D;$$

$$\alpha_1 = 1 + K_{об}K_p; \alpha_0 = \frac{K_{об}K_p}{T_I}.$$

В случае, когда применяется П-регулятор данная функция определяется выражением

$$W_{y_{зд}y}(s) = \frac{K_{об}K_p}{T^3s^3 + 3T^2s^2 + 3Ts + 1 + K_{об}K_p}.$$

Графики АЧХ системы $|W_{y_{зд}y}(i\omega)|$ представлены на рисунке 3.14.

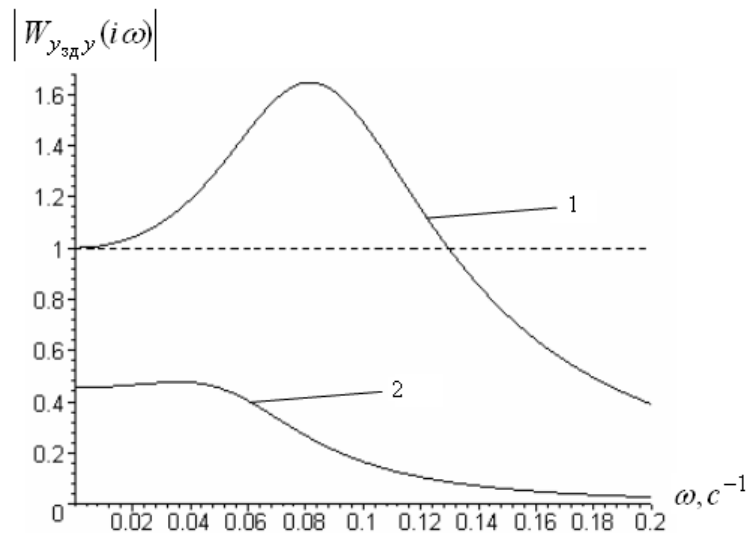


Рисунок 3.16 – АЧХ канала $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$:

1 – система с ПИД регулятором; 2 – система с П регулятором

Как видно из рисунка 3.16, при использовании ПИД-регулятора передача постоянной составляющей $\bar{y}_{зд}$ сигнала $\varepsilon_1(t)$ по каналу $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ осуществляется без каких-либо изменений, поскольку $|W_{y_{зд}y}(i0)| = 1$.

Согласно тому же рисунку, в случае применения П-регулятора $\bar{y}_{зд}$ передается по каналу $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ с искажениями, т.к. $|W_{y_{зд}y}(i0)| \neq 1$.

Поскольку в системах управления технологическими процессами сигнал задания зачастую в течение длительного времени остается постоянным, т. е. $y_{зд}(t) = \bar{y}_{зд}$, то целесообразно использовать регуляторы, реализующие законы управления, в которых присутствует интегральная составляющая, т.к. в противном случае система не стремится к достижению совпадения сигналов $\bar{y}_{зд}$ и $y(t)$.

Кроме того, согласно рисунок 3.16 канал передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ односвязной стационарной системы представляет собой высокочастотный фильтр, т. к. весьма эффективно подавляет гармонические высокочастотные входные сигналы.

Следовательно, быстрые скачкообразные изменения сигнала задания $y_{зд}(t)$ весьма слабо влияют на выходной сигнал системы $y(t)$, и чтобы такое изменение действительно произошло, необходимо достаточно долго поддерживать измененный сигнал $y_{зд}(t)$ на постоянном уровне.

Рассмотрим также передаточную функцию замкнутой системы для ошибки (3.1.19), которая в данном примере определяется следующими выражениями:

$$W_{y_{зд}\varepsilon}(s) = \frac{s(1+Ts)^3}{\sum_{k=0}^4 \alpha_k s^k}, \text{ (система с ПИД-регулятором);}$$

$$W_{y_{зд}\varepsilon}(s) = \frac{(1+Ts)^3}{T^3 s^3 + 3T^2 s^2 + 3Ts + 1 + K_{об}K_p}, \text{ (система с П-регулятором).}$$

Графики АЧХ системы $|W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega)|$, приводятся на рисунке 3.17.

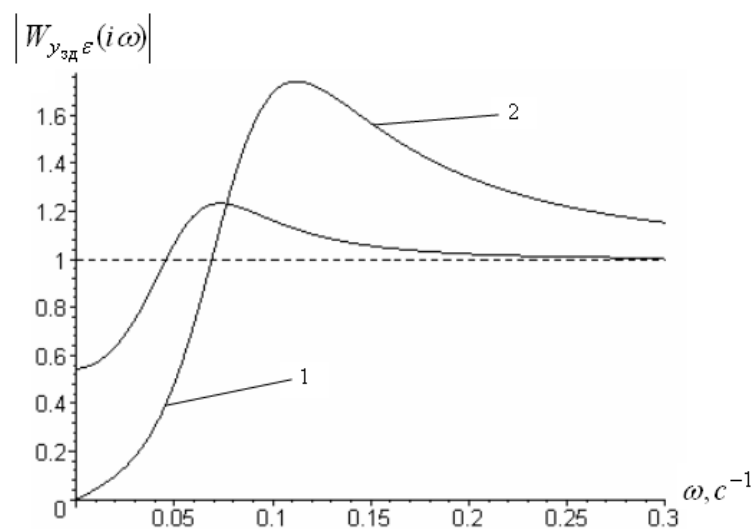


Рисунок 3.17 – АЧХ канала $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$:

1 – система с ПИД-регулятором; 2 – система с П-регулятором

Согласно рисунку 3. 17 в системе с ПИД-регулятором выполняется равенство $\left| W_{y_{зд} \varepsilon}(i0) \right| = 0$. Поэтому канал передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ не передает постоянную составляющую $\bar{y}_{зд}$ входного сигнала $y_{зд}(t)$ на вход регулятора, а реагирует лишь на изменения сигнала $y_{зд}(t)$, приводя выходной сигнал системы $y(t)$ в соответствие с этими изменениями.

Напротив, в системе с П-регулятором $\left| W_{y_{зд} \varepsilon}(i0) \right| \neq 0$ и регулятор вынужден реагировать не только на различные возмущения, но и на полезный сигнал $\bar{y}_{зд}$, что отрицательно сказывается на качестве управления.

Отметим также, что канал передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$, представляет собой низкочастотный фильтр, т.к. подавляет гармонические низкочастотные входные сигналы. Как видно из рис. 3.17, такое подавление возможно лишь для сигналов, частоты которых не превышают частоты фильтрации ω_ϕ , значение которой определяется из уравнения

$$\left| W_{y_{зд} \varepsilon}(i\omega_\phi) \right| = 1.$$

Следовательно, среди всей совокупности возмущений, влияющих на ошибку управления, система подавляет лишь низкочастотные возмущения и усиливает возмущения, частоты которых находятся вблизи резонансной частоты ω_p , значение которой определяется из условия

$$\left| W_{y_{зд} \varepsilon}(i\omega_p) \right| = \max.$$

Указанное свойство АЧХ, отвечающей каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ существенно ограничивает эффективность односвязных систем управления, для повышения которой, в случае необходимости, приходится использовать комбинированные или каскадные системы.

На рисунке 3.18 представлены АЧХ системы $|W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)|$, соответствующие каналу передачи возмущающего воздействия $\lambda(t)$ со стороны регулирующего органа на ошибку управления $\varepsilon(t)$.

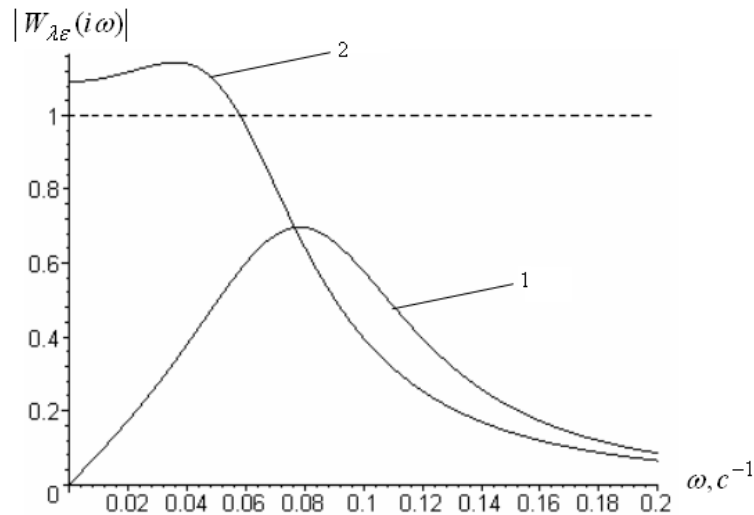


Рисунок 3.18 – АЧХ канала $\lambda(t) \rightarrow \varepsilon(t)$:

1 – система с ПИД-регулятором; 2 – система с П-регулятором

Для канала $\lambda(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ передаточные функции замкнутой системы принимают следующий вид:

$$W_{\lambda\varepsilon}(s) = \frac{sK_{об}}{4 \sum_{k=0} \alpha_k s^k}, \quad (\text{система с ПИД-регулятором});$$

$$W_{\lambda\varepsilon}(s) = \frac{K_{об}}{T^3 s^3 + 3T^2 s^2 + 3Ts + 1 + K_{об}K_p}, \quad (\text{система с П-регулятором}).$$

регулятором).

Как видно из рисунка 3.18, в системе с ПИД-регулятором ослабляется действие на ошибку управления возмущений $\lambda(t)$ на всех частотах, а при использовании П-регулятора низкочастотные возмущения даже усиливаются.

Таким образом, на основании рассмотренного примера можно сделать вывод, что каналы передачи сигналов замкнутой системы представляют собой фильтры различных частот, обеспечивающие подавление возмущений и передачу без искажений полезного сигнала $y_{зд}(t)$.

Отметим также, что при возрастании значений $\left| W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega) \right|$ в области низких частот, что наблюдается в случае замены ПИД-регулятора на П-регулятор, значения данной АЧХ в области резонансных частот для системы с П-регулятором уменьшаются (рис. 3.17). О том, что такая взаимосвязь значений данной АЧХ на низких и высоких частотах отнюдь не случайна, свидетельствует следующая теорема:

Теорема 3.1. *Предположим, что объект управления имеет передаточную функцию*

$$W_{o\bar{o}}(s) = \frac{R_{o\bar{o}}(s)}{Q_{o\bar{o}}(s)} = \frac{\sum_{h=0}^{\rho} b_h s^h}{\sum_{k=0}^{\sigma} a_k s^k}, \quad (3.5.1)$$

где b_h и a_k – вещественные коэффициенты; s – комплексная переменная, а нули s_g , $g = \overline{1, \sigma}$ полинома $Q_{o\bar{o}}(s)$ удовлетворяют требованию

$$\operatorname{Re} s_g < 0, \quad g = \overline{1, \sigma}. \quad (3.5.2)$$

Передаточную функцию регулятора $W_{\text{рег}}(s)$ представим в виде

$$W_{\text{рег}}(s) = R_{\text{рег}}(s) = s^{-\mu} \sum_{q=0}^{\beta} r_q s^q, \quad (3.5.3)$$

где

$$\beta + \rho + 2 \leq \sigma + \mu, \quad (3.5.4)$$

причем μ принимает значения 0 или 1.

Пусть для корней s_ξ , $\xi = \overline{1, n}$ ($n = \sigma + \mu$) характеристического уравнения

$$\Delta(s) = s^\mu Q_{o\bar{o}}(s) + R_{o\bar{o}}(s) R_{\text{рег}}(s) = 0,$$

односвязной системы управления выполняются требования

$$\operatorname{Re} s_\xi < 0, \quad \xi = \overline{1, n}, \quad (3.5.5)$$

тогда для АЧХ замкнутой системы $\left| W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega) \right|$ имеет место

равенство

$$\int_0^{\infty} \ln \left| W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega) \right| d\omega = 0. \quad (3.5.6)$$

Доказательство теоремы 3.1 приводится в приложении 1.

Согласно теореме 3.1 уменьшение значений функции $\left| W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega) \right|$ в интервале частот, при которых выполняется неравенство

$$\left| W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega) \right| < 1, \quad (3.5.7)$$

неизбежно приводит к возрастанию ее значений в интервале частот, при которых выполняется противоположное неравенство

$$\left| W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega) \right| > 1. \quad (3.5.8)$$

Обычно интервал частот, при которых выполняется неравенство (3.5.7) включает некоторую окрестность нулевой частоты $\omega = 0$ и называется областью низких частот. Напротив, интервал частот, при которых выполняется неравенство (3.5.8) включает окрестность резонансной частоты ω_p и называется областью высоких частот. Следовательно, уменьшение значений рассматриваемой АЧХ замкнутой системы в низкочастотной области обязательно приводит к их возрастанию в области высоких частот.

Таким образом, приходим к выводу, что улучшение фильтрующих свойств односвязной системы в низкочастотной области приводит к уменьшению модуля ошибки управления $\varepsilon(t)$ лишь в тех случаях, когда интенсивность возмущающих воздействия в области резонансных частот весьма незначительна, т.к. при данных обстоятельствах возрастание резонансного пика характеристики $\left| W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega) \right|$ практически не влияет на величину $\varepsilon(t)$.

В условиях теоремы 3.1 предполагается, что управляемый объект имеет сосредоточенные параметры, т.к. его передаточная функция представляет собой отношение двух полиномов. Но равенство (3.5.6) выполняется и для систем с транспортным запаздыванием, о чем свидетельствует следующая теорема:

Теорема 3.2. Пусть $|W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega)|$ – АЧХ односвязной стационарной системы, отвечающая каналу передачи $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$, где $y_{зд}(t)$ и $\varepsilon(t)$ – сигналы задания и ошибки управления соответственно.

Предположим также, что объект управления устойчив и имеет передаточную функцию вида

$$W_{об}^*(s) = e^{-s\tau} W_{об}(s); \quad \tau > 0, \quad (3.5.9)$$

где передаточная функция $W_{об}(s)$ определяется выражением (3.5.1).

Тогда для АЧХ замкнутой системы $|W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega)|$ выполняется равенство (3.5.3), если для корней характеристического уравнения односвязной системы справедливы требования (3.5.5).

Доказательство теоремы 3.2 приводится в приложении 1.

Поскольку передаточные функции многих объектов с распределенными параметрами можно приближенно описать выражениями (3.5.1) и (3.5.9), то и для замкнутых систем с распределенными параметрами уменьшение значений АЧХ $|W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega)|$ в области низких частот приводит к возрастанию этих значений в окрестности резонансной частоты.

Следовательно, для линейных стационарных систем применение обратной связи оказывается целесообразным лишь при определенном распределении по частотам интенсивности действующих на них возмущений, причем их интенсивность в области низких частот должна быть существенно выше, чем в области резонансных частот.

3.6. Тест 3

1. В расчетах односвязных замкнутых систем используют ... основных вида передаточных функций.

- а) два;
- б) три;
- в) четыре.

2. Все передаточные функции односвязной системы имеют одинаковый ...

- а) знаменатель;
- б) числитель;

в) вид.

3. Корни характеристического уравнения замкнутой системы часто называют ... передаточной функции замкнутой системы.

а) коэффициентами;

б) нулями;

в) полюсами.

4. Управление замкнутой системой, основанное на достижении заданного расположения корней ее характеристического уравнения, называется

а) дуальным;

б) модальным;

в) корневым.

5. В каскадных схемах управления применяются ... регулятора.

а) четыре;

б) три;

в) два.

6. В каскадных схемах управления главный регулятор формирует

а) сигнал задания для вспомогательного регулятора;

б) управляющее воздействие на объект;

в) опорный сигнал для вспомогательного регулятора.

7. Многосвязные системы применяют в тех случаях, когда имеется несколько управляемых величин и изменение каждой из них влияет на

а) качество управления;

б) все остальные;

в) ошибку управления.

8. Устойчивая система после устранения действующих на нее возмущений прекращает движение и приходит в

а) состояние устойчивого равновесия;

б) состояние неподвижности;

в) состояние равновесия.

9. Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости линейной стационарной системы является требование, чтобы все вещественные корни характеристического уравнения были

а) отрицательными, а комплексные корни имели отрицатель-

ные вещественные части;

б) положительными, а комплексные корни имели отрицательные вещественные части;

в) отрицательными, а комплексные корни имели положительные вещественные части.

10. Система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения расположены

а) на мнимой оси;

б) справа от мнимой оси;

в) слева от мнимой оси.

ГЛАВА IV

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Случайные процессы и их статистические характеристики

Системы управления технологическими процессами подвержены действию возмущений $\lambda(t)$, которые могут быть как детерминированными (определенными), так и случайными.

Детерминированные возмущения являются заданными функциями времени, хотя и не всегда известными.

Случайные возмущения, представляют такие функции времени, значения которых в каждый данный момент времени являются случайной величиной. Случайные функции времени называются также *случайными процессами*.

Случайный процесс $\Lambda(t)$, рассматриваемый только в фиксированный момент времени $t = t_1$ представляет собой случайную величину $\lambda(t_1)$, которая получила название *сечения случайного процесса*.

Возможные значения случайной величины $\lambda(t_1)$ называются ее *реализациями* и представляют собой некоторый набор чисел $\lambda_k(t_1)$, $k = \overline{1, n}$. Следовательно, возможными значениями случайного процесса $\Lambda(t)$ (его реализациями) являются детерминированные функции времени $\lambda_k(t)$, $k = \overline{1, n}$.

Полной вероятностной характеристикой случайной величины является **функция распределения**. Применительно к случайной величине $\Lambda(t_1)$ функция распределения имеет вид

$$F_1(\lambda_1, t_1) = P[\Lambda(t_1) < \lambda_1].$$

Функция распределения $F_1(\lambda_1, t_1)$ – это вероятность того, что случайный процесс в момент времени t_1 примет значение, меньшее значения λ_1

Функцию распределения $F_1(\lambda, t)$ называют одномерной функцией распределения случайного процесса $\Lambda(t)$. Она является функцией двух аргументов, координаты λ и времени t . Если она имеет частную производную по λ , т. е.

$$f_1(\lambda, t) = \frac{\partial F_1(\lambda, t)}{\partial \lambda},$$

то функцию $f_1(\lambda, t)$ называют одномерной плотностью вероятности случайного процесса $\Lambda(t)$.

Функции $F_1(\lambda, t)$ и $f_1(\lambda, t)$ являются простейшими формами законов распределения случайного процесса $\Lambda(t)$. Они характеризуют случайный процесс в отдельных сечениях, т.е. изолированно, т.к. не учитывают связи между возможными значениями случайного процесса в различные моменты времени.

Чтобы охарактеризовать не только изолированные отдельные сечения случайного процесса, но и попарную связь между ними в произвольные моменты времени t_1 и t_2 , нужно рассмотреть совместное распределение случайных величин $\Lambda(t_1)$ и $\Lambda(t_2)$, характеризуемое функцией распределения

$$F_2(\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2) = P[\Lambda(t_1) < \lambda_1; \Lambda(t_2) < \lambda_2]_1.$$

Функция распределения $F_2(\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2)$ – это вероятность того, что случайный процесс в момент времени t_1 примет значение, меньшее значения λ_1 , а при t_2 – меньше значения λ_2 . Функция $F_2(\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2)$ зависит от четырех аргументов: двух координат λ_1, λ_2 и двух моментов времени t_1, t_2 и называется двумерной плотностью распределения случайного процесса $\Lambda(t)$.

Если функция $F_2(\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2)$ имеет частные производные по λ_1 и λ_2

$$f_2(\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2},$$

то функцию $f_2(\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2)$ называют двумерной плотностью вероятности случайного процесса $\Lambda(t)$.

По аналогии можно определить n -мерные функции распределения и плотности вероятности случайного процесса $\Lambda(t)$, который в этом случае описывается более полно, чем при использовании лишь двумерных функций F_2 и f_2 . Однако практически приходится ограничиваться наиболее простыми законами распределения (одномерными и двумерными), а также числовыми характеристиками, среди которых наиболее распространены *математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция*.

Математическим ожиданием $m_\Lambda(t)$ (средним значением) случайного процесса $\Lambda(t)$ называют детерминированную функцию времени, значение которой в каждый момент времени равно математическому ожиданию (среднему значению) соответствующего сечения случайного процесса, т.е. по определению

$$m_\Lambda(t) = M[\Lambda(t)],$$

где $M[...]$ – оператор математического ожидания. Зная одномерную функцию распределения $F_1(\lambda, t)$ или одномерную плотность вероятности $f_1(\lambda, t)$ можно определить математическое ожидание. Например, по одномерной плотности вероятности $f_1(\lambda, t)$ математическое ожидание определяется по формуле

$$m_\Lambda(t) = M[\Lambda(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f_1(\lambda, t) d\lambda.$$

Следовательно, оператор математического ожидания $M[...]$ можно представить в виде

$$M[...]= \int_{-\infty}^{+\infty} [...] f_1(\lambda, t) d\lambda.$$

Математическое ожидание определяет в каждый момент времени уровень, вокруг которого колеблется случайный процесс. Однако оно не характеризует степень разбросанности отдельных реализаций случайного процесса относительно данного уровня. Совершенно разные по степени разбросанности реализаций случайные процессы могут иметь одно и то же математическое ожидание.

Степень разбросанности реализаций случайного процесса $\Lambda(t)$ относительно его среднего значения характеризуется дисперсией $D_\Lambda(t)$.

Дисперсией случайного процесса $\Lambda(t)$ называют детерминированную функцию времени $D_\Lambda(t)$, значение которой в каждый момент времени равно дисперсии соответствующего сечения случайного процесса.

Располагая информацией об одномерной плотности вероятности, дисперсию найдем по формуле

$$D_\Lambda(t) = M \left[\{ \Lambda(t) - m_\Lambda(t) \}^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \lambda(t) - m_\Lambda(t) \}^2 f_1(\lambda, t) d\lambda.$$

Положительное значение квадратного корня из $D_\Lambda(t)$, т.е.

$$\sigma_\Lambda(t) = \sqrt{D_\Lambda(t)},$$

называют *среднеквадратическим отклонением* случайного процесса. В каждый момент времени величина $\sigma_\Lambda(t)$ определяет средний уровень отклонения случайного процесса от своего математического ожидания.

Заметим, что ни математическое ожидание, ни дисперсия случайного процесса, ни в коей мере не характеризуют степень статистической зависимости между сечениями случайного процесса в различные моменты времени, она характеризуется корреляционной функцией.

Корреляционной (автокорреляционной) функцией случайного процесса $\Lambda(t)$ называют детерминированную функцию двух аргументов, которая для каждой пары произвольно выбранных значений аргументов t_1 и t_2 равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайного процесса:

$$K_\Lambda(t_1, t_2) = M \left[\{ \Lambda(t_1) - m_\Lambda(t_1) \} \{ \Lambda(t_2) - m_\Lambda(t_2) \} \right].$$

Зная двумерную плотность вероятности случайного процесса, можно найти его корреляционную функцию по формуле

$$K_{\Lambda}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\lambda_1 - m_{\Lambda}(t_1)][\lambda_2 - m_{\Lambda}(t_2)] f_2(\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Отметим свойства корреляционной функции случайного процесса:

1. Корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, т. е. выполняется равенство

$$K_{\Lambda}(t_1, t_2) = K_{\Lambda}(t_2, t_1).$$

2. Корреляционная функция при $t_1 = t_2 = t$ обращается в дисперсию случайного процесса

$$K_{\Lambda}(t, t) = D_{\Lambda}(t).$$

3. Если имеем случайный процесс

$$\Lambda(t) = q(t)X(t),$$

где $X(t)$ – случайный процесс с корреляционной функцией $K_X(t_1, t_2)$; $q(t)$ – детерминированная функция времени, то

$$K_{\Lambda}(t_1, t_2) = q(t_1)q(t_2)K_X(t_1, t_2).$$

4. Если имеем случайный процесс

$$\Lambda(t) = X(t) + q(t),$$

где $X(t)$ – случайный процесс с корреляционной функцией $K_X(t_1, t_2)$; $q(t)$ – детерминированная функция времени, то

$$K_{\Lambda}(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2).$$

5. Для корреляционной функции выполняется неравенство

$$|K_{\Lambda}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_{\Lambda}(t_1)D_{\Lambda}(t_2)}.$$

Несколько случайных процессов $\Lambda_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, рассматриваемых совместно, удобно трактовать как n -мерный вектор столбец

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_1(t) \\ \Lambda_2(t) \\ \vdots \\ \Lambda_n(t) \end{bmatrix}.$$

Если ограничиться моментами не выше второго порядка, то n -мерный векторный случайный процесс $\Lambda(t)$ характеризуется n -вектором математического ожидания

$$\mathbf{m}_\Lambda(t) = M[\Lambda(t)],$$

а также матрицей корреляционных функций

$$\mathbf{K}_\Lambda(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{\Lambda}(t) \overset{\circ}{\Lambda}^T(t) \right],$$

размерности $(n \times n)$, которая содержит все автокорреляционные и взаимно-корреляционные функции скалярных компонент, причем

$$\overset{\circ}{\Lambda}(t) = \overset{\circ}{\Lambda}(t) - M \left[\overset{\circ}{\Lambda}(t) \right].$$

4.2. Стационарные случайные процессы и их свойства

Среди случайных процессов важный для практики класс составляют случайные **стационарные процессы**, т. е. процессы, вероятностные свойства которых не меняются во времени.

Случайный процесс $\Lambda(t)$ называют **стационарным в широком смысле**, если его математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов:

$$\begin{aligned} m_\Lambda(t) &= m_\Lambda = \text{const}; \\ K_\Lambda(t_1, t_2) &= K_\Lambda(t_1 - t_2) = K_\Lambda(\tau), \end{aligned}$$

где $\tau = t_1 - t_2$.

Дисперсия стационарного случайного процесса $\Lambda(t)$ постоянна, т. к. $D_\Lambda(t) = K_\Lambda(t, t)$ и по условию стационарности $K_\Lambda(t, t) = K_\Lambda(t - t) = K_\Lambda(0)$.

Для стационарного случайного процесса $\Lambda(t)$ корреляционная функция $K_{\Lambda}(\tau)$ является четной, т. е.

$$K_{\Lambda}(\tau) = K_{\Lambda}(-\tau). \quad (4.2.1)$$

Действительно, поскольку корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, т.е.

$$K_{\Lambda}(t_1, t_2) = K_{\Lambda}(t_2, t_1), \quad (4.2.2)$$

и по условию стационарности выполняются равенства

$$K_{\Lambda}(t_1, t_2) = K_{\Lambda}(t_1 - t_2) = K_{\Lambda}(\tau); \quad (4.2.3)$$

$$K_{\Lambda}(t_2, t_1) = K_{\Lambda}(t_2 - t_1) = K_{\Lambda}(-\tau), \quad (4.2.4)$$

то, принимая во внимание равенства (4.2.2) – (4.2.4) установим справедливость равенства (4.2.1).

Стационарность имеет место, когда общие условия, в которых проводится эксперимент, не зависят от времени. Поэтому переходные процессы в системах управления являются *нестационарными случайными процессами*.

Два случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$ называют *стационарно связанными*, если их взаимная корреляционная функция K_{XY} является функцией разности своих аргументов:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = K_{XY}(t_1 - t_2) = K_{XY}(\tau).$$

В таком случае выполняется равенство

$$K_{XY}(\tau) = K_{YX}(-\tau).$$

При определенных условиях случайные процессы обладают *эргодическим свойством*, весьма важным для практических применений.

Стационарный случайный процесс является эргодическим, если любая статистическая характеристика, определяемая усреднением по множеству его реализаций, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равна соответствующей характеристике, определяемой усреднением по времени любой, достаточно продолжительной реализации этого процесса.

Свойство эргодичности позволяет средние по множеству реализаций процесса приравнять к средним по времени одной реализации, что существенно упрощает расчет статистических характери-

стик случайного процесса.

Так, математическое ожидание стационарного эргодического случайного процесса $\Lambda(t)$ выражается соотношением

$$m_{\Lambda} = M[\Lambda(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f(\lambda, t) d\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \lambda(t) dt,$$

а корреляционная функция этого процесса – равенствами

$$\begin{aligned} K_{\Lambda}(\tau) &= M\left[\overset{\circ}{\Lambda}(t)\overset{\circ}{\Lambda}(t+\tau)\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 - m_{\Lambda})(\lambda_2 - m_{\Lambda}) f(\lambda_1, \lambda_2, \tau) d\lambda_1 d\lambda_2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [\lambda(t) - m_{\Lambda}][\lambda(t+\tau) - m_{\Lambda}] dt, \end{aligned}$$

где $\lambda(t)$ – любая реализация случайного процесса.

Эргодичность не является следствием стационарности. Например, случайный процесс

$$Y(t) = X(t) + z, \quad (4.2.5)$$

где $X(t)$ – стационарный и эргодический случайный процесс, а z – случайная величина, является стационарным, но не эргодическим.

Действительно, поскольку случайная величина z от времени не зависит, то процесс $Y(t)$ стационарен, т.к. его статистические свойства не зависят от выбора начала отсчета времени.

Проверим его на эргодичность. С этой целью применим к равенству (4.2.5) оператор математического ожидания. В результате получим

$$M[Y(t)] = M[X(t)] + M[z] = m_X + m_z.$$

При усреднении случайного процесса $Y(t)$ по времени имеем

$$y_{cp} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X(t) dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} z dt = m_X + z.$$

Так как $m_z \neq z$, то и $y_{cp} \neq M[Y(t)]$. Следовательно, статистическая характеристика $M[Y(t)]$, определяемая усреднением по множеству реализаций случайного процесса $Y(t)$ не равна соответствующей характеристике y_{cp} , определяемой усреднением по времени одной реализации этого процесса. Поэтому случайный процесс $Y(t)$ не является эргодическим.

При исследовании случайных процессов часто бывает весьма полезно представить изучаемый процесс $\Lambda(t)$ в виде суммы элементарных случайных процессов, т.е.

$$\Lambda(t) = m_{\Lambda}(t) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V_k \lambda_k(t), \quad (4.2.6)$$

где $m_{\Lambda}(t)$ – математическое ожидание случайного процесса $\Lambda(t)$; V_k – некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю; $\lambda_k(t)$ – детерминированные функции времени.

Представление случайного процесса $\Lambda(t)$ в виде суммы (4.2.6) называют **каноническим разложением** данного случайного процесса.

Слагаемые $V_k \lambda_k(t)$ называют **элементарными случайными процессами**, представляющими собой наиболее простой вид случайных процессов. Случайность такого процесса выражается через случайную величину V_k , а зависимость от времени – через детерминированную функцию времени $\lambda_k(t)$. Величину V_k называют коэффициентом канонического разложения, а функцию $\lambda_k(t)$ – координатной функцией. Например, функция

$$\Lambda(t) = A \cos(\omega t),$$

где A – случайная амплитуда, представляет собой элементарный случайный процесс. Реализациями этого процесса являются гармоники одной частоты, но с различными амплитудами.

4.3. Частотное представление стационарных случайных процессов

При исследовании стационарных линейных систем управления и стационарности действующих на них случайных возмущений, т. е.

возможности достаточно точно представить их в виде стационарных случайных процессов, удобно использовать частный вид канонического разложения – частотное разложение случайных процессов.

При частотном (спектральном) разложении стационарного случайного процесса $\Lambda(t)$ выражение (4.2.6) принимает вид

$$\Lambda(t) = m_{\Lambda}(t) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V_k e^{i\omega_k t}, \quad (4.3.1)$$

где V_k – некоррелированные случайные величины, математические ожидания которых равны нулю, а дисперсии равны коэффициентам D_k в формуле для разложения корреляционной функции этого процесса $K_{\Lambda}(\tau)$ в ряд Фурье

$$K_{\Lambda}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{i\omega_k \tau}, \quad (4.3.2)$$

где

$$D_k = \frac{1}{4T} \int_{-2T}^{2T} K_{\Lambda}(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau. \quad (4.3.3)$$

Отметим, что значения частот ω_k в выражении (4.3.2) определяются равенствами

$$\omega_k = \frac{2\pi}{4T} k = \frac{\pi}{2T} k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.3.4)$$

В самом деле, предположим, что стационарный случайный процесс $\Lambda(t)$ задан на временном интервале $-T < t < T$, тогда аргумент τ его корреляционной функции $K_{\Lambda\Lambda}(\tau)$ изменяется в интервале $-2T < \tau < 2T$, поскольку $\tau = t_1 - t_2$, а переменные времени t_1 и t_2 изменяются в пределах $-T < t_1 < T$ и $-T < t_2 < T$.

Выражение (4.3.2) называют **спектральным** или **частотным разложением** стационарного случайного процесса. Согласно формуле (4.3.1) частотное разложение стационарного случайного процесса является частным случаем канонического разложения, когда в качестве координатных функций используются комплексные гармоники $e^{i\omega_k t}$. Амплитуды этих гармоник представляют собой некоррелированные случайные величины V_k с нулевыми математиче-

скими ожиданиями и дисперсиями D_k .

При изучении динамики случайных процессов управления часто бывает удобно рассматривать стационарные случайные процессы на бесконечном интервале времени (например, при изучении установившегося режима стационарной линейной системы управления).

Рассмотрим корреляционную функцию стационарного случайного процесса на бесконечном интервале времени путем предельного перехода при $T \rightarrow \infty$. Для этого формулу (4.3.2) представим в виде

$$K_{\Lambda}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{D_k}{\Delta\omega} e^{i\omega_k\tau} \Delta\omega, \quad (4.3.5)$$

где интервал частот между соседними гармониками $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k$ с учетом равенств (4.3.4) определяется выражением $\Delta\omega = \frac{\pi}{2T}$.

Обозначим

$$S_T(\omega_k) = \frac{D_k}{\Delta\omega} = \frac{2T}{\pi} D_k. \quad (4.3.6)$$

Функцию $S_T(\omega)$ называют средней плотностью дисперсии стационарного процесса, т.к. она определяет значение дисперсии, приходящееся на единицу длины частотного интервала между соседними гармониками. Тогда, воспользовавшись обозначением (4.3.6), формулу (4.3.5) запишем следующим образом:

$$K_{\Lambda}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_T(\omega_k) e^{i\omega_k\tau} \Delta\omega, \quad (4.3.7)$$

где с учетом выражения (4.3.3)

$$D_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-2T}^{2T} K_{\Lambda}(\tau) e^{-i\omega_k\tau} d\tau. \quad (4.3.8)$$

Формулы (4.3.5) и (4.3.6) при $T \rightarrow \infty$ принимают вид

$$K_{\Lambda}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\Delta}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \quad (4.3.9)$$

$$S_{\Lambda}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\Lambda}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (4.3.10)$$

где

$$S_{\Lambda}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} S_T(\omega_k) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{D_k(\omega_k)}{\Delta\omega}.$$

Формулы (4.3.9) и (4.3.10) являются основными формулами спектральной теории стационарных случайных процессов.

Смысл формулы (4.3.9) заключается в том, что корреляционная функция вещественного аргумента представляет собой сумму гармонических составляющих с амплитудой, зависящей от частоты ω .

Функция $S_{\Lambda}(\omega)$ имеет смысл плотности распределения дисперсии случайного процесса по частотам непрерывного спектра (дисперсии амплитуд гармонических колебаний). Поэтому ее называют спектральной плотностью дисперсии стационарного случайного процесса.

Функцию $S_{\Lambda}(\omega)$ для эргодического стационарного случайного процесса $\Lambda(t)$ называют **спектральной плотностью** мощности процесса. Это обусловлено тем, что для эргодического процесса

$$D_{\Lambda} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \overset{\circ}{\Lambda}(t) \right|^2 dt.$$

Если функция $\overset{\circ}{\Lambda}(t)$ является реализацией случайных флуктуаций напряжения на концах проводника, то D_{Λ} – средняя мощность флуктуаций тока, рассеиваемая на единичном сопротивлении этого проводника. Следовательно, $S_{\Lambda}(\omega)$ будет характеризовать распределение средней мощности флуктуаций тока по отдельным составляющим гармоникам.

Как видно из формул (4.3.9) и (4.3.10), корреляционная функция и спектральная плотность являются преобразованиями Фурье друг друга. Зная корреляционную функцию можно определить спектральную плотность и наоборот.

Спектральная плотность при исследовании стационарных случайных процессов зачастую является более удобной характеристикой, чем корреляционная функция. Экспериментально проще определить корреляционную функцию.

Покажем, что спектральная плотность является четной функцией ω . Для этого воспользуемся выражением (4.3.10), в котором мнимую экспоненту $e^{-i\omega\tau}$ представим по формуле Эйлера

$$e^{-i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau). \quad (4.3.11)$$

Подставив (4.3.11) в выражение (4.3.10) получим

$$S_{\Lambda}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{\Lambda}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau - i \int_{-\infty}^{\infty} K_{\Lambda}(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau \right]. \quad (4.3.12)$$

Поскольку функция $K_{\Lambda}(\tau)$ является четной, а функция $\sin(\omega\tau)$ – нечетная, то их произведение представляет собой нечетную функцию от τ . Поэтому второй интеграл в формуле (4.3.12) равен нулю, как интеграл в симметричных пределах от нечетной функции. В таком случае формула (4.3.12) принимает вид

$$S_{\Lambda}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\Lambda}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Из формулы (4.3.13) на основании четности функций $K_{\Lambda}(\tau)$ и $\cos(\omega\tau)$ следует, что спектральная плотность $S_{\Lambda}(\omega)$ является четной функцией ω , т. е. $S_{\Lambda}(\omega) = S_{\Lambda}(-\omega)$.

Понятие *взаимной спектральной плотности* $S_{XY}(\omega)$ для двух стационарных или стационарно связанных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ можно ввести по аналогии с выражением (4.3.10). В таком случае

$$S_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

где $K_{XY}(\tau)$ – взаимная корреляционная функция случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

Для статистического описания в частотной области стационарного n -мерного векторного случайного процесса $\Lambda(t)$, все компоненты которого стационарны и стационарно связаны, используется *матрица спектральных плотностей*

$$S_{\Lambda}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_{\Lambda}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

размерности $(n \times n)$.

4.4. Статистические характеристики стационарных выходных случайных сигналов в частотном представлении

Пусть на вход устойчивого линейного стационарного объекта с передаточной функцией $W(s)$ поступает случайный сигнал $X(t)$ с постоянным математическим ожиданием $m_X(t)$. В таком случае выходной сигнал данного объекта $Y(t)$ в установившемся режиме, т.е. по прошествии достаточно большого времени с момента начала работы, когда в силу устойчивости объекта начальными условиями можно пренебречь, определяется на основании формулы (1.4.24)

$$Y(t) = \int_0^{\infty} g(v)X(t-v)dv, \quad (4.4.1)$$

где $g(t)$ – импульсная переходная характеристика объекта.

Применяя к равенству (4.4.1) оператор математического ожидания приходим к выражению

$$m_Y(t) = \int_0^{\infty} g(v) m_X(t-v)dv, \quad (4.4.2)$$

позволяющему установить связь между математическими ожиданиями $m_X(t)$ и $m_Y(t)$, отвечающим входному $X(t)$ и выходному $Y(t)$ сигналам объекта.

В важном частном случае, когда $m_X(t) = m_X = \text{const}$ выражение (4.4.2) принимает вид

$$m_Y(t) = m_X \int_0^{\infty} g(v) dv = m_X W(0). \quad (4.4.3)$$

Действительно, согласно выражению (1.3.51) передаточная функция объекта определяется по формуле

$$W(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt. \quad (4.4.4)$$

Полагая в формуле (4.4.2) $s = 0$ получим равенство

$$W(0) = \int_0^{\infty} g(t)dt,$$

на основании которого установим правильность формулы (4.4.3).

Предположим теперь, что входной сигнал $X(t)$ имеет спектральную плотность $S_X(\omega)$. Определим спектральную плотность $S_Y(\omega)$ выходного сигнала $Y(t)$. Для этого воспользуемся выражением

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_Y(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (4.4.5)$$

полученным согласно формуле (4.3.10).

Согласно (4.4.5) для определения спектральной плотности $S_Y(\omega)$ необходимо найти корреляционную функцию выходного сигнала $K_Y(\tau)$.

С этой целью запишем выражения для значений выходного сигнала в моменты времени t_1 и t_2

$$Y(t_1) = \int_0^{\infty} g(v)X(t_1 - v)dv; \quad (4.4.6)$$

$$Y(t_2) = \int_0^{\infty} g(\xi)X(t_2 - v)d\xi. \quad (4.4.7)$$

После применения к выражениям (4.4.6.) и (4.4.7) оператора математического ожидания они принимают вид

$$M[Y(t_1)] = \int_0^{\infty} g(v) M[X(t_1 - v)] dv; \quad (4.4.8)$$

$$M[Y(t_2)] = \int_0^{\infty} g(v) M[X(t_2 - v)] dv. \quad (4.4.9)$$

Вычитая равенства (4.4.8) из равенства (4.4.6), а равенства

(4.4.9) из равенства (4.4.7) имеем

$$\overset{\circ}{Y}(t_1) = \int_0^{\infty} g(v) \overset{\circ}{X}(t_1 - v) dv; \quad (4.4.10)$$

$$\overset{\circ}{Y}(t_2) = \int_0^{\infty} g(v) \overset{\circ}{X}(t_2 - v) dv. \quad (4.4.11)$$

Перемножив равенства (4.4.10) и (4.4.11), а затем, применив к полученному произведению оператор математического ожидания, получим

$$M \left[\overset{\circ}{Y}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2) \right] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(v) g(\xi) M \left[\overset{\circ}{X}(t_1 - v) \overset{\circ}{X}(t_2 - \xi) \right] dv d\xi. \quad (4.4.12)$$

С учетом стационарности сигналов $X(t)$ и $Y(t)$ значения корреляционных функций

$$K_X(t_1 - v, t_2 - \xi) = M \left[\overset{\circ}{X}(t_1 - v) \overset{\circ}{X}(t_2 - \xi) \right] \quad (4.4.13)$$

и

$$K_Y(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{Y}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2) \right] \quad (4.4.14)$$

зависят лишь от разности их аргументов, т.е. выполняются равенства

$$K_X(t_1 - v, t_2 - \xi) = K_X(\tau + \xi - v); \quad (4.4.15)$$

$$K_Y(t_1, t_2) = K_Y(\tau), \quad (4.4.16)$$

где $\tau = t_1 - t_2$.

Принимая во внимание равенства (4.4.13) – (4.4.16) выражение (4.4.12) представим в виде

$$K_Y(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(v) g(\xi) K_X(\tau + \xi - v) dv d\xi. \quad (4.4.17)$$

После подстановки выражения (4.4.17) в равенство (4.4.5) получим

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g(v) dv \int_0^{\infty} g(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau + \xi - v) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.4.18)$$

Перепишем выражение (4.4.18) следующим образом:

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g(v) e^{-i\omega v} dv \int_0^{\infty} g(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau + \xi - v) e^{-i\omega(\tau + \xi - v)} d\tau. \quad (4.4.19)$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменных $\theta = \tau + \xi - v$ приходим к формуле

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g(v) e^{-i\omega v} dv \int_0^{\infty} g(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta. \quad (4.4.20)$$

С учетом равенств

$$W(i\omega) = \int_0^{\infty} g(v) e^{-i\omega v} dv, \quad W(-i\omega) = \int_0^{\infty} g(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi$$

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta$$

выражение для искомой спектральной плотности $S_Y(\omega)$ принимает вид

$$S_Y(\omega) = W(i\omega)W(-i\omega)S_X(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_X(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность выходного сигнала стационарного объекта в установившемся режиме равна произведению квадрата модуля комплексной частотной характеристики данного объекта на спектральную плотность входного сигнала.

Получим также выражение для дисперсии D_Y выходного сигнала $Y(t)$. С этой целью выражение для его корреляционной функции с учетом равенств (4.3.9) и (4.4.21) запишем так:

$$K_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (4.4.22)$$

Поскольку для стационарных случайных процессов имеет место равенство $D_Y = K_Y(0)$, то, полагая в формуле (4.4.22) $\tau = 0$ получим выражение

$$D_Y = \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 S_X(\omega) d\omega. \quad (4.4.23)$$

Для случая, когда сигналы $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ являются векторными, размерностей r и q соответственно, выражение (4.4.22) принимает вид

$$\mathbf{K}_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}(i\omega) \mathbf{S}_X(\omega) \mathbf{W}^T(-i\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (4.4.24)$$

где $\mathbf{K}_Y(\tau)$ – матрица корреляционных функций выходного сигнала $\mathbf{Y}(t)$ размерности $(q \times q)$; $\mathbf{W}(i\omega)$ – матрица КЧХ системы размерности $(q \times r)$; $\mathbf{S}_X(\omega)$ – матрица спектральных плотностей входного сигнала $\mathbf{X}(t)$ размерности $(r \times r)$.

Полагая в выражении (4.4.24) $\tau = 0$ представим его в виде

$$\mathbf{D}_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}(i\omega) \mathbf{S}_X(\omega) \mathbf{W}^T(-i\omega) d\omega. \quad (4.4.25)$$

Необходимо помнить, что формулы (4.4.22) – (4.4.25) для статистических характеристик выходных сигналов системы применимы лишь в тех случаях, когда система является стационарной и работает в установившемся режиме, а входные сигналы также стационарны или стационарно связаны.

4.5. Спектральный анализ эффективности типовых регуляторов

Алгоритмы (законы) управления для замкнутых систем в общем случае устанавливают взаимосвязь между вектором ошибки управления $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и вектором управляющих воздействий $\mathbf{u}(t)$. Однако, если управляемый объект имеет один вход и один выход, т.е. является одномерным, векторы $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ заменяются соответствующими скалярными величинами $\varepsilon(t)$ и $u(t)$.

Проанализируем эффективность типовых алгоритмов управления. При этом рассмотрим системы со стационарными сигналами.

Пусть величина $\varepsilon(t)$ является стационарным случайным процессом, имеющим спектральную плотность мощности $S_\varepsilon(\omega)$, тогда при постоянных параметрах регулятора случайный процесс $u(t)$ также будет стационарным и его спектральная плотность мощности $S_u(\omega)$ согласно (4.4.21) определяется выражением

$$S_u(\omega) = |W_{p\text{ee}}(i\omega)|^2 S_\varepsilon(\omega), \quad (4.5.1)$$

где $W_{p\text{ee}}(i\omega)$ – КЧХ регулятора.

Поскольку отношение $S_u(\omega)/S_\varepsilon(\omega)$ характеризует усиление регулятором средней мощности входного сигнала $\varepsilon(t)$ на частоте ω , то функция

$$|W_{p\text{ee}}(i\omega)|^2 = \frac{S_u(\omega)}{S_\varepsilon(\omega)} \quad (4.5.2)$$

определяет влияние, оказываемое регулятором на исполнительный механизм системы управления с целью подавления гармонической составляющей с частотой ω спектра ошибки управления $\varepsilon(t)$.

Следовательно, эффективность алгоритмов управления стационарным случайным процессом $\varepsilon(t)$ зависит от свойств функции $|W_{p\text{ee}}(i\omega)|^2$.

Для П-регулятора с передаточной функцией (2.3.1) эта функция имеет вид

$$|W_{\text{П}}(i\omega)|^2 = K_p^2. \quad (4.5.3)$$

Согласно выражениям (4.5.2) и (4.5.3) приходим к выводу, что П-регулятор обеспечивает подавление всех гармонических составляющих спектра сигнала $\varepsilon(t)$ пропорционально их средней мощности.

Однако эффективность этого регулятора нередко оказывается недостаточной ввиду существующих ограничений на величину K_p .

Рассмотрим одно из них. Учтем, что выходная мощность регулятора $u^2(t)$, всегда ограничена, т. е. выполняется неравенство

$$u^2(t) \leq \mu_{\text{П}}, \quad (4.5.4)$$

где $\mu_{\text{П}}$ – предельно допустимая мощность управляющих воздей-

ствий. Введем понятие средней мощности регулятора μ_{cp} , воспользовавшись выражением

$$\mu_{cp} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [u(t) - m_u(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) d\omega. \quad (4.5.5)$$

Согласно равенствам (4.5.1) и (4.5.3) в рассматриваемом случае имеем

$$S_u(\omega) = K_p^2 S_\varepsilon(\omega). \quad (4.5.6)$$

Проинтегрировав равенство (4.5.6) по ω с учетом выражения (4.5.5) имеем

$$\mu_{cp} = K_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega. \quad (4.5.7)$$

Поскольку величина μ_{cp} , также как и $u^2(t)$, удовлетворяет неравенству (4.5.4), то, исходя из (4.5.7) получим

$$K_p^2 \leq \frac{\mu_{\Pi}}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega}. \quad (4.5.8)$$

Согласно (4.5.8), чем больше средняя мощность сигнала ошибки, тем меньше K_p . Следовательно, эффективность П-регулятора уменьшается как раз в тех случаях, когда необходимо ее резко повысить.

Исследования показали, что максимум спектральных плотностей возмущающих воздействий $\lambda(t)$ часто достигается при $\omega = 0$, поэтому сигнал $\lambda(t)$ обычно имеет отличную от нуля постоянную составляющую $M[\lambda(t)]$. Для устранения этой составляющей у сигнала ошибки управления $\varepsilon(t)$ используются регуляторы, содержащие интегрирующие звенья.

Рассмотрим регуляторы этого типа. Начнем с И-регулятора, имеющего передаточную функцию (2.3.2). В таком случае, исходя из выражения (2.3.2) приходим к выводу, что

$$|W_{II}(i\omega)|^2 = \frac{K_p^2}{T_{II}\omega^2}. \quad (4.5.9)$$

Воспользовавшись выражением (4.5.9) установим, что

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |W_I(\omega)|^2 = \infty; \lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_I(\omega)|^2 = 0. \quad (4.5.10)$$

Как видно из выражений (4.5.2) и (4.5.10) И-регулятор в наибольшей мере подавляет низкочастотные гармонические составляющие сигнала $\varepsilon(t)$, но малоэффективен в области средних и особенно высоких частот.

Для исправления этого недостатка применяется ПИ-регулятор, передаточная функция которого задана выражением (2.3.3). Для этого регулятора имеем

$$|W_{ПИ}(i\omega)|^2 = K_p^2 \left(1 + \frac{1}{T_I^2 \omega^2} \right). \quad (4.5.11)$$

На основании выражений (4.5.2) и (4.5.11) приходим к выводу, что ПИ-регулятор сохраняет достоинства И-регулятора, т.е. энергично реагирует на низкочастотные гармоники сигнала ошибки управления $\varepsilon(t)$ и в то же время не столь слабо реагирует на его гармонические составляющие, относящиеся к областям средних и высоких частот, поскольку для него, так же как и для П-регулятора, выполняется равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_{ПИ}(i\omega)|^2 = K_p^2.$$

Тем не менее, реакцию ПИ-регулятора на высокочастотные гармоники спектра сигнала $\varepsilon(t)$ нельзя признать удовлетворительной, т. к. минимум отношения $S_u(\omega)/S_\varepsilon(\omega)$ равный K_p^2 , как это следует из выражений (4.5.2) и (4.5.11), достигается при $\omega \rightarrow \infty$.

С целью повышения качества управления вместо ПИ-регулятора применяется ПИД-регулятор с передаточной функцией (2.3.4).

Исходя из выражения (2.3.4) получим

$$|W_{ПИД}(i\omega)|^2 = K_p^2 \left[1 + \left(T_D \omega - \frac{1}{T_I \omega} \right)^2 \right]. \quad (4.5.12)$$

На основании выражений (4.5.2) и (4.5.12) можно сделать вы-

вод, что минимум отношения $S_u(\omega)/S_\varepsilon(\omega)$ для ПИД-регулятора, так же как и для ПИ-регулятора, равен K_p^2 , но достигается он не при $\omega \rightarrow \infty$, а в области средних частот при $\omega = 1/\sqrt{T_D T_I}$. Кроме того, при правильной настройке ПИД-регулятора обеспечиваются большие значения K_p , чем в тех случаях, когда для управления тем же объектом применяются П и ПИ-регуляторы.

Следовательно, при использовании ПИД-регулятора минимальное значение величины $|W_{pce}(i\omega)|^2$ будет больше, чем при использовании регуляторов всех других рассмотренных видов. Это означает, что с помощью ПИД-регулятора в принципе можно достичь наилучшего качества управления технологическими процессами, сравнительно с остальными видами типовых регуляторов.

Для более детального анализа возможностей каждого из типовых регуляторов рассмотрим пример.

Пример. 4.1. Рассмотрим объект управления, проанализированный в примере 3.4. Для параметров настройки типовых регуляторов, используемых при управлении данным объектом, на основании выполненных расчетов были получены следующие значения:

$$K_p = 0,41636, \text{ (П-регулятор);}$$

$$K_p / T_I = 0,0072176, \text{ (И-регулятор);}$$

$$K_p = 0,37021; T_I = 29,154 \text{ с, (ПИ-регулятор);}$$

$$K_p = 2,3408; T_D = 9,7330 \text{ с; } T_I = 19,579 \text{ с, (ПИД-регулятор).}$$

Отметим, что коэффициент передачи регулятора K_p принимает большее значение при использовании П-регулятора, сравнительно со случаем, когда применяется ПИ-регулятор. Указанное различие объясняется дополнительной инерционностью, вносимой интегрирующим звеном, отсутствующим у П-регулятора.

Но, самый большой коэффициент передачи K_p у ПИД-регулятора, что обусловлено наличием дифференцирующего звена в составе данного вида типовых регуляторов.

Графики характеристик $|W_{pce}(i\omega)|^2$ для И, П и ПИ-регуляторов представлены на рисунке 4.1.

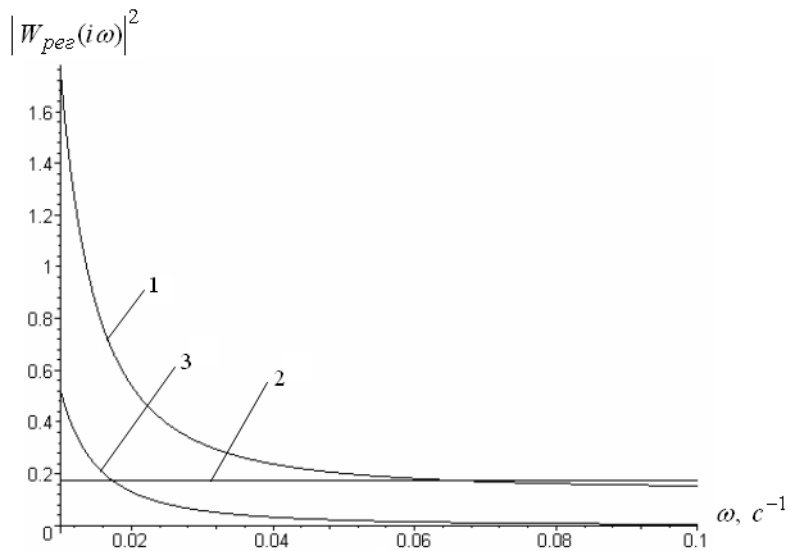


Рисунок 4.1 – Квадраты АЧХ типовых регуляторов:
 1 – ПИ-регулятор; 2 – П-регулятор; 3 – И-регулятор

Согласно рисунку 4.1 эффективность ПИ-регулятора заметно выше, чем у И-регулятора, а П-регулятор становится более предпочтительным лишь в области довольно высоких частот, причем его преимущество не столь значительно.

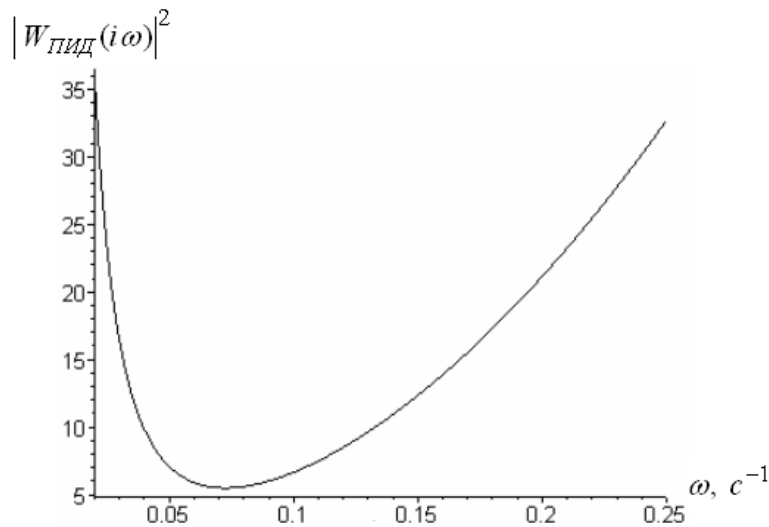


Рисунок 4.2 – Квадрат АЧХ ПИД-регулятора

Сравнивая графики на рисунках 4.1 и 4.2. убеждаемся, что в окрестности частоты $\omega = 1/\sqrt{T_d T_i}$ минимальное значение характеристики $|W_{pes}(i\omega)|^2$ у ПИД-регулятора значительно превосходит значения этих характеристик у всех других видов типовых регуляторов.

Рассмотренный пример свидетельствует, что использование в алгоритме управления производной по времени от ошибки управления $\varepsilon(t)$ резко повышает резервы эффективности регулятора.

Конечно, можно было бы попытаться использовать в алгоритме управления и вторую производную по времени, а также производные более высоких порядков. В принципе это позволяет повысить качество управления, но при многократном дифференцировании по времени недопустимо возрастает влияние присутствующих в сигнале ошибки управления $\varepsilon(t)$ различных шумов и помех, т.к. обычно они имеют весьма высокочастотный спектр. Поэтому временные производные выше первого порядка в алгоритмах управления применяются крайне редко.

Необходимо отметить, что здесь были проанализированы предельные возможности типовых регуляторов, которые по различным причинам не всегда реализуются на практике. Дело в том, что при использовании принципа управления по отклонению качество управления зависит не только от регулятора, но и от объекта, а также ряда ограничений (например, на запас устойчивости, предельно допустимую мощность управляющих воздействий и др.).

4.6. Тест 4

1. Детерминированные возмущения являются ... функциями времени.

- а) определенными;
- б) известными;
- в) заданными.

2. Случайные функции времени называются

- а) случайными процессами;
- б) случайными величинами;
- в) неизвестными закономерностями.

3. Полной вероятностной характеристикой случайной величины является

- а) математическое ожидание;
- б) дисперсия;
- в) функция распределения.

4. Математическое ожидание случайного процесса определяет в каждый момент времени

- а) уровень, вокруг которого колеблется случайный процесс;
 - б) степень разбросанности отдельных реализаций случайного процесса относительно его среднего значения;
 - в) детерминированную функцию времени.
5. Среднеквадратическим отклонением случайного процесса называют положительное значение
- а) кубического корня из математического ожидания случайного процесса;
 - б) кубического корня из дисперсии случайного процесса;
 - в) квадратного корня из дисперсии случайного процесса.
6. Случайными стационарными процессами называют такие процессы, вероятностные свойства которых
- а) изменяются во времени;
 - б) не меняются во времени;
 - в) являются заданными функциями времени.
7. Случайный процесс называют стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит
- а) только от разности аргументов;
 - б) от времени;
 - в) только от суммы аргументов.
8. Дисперсия стационарного случайного процесса
- а) изменяется во времени;
 - б) постоянна;
 - в) зависит от математического ожидания случайного процесса.
9. Свойство эргодичности позволяет средние по множеству реализаций процесса приравнять к
- а) постоянной величине;
 - б) средним по времени двух реализаций;
 - в) средним по времени одной реализации.
10. При исследовании стационарных линейных систем управления и стационарности действующих на них случайных возмущений удобно использовать
- а) каноническое разложение случайных процессов;
 - б) спектральное разложение случайных процессов;
 - в) разложение случайных процессов в функциональные ряды.

ГЛАВА V

ВЫБОР КРИТЕРИЕВ КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

5.1. Проблема выбора критериев управления

Основное назначение критерия качества управления – численно оценить качество управления и успешность решения задачи управления. Выбор критерия управления обычно осуществляется в зависимости от характера решаемой задачи, статистических сведений о входных сигналах, а также на основании опыта и интуиции разработчиков автоматических систем.

К критериям управления предъявляются два общих требования: во-первых, он должен соответствовать поставленной задаче управления, т.е. служить действительной мерой успешности ее выполнения; во-вторых, он должен быть достаточно прост, чтобы можно было математически решить поставленную задачу.

Наиболее употребительным и простым критерием качества управления является *средний квадрат ошибки* системы. Поскольку выходной сигнал односвязной системы управления $y(t)$ обычно является случайным процессом, то ошибку системы $\varepsilon(t)$ характеризуют в статистическом смысле. Наиболее простой статистической характеристикой является математическое ожидание. Поэтому средний квадрат ошибки $M[\varepsilon^2]$ весьма часто используется на практике.

Средний квадрат ошибки $M[\varepsilon^2]$ связан с дисперсией D_ε и математическим ожиданием ошибки m_ε соотношением

$$M[\varepsilon^2] = D_\varepsilon + m_\varepsilon,$$

которое показывает, что он учитывает и чисто случайную составляющую ε (через D_ε) и ее систематическую (среднюю) составляющую (через m_ε).

Положительный корень из среднего квадрата ошибки называется **средней квадратической ошибкой**, которая имеет размерность выходного сигнала системы и поэтому при практических расчетах является более удобной характеристикой, чем средний квадрат ошибки.

Система, обладающая минимальной средней квадратической ошибкой, называется **оптимальной по минимуму средней квадратической ошибки**.

Критерий среднего квадрата ошибки обобщается на случай, когда сигнал ошибки управления является векторным ε . В этом случае из координат ε_k , $k = \overline{1, n}$ вектора ε образуется скалярная случайная функция

$$E_{об} = \sum_{k=1}^n \chi_k \varepsilon_k, \quad (5.1.1)$$

называемая **обобщенной ошибкой**. Как видно из (5.1.1), она представляет собой сумму координат вектора ε , взятых со своими весовыми коэффициентами χ_k , $k = \overline{1, n}$, значения которых выбираются, исходя из существа задачи.

В качестве статистического критерия качества управления можно использовать математическое ожидание среднего квадрата обобщенной ошибки, т. е.

$$Q = M[E_{об}^2].$$

Данный скалярный критерий компактно выражается через вектор ε и вектор весовых коэффициентов $\chi = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n]$ в виде квадратичной формы

$$\begin{aligned} Q &= M[E_{об}^2] = M \left[\left(\sum_{k=1}^n \chi_k \varepsilon_k \right) \left(\sum_{h=1}^n \chi_h \varepsilon_h \right) \right] = \\ &= M[\chi^T \varepsilon \varepsilon^T \chi] = \chi^T M[\varepsilon \varepsilon^T] \chi, \end{aligned}$$

что делает его весьма удобным в математическом отношении.

Критерий среднего квадрата ошибки (или средней квадратической ошибки) получил распространение благодаря тому, что он прост в математическом отношении и во многих практических задачах управления является удовлетворительной мерой успешности их решения.

Однако в ряде задач управления этот критерий не соответствует их условиям, т. к. он придает большим и маловероятным ошибкам больший вес, чем малым ошибкам, т. е. большие ошибки оказываются более нежелательными, чем малые. Но в некоторых задачах одинаково нежелательны, т. е. равноценны по своему влиянию на успешность решения задачи управления все значения ошибок, превышающие определенный предел.

Рассмотрим, например, задачу управления самолетом при посадке на полосу аэродрома. Пусть благополучная посадка самолета равновероятна, если ошибка бокового пролета не превышает заданного предела β , и невозможна вовсе, если указанная ошибка превышает этот предел. Следовательно, условия этой задачи таковы, что одинаково нежелательны все значения ошибок, большие β и поэтому критерий среднего квадрата ошибки нецелесообразно использовать при ее решении.

Кроме того, в случае использования обобщенной ошибки (5.1.1) выбор значений весовых коэффициентов в значительной мере осуществляется субъективно, что также нежелательно.

Таким образом, обоснованный выбор критериев качества управления в значительной мере способствует успешности решения поставленных задач.

5.2. Экономический критерий качества управления технологическими процессами

Рассмотрим задачу выбора критериев при использовании односвязных систем управления технологическими процессами. Поскольку при завершении управляемых технологических процессов создается продукция, предназначенная для продажи, то цель управления должна иметь экономическое содержание, которое можно определить как минимизацию экономических потерь, связанных с отклонением управляемых технологических параметров от их за-

данных значений. Согласно выражению (В.1.2) эти отклонения характеризуются величиной ошибки управления $\varepsilon(t)$.

Следовательно, экономические потери при управлении технологическими процессами зависят от величины $\varepsilon(t)$.

Введем функцию $f(\varepsilon)$, значения которой соответствуют экономическим потерям в единицу времени при выпуске продукции, т.е., по существу, она определяет интенсивность экономических потерь. Тогда значения $f(0)$ определяют интенсивность экономических потерь при идеальном управлении технологическим процессом, когда $\varepsilon = 0$. Эти потери не связаны с управлением, а зависят, например, от качества сырья, своевременности его поставок, правильности выбора технологом заданного значения $y_{зд}$ и множества других факторов. Поэтому среднюю интенсивность экономических потерь \mathcal{E} , зависящих лишь от точности управления технологическим процессом, можно выразить с помощью следующего критерия:

$$\mathcal{E} = M[f(\varepsilon) - f(0)], \quad (5.2.1)$$

где $M[\dots]$ – оператор математического ожидания.

Воспользовавшись критерием \mathcal{E} цель управления можно определить как выполнение требования

$$\mathcal{E} \rightarrow \min. \quad (5.2.2)$$

Однако непосредственно использовать критерий \mathcal{E} при управлении технологическими процессами оказывается весьма затруднительным, т. к. в большинстве случаев не удастся определить зависимость $f(\varepsilon)$. Поэтому необходимо искать другие критерии, при оптимизации которых обеспечивается выполнение требования (5.2.2).

Чтобы определить критерии, обладающие указанным свойством, сделаем достаточно обоснованные допущения о виде функции $f(\varepsilon)$. Примем во внимание, что ввиду ограниченности экономических потерь при управлении любым технологическим процессом она может изменяться лишь в конечных пределах. В таком случае, даже при наличии у функции $f(\varepsilon)$ конечных скачков (разрывов первого рода), ее сколь угодно точно можно приблизить некоторой непрерывной функцией. Учтем также, что всегда существуют ограничения на пределы изменения величины ε , т. к. входной $y_{зд}(t)$ и

выходной $y(t)$ сигналы системы управления принимают конечные значения.

Поскольку функцию $f(\varepsilon)$ можно считать непрерывной и заданной на конечном отрезке, то ее можно с любой заданной точностью аппроксимировать полиномом степени \mathcal{G} . В таком случае она принимает вид

$$f(\varepsilon) = f(0) + \sum_{k=1}^{\mathcal{G}} \gamma_k \varepsilon^k, \quad (5.2.3)$$

где $\gamma_k, k = \overline{1, \mathcal{G}}$ – вещественные коэффициенты.

Воспользовавшись выражениями (5.2.1) и (5.2.3) критерий \mathcal{E} представим в виде

$$\mathcal{E} = \sum_{k=1}^{\mathcal{G}} \gamma_k M[\varepsilon^k]. \quad (5.2.4)$$

Поскольку

$$\mathcal{E} \leq |\mathcal{E}|,$$

то с учетом (5.2.4) получим неравенство

$$\mathcal{E} \leq \sum_{k=1}^{\mathcal{G}} |\gamma_k| |M[\varepsilon^k]|. \quad (5.2.5)$$

Следовательно, выполнению требования (5.2.2) способствует выполнение условий

$$|M[\varepsilon^k]| \rightarrow \min, k = \overline{1, \mathcal{G}}. \quad (5.2.6)$$

Таким образом, вместо одного универсального, но неконтролируемого критерия \mathcal{E} , мы получили множество критериев

$$|M[\varepsilon^k]|, k = \overline{1, \mathcal{G}}, \quad (5.2.7)$$

значения которых можно определить, если имеется достоверная информация о функции распределения случайного процесса $\varepsilon(t)$. Чтобы получить такую информацию необходимо определить статистические характеристики всех возмущающих воздействий и располагать достаточно точной математической моделью управляемого объекта.

В случае многосвязных систем случайный процесс $\varepsilon(t)$ является векторным, причем вектор $\varepsilon(t)$ имеет n координат $\varepsilon_l(t)$, $l = \overline{1, n}$. При этом функция экономических потерь $f(\varepsilon)$ представляет собой полином степени \mathcal{G} от векторного аргумента ε . Для многосвязных систем также можно показать, что в качестве обоснованных критериев качества управления следует использовать величины

$$|M[\prod_{\mu=1}^n \varepsilon_{\mu}^{k_{\mu}}(t)]|; \sum_{\mu=1}^n k_{\mu} = \rho, (k_{\mu} \geq 0; \rho = \overline{1, \mathcal{G}}). \quad (5.2.8)$$

В этом случае достижение цели управления обеспечивается при одновременном выполнении условий

$$|M[\prod_{\mu=1}^n \varepsilon_{\mu}^{k_{\mu}}(t)]| \rightarrow \min, \sum_{\mu=1}^n k_{\mu} = \rho, (k_{\mu} \geq 0; \rho = \overline{1, \mathcal{G}}). \quad (5.2.9)$$

На основании условий (5.2.6) и (5.2.9) приходим к выводу, что задача оптимального управления технологическими процессами должна ставиться и решаться как задача многокритериальной оптимизации, т. к. в условиях оптимальности управления (5.2.6) и (5.2.9) используется не один, а несколько критериев (5.2.7) и (5.2.9).

5.3. Многокритериальный оптимум управления для односвязных линейных стационарных систем

Выполнить условия (5.2.6) на практике оказывается весьма затруднительным, хотя бы по причине требуемого для этого объема информации о статистических характеристиках ошибки управления $\varepsilon(t)$. Поэтому необходимо определить критерии, которые было бы проще контролировать в процессе управления, чем статистические моменты величины $\varepsilon(t)$.

Покажем, что для устойчивых систем выполняются следующие неравенства:

$$\left| M[\varepsilon^k] \right| \leq \frac{C_k}{\alpha_0^k}, \quad k = \overline{1, \mathcal{G}}, \quad (5.3.1)$$

где C_k – некоторые константы, а α_0 – свободный член характеристического уравнения замкнутой системы (3.1.23).

Для односвязных стационарных систем ошибка управления $\varepsilon(t)$ определяется выражением

$$\varepsilon(t) = g(t - t_0)\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t g(t - \tau)\lambda(\tau)d\tau, \quad (5.3.2)$$

где $g(t - \tau)$ – импульсная переходная характеристика стационарной односвязной замкнутой системы, отвечающая каналу передачи $\lambda(t) \rightarrow \varepsilon(t)$; $\lambda(\tau)$ – возмущающее воздействие; t_0 – момент времени, условно принимаемый за начальный.

Поскольку автоматические системы управления функционируют в течение весьма длительного времени, то в случае устойчивых систем начальные условия вскоре «забываются», т.е. не оказывают заметного влияния на качество их работы. В таком случае можно положить $t_0 \rightarrow -\infty$. Тогда принимая во внимание, что для устойчивых систем

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} g(t - t_0) = 0,$$

выражение (5.3.2) представим в виде

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)\lambda(\tau)d\tau. \quad (5.3.3)$$

Воспользовавшись также известным свойством импульсной переходной характеристики

$$g(t - \tau) = 0, \quad \tau > t,$$

выражение (5.3.3) представим в виде

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau)\lambda(\tau)d\tau. \quad (5.3.4)$$

Рассмотрим случай неастигматических систем. Согласно выражению (5.3.4) имеем

$$M[\varepsilon^k(t)] = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_k \prod_{h=1}^k g(t - \tau_h) M \left[\prod_{h=1}^k \lambda(\tau_h) \right] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k. \quad (5.3.5)$$

Примем во внимание, что значения статистических характеристик реальных возмущающих воздействий всегда ограничены сверху, т. е. существуют постоянные величины σ_k , $k = \overline{1, \mathcal{G}}$, для которых выполняются ограничения

$$\left| M \left[\prod_{h=1}^k \lambda(\tau_h) \right] \right| \leq \sigma_k, \quad |\tau_h| < \infty, \quad (h = \overline{1, k}; k = \overline{1, \mathcal{G}}). \quad (5.3.6)$$

С учетом выражений (5.3.5) и ограничений (5.3.6) получим

$$\left| M[\varepsilon^k(t)] \right| \leq \sigma_k \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-\tau)| d\tau \right)^k, \quad k = \overline{1, \mathcal{G}}. \quad (5.3.7)$$

Для устойчивых систем управления выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-\tau)| d\tau \leq R, \quad (5.3.8)$$

где R – постоянная величина.

Поскольку

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-\tau)| d\tau,$$

то согласно (5.3.8) существует положительная постоянная величина $b \geq 1$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-\tau)| d\tau = b \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) d\tau \right|, \quad (5.3.9)$$

т. к.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) d\tau \neq 0. \quad (5.3.10)$$

Для импульсной переходной характеристики имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) d\tau = W(i0), \quad (5.3.11)$$

где $W(i\omega)$ – КЧХ замкнутой системы, соответствующая каналу передачи $\lambda(t) \rightarrow \varepsilon(t)$; ω – частота. Ввиду того, что для нестатических систем

$$W(i0) \neq 0,$$

с учетом равенства (5.3.11) приходим к выводу о выполнении требования (5.3.10).

В таком случае согласно (5.3.7), (5.3.9) и (5.3.11) имеем

$$|M[\varepsilon^k(t)]| \leq \sigma_k b^k |W(i0)|^k, \quad k = \overline{1, \mathcal{G}}. \quad (5.3.12)$$

Поскольку для линейных стационарных систем имеют место равенства

$$W(i0) = \frac{W_0}{\alpha_0} \neq 0,$$

где W_0 – вещественная постоянная, то неравенства (5.3.12) принимают вид

$$|M[\varepsilon^k(t)]| \leq \frac{\sigma_k (|W_0|b)^k}{\alpha_0^k}, \quad k = \overline{1, \mathcal{G}}. \quad (5.3.13)$$

Полагая в (5.3.13), что

$$C_k = \sigma_k (|W_0|b)^k, \quad k = \overline{1, \mathcal{G}},$$

установим справедливость мажорирующих оценок (5.3.1).

Поскольку на практике весьма часто используются астатические системы, то желательно распространить полученные результаты и на этот случай. Для этого проинтегрируем правую часть выражения (5.3.3) по частям. В результате получим

$$\varepsilon(t) = \lambda(+\infty) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\tau} g(t-\zeta) d\zeta \right] \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (5.3.14)$$

Ввиду того, что для астатических систем имеет место равенство

$$W(i0) = 0 \quad (5.3.15)$$

и величина λ ограничена, то выражение (5.3.14) с учетом (5.3.11) и (5.3.15) принимает вид

$$\varepsilon(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\tau} g(t-\zeta) d\zeta \right] \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (5.3.16)$$

Воспользовавшись равенством (5.3.16) выражение для вероятностных моментов ошибки управления $\varepsilon(t)$ представим в виде

$$M[\varepsilon^k(t)] = (-1)^k \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_k \prod_{h=1}^k f(t, \tau_h) M \times \quad (5.3.17)$$

$$\times \left[\prod_{h=1}^k \frac{d\lambda(\tau_h)}{d\tau_h} \right] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k,$$

где

$$f(t, \tau_h) = \int_{-\infty}^{\tau_h} g(t - \zeta) d\zeta. \quad (5.3.18)$$

Предполагая ограниченность статистических характеристик возмущающего воздействия $\lambda(t)$, установим, что существуют постоянные величины ν_k , $k = \overline{1, \mathcal{G}}$, для которых выполняются ограничения

$$\left| M \left[\prod_{h=1}^k \frac{d\lambda(\tau_h)}{d\tau_h} \right] \right| \leq \nu_k, \quad |\tau_h| < \infty, \quad (h = \overline{1, k}; k = \overline{1, \mathcal{G}}). \quad (5.3.19)$$

Принимая во внимание выражения (5.3.17) и ограничения (5.3.19) приходим к следующим неравенствам:

$$\left| M[\varepsilon^k(t)] \right| \leq \nu_k \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_k \prod_{h=1}^k |f(t, \tau_h)| d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k. \quad (5.3.20)$$

В случае устойчивых систем имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t, \tau)| d\tau \leq V, \quad (5.3.21)$$

где V – постоянная величина. Согласно неравенствам

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t, \tau)| d\tau$$

и (5.3.21) существует положительная постоянная величина $a \geq 1$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t, \tau)| d\tau = a \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \tau) d\tau \right|, \quad (5.3.22)$$

если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \tau) d\tau \neq 0. \quad (5.3.23)$$

Установим справедливость следующих соотношений:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \tau) d\tau = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} W(-i\omega) = -\frac{W_0}{\alpha_0} \neq 0, \quad (5.3.24)$$

где W_0 – вещественная постоянная. Для этого левую часть (5.3.24) представим как преобразование Фурье

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} f(t, \tau) d\tau, \quad (5.3.25)$$

т.к. при $\omega = 0$ имеем

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \tau) d\tau. \quad (5.3.26)$$

Преобразовав (5.3.25) к виду

$$\Phi(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \tau) d e^{-i\omega\tau}, \quad (5.3.27)$$

а затем, проинтегрировав (5.3.27) по частям, получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \tau) d e^{-i\omega\tau} &= -\frac{1}{i\omega} [f(t, \tau_h) e^{-i\omega\tau} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \frac{df(t, \tau)}{d\tau} d\tau]. \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

Продифференцировав равенство (5.3.28) с учетом выражения (5.3.18) имеем

$$\frac{df(t, \tau)}{d\tau} = g(t - \tau). \quad (5.3.29)$$

Примем также во внимание, что

$$f(t, \tau) e^{-i\omega\tau} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \quad (5.3.30)$$

т. к. согласно (5.3.18) выполняется равенство

$$f(t, -\infty) = 0,$$

а, воспользовавшись равенствами (5.3.18), (5.3.11) и (5.3.15), получим

$$f(t, +\infty) = W(i0) = 0.$$

В результате подстановки (5.3.29) и (5.3.30) в выражение (5.3.28), его вид весьма упроститься

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} g(t-\tau) d\tau = \frac{e^{-i\omega t + \infty}}{i\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)} g(t-\tau) d\tau = \\ &= \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} W(-i\omega). \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

Устремляя $\omega \rightarrow 0$ в (5.3.31) и учитывая при этом наличие у замкнутой системы астатизма, убеждаемся, что в пределе выполняется равенство (5.3.24), а также соотношение (5.3.23), т.к. $W_0 \neq 0$.

Тогда сначала подставив (5.3.24) в (5.3.22), а затем полученное выражение (5.3.20), в результате имеем

$$|M[\varepsilon^k(t)]| \leq \frac{\nu_k (|W_0| a)^k}{\alpha_0^k}, \quad k = \overline{1, 9}. \quad (5.3.32)$$

Полагая в (5.3.32), что

$$C_k = \nu_k (|W_0| a)^k, \quad k = \overline{1, 9},$$

установим справедливость мажорирующих оценок (5.3.1) и в случае астатических систем.

Таким образом, для односвязных линейных стационарных систем можно считать установленной истинность оценок (5.3.1).

На основании этих оценок можно сделать весьма важный вывод, что все критерии (5.2.7) приближаются к своим минимальным значениям одновременно при максимизации величины α_0 , т. е. при выполнении требования

$$\alpha_0 \rightarrow \max. \quad (5.3.33)$$

Следовательно, выполнение условия (5.3.33) способствует достижению многокритериального оптимума критериев (5.2.7), выраженного в виде условий (5.2.6).

Таким образом, задача оптимального управления технологическими процессами снова приняла форму оптимизации на основе единственного критерия α_0 , но уже на качественно ином уровне, т. к. в отличие от \mathcal{E} этот критерий не зависит от многочисленных и трудно контролируемых факторов, а определяется лишь динамическими характеристиками замкнутой системы.

Вместе с тем, приближение к многокритериальному оптимуму управления (5.2.6) способствует оптимизации исходного критерия \mathcal{E} . Поэтому можно утверждать, что выполнение условия (5.3.33) способствует достижению цели управления технологическими процессами в условиях *статистической неопределенности*, т.е. при неполноте или отсутствии информации о статистических характеристиках возмущающих воздействий.

5.4. Многокритериальный оптимум управления для многосвязных линейных стационарных систем

Для многосвязных замкнутых стационарных систем n -мерный вектор ошибки управления $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ задается выражением

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{G}(t - t_0)\boldsymbol{\varepsilon}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{G}(t - \tau)\boldsymbol{\lambda}(\tau)d\tau, \quad (5.4.1)$$

где $\mathbf{G}(t - \tau)$ – матрица импульсных переходных характеристик замкнутой системы размерности $(n \times n)$; $\boldsymbol{\lambda}(\tau)$ – n -мерный вектор возмущающих воздействий.

Для устойчивых систем в установившихся режимах работы выражение (5.4.1) принимает вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t - \tau)\boldsymbol{\lambda}(\tau)d\tau. \quad (5.4.2)$$

Согласно (5.4.2) значения координат $\varepsilon_l(t)$, $l = \overline{1, n}$ вектора $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon_l(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{h=1}^n G_{lh}(t - \tau)\lambda_h(\tau)d\tau; \quad l = \overline{1, n}, \quad (5.4.3)$$

где $G_{lh}(t - \tau)$ – элементы матрицы $\mathbf{G}(t - \tau)$; $\lambda_h(\tau)$ – координаты вектора $\boldsymbol{\lambda}(\tau)$.

С учетом выражений (5.4.4) критерии (5.2.8) для многосвязных систем представимы в виде

$$M\left[\prod_{\mu=1}^n \varepsilon_{\mu}^{k_{\mu}}(t)\right] = M\left\{\prod_{\mu=1}^n \left[\sum_{h=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mu h}(t-\tau) \lambda_h(\tau) d\tau\right]^{k_{\mu}}\right\}. \quad (5.4.4)$$

Принимая во внимание выражение (5.4.4), а также неравенство

$$\begin{aligned} & \left| M\left\{\prod_{\mu=1}^n \left[\sum_{h=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mu h}(t-\tau) \lambda_h(\tau) d\tau\right]^{k_{\mu}}\right\} \right| \leq \\ & \leq \prod_{\mu=1}^n \left[\sum_{h=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{\mu h}(t-\tau)| |M[\lambda_h(\tau)]| d\tau\right]^{k_{\mu}} \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

и вытекающие из ограниченности статистических характеристик вектора $\lambda(\tau)$ соотношения

$$|M[\lambda_h(\tau)]| \leq \beta_h, \quad h = \overline{1, n}, \quad (5.4.6)$$

где $\beta_h, h = \overline{1, n}$ – постоянные величины, получим

$$\left| M\left[\prod_{\mu=1}^n \varepsilon_{\mu}^{k_{\mu}}(t)\right] \right| \leq \prod_{\mu=1}^n \left[\sum_{h=1}^n \beta_h \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{\mu h}(t-\tau)| d\tau\right]^{k_{\mu}}. \quad (5.4.7)$$

Предполагая у системы отсутствие астатизма, установим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G_{\mu h}(t-\tau)| d\tau = z_{\mu h} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mu h}(t-\tau) d\tau \right| = z_{\mu h} |W_{\mu h}(i0)|, \quad (5.4.8)$$

где $z_{\mu h} \geq 1$ – постоянные величины, а $W_{\mu h}(i\omega)$ – КЧХ замкнутой системы, соответствующая каналу передачи $\lambda_h(t) \rightarrow \varepsilon_{\mu}(t)$.

Поскольку

$$\sum_{\mu=1}^n k_{\mu} = \rho; \quad |W_{\mu h}(i0)| = \frac{W_{\mu h}^*}{\alpha_0},$$

где $W_{\mu h}^*$ – положительная вещественная постоянная, то с учетом соотношений (5.4.7) и (5.4.8) имеем

$$\left| M \left[\prod_{\mu=1}^n \varepsilon_{\mu}^{k_{\mu}}(t) \right] \right| \leq \frac{\prod_{\mu=1}^n \left(\sum_{h=1}^n \beta_h z_{\mu h} W_{\mu h}^* \right)^{k_{\mu}}}{\alpha_0^{\rho}}. \quad (5.4.9)$$

Полагая

$$C_{\rho} = \prod_{\mu=1}^n \left(\sum_{h=1}^n \beta_h z_{\mu h} W_{\mu h}^* \right)^{k_{\mu}},$$

мажорирующие оценки критериев (5.2.8) представим в аналогичном (5.3.1) виде

$$\left| M \left[\prod_{\mu=1}^n \varepsilon_{\mu}^{k_{\mu}}(t) \right] \right| \leq \frac{C_{\rho}}{\alpha_0^{\rho}}. \quad (5.4.10)$$

Для астатических многосвязных систем можно получить оценки аналогичные (5.4.10), если учесть замечания, сделанные в предыдущем параграфе при анализе односвязных астатических систем.

Таким образом, основываясь на мажорирующих оценках (5.4.10) для критериев (5.2.8), приходим к выводу о целесообразности использования величины α_0 в качестве критерия управления для многосвязных линейных стационарных систем, т.к. выполнение требования (5.3.33) способствует выполнению условий многокритериального оптимума (5.2.9) в условиях статистической неопределенности.

5.5. Критерии качества управления энергоемкими технологическими процессами

Выше были рассмотрены вопросы выбора и обоснования критериев качества управления в общем случае. Однако при управлении, например, режимами работы котлов об интенсивности экономических потерь $f(\varepsilon)$ имеется более полная информация, учет которой позволяет существенно упростить решение задачи управления.

Получим выражение для величины \mathcal{E} . Пусть $\xi_{\text{КТ}}$ – КПД котла, тогда при управлении режимом его работы необходимо обеспечить поддержание заданного значения КПД $\xi_{\text{КТ}}^{\text{зд}}$. Следовательно, значение ошибки управления ε определяется выражением

$$\varepsilon = \xi_{\text{КТ}}^{\text{ЗД}} - \xi_{\text{КТ}}.$$

С целью уменьшения экономических потерь необходимо поддерживать максимальное значение $\xi_{\text{КТ}}$, т. е. должно выполняться равенство

$$\xi_{\text{КТ}}^{\text{ЗД}} = \xi_{\text{КТ}}^{\text{max}}.$$

В таком случае функция экономических потерь принимает вид

$$f(\varepsilon) = X_T R_T \left(1 - \frac{\xi_{\text{КТ}}^{\text{max}} - \varepsilon}{100\%} \right),$$

где X_T – соответственно стоимость единицы массы или объема сжигаемого в топке котла топлива, а R_T – расход топлива в единицу времени.

С учетом сделанных замечаний значение критерия \mathcal{E} можно вычислить по формуле

$$\mathcal{E} = \frac{X_T R_T \xi_{\text{КТ}}^{\text{max}}}{100\%} M \left[1 - \frac{\xi_{\text{КТ}}}{\xi_{\text{КТ}}^{\text{max}}} \right].$$

Поскольку

$$\xi_{\text{КТ}} \leq \xi_{\text{КТ}}^{\text{max}},$$

то минимум критерия \mathcal{E} достигается тогда и только тогда, когда максимально математическое ожидание КПД котла, т. е. выполняется требование

$$M[\xi_{\text{КТ}}] = \text{max}.$$

Следовательно, математическое ожидание КПД котла является обоснованным критерием качества управления режимами его работы, т. е. задача оптимального управления режимами работы котлов сводится к оптимизации единственного критерия $M[\xi_{\text{КТ}}]$.

Рассмотрим также задачу управления температурными режимами теплиц.

Исследования показали, что для теплиц зависимость урожайности сельскохозяйственных культур Y от интенсивности солнечной радиации E и температуры внутренней воздушной среды теплицы T определяется выражением

$$Y(T, E) = \alpha T^2 + \beta T + \gamma TE + \chi E + \vartheta, \quad (5.5.1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \chi$ и ϑ – неизвестные постоянные коэффициенты.

Поскольку

$$\varepsilon = T_{зд} - T, \quad (5.5.2)$$

то имеет место равенство

$$f(\varepsilon) = zY(T, E) = zY(T_{зд} - \varepsilon, E), \quad (5.5.3)$$

где z – цена сельскохозяйственной продукции; $T_{зд}$ – заданное в соответствии с агротребованиями значение T .

С учетом выражений (5.5.1) – (5.5.3) получим

$$\mathcal{E} = z\{-\alpha M[\varepsilon^2] + (2\alpha T_{зд} + \beta)M[\varepsilon] + \gamma M[E\varepsilon]\}. \quad (5.5.4)$$

Поскольку величина \mathcal{E} неотрицательна, то, исходя из выражения (5.5.4), приходим к неравенству

$$\mathcal{E} = |\mathcal{E}| \leq z\{|\alpha| M[\varepsilon^2] + |2\alpha T_{зд} + \beta| |M[\varepsilon]| + |\gamma| |M[E\varepsilon]|\}. \quad (5.5.5)$$

Кроме того, выполняется следующее неравенство:

$$|M[E\varepsilon]| \leq \sqrt{M[E^2]M[\varepsilon^2]}. \quad (5.5.6)$$

В результате с учетом неравенств (5.5.5) и (5.5.6) имеем

$$\mathcal{E} \leq z\{|\alpha| M[\varepsilon^2] + |2\alpha T_{зд} + \beta| |M[\varepsilon]| + |\gamma| \sqrt{M[E^2]M[\varepsilon^2]}\}. \quad (5.5.7)$$

На основании неравенства (5.5.7) приходим к выводу, что минимум мажорирующей оценки величины \mathcal{E} достигается при выполнении условий

$$|M[\varepsilon]| \rightarrow \min; \quad (5.5.8)$$

$$|M[\varepsilon^2]| \rightarrow \min. \quad (5.5.9)$$

Поскольку выполнение условий (5.5.8) и (5.5.9) способствует выполнению требования (5.2.2), то величины $|M[\varepsilon]|$ и $M[\varepsilon^2]$ целесообразно использовать как критерии качества управления температурными режимами теплиц.

5.6. Тест 5

1. Критерий качества управления позволяет численно оценить успешность ... управления.

- а) решения задачи;
- б) выбора технических средств;
- в) выбора программных средств.

2. Наиболее употребительным и простым критерием качества управления является средний квадрат

- а) управляющих воздействий;
- б) сигнала задания;
- в) ошибки системы.

3. Средняя интенсивность экономических потерь, зависящих лишь от точности управления технологическим процессом, стремиться к нулю при неограниченном возрастании

а) свободного члена характеристического уравнения замкнутой системы;

- б) модуля ошибки управления;
- в) мощности управляющих воздействий

4. При управлении режимами работы котлов экономические потери минимальны, если

- а) максимален средний КПД котла;
- б) максимален расход топлива в единицу времени;
- в) расход топлива в единицу времени минимален.

5. При управлении температурными режимами теплиц минимум экономических потерь достигается при

а) одновременной минимизации модуля математического ожидания ошибки управления и ее среднего квадрата;

- б) минимизации среднего квадрата ошибки управления;
- в) модуля математического ожидания ошибки управления.

ГЛАВА VI

УСЛОВИЯ РОБАСТНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Требования к АЧХ замкнутых систем в условиях статистической неопределенности

Рассмотрим устойчивую линейную стационарную систему, на которую действуют возмущения $\lambda(t)$. В линейных стационарных системах, независимо от канала передачи, по которому действует возмущение $\lambda(t)$, его можно привести ко входу любого, наперед заданного канала системы.

Предположим, что система односвязна и возмущение $\lambda(t)$ действует так, как показано на рисунке 6.1.

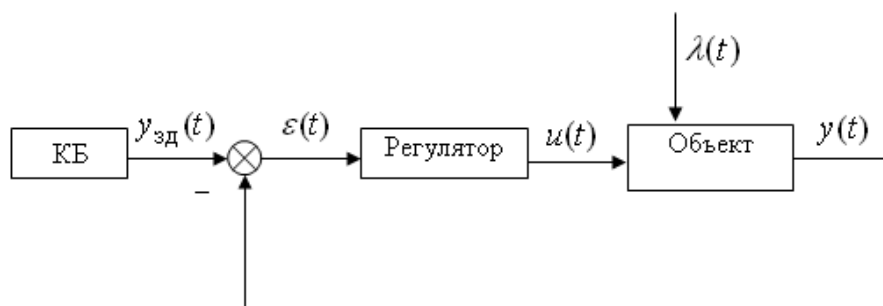


Рисунок 6.1 – Устойчивая линейная стационарная система

Задача состоит в том, чтобы определить эквивалентное возмущение $\lambda_{\varepsilon}(t)$, приложенное ко входу системы (рисунок 6.2), и оказывающее на ошибку управления $\varepsilon(t)$ такое же действие, как и возмущение $\lambda(t)$.

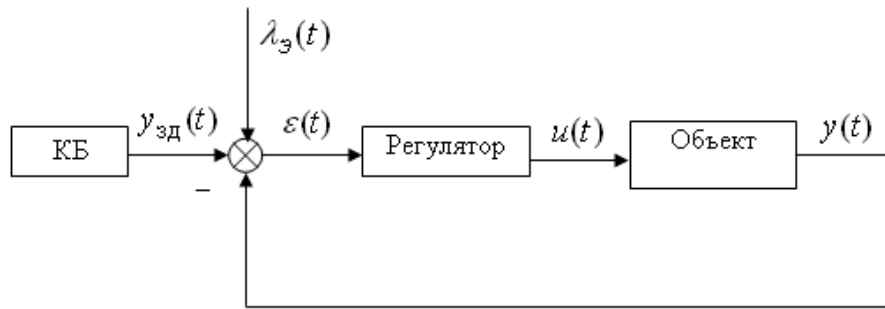


Рисунок 6.2 – Устойчивая линейная стационарная система

Для решения поставленной задачи установим взаимосвязь между величинами $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$, воспользовавшись следующими уравнениями:

$$y(t) = W_{uy}^{об}(p)u(t) + W_{\lambda y}^{об}(p)\lambda(t); \quad (6.1.1)$$

$$\varepsilon(t) = y_{зд}(t) - y(t); \quad (6.1.2)$$

$$u(t) = W_{рег}(p)\varepsilon(t), \quad (6.1.3)$$

где $W_{uy}^{об}(p)$ и $W_{\lambda y}^{об}(p)$ – операторы объекта, соответствующие каналам передачи воздействий $u(t) \rightarrow y(t)$ и $\lambda(t) \rightarrow y(t)$; $W_{рег}(p)$ – оператор регулятора; p – оператор дифференцирования по времени.

В результате получим

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{1 + W_{pc}(p)} \right] y_{зд}(t) - \left[\frac{W_{\lambda y}^{об}(p)}{1 + W_{pc}(p)} \right] \lambda(t), \quad (6.1.4)$$

где $W_{pc}(p)$ – оператор разомкнутой системы, причем

$$W_{pc}(p) = W_{uy}^{об}(p)W_{рег}(p).$$

Теперь необходимо установить взаимосвязь между величинами $\lambda_э(t)$ и $\varepsilon(t)$. С этой целью в системе уравнений (6.1.1) – (6.1.3) произведем замену, вместо уравнений (6.1.1) и (6.1.2) будем использовать следующие уравнения:

$$y(t) = W_{uy}^{об}(p)u(t); \quad (6.1.5)$$

$$\varepsilon(t) = y_{зд}(t) + \lambda_э(t) - y(t). \quad (6.1.6)$$

Согласно (6.1.3), (6.1.5) и (6.1.6) имеем

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{1 + W_{pc}(p)} \right] y_{зд}(t) + \left[\frac{1}{1 + W_{pc}(p)} \right] \lambda(t). \quad (6.1.7)$$

Поскольку по условию поставленной задачи возмущение $\lambda_y(t)$ выбирается таким образом, чтобы оказываемое им на ошибку управления $\varepsilon(t)$ действие было таким же, как действие $\lambda(t)$, то левые части равенств (6.1.4) и (6.1.7) должны совпадать. Тогда приравняв их, получим искомое выражение

$$\lambda_y(t) = -W_{\lambda y}^{об}(p) \lambda(t). \quad (6.1.8)$$

Следовательно, при анализе характеристик ошибки управления вместо возмущения $\lambda(t)$ можно использовать, приведенное к входу системы эквивалентное возмущение $\lambda_y(t)$, заданное выражением (6.1.8).

Поэтому без ущерба для общности рассмотрения можно считать, что стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ поступает на вход односвязной линейной стационарной системы, как показано на рис. 6.2. В таком случае дисперсию ошибки управления D_ε можно определить, воспользовавшись выражением (4.4.23). В результате имеем

$$D_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)|^2 S_\lambda(\omega) d\omega, \quad (6.1.9)$$

где $W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)$ – КЧХ канала передачи замкнутой системы $\lambda(t) \rightarrow \varepsilon(t)$; $S_\lambda(\omega)$ – спектральная плотность возмущающего воздействия $\lambda(t)$.

Поставим задачу, установить требования к АЧХ замкнутой системы $|W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)|$, выполнение которых обеспечивало бы приближение дисперсии D_ε к минимуму в условиях статистической неопределенности, когда вид спектральной плотности $S_\lambda(\omega)$ неизвестен, а имеется информация лишь о ее частоте среза $\omega_c > 0$, при которой выполняются следующие неравенства:

$$S_\lambda(\omega) \ll 1, \quad |\omega| > \omega_c. \quad (6.1.10)$$

Фактически неравенство (6.1.10) означает, что функция $S_\lambda(\omega)$ принимает пренебрежимо малые значения при $|\omega| > \omega_c$.

Поскольку величины $|W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)|$ и $S_\lambda(\omega)$ неотрицательны, т.е. при любых значениях частоты ω выполняются неравенства $|W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)| \geq 0$ и $S_\lambda(\omega) \geq 0$, то в условиях статистической неопределенности, когда аналитическое выражение для спектральной плотности $S_\lambda(\omega)$ отсутствует, выполнение требования

$$D_\varepsilon = \min \quad (6.1.11)$$

можно обеспечить, если

$$|W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)| = \min, \quad |\omega| < \omega_c. \quad (6.1.12)$$

Действительно, с учетом соотношения (6.1.10) выражение (6.1.9) принимает вид

$$D_\varepsilon \approx \int_{-\omega_c}^{\omega_c} |W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)|^2 S_\lambda(\omega) d\omega, \quad (6.1.13)$$

если значения величины $|W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)|^2$ при $|\omega| > \omega_c$ не слишком велики, т.е. выполняются соотношения

$$|W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)|^2 S_\lambda(\omega) \ll 1, \quad |\omega| > \omega_c.$$

В таком случае выполнение соотношений (6.1.12) минимизирует подынтегральное выражение в приближенном равенстве (6.1.13) на всем интервале интегрирования $|\omega| < \omega_c$, что обеспечивает выполнение требования (6.1.11) независимо от того, какие значения принимает спектральная плотность $S_\lambda(\omega)$ на этом интервале частот.

Отметим, что, в отличие от (6.1.12), требования

$$|W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)| = \min, \quad |\omega| < \infty$$

невыполнимы, т. к. согласно теоремам 3.1. и 3.2 минимизация значений АЧХ замкнутой системы $|W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)|$ в окрестности частоты $\omega = 0$ неизбежно приводит к возрастанию ее значений на более высоких частотах.

Однако далеко не всегда возмущающие воздействия достаточно хорошо описываются в рамках теории стационарных случайных процессов. Поэтому целесообразно рассмотреть и более общий слу-

чай, когда возмущение $\lambda(t)$ относится к нестационарным случайным процессам.

Поскольку относительно рассматриваемой системы предполагается, что она устойчивая, односвязная, линейная и стационарная, то в установившемся режиме работы величины $\varepsilon(t)$ и $\lambda(t)$ связаны соотношением (5.3.4). Применяв к нему преобразование Фурье, получим

$$\tilde{\varepsilon}(i\omega) = \tilde{g}(i\omega)\tilde{\lambda}(i\omega), \quad (6.1.14)$$

где $\tilde{\varepsilon}(i\omega)$, $\tilde{g}(i\omega)$ и $\tilde{\lambda}(i\omega)$ изображения по Фурье величин $\varepsilon(t)$, $g(t)$ и $\lambda(t)$ соответственно.

Принимая во внимание, что

$$\tilde{g}(i\omega) = W_{\lambda\varepsilon}(i\omega),$$

и применяя обратное преобразование Фурье к равенству (6.1.14), имеем

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} W_{\lambda\varepsilon}(i\omega) \tilde{\lambda}(i\omega) d\omega. \quad (6.1.15)$$

С учетом выражения (6.1.15) критерии (6.3.7) принимают вид

$$\begin{aligned} |M[\varepsilon^k(t)]| = & \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_k e^{it \sum_{h=1}^k \omega_h} \prod_{h=1}^k W_{\lambda\varepsilon}(i\omega_h) \times \\ & \times M\left[\prod_{h=1}^k \tilde{\lambda}(i\omega_h)\right] d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_k, \quad k = \overline{1, \mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

Воспользовавшись равенствами (6.1.16) для критериев (6.3.7) получим мажорирующие оценки

$$\begin{aligned} |M[\varepsilon^k(t)]| \leq & \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_k \prod_{h=1}^k |W_{\lambda\varepsilon}(i\omega_h)| \times \\ & \times |M[\prod_{h=1}^k \tilde{\lambda}(i\omega_h)]| d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_k, \quad k = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

Исходя из оценок (6.1.17) можно сделать вывод, что для их минимизации необходимо соответствующим выбором структуры и параметров настройки управляющего устройства минимизировать АЧХ замкнутой системы $|W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)|$ по возможности в наиболее широком диапазоне частот, т.е. обеспечить выполнение следующего требования:

$$|W_{\lambda\varepsilon}(i\omega)| = \min, \quad |\omega| \leq \omega_{zp}, \quad (6.1.18)$$

где ω_{zp} – некоторая граничная частота.

Как уже указывалось выше, согласно теоремам 3.1 и 3.2 граничная частота ω_{zp} не может быть сделана сколь угодно большой, т.к. уменьшение АЧХ замкнутой линейной стационарной системы в области низких частот, приводит к возрастанию ее значений в высокочастотной области. Поэтому величина ω_{zp} имеет вполне определенное конечное значение.

Обобщим полученные результаты на случай многосвязных линейных стационарных систем. Без потери общности можно считать, что возмущающие воздействия приведены к входам системы. Предполагая также, что система управления устойчива и функционирует в установившемся режиме работы, установим, что координаты векторов $\varepsilon(t)$ и $\lambda(t)$ связаны соотношениями (5.4.3). Применив к ним преобразование Фурье, получим

$$\tilde{\varepsilon}_l(i\omega) = \sum_{h=1}^n \tilde{G}_{lh}(i\omega) \tilde{\lambda}_h(i\omega), \quad l = \overline{1, n}, \quad (6.1.19)$$

где $\tilde{\varepsilon}_l(i\omega)$, $\tilde{G}_{lh}(i\omega)$ и $\tilde{\lambda}_h(i\omega)$ – изображения по Фурье величин $\varepsilon_l(t)$, $G_{lh}(t)$ и $\lambda_h(t)$ соответственно. Примем во внимание, что

$$\tilde{G}_{lh}(i\omega) = W_{lh}^{\lambda\varepsilon}(i\omega), \quad (6.1.20)$$

где $W_{lh}^{\lambda\varepsilon}(i\omega)$ – КЧХ замкнутой системы, соответствующая каналу передачи $\lambda_h(t) \rightarrow \varepsilon_l(t)$. Тогда, применив к равенствам (6.1.19) обратное преобразование Фурье с учетом (6.1.20) имеем

$$\varepsilon_l(t) = \sum_{h=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} W_{lh}^{\lambda\varepsilon}(i\omega) \tilde{\lambda}_h(i\omega) d\omega, \quad l = \overline{1, n}. \quad (6.1.21)$$

Исходя из равенств (6.1.21) для критериев управления многосвязными системами (4.2.8) получим следующие оценки:

$$\left| M \left[\prod_{l=1}^n \varepsilon_l^{k_l}(t) \right] \right| \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{\rho} \prod_{l=1}^n \prod_{j_l=1}^{k_l} \sum_{h=1}^n |W_{lh}^{\lambda \varepsilon}(i\omega_{j_l})| \times$$

$$\times \left| M \left[\lambda_h(i\omega_{j_l}) \right] \right| \prod_{l=1}^n \prod_{j_l=1}^{k_l} d\omega_{j_l}; \quad \rho = \sum_{l=1}^n k_l, \quad \rho = \overline{1, \vartheta}.$$
(6.1.22)

Оценки (6.1.22), также как и в случае односвязных систем, стремятся к своим минимальным значениям при выполнении требований

$$\left| W_{lh}^{\lambda \varepsilon}(i\omega) \right| = \min; \quad l, h = \overline{1, n}, \quad |\omega| < \omega_{2p},$$
(6.1.23)

т. е. при минимизации величин $\left| W_{lh}^{\lambda \varepsilon}(i\omega) \right|$ в наиболее широком интервале частот.

Отметим, что в рассматриваемом случае задача усложняется по сравнению с односвязными системами, т.к. условия (6.1.23) необходимо выполнить одновременно для нескольких АЧХ замкнутой системы.

Таким образом, в результате проведенного анализа были установлены требования к АЧХ замкнутых линейных стационарных систем, выполнение которых в условиях статистической неопределенности обеспечивает приближение критериев (6.3.7) и (6.3.8) к минимальным значениям. Наряду с этими требованиями ранее было установлено требование (5.3.33), выполнение которого также способствует минимизации указанных критериев. Поэтому возникает задача по установлению связи между требованием (5.3.33) и требованиями (6.1.18) или (6.1.23). Кроме того, желательно получить оценки величины $\omega_{гр}$.

Решению указанных проблем посвящены следующие параграфы данной главы.

6.2. Инвариантные системы управления

Влияние некоторых возмущений на ошибку управления можно устранить подходящим выбором параметров системы.

Действительно, рассмотрим замкнутую линейную стационарную систему

$$d\boldsymbol{\varepsilon}(t)/dt = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}(t); \quad (6.2.1)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad (6.2.2)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ – n -вектор ошибки управления; \mathbf{A} и \mathbf{B} – стационарные матрицы размерности $(n \times n)$ и $(n \times r)$ соответственно; $\mathbf{u}(t)$ – r -вектор управляющих воздействий; $\boldsymbol{\lambda}(t)$ – n -вектор возмущающих воздействий; \mathbf{P} – матрица обратной связи размерности $(r \times n)$; n и r – целые положительные числа, причем $n \geq r$.

Подставив уравнение обратной связи (6.2.2) в уравнение движения объекта (6.2.1) получим

$$d\boldsymbol{\varepsilon}(t)/dt = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{P}) \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \boldsymbol{\lambda}(t). \quad (6.2.3)$$

Применив к дифференциальному уравнению (6.2.3) преобразование Лапласа по времени, получим алгебраическое уравнение для изображений

$$s\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{P})\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(s), \quad (6.2.4)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)$ и $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(s)$ – изображения по Лапласу величин $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и $\boldsymbol{\lambda}(t)$ соответственно; s – комплексная переменная.

Воспользовавшись уравнением (6.2.4) установим взаимосвязь векторов $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)$ и $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(s)$, представив ее в следующем виде:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P})^{-1} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(s), \quad (6.2.5)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица размерности $(n \times n)$.

Обозначив

$\mathbf{W}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P})^{-1}$, запишем выражение (6.2.5) в скалярном виде

$$\tilde{\varepsilon}_k(s) = \sum_{h=1}^n W_{kh}(s) \tilde{\lambda}_h(s), \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.2.7)$$

где $W_{kh}(s)$ – элементы матрицы $\mathbf{W}(s)$; $\tilde{\varepsilon}_k(s)$ и $\tilde{\lambda}_h(s)$ – координаты векторов $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)$ и $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(s)$.

Предположим, что желательно устранить влияние координаты $\tilde{\lambda}_l(s)$ на координату $\tilde{\varepsilon}_j(s)$. Согласно выражениям (6.2.7) этого можно добиться, если обеспечить выполнение следующего тождества:

$$W_{jl}(s) \equiv 0. \quad (6.2.8)$$

Поскольку

$$W_{jl}(s) = (-1)^{j+l} M_{jl}(s) / \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BP}), \quad (6.2.9)$$

где $M_{jl}(s)$ – минор матрицы $s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BP}$, то из условия (6.2.8) получим

$$M_{jl}(s) \equiv 0. \quad (6.2.10)$$

Отметим, что при отсутствии влияния $\tilde{\lambda}_l(s)$ на $\tilde{\varepsilon}_j(s)$, величина $\lambda_l(t)$ также не влияет на $\varepsilon_j(t)$, т.к. между изображениями $\tilde{\varepsilon}_j(s)$, $\tilde{\lambda}_l(s)$ и их оригиналами $\varepsilon_j(t)$, $\lambda_l(t)$ существует взаимосвязь, устанавливаемая обратным преобразованием Лапласа.

Система, для которой выполняется тождество (6.2.10), т.е. координата $\lambda_l(t)$ вектора $\lambda(t)$ не оказывает никакого влияния на координату $\varepsilon_j(t)$ вектора $\varepsilon(t)$ называется *инвариантной* со стороны координаты $\varepsilon_j(t)$ вектора ошибки управления $\varepsilon(t)$ по отношению к возмущению $\lambda(t)$.

Однако, действуя указанным образом, не удастся исключить влияние на выбранную координату $\varepsilon_k(t)$ вектора ошибки управления $\varepsilon(t)$ всех возмущающих воздействий $\lambda_l(t)$, $l = \overline{1, n}$.

Действительно, чтобы обеспечить, например, выполнение тождества

$$\tilde{\varepsilon}_k(s) \equiv 0, \quad (6.2.11)$$

согласно (6.2.7), (6.2.8) и (6.2.10) необходимо выполнить следующие тождества:

$$M_{kh}(s) \equiv 0, \quad h = \overline{1, n}. \quad (6.2.12)$$

Согласно (6.2.12) миноры, соответствующие всем элементам k -той строки матрицы $s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P}$ тождественно равны нулю. Но в таком случае должно выполняться тождество

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P}) \equiv 0. \quad (6.2.13)$$

В свою очередь, выполнение (6.2.13) означает, что не существует матрицы $(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P})^{-1}$, обратной к матрице $s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P}$ и поэтому не выполняется исходное равенство (6.2.7).

Таким образом, потребовав выполнения тождества (6.2.11), приходим к противоречию, что указывает на его принципиальную невыполнимость.

Несмотря на существование установленных ограничений, рассмотренный метод может использоваться в тех случаях, когда желательно синтезировать систему управления, инвариантную по отношению к некоторым из действующих на нее возмущений, влияние которых на ошибку управления наиболее ощутимо.

Инвариантность системы, по отношению к некоторым из действующих на нее возмущений, получила название *относительной инвариантности*. Но существует также понятие *абсолютной инвариантности*, применимое к системам, не реагирующим на действие всех возмущающих факторов.

Чтобы установить, в каких случаях достигается абсолютная инвариантность, обратимся к равенству (6.2.5), которое с учетом выражения

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P})^{-1} = \text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P}) / \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P})$$

принимает вид

$$\tilde{\mathbf{e}}(s) = \frac{\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P})}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P})} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(s), \quad (6.2.14)$$

где $\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P})$ – матрица, присоединенная к матрице $s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P}$.

Поскольку

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P}) = \sum_{k=0}^n \alpha_k s^k = \alpha_n \prod_{h=1}^n (s - s_h) = \Delta(s), \quad (6.2.15)$$

где α_k , $k = \overline{0, n}$ – коэффициенты характеристического полинома $\Delta(s)$, а s_h , $h = \overline{1, n}$ – нули этого полинома, то с учетом выражения (6.2.15) равенство (6.2.14) запишем следующим образом:

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \frac{\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P})}{\alpha_n \prod_{h=1}^n (s - s_h)} \tilde{\lambda}(s). \quad (6.2.16)$$

Применив к (6.2.16) обратное преобразование Лапласа установим, что

$$\varepsilon_k(t) = \sum_{h=1}^n f_{kh}(t) e^{t \text{Re } s_h}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (6.2.17)$$

где $f_{kh}(t)$ – полиномы от t , степени которых не превышают $n - 1$. Из выражений (6.2.17) следует, что

$$\varepsilon_k(t) \rightarrow 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (6.2.18)$$

если

$$\text{Re } s_h \rightarrow -\infty, \quad h = \overline{1, n}. \quad (6.2.19)$$

Поскольку соотношения (6.2.18) выполняются при любом возмущающем воздействии $\lambda(t)$, то приходим к выводу, что выполнение требований (6.2.19) обеспечивает достижение системой абсолютной инвариантности.

Проверим возможность технической реализации абсолютно инвариантных систем.

Покажем, что требования (6.2.19) могут быть выполнены лишь в том случае, если существуют такие элементы матрицы обратной связи \mathbf{P} , которые стремятся к бесконечности. Для этого воспользуемся выражениями

$$\alpha_{n-1} = \text{Spur}(\mathbf{B}\mathbf{P} - \mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{h=1}^n B_{kh} P_{hk} - A_{kk} \right); \quad (6.2.20)$$

$$\alpha_{n-1} = -\alpha_n \sum_{h=1}^n s_h = -\alpha_n \sum_{h=1}^n \text{Re } s_h, \quad (6.2.21)$$

где B_{kh} , P_{hk} и A_{kk} – элементы матриц \mathbf{B} , \mathbf{P} и \mathbf{A} соответственно. При выполнении требований (6.2.19) из выражения (6.2.21) следует, что

$$\alpha_{n-1} \rightarrow \infty. \quad (6.2.22)$$

Но тогда согласно выражению (6.2.20), по крайней мере, некоторые из элементов матрицы \mathbf{P} стремятся к бесконечности, т. к.

элементы матриц \mathbf{B} и \mathbf{A} принимают конечные значения. В таком случае, например, при скачкообразном изменении сигнала задания $y_{зд}(t)$ в момент времени t_0 величина $\varepsilon(t_0)$ также претерпевает скачкообразное изменение, т.е. независимо от выбранного закона управления принимает некоторое ненулевое конечное значение. А поскольку выполняется равенство (6.2.2), то среди координат вектора $\mathbf{u}(t_0)$ найдутся такие, значения которых стремятся к бесконечности. Но в реальных устройствах управления всегда существуют определенные ограничения на мощность управляющих воздействий. Поэтому абсолютно инвариантные системы, несмотря на всю их привлекательность, технически нереализуемы.

Проверим теперь, каким образом влияют на величину α_0 требования (6.2.19). С этой целью воспользуемся выражением

$$\alpha_0 = (-1)^n \alpha_n \prod_{h=1}^n s_h = \alpha_n \prod_{h=1}^n |s_h|. \quad (6.2.23)$$

Тогда, принимая во внимание (6.2.19) и (6.2.23) установим, что $\alpha_0 \rightarrow \infty$.

Следовательно, чтобы система была технически реализуема, значение величины α_0 должно быть ограничено.

Покажем, что выполнение ограничения

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \leq C_s, \quad (6.2.25)$$

где C_s – заданная положительная постоянная, не позволяет нулям характеристического полинома s_h , $h = \overline{1, n}$ удаляться в бесконечность, если система устойчива.

Действительно, в случае устойчивой системы выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} s_h < 0, \quad h = \overline{1, n}, \quad (6.2.26)$$

с учетом которых, а также выражения (6.2.21) и ограничения (6.2.25), приходим к выводу, что для наиболее удаленного от мнимой оси комплексной плоскости нуля (для определенности обозначим его s_n) имеет место неравенство

$$-\operatorname{Re} s_n < C_s.$$

Следовательно, использование ограничений (6.2.25) позволяет ограничить значение величины α_0 и тем самым учесть объективные требования, предъявляемые к системе со стороны технических средств автоматизации.

Таким образом, для приближения системы в условиях статистической неопределенности к абсолютно инвариантной, вместо заведомо невыполнимого требования (6.2.24) целесообразно использовать требование (5.3.33), дополнив его, например, ограничением (6.2.25).

Кроме того, чтобы учесть требования к качеству демпфирования свободного движения системы и созданию необходимого запаса устойчивости, следует использовать также ограничения (3.3.3), (3.3.4) или (3.3.6).

Полученные выше оценки (5.3.1) и (5.4.10) для критериев качества управления односвязными и многосвязными системами позволяют надеяться, что системы, синтезированные на основе требования (5.3.33) при ограничениях (6.2.25) и (3.3.3), (3.3.4) или (3.3.6), обеспечат высокое качество управления в условиях статистической неопределенности.

Такие системы принято называть *робастными*, т. к. они способны поддерживать качество управления близкое к оптимальному при значительных изменениях тех или иных, влияющих на него факторов. В рассматриваемом случае к таким факторам относятся статистические характеристики возмущающих воздействий. Название «робастный» происходит от английского слова *robust*, имеющего значения: крепкий, сильный, грубый.

6.3. Условия робастности для систем с полной обратной связью по состоянию и оценка их эффективности

Поскольку значение величины α_0 , как видно из выражения (6.2.23), зависит от расположения полюсов замкнутой системы и ограничения (3.3.3), (3.3.4) и (6.2.25) также устанавливают к нему определенные требования, то желательно выяснить при каком расположении полюсов выполняется требование (5.3.33).

Искомое расположение полюсов устанавливает следующее математическое утверждение:

Теорема 6.1. *Максимум свободного члена α_0 характеристического полинома $\Delta(s)$ замкнутой линейной стационарной системы при ограничениях (3.3.3), (3.3.4) и (6.2.25) достигается тогда и только тогда, когда расположение ее полюсов удовлетворяет следующим требованиям:*

$$s_k = -\eta [1 + i\chi_k(m_{\Pi})]; \quad k = \overline{1, n}, \quad (6.3.1)$$

где

$$\eta = C_s / n; \quad \chi_k(m_{\Pi}) = \begin{cases} (-1)^k / m_{\Pi}, & k \leq 2N; \\ 0, & k > 2N, \end{cases}$$

а N – целая часть отношения $n/2$ ($n \geq 2$ – порядок характеристического полинома).

Доказательство теоремы 6.1 приводится в приложении 1.

Следовательно, параметры настройки регулятора следует выбирать таким образом, чтобы обеспечить выполнение требований (6.3.1), т.к. при этом выполняется требование (5.3.33) и введенные ограничения (3.3.3) и (3.3.4) на расположение полюсов замкнутой системы.

Эти ограничения, в отличие от **критерия** α_0 , иногда называют **показателями** качества управления, т.к. они также характеризуют степень успешности достижения цели управления, но по отношению к ним не выдвигаются экстремальные требования, аналогичные (5.3.33).

Отметим, что выполнение требований (6.3.1) гарантируется в тех случаях, когда объект полностью управляем и имеется полная обратная связь по состоянию замкнутой системы, т. е. при формировании сигнала обратной связи используются все координаты вектора состояния $x(t)$.

Наряду с рассмотренными показателями качества управления m и η используют также показатель колебательности замкнутой системы M , для которого должно выполняться неравенство (3.3.6).

Для оценки эффективности робастного управления желательно определить границы интервала частот, в котором возможно выполнить условие (6.1.18) или (6.1.23), т.к. на практике иногда удается

оценить интервал частот, в котором возмущающие воздействия проявляют себя заметным образом.

Добиться выполнения указанных условий можно при расположении полюсов замкнутой системы в соответствии с требованиями (6.3.1), т.к. их выполнение способствует приближению системы к абсолютно инвариантной, т. е. выполнению требования (5.3.33).

Поскольку от расположения полюсов зависит знаменатель $|\Delta(i\omega)|$ АЧХ замкнутых систем, то при выполнении (6.3.1) он должен максимизироваться в интервале частот $|\omega| < \omega_{зр}$, способствуя тем самым выполнению условия (6.1.18) или (6.1.23).

Для систем с четным порядком характеристического полинома $\Delta(s)$ значение величины $\omega_{зр}$ определяется на основании следующего математического утверждения:

Теорема 6.2. *Для замкнутой линейной стационарной системы при ограничениях (3.3.3), (3.3.4) и (6.2.25) максимум величины $|\Delta(i\omega)|$ достигается при любом значении ω , удовлетворяющем неравенству $|\omega| < \omega_{зр}$, если характеристический полином $\Delta(s)$ имеет четную степень n и расположение полюсов системы удовлетворяет требованиям (6.3.1), причем величина $\omega_{зр}$ является решением уравнения*

$$\left[m_{\Pi}^4 \frac{\omega_*^4}{\omega_{зр}^4} + 2m_{\Pi}^2 \left(1 + \frac{\omega_*^2}{\omega_{зр}^2} \right) \frac{\omega_*^2}{\omega_{зр}^2} + \left(1 - \frac{\omega_*^2}{\omega_{зр}^2} \right)^2 \right]^N = 1 + 4N^2 m_{\Pi}^2 \frac{\omega_*^2}{\omega_{зр}^2}, \quad (6.3.2)$$

где $N = n/2$, а собственная частота системы ω_* определяется выражением

$$\omega_* = \frac{\eta}{m_{\Pi}} = \frac{C_s}{n m_{\Pi}}. \quad (6.3.3)$$

Доказательство теоремы 6.2 приводится в приложении 1.

Оценим значения величины $\omega_{зр}$. В том случае, когда $N = 1$ уравнение (6.3.2) имеет следующее аналитическое решение:

$$\frac{\omega_{зр}}{\omega_*} = \sqrt{\frac{m_{\Pi}^2 + 1}{2}}.$$

Однако в тех случаях, когда $N > 1$, уравнение (6.3.2) приходится решать численно. Расчеты показывают, что при изменении m_{II} в интервале $0,221 \dots 0,366$ отношение ω_{zp} / ω_* монотонно возрастает и изменяется в следующих пределах:

$$\frac{\omega_{zp}}{\omega_*} = \begin{cases} 0,724 \dots 0,753, & \text{если } N = 1; \\ 0,707 \dots 0,733, & \text{если } N = 2; \\ 0,703 \dots 0,739, & \text{если } N = 3. \end{cases}$$

Как видим, при изменении N отношение ω_{zp} / ω_* изменяется не столь значительно. Поэтому значение ω_{zp} в основном зависит от собственной частоты системы ω_* , которая обычно близка к ее резонансной частоте ω_p .

Следовательно, интервал частот, в котором максимизируется при выполнении требований (6.3.1) величина $|\Delta(i\omega)|$, а значит, достигается минимум АЧХ замкнутой системы, оказывается достаточно широким, и в случае существенных изменений характеристик возмущающих воздействий оптимизация управления линейными стационарными системами на основе требований к расположению полюсов (6.3.1) оказывается весьма эффективной.

Отметим, что наряду с величиной $|\Delta(i\omega)|$ желательно также максимизировать показатель абсолютного демпфирования свободного движения замкнутой системы η , т.к. он является косвенной оценкой ее быстродействия и его максимизация способствует более быстрому затуханию переходных процессов в замкнутой системе.

На то, что выполнение требований (6.3.1) обеспечивает оптимизацию наряду с частотными, также временных характеристик замкнутой системы, указывает следующее математическое утверждение:

Теорема 6.3. *Для того чтобы при ограничениях (3.3.3), (3.3.4) и (6.2.25) достигался максимум показателя η необходимо и достаточно обеспечить расположение полюсов системы в соответствии с требованиями (6.3.1).*

Доказательство теоремы 6.3 приводится в приложении 1.

Отметим, что при ограничениях (3.3.3), (3.3.4) и (6.2.25) максимальное значение η определяется выражением

$$\eta = \omega_* m_{II}. \quad (6.3.4)$$

Поскольку значение показателя m_{II} фиксировано, то из выражения (6.3.4) следует, что при максимизации величины η собственная частота системы также максимизируется.

Таким образом, при выполнении требований (6.3.1) обеспечивается оптимизация как временных, так и частотных характеристик замкнутой системы.

Рассмотрим теперь случай, когда степень n характеристического полинома $\Delta(s)$ принимает нечетные значения. Представим его в виде

$$\Delta(s) = (s - s_n)\Delta_{n-1}(s),$$

где

$$\Delta_{n-1}(s) = \alpha_n \prod_{k=1}^{n-1} (s - s_k).$$

Поскольку при нечетных n разность $n-1$ принимает четные значения, то при фиксированном расположении вещественного полюса s_n величина $|\Delta_{n-1}(i\omega)|$ согласно теореме 6.2 достигает максимума, если остальные комплексно-сопряженные полюсы системы s_k , $k = \overline{1, n-1}$ расположены в соответствии с требованиями (6.3.1), которые в рассматриваемом случае принимают вид

$$s_k = -\eta [1 + i(-1)^k / m_{II}]; \quad k = \overline{1, n-1},$$

где

$$\eta = (C_s + s_n)/(n-1). \quad (6.3.5)$$

Чтобы обеспечить максимум величины η расположение вещественного полюса s_n выберем так, чтобы выполнялось равенство $s_n = -C_s/n$. Тогда из равенства (6.3.5) следует, что $\eta = C_s/n$, а значит $s_n = -\eta$.

В результате расположение полюсов системы удовлетворяет требованиям (6.3.1) и показатель η согласно теореме 6.3 достигает максимума.

Знаменатель АЧХ замкнутой системы в рассматриваемом случае принимает вид

$$|\Delta(i\omega)| = |\Delta_{n-1}(i\omega)|\sqrt{\omega^2 + \eta^2},$$

причем величина $|\Delta_{n-1}(i\omega)|$ максимизируется в соответствии с теоремой 6.2 в интервале частот $|\omega| < \omega_{zp}$, где частота ω_{zp} является решением следующего уравнения:

$$\left[m_{II}^4 \frac{\omega_*^4}{\omega^4} + 2m_{II}^2 \left(1 + \frac{\omega_*^2}{\omega^2} \right) \frac{\omega_*^2}{\omega^2} + \left(1 - \frac{\omega_*^2}{\omega^2} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} = 1 + (n-1)^2 m_{II}^2 \frac{\omega_*^2}{\omega^2}.$$

Таким образом, в случае нечетных значений степени n характеристического полинома $\Delta(s)$ при расположении полюсов в соответствии с требованиями (6.3.1) также оптимизируются частотные и временные характеристики замкнутой системы.

Установим возможность расположения полюсов системы в соответствии с требованиями (6.3.1). С этой целью рассмотрим пример.

Пример 6.1. Выберем объект, передаточная функция которого по каналу управляющего воздействия на контролируемый технологический параметр задана в примере 3.4.

Предположим также, что для управления данным объектом используется ПИД-регулятор с передаточной функцией (2.3.4).

В таком случае характеристический полином замкнутой системы $\Delta(s)$ задается выражением

$$\Delta(s) = T_{об}^3 s^4 + 3T_{об}^2 s^3 + (3T_{об} + k_{II} T_D) s^2 + (k_{II} + 1) s + \frac{k_{II}}{T_I}, \quad (6.3.6)$$

где k_{II} – коэффициент передачи разомкнутой системы, причем

$$k_{II} = K_{об} K_p. \quad (6.3.7)$$

Полином $\Delta(s)$ имеет четыре нуля, расположение которых на комплексной плоскости в соответствии с требованиями (6.3.1) задано выражениями

$$s_{1,3} = -\eta + i \frac{\eta}{m_{II}}; \quad s_{2,4} = -\eta - i \frac{\eta}{m_{II}}. \quad (6.3.8)$$

С учетом равенства (6.3.5) выражения (6.3.8) принимают вид
 $s_{1,3} = -m_{\Pi}\omega_* + i\omega_*; s_{2,4} = -m_{\Pi}\omega_* - i\omega_*$, (6.3.9)

причем на основании равенства (6.3.3) имеем

$$\omega_* = \frac{3}{4m_{\Pi}T_{об}}, \quad (6.3.10)$$

т. к.

$$n = 4; \alpha_{n-1} = \alpha_3 = 3T_{об}^2; \alpha_n = \alpha_4 = T_{об}^3. \quad (6.3.11)$$

Установим значения параметров настройки ПИД-регулятора, обеспечивающие расположение полюсов системы в соответствии с требованиями (6.3.1).

Поскольку

$$\Delta(s) = \alpha_4 \prod_{k=1}^4 (s-s_k),$$

то с учетом равенств (6.3.9) и (6.3.10) приходим к следующему выражению:

$$\Delta(s) = T_{об}^3 s^4 + 4T_{об}^3 \omega_* m_{\Pi} s^3 + 2T_{об}^3 \omega_*^2 (3m_{\Pi}^2 + 1) s^2 + 4T_{об}^3 \omega_*^3 (m_{\Pi}^2 + 1) m_{\Pi} s + T_{об}^3 \omega_*^4 (m_{\Pi}^2 + 1)^2. \quad (6.3.12)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в выражениях (6.3.6) и (6.3.12) получим для определения параметров настройки ПИД регулятора следующие уравнения:

$$3T_{об} + k_{\Pi}T_{Д} = 2T_{об}^3 \omega_*^2 (3m_{\Pi}^2 + 1); \quad (6.3.13)$$

$$k_{\Pi} + 1 = 4T_{об}^3 \omega_*^3 (m_{\Pi}^2 + 1) m_{\Pi}; \quad (6.3.14)$$

$$\frac{k_{\Pi}}{T_{И}} = T_{об}^3 \omega_*^4 (m_{\Pi}^2 + 1)^2. \quad (6.3.15)$$

В результате решения системы уравнений (6.3.7), (6.3.13) – (6.3.15) установим, что

$$K_p = \frac{k_{\Pi}}{K_{об}}; \quad (6.3.16)$$

$$T_D = T_{об} \frac{2T_{об}^2 \omega_*^2 (3m_{II}^2 + 1) - 3}{k_{II}}; \quad (6.3.17)$$

$$T_{II} = \frac{T_{об} k_{II}}{T_{об}^4 \omega_*^4 (m_{II}^2 + 1)^2}, \quad (6.3.18)$$

где

$$k_{II} = 4T_{об}^3 \omega_*^3 (m_{II}^2 + 1) m_{II} - 1. \quad (6.3.19)$$

Таким образом, задав желаемое расположение полюсов системы в виде (6.3.11), удалось получить выражения для определения собственной частоты системы ω_* и параметров настройки ПИД-регулятора.

Полагая, что

$$m_{II} = 0,221, \quad (6.3.20)$$

и используя выражения (6.3.16) – (6.3.19), определим значения параметров настройки ПИД-регулятора

$$K_p = 17,619; T_D = 9,9645 \text{ с}; T_{II} = 3,6225 \text{ с}, \quad (6.3.21)$$

причем

$$T_{II}/T_D = 0,36354. \quad (6.3.22)$$

Установим также, что

$$\omega_* = 0,22624 \text{ с}^{-1}; \omega_{zp} = 0,707 \omega_* = 0,15995 \text{ с}^{-1}. \quad (6.3.24)$$

Верхняя граница ω_ϕ интервала частот $0 \dots \omega_\phi$, в котором рассматриваемая система способна в той или иной мере подавлять (фильтровать), действующие на нее возмущения, определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\left| W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega_\phi) \right| = 1,$$

где $W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega_\phi)$ – КЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$.

Решив данное уравнение, получим

$$\omega_\phi = 0,16623 \text{ с}^{-1}. \quad (6.3.25)$$

Исходя из равенств (6.3.24) и (6.3.25) установим, что

$$\frac{\omega_{zp}}{\omega_\phi} = 0,94172. \quad (6.3.26)$$

Следовательно, фильтрующие свойства системы оптимизируются почти во всем интервале частот $0 \dots \omega_\phi$, что свидетельствует об очень высокой эффективности робастного управления, основанного на выполнении требований (6.3.1).

Чтобы проверить, как изменяются показатели качества управления при изменениях величины m_Π , присвоим ей другое значение

$$m_\Pi = 0,366. \quad (6.3.27)$$

Принимая во внимание равенство (6.3.27) и выражения (6.3.16) – (6.3.19) получим

$$K_p = 6,6425; T_D = 9,9059 \text{ с}; T_I = 8,7889 \text{ с}, \quad (6.3.28)$$

причем

$$T_I/T_D = 0,88724. \quad (6.3.29)$$

Частоты, характеризующие качество управления, принимают в данном случае следующие значения:

$$\omega_* = 0,13661 \text{ с}^{-1}; \quad (6.3.30)$$

$$\omega_{zp} = 0,733 \omega_* = 0,10014 \text{ с}^{-1}. \quad (6.3.31)$$

$$\omega_\phi = 0,10633 \text{ с}^{-1}. \quad (6.3.32)$$

$$\frac{\omega_{zp}}{\omega_\phi} = 0,94942. \quad (6.3.33)$$

Сопоставив равенства (6.3.23) – (6.3.26) и (6.3.30) – (6.3.33) установим, что при возрастании величины m_Π значения характерных частот ω_* , ω_{zp} и ω_ϕ уменьшаются, а отношение ω_{zp}/ω_ϕ возрастает.

Следовательно, фильтрующие свойства системы по отношению к низкочастотным возмущающим воздействиям при возрастании m_Π ухудшаются, т.к. сужается интервал частот $0 \dots \omega_\phi$, в котором система еще способна подавлять действующие на нее возмущения, а также уменьшается интервал частот $0 \dots \omega_{zp}$, в котором фильтрация возмущений является наилучшей при заданном значении m_Π .

Уменьшение собственной частоты ω_* замкнутой системы указывает на то, что уменьшается ее резонансная частота ω_p , т. к. эти частоты принимают достаточно близкие значения.

Изменение колебательности рассматриваемой системы при изменении величины m_{Π} иллюстрируется графиками ее АЧХ, представленными на рисунке 6.3.

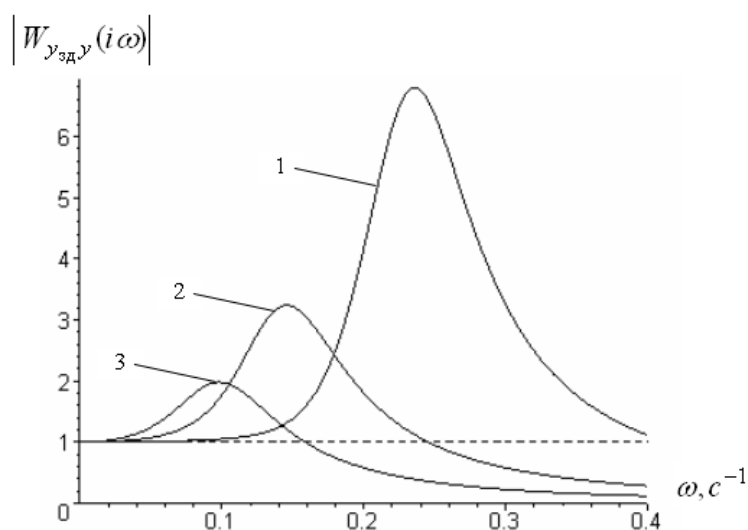


Рисунок 6.3 – АЧХ канала передачи $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ при значениях m_{Π} , заданных равенствами: 1 – (6.3.20); 2 – (6.3.27); 3 – (6.3.36)

Согласно рисунку 6.3 возрастание величины m_{Π} приводит к уменьшению резонансного пика АЧХ замкнутой системы, что свидетельствует об уменьшении ее колебательности, а значит и нежелательного влияния на качество управления высокочастотных возмущений.

Отклик системы на низкочастотные возмущения характеризуется графиками АЧХ, представленными на рисунке 6.4.

Как видно из рисунка 6.4, при возрастании величины m_{Π} ухудшаются фильтрующие свойства системы управления, т.к. значения АЧХ в окрестности частоты $\omega = 0$ возрастают.

Поэтому в условиях информационной неопределенности относительно спектральных характеристик действующих на систему управления возмущений, особенно важно так сбалансировать ее динамические свойства, чтобы выигрыш на низких частотах, где интенсивность воздействий обычно максимальна, не приводил к слишком большому проигрышу в высокочастотной области.

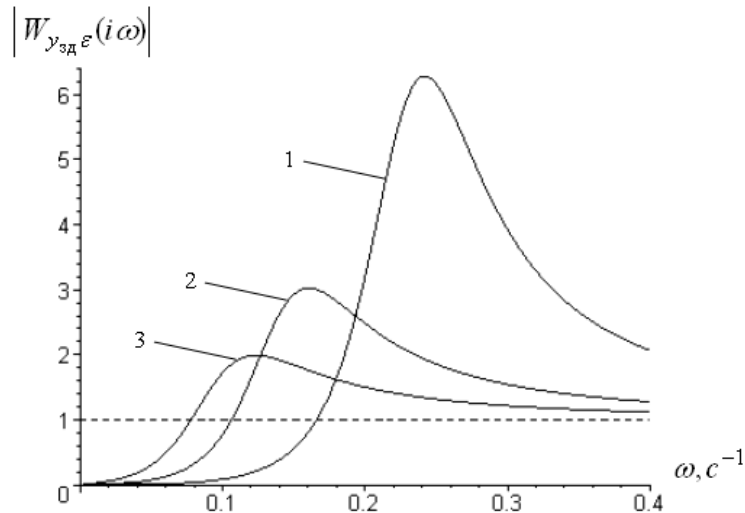


Рисунок 6.4 – АЧХ канала передачи $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ при значениях m_{II} , заданных равенствами: 1 – (6.3.20); 2 – (6.3.27); 3 – (6.3.36)

Обратим внимание, на то, что согласно равенствам (6.3.22) и (6.3.29) улучшение баланса относительно степени влияния на систему низкочастотных и высокочастотных возмущений сопровождается возрастанием отношения T_{II}/T_D . В таком случае естественно поставить задачу по выбору оптимального или близкого к нему значения данного отношения.

Опыт решения широкого круга задач в различных областях науки свидетельствует, что правильный баланс между двумя противоположностями достигается при распределении степени их влияния на систему по золотой пропорции (золотому сечению).

В рассматриваемом случае при малых значениях отношения T_{II}/T_D преобладающее влияние на систему оказывают высокочастотные возмущения, а при больших его значениях начинает преобладать влияние интенсивных низкочастотных возмущений.

Поэтому необходимо определить такое значение величины m_{II} , при котором выполняются следующие равенства:

$$\frac{T_{II} + T_D}{T_{II}} = \frac{T_{II}}{T_D} = \Phi \equiv \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots \quad (6.3.34)$$

Число Φ принято называть *золотым*, а отношение (6.3.34) – *золотой пропорцией* или *золотым сечением*.

Воспользовавшись равенствами (6.3.10), (6.3.17) – (6.3.19) и (6.3.34) получим уравнение

$$\left[\frac{27}{16 m_{II}^2} (m_{II}^2 + 1) - 1 \right]^2 = \Phi \frac{81(m_{II}^2 + 1)^2}{256 m_{II}^4} \left[\frac{9}{8m_{II}^2} (3m_{II}^2 + 1) - 3 \right]. \quad (6.3.35)$$

В результате численного решения уравнения (6.3.35) получим

$$m_{II} = 0,5457. \quad (6.3.36)$$

При выполнении равенства (6.3.36) значения параметров настройки ПИД регулятора принимают следующие значения:

$$K_p = 3,1767; T_D = 9,8032 \text{ с}; T_{II} = 15,862 \text{ с}; \quad (6.3.37)$$

причем $T_{II}/T_D = \Phi$.

В результате решения уравнения (6.3.2) с учетом равенства (6.3.36) и $N = 2$ получим

$$\frac{\omega_{zp}}{\omega_*} = 0,801. \quad (6.3.38)$$

Исходя из равенств (6.3.10) и (5.3.38) установим, что

$$\omega_* = 0,091619 \text{ с}^{-1}; \quad (6.3.39)$$

Принимая во внимание равенства (6.3.38) и (6.3.39) определим граничную частоту

$$\omega_{zp} = 0,801 \omega_* = 0,10943 \text{ с}^{-1}. \quad (6.3.40)$$

На основании равенств (6.3.37) получим значение верхней границы

$$\omega_\phi = 0,077901 \text{ с}^{-1} \quad (6.3.41)$$

интервала частот, в котором система обладает фильтрующими свойствами.

Согласно равенствам (6.3.40) и (6.3.41) имеем

$$\frac{\omega_{zp}}{\omega_\phi} = 0,94942. \quad (6.3.42)$$

Таким образом, сопоставив равенства (6.3.23) – (6.3.26), (6.3.30) – (6.3.33) и (6.3.38) – (6.3.42), установим, что при оптимальном значении m_{II} частоты ω_* , ω_{zp} и ω_ϕ принимают меньшие значения, чем при значениях m_{II} из интервала 0,221 ... 0,366. Это ука-

зывает на то, что при выполнении равенства (6.3.36) влияние на систему низкочастотных и высокочастотных возмущений соответственно усиливается и ослабляется.

Данный вывод подтверждается также графиками АЧХ, представленными на рисунках 6.3 и 6.4.

Интересно отметить, что при этом значение отношения $\omega_{зр}/\omega_{\phi}$, как видно из равенств (6.3.33) и (6.3.42), остается неизменным.

Чтобы оценить эффективность метода золотого сечения при определении оптимального значения величины m_{Π} , сопоставим представленные на рис. 6.5 переходные процессы, возникающие в системе при действии по каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ единичного ступенчатого возмущения $1(t)$.

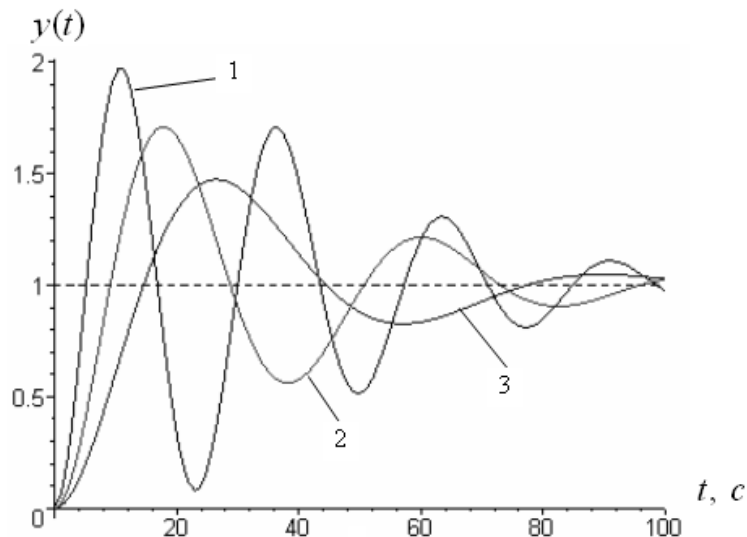


Рисунок 6.5 – Переходные процессы в системе при значениях величины m_{Π} , заданных равенствами: 1 – (6.3.20); 2 – (6.3.27); 3 – (6.3.36)

Из рисунка 6.5 видно, что при выполнении равенства (6.3.36) обеспечивается оптимальная колебательность переходного процесса.

Поскольку спектральная плотность $S(\omega) = \omega^{-2}$ возмущения $1(t)$ убывает с ростом частоты ω не слишком быстро, то в его спектре ощутимо присутствуют как низкочастотные, так и высокочастотные гармонические составляющие. Поэтому высокое качество переходного процесса при выполнении равенства (6.3.36) свидетельствует об успешном решении задачи по определению оптимального значения m_{Π} .

Таким образом, рассмотренный пример убедительно свидетельствует о высокой эффективности полученных условий робастности систем управления (6.3.1), поскольку при их выполнении интервал частот оптимальной фильтрации возмущающих воздействий $0 \dots \omega_{zp}$ почти целиком покрывает интервал частот $0 \dots \omega_{\phi}$, в котором система обладает фильтрующими свойствами.

Кроме того, на значительную ширину интервала частот $0 \dots \omega_{zp}$ оптимальной фильтрации возмущающих воздействий косвенно указывают и то, что для отношения ω_{zp} / ω_* при $N \leq 3$ и $m_{II} \geq 0,221$, выполняется неравенство $\omega_{zp} / \omega_* > 0,7$, поскольку собственная ω_* и резонансная частота ω_p системы принимают достаточно близкие значения.

Отметим, что метод расчета параметров настройки ПИД-регулятора, примененный в рассмотренном примере, не удастся использовать, когда порядок полинома знаменателя передаточной функции объекта выше четырех, т. к. в этих случаях с помощью ПИД-регулятора не удастся расположить все корни характеристического уравнения согласно требованиям (6.3.1). Поэтому необходимо обобщить условия робастности замкнутых систем.

6.4. Обобщение условий робастности для систем с неполной обратной связью по состоянию

Одна из проблем, с которыми приходится сталкиваться при настройке систем управления технологическими процессами, заключается в отсутствии полной обратной связи по вектору состояния $x(t)$. Это объясняется тем, что управляемые объекты зачастую описываются дифференциальными уравнениями высоких порядков, а в алгоритмах (законах) управления обычно не удается использовать производные по времени от вектора $x(t)$ выше первого порядка, т. к. наряду с полезным сигналом он содержит и шумовые составляющие, влияние которых недопустимо усиливается с возрастанием порядка дифференцирования по времени.

Кроме того, управляемым объектам нередко присуща пространственная распределенность параметров, а вектор состояния системы с таким объектом имеет бесконечную размерность. Разумеет-

ся, на практике невозможно реализовать обратную связь по бесконечному числу координат вектора $\mathbf{x}(t)$.

Поэтому в системах с неполной обратной связью по состоянию не все полюсы можно расположить в любом, наперед заданном положении, т.е. обеспечить выполнение требований (6.3.1).

При данных обстоятельствах приходится ограничиться выполнением требований (6.3.1) лишь для так называемых **доминирующих** полюсов системы.

Предположим, что система имеет n_D доминирующих полюсов s_k , $k = \overline{1, n_D}$ тогда для остальных полюсов системы s_h , $h = n_D + 1, n_D + 2, \dots$ должны выполняться неравенства

$$\operatorname{Re} s_h \leq \operatorname{Re} s_k; \quad (6.4.1)$$

$$|s_h| \gg |s_k|. \quad (6.4.2)$$

В соответствии с условием (6.4.1) все недоминирующие полюсы системы должны располагаться на комплексной плоскости не ближе к мнимой оси, чем доминирующие.

Условие (6.4.2) означает, что недоминирующие полюсы расположены значительно дальше от начала системы координат по сравнению с доминирующими.

При выполнении условий (6.4.1) и (6.4.2) качество управления определяется в основном доминирующими полюсами и поэтому выполнение для них требований (6.3.1) позволяет значительно повысить качество управления технологическими процессами.

В целях иллюстрации принятых положений рассмотрим простой пример.

Пример 6.2. Пусть передаточная функция управляемого объекта представляет собой звено транспортного запаздывания, т. е.

$$W_{об}(s) = K_{об} e^{-s\tau}, \quad (6.4.3)$$

где τ – постоянная времени транспортного запаздывания; $K_{об}$ – коэффициент передачи объекта. Для управления объектом (6.4.3) применим П-регулятор с передаточной функцией (2.3.1).

Характеристическое уравнение односвязной замкнутой системы с объектом (6.4.3) и П-регулятором имеет вид

$$\Delta(s) = k_{II} + e^{s\tau} = 0, \quad (6.4.4)$$

где $k_{II} = K_{об}K_p$ – коэффициент передачи разомкнутой системы; $\Delta(s)$ – знаменатель передаточной функции замкнутой системы.

Уравнение (6.4.4) является трансцендентным и имеет бесконечное счетное число корней, расположение которых на комплексной плоскости задается следующими выражениями:

$$s_h = \frac{1}{\tau} [\ln |k_{II}| + i\pi(2h-1)], \quad h = \overline{1, \infty}; \quad (6.4.5)$$

$$s_h^* = \frac{1}{\tau} [\ln |k_{II}| - i\pi(2h-1)], \quad h = \overline{1, \infty}, \quad (6.4.6)$$

где полюсы s_h^* являются комплексно-сопряженными по отношению к полюсам s_h .

Как видно из выражений (6.4.5) и (6.4.6) система сохраняет устойчивость, если

$$|k_{II}| < 1, \quad (6.4.7)$$

но в то же время при любом значении k_{II} , удовлетворяющем условию (6.4.7), имеет место равенство

$$m = \min_{k=\overline{1, \infty}} |\operatorname{Re} s_k / \operatorname{Im} s_k| = 0, \quad (6.4.8)$$

указывающее на невыполнимость ограничения (3.3.4) для всех полюсов системы при $m_{II} > 0$.

Следовательно, для систем с распределенными параметрами, а именно к ним относятся системы, содержащие звенья транспортного запаздывания, невозможно не только расположить полюсы их передаточных функций в любом, наперед заданном положении, но даже выполнить ограничение (3.3.4). Тем не менее, это обстоятельство не препятствует использованию данного ограничения при оптимизации указанных систем.

Действительно, положим $m_{II} = 0,221$ и обеспечим выполнение ограничения (3.3.4) лишь для полюсов s_1 и s_1^* , т.е. потребуем выполнения равенства

$$|\ln |k_{II}| / \pi| = m_{II} = 0,221 \quad (6.4.9)$$

Тогда из (6.4.9) вытекает, что

$$|k_{II}| = e^{-m_{II}\pi} = 0,5. \quad (6.4.10)$$

Проверим, выполняется ли реально для степени затухания переходных процессов в системе ψ равенство

$$\psi = 1 - e^{-2\pi m_{II}} = 0,75. \quad (6.4.11)$$

С этой целью подадим на вход системы единичное ступенчатое воздействие. Поскольку рассматриваемой системе присуща статическая ошибка

$$\varepsilon_{cm} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t/\tau) = \frac{1}{1 + |k_{II}|} = 0,6(6),$$

$$t \rightarrow \infty$$

то с ее учетом получим

$$\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon_{cm} = 0,3(3);$$

$$\varepsilon_3 = 1 - |k_{II}|(1 - |k_{II}|) - \varepsilon_{cm} = 0,083(3).$$

Ввиду того, что

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1} = 0,75 = \psi$$

выполнение равенства (6.4.11) можно считать установленным.

Проверим также выполнение для полюсов s_1 и s_1^* ограничений (3.3.3) и (3.3.4). С этой целью на основании выражений (6.4.5) и (6.4.6) установим совпадение вещественных частей

$$\eta = -\frac{\ln|k_{II}|}{\tau}. \quad (6.4.12)$$

у всех комплексно-сопряженных полюсов, что обеспечивает выполнение ограничения (3.3.3). Кроме того, поскольку

$$\left| \frac{s_1}{s_h} \right| \leq 0,509; \quad h \geq 2,$$

то выполняется также условие (6.4.2).

Далее, с учетом (6.4.5), (6.4.6), (6.4.9) и (6.4.12) получим выражения

$$s_1 = -\eta \left(1 - i \frac{1}{m_{\Pi}}\right); \quad s_1^* = -\eta \left(1 + i \frac{1}{m_{\Pi}}\right), \quad (6.4.13)$$

отвечающие требованиям (6.3.1).

Теперь осталось убедиться, что для полюсов s_1 и s_1^* , заданных выражениями (6.4.5) и (6.4.6), при ограничении на предельно допустимую величину относительного демпфирования (3.3.4), т. е.

$$\left| \frac{\operatorname{Re} s_1}{\operatorname{Im} s_1} \right| \geq m_{\Pi}; \quad \left| \frac{\operatorname{Re} s_1^*}{\operatorname{Im} s_1^*} \right| \geq m_{\Pi}, \quad (6.4.14)$$

условие

$$|\Delta(0)| = \max,$$

выполняется лишь при расположении полюсов s_1 и s_1^* в соответствии с требованиями (6.3.1).

Действительно, согласно (6.4.4) имеет место равенство

$$\Delta(0) = 1 + k_{\Pi},$$

а поскольку

$$\left| \frac{\operatorname{Re} s_1}{\operatorname{Im} s_1} \right| = \left| \frac{\operatorname{Re} s_1^*}{\operatorname{Im} s_1^*} \right| = \left| \frac{\ln |k_{\Pi}|}{\pi} \right|,$$

то с учетом неравенств (6.4.14) получим

$$|\Delta(0)| \leq 1 + e^{-\pi m_{\Pi}}, \quad (6.4.15)$$

причем неравенство (6.4.15) превращается в равенство лишь при выполнении требований (6.4.4), что, в сущности, и доказывает сделанное выше утверждение.

Таким образом, из рассмотренного примера 6.2, можно сделать вывод, что при оптимизации систем с неполной обратной связью по состоянию, а к ним заведомо относятся системы с распределенными параметрами, требования (6.3.1) должны выполняться лишь для доминирующих полюсов, т. е. в выражении (6.3.1) необходимо величину n (число полюсов системы) заменить на $n_{\text{д}}$ (число доминирующих полюсов).

6.5. Тест 6

1. Инвариантность системы, по отношению к некоторым из действующих на нее возмущений, получила название ... инвариантности.

- а) обобщенной;
- б) выборочной;
- в) относительной.

2. Системы не реагирующие на действие всех возмущающих факторов называются

- а) абсолютно инвариантными;
- б) полностью инвариантными;
- в) грубыми.

3. Системы, способные поддерживать качество управления близкое к оптимальному, при значительном изменении тех или иных, влияющих на него факторов называются

- а) квазиоптимальными;
- б) робастными;
- в) эффективными.

4. Абсолютно инвариантные системы

- а) технически нереализуемы;
- б) широко применяются на практике;
- в) не всегда удается реализовать технически.

5. Показатели качества управления характеризуют степень успешности достижения цели управления, но по отношению к ним

- а) всегда выдвигаются некоторые экстремальные требования;
- б) не выдвигается каких-либо дополнительных требований;
- в) не выдвигается экстремальных требований.

6. В замкнутой системе имеется полная обратная связь по состоянию, если при формировании сигнала обратной связи используются

- а) все координаты вектора состояния;
- б) единственная координата вектора состояния;
- в) все координаты вектора управляющих воздействий.

7. Собственная частота свободных колебаний замкнутой системы обычно близка к ... частоте.

- а) резонансной;

- б) нулевой;
- в) граничной.

8. Показатель абсолютного демпфирования свободного движения замкнутой системы является косвенной оценкой

- а) амплитуды ее свободных колебаний;
- б) ее колебательности;
- в) ее быстродействия.

9. В условиях информационной неопределенности относительно спектральных характеристик действующих на систему управления возмущений, особенно важно так сбалансировать ее динамические свойства, чтобы выигрыш на низких частотах, где интенсивность воздействий обычно максимальна, не приводил к слишком большому проигрышу в

- а) высокочастотной области;
- б) окрестности резонансной частоты;
- в) окрестности собственной частоты.

10. Опыт решения широкого круга задач в различных областях науки свидетельствует, что правильный баланс между двумя противоположностями достигается при распределении степени их влияния на систему по

- а) закону обратных квадратов;
- б) золотой пропорции;
- в) правилу параллелограмма.

ГЛАВА VII

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ НАСТРОЙКИ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ УСЛОВИЙ РОБАСТНОСТИ

7.1. Методы расчета параметров настройки регуляторов при ограничениях на расположение доминирующих полюсов

Рассмотрим методы расчета параметров настройки регуляторов, используемых для управления линейными стационарными системами с распределенными и сосредоточенными параметрами. Эти методы базируются на требованиях (6.3.1) для доминирующих полюсов.

Воспользуемся уравнением (3.1.24), эквивалентным характеристическому уравнению замкнутой системы, причем передаточная функция объекта $W_{об}(s)$ считается заданной. Преобразуем это уравнение к более удобному виду

$$\Theta(s) = \frac{s}{W_{об}(s)} + sW_{рег}(s) = 0, \quad (7.1.1)$$

где $\Theta(s) = s\Delta_{э}(s) / W_{об}(s)$

Чтобы применить требования (6.3.1) необходимо установить взаимосвязь между числом доминирующих полюсов системы n_D , для которых эти требования выполнимы, и числом параметров настройки регулятора n_p , значения которых требуется определить.

Кроме того, необходимо также установить значение неизвестной величины η .

Следовательно, имеется $n_p + 1$ неизвестных величин, варьируя значения которых, можно задать желаемое расположение такого же числа полюсов, т.к. каждому полюсу системы s_k отвечает уравнение $\Theta(s_k) = 0$.

Полагая, что

$$n_d = n_p + 1, \quad (7.1.2)$$

и задав расположение n_d полюсов согласно требованиям (6.3.1), получим систему уравнений

$$\Theta(s_k) = 0; \quad k = \overline{1, n_d}, \quad (7.1.3)$$

решив которую, можно определить все неизвестные величины.

Вместе с тем, необходимо отметить, что согласно требованиям (6.3.1) некоторые из полюсов при $n_d \geq 4$ являются кратными. Чтобы обеспечить желаемую кратность, например, полюсу s_k , необходимо вместо уравнения $\Theta(s_k) = 0$ в системе (7.1.3) использовать следующие уравнения:

$$\left. \frac{d^h \Theta(s)}{ds^h} \right|_{s=s_k} = 0; \quad h = \overline{0, l_k - 1}, \quad (7.1.4)$$

где l_k – кратность полюса s_k .

Примем также во внимание, что в случае наличия комплексно-сопряженных полюсов s_k и s_{k+1} каждое из уравнений вида (7.1.3) или (7.1.4) при разделении их левых частей на вещественную и мнимую составляющие, по сути, превращается в два вещественных уравнения, причем они остаются неизменными при замене полюса s_k на комплексно-сопряженный s_{k+1} .

Следовательно, при расположении доминирующих полюсов системы в соответствии с требованиями (6.3.1) можно ограничиться уравнениями лишь для одного комплексного полюса

$$s_k = -\eta + i \frac{\eta}{m_{II}}; \quad k = \overline{1, N_D}, \quad (7.1.5)$$

где N_D – целая часть от $n_D / 2$.

В результате при расчете параметров настройки регуляторов, используемых в односвязных системах управления, в соответствии с требованиями (6.3.1) применяются следующие уравнения:

$$\left. \frac{d^h \Theta(s)}{ds^h} \right|_{s = -\eta + i(\eta / m_{II})} = 0; \quad h = \overline{0, N_D - 1}, \quad (7.1.6)$$

причем в случае нечетных значений n_D к системе (7.1.6) добавляется дополнительное уравнение

$$\Theta(-\eta) = 0. \quad (7.1.7)$$

Удовлетворяющие уравнениям (7.1.6) и (7.1.7) полюсы могут оказаться не доминирующими, ввиду нарушения условий (6.4.1) и (6.4.2). Чтобы избежать такой ситуации, из всех положительных значений η , удовлетворяющих уравнениям (7.1.6) и (7.1.7), следует выбрать минимальное, обеспечив тем самым выполнение указанных условий.

На практике наибольшее распространение получили регуляторы, реализующие пропорционально-интегральный (ПИ) и пропорционально-интегральный-дифференциальный (ПИД) законы управления. Эти законы устанавливают связь между входным $\varepsilon(t)$ и выходным $u(t)$ сигналами регулятора и определяются соответственно выражениями (В.3.3) и (В.3.4). Передаточные функции указанных регуляторов заданы выражениями (2.3.3) и (2.3.4).

В случае применения ПИ-регулятора $n_p = 2$, и согласно равенству (7.1.2) $n_D = 3$. Исходя из общих требований (6.3.1) оптимальное расположение доминирующих полюсов системы с ПИ регулятором представим в виде

$$s_{1,2} = \eta \left(-1 \pm i \frac{1}{m_{II}} \right); \quad s_3 = -\eta. \quad (7.1.8)$$

Значение величины m_{Π} в равенствах (7.1.8) устанавливается на основании компромиссных соображений, т.к. при малых значениях m_{Π} в выходных сигналах регулятора $u(t)$ и объекта $x(t)$ присутствуют нежелательные высокочастотные колебания, а при больших значениях этой величины ухудшается качество управления.

Поскольку для систем с ПИ-регулятором $N_D = 1$, то уравнения (7.1.6) и (7.1.7) с учетом выражения (2.3.3) для передаточной функции ПИ-регулятора принимают вид

$$-K_p\eta + \frac{K_p}{T_I} + i\frac{\eta}{m_{\Pi}}K_p = -\frac{-\eta + i\frac{\eta}{m_{\Pi}}}{W_{об}\left(-\eta + i\frac{\eta}{m_{\Pi}}\right)}; \quad (7.1.9)$$

$$-K_p\eta + \frac{K_p}{T_I} = \frac{\eta}{W_{об}(-\eta)}. \quad (7.1.10)$$

Разделив уравнение (7.1.9) на вещественную и мнимую составляющие получим два вещественных уравнения

$$-K_p\eta + \frac{K_p}{T_I} = F_R(\eta); \quad (7.1.11)$$

$$\frac{\eta}{m_{\Pi}}K_p = F_I(\eta), \quad (7.1.12)$$

где

$$F_R(\eta) = -\operatorname{Re} \left[\frac{-\eta + i\frac{\eta}{m_{\Pi}}}{W_{об}\left(-\eta + i\frac{\eta}{m_{\Pi}}\right)} \right]; \quad F_I(\eta) = -\operatorname{Im} \left[\frac{-\eta + i\frac{\eta}{m_{\Pi}}}{W_{об}\left(-\eta + i\frac{\eta}{m_{\Pi}}\right)} \right].$$

Поскольку левые части уравнений (7.1.11) и (7.1.12) совпадают, то существует такое значение η , при котором совпадают и их правые части, т.е. выполняется равенство

$$\frac{\eta}{W_{об}(-\eta)} = F_R(\eta). \quad (7.1.13)$$

Из уравнения (7.1.12) получим

$$K_p = \frac{m_{II}}{\eta} F_I(\eta). \quad (7.1.14)$$

Решая уравнения (7.1.11) с учетом выражения (7.1.14) имеем

$$T_{II} = \frac{m_{II} F_I(\eta)}{\eta [F_R(\eta) + m_{II} F_I(\eta)]}. \quad (7.1.15)$$

Таким образом, вначале, при заданном значении m_{II} , в результате решения уравнения (7.1.13) устанавливается минимальное положительное значение η .

Затем, исходя из выражений (7.1.14) и (7.1.15), определяются значения параметров настройки K_p и T_{II} , при которых доминирующие полюсы системы расположены в соответствии с требованиями (7.1.8).

Для иллюстрации описанного метода расчета рассмотрим пример.

Пример 7.1. Для достаточно точного математического описания реальных объектов управления нередко приходится использовать дифференциальные уравнения высоких порядков. Поэтому предположим, что передаточная функция объекта определяется выражением

$$W_{об}(s) = \frac{K_{об}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)^2 (1 + T_3 s)^3}, \quad (7.1.16)$$

где

$$K_{об} = 2,5; T_1 = 30 \text{ с}; T_2 = 20 \text{ с}; T_3 = 10 \text{ с}. \quad (7.1.17)$$

Пусть для управления объектом (7.1.16), (7.1.17) используется ПИ регулятор, причем

$$m_{II} = 0,221.$$

Тогда в результате численного решения уравнения (7.1.13) установим, что

$$\eta = 0,0062446 \text{ с}^{-1}. \quad (7.1.19)$$

Воспользовавшись выражениями (7.1.14) и (7.1.15), с учетом равенств (7.1.16) – (7.1.19), определим значения параметров настройки ПИ-регулятора

$$K_p = 0,48803; T_I = 112,74 \text{ с}, \quad (7.1.20)$$

причем

$$K_p/T_I = 0,0043288 \text{ с}^{-1}. \quad (7.1.21)$$

Если

$$m_{II} = 0,366, \quad (7.1.22)$$

то, действуя аналогичным образом, установим, что

$$\eta = 0,0088738 \text{ с}^{-1}; \quad (7.1.23)$$

$$K_p = 0,33188; T_I = 77,569 \text{ с}, \quad (7.1.24)$$

причем

$$K_p/T_I = 0,0042785 \text{ с}^{-1}. \quad (7.1.25)$$

Сопоставив равенства (7.1.18) и (7.1.22), а также (7.1.19) и (7.1.23), установим, что при возрастании величины m_{II} на 65,6 %, показатель η , используемый для оценок быстродействия замкнутых систем управления, уменьшается на 42,1 %.

Отношение K_p/T_I , как видно из равенств (7.1.21) и (7.1.25), при этом также уменьшается, но уже не столь значительно, всего на 1 %.

Графики АЧХ замкнутой системы с ПИ-регулятором, параметры настройки которого задаются равенствами (7.1.20) и (7.1.25), представлены на рисунках 7.1 и 7.2.

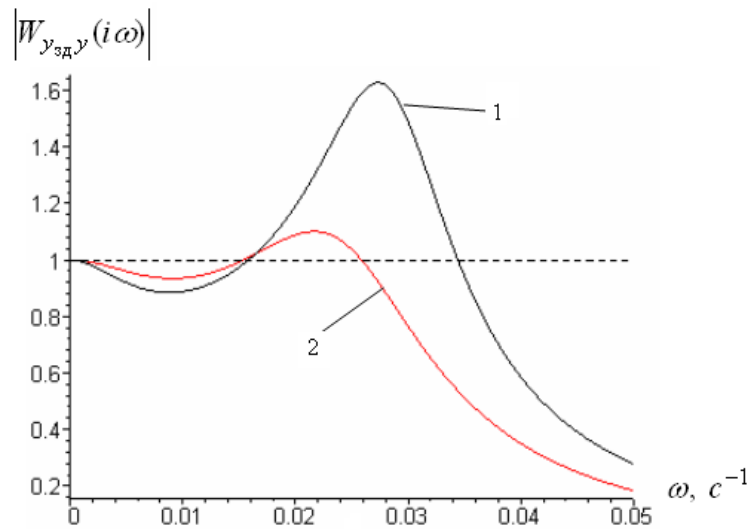


Рисунок 7.1 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ при значениях m_{II} , заданных равенствами: 1 – (7.1.19); 2 – (7.1.23).

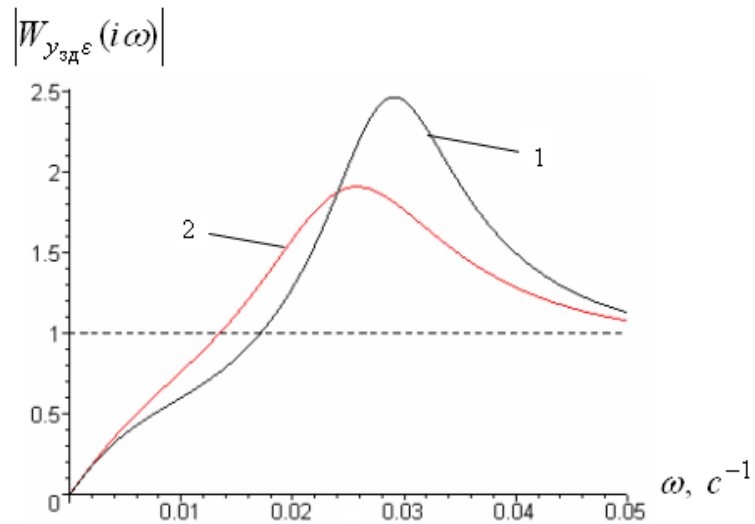


Рисунок 7.2 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ при значениях m_{II} , заданных равенствами: 1 – (7.1.19); 2 – (7.1.23)

На основании рисунка 7.1 можно сделать вывод о возрастании показателя колебательности замкнутой системы с ростом величины m_{II} .

Из рисунка 7.2 видно, что в области низких частот ($\omega < 0,04 \text{ c}^{-1}$) значения АЧХ при изменении величины m_{II} остаются практически неизменными, а при $\omega > 0,04 \text{ c}^{-1}$, их отличие друг от друга становится весьма существенным. Поэтому можно сделать вывод, что при возрастании отношения K_p/T_{II} значения АЧХ, от-

вещающей каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$, в основном уменьшаются в небольшой окрестности частоты $\omega = 0$, в то время как изменение показателя быстродействия системы η приводит к изменению значений данной АЧХ на более высоких частотах, начиная с $\omega = 0,04 \text{ с}^{-1}$ и заканчивая вблизи резонансной частоты.

Область частот $0 \dots \omega_\phi$, в которой система обладает фильтрующими свойствами при выполнении (7.1.18) определяется равенством

$$\omega_\phi = 0,017697 \text{ с}^{-1}. \quad (7.1.26)$$

Область частот $0 \dots \omega_{zp}$, в которой обеспечивается оптимальная фильтрация возмущающих воздействий, задается в этом случае следующим равенством:

$$\omega_{zp} = 0,724\omega_* = 0,020457 \text{ с}^{-1}. \quad (7.1.27)$$

Сравнив равенства (7.1.26) и (7.1.27) установим, что частота ω_{zp} на 15,6 % больше частоты ω_ϕ .

Следовательно, в рассматриваемом случае система обладает оптимальными фильтрующими свойствами во всей области частот $0 \dots \omega_\phi$.

На рисунке 7.3 представлены графики переходных процессов при действии по каналу $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ единичного ступенчатого возмущения $1(t)$.

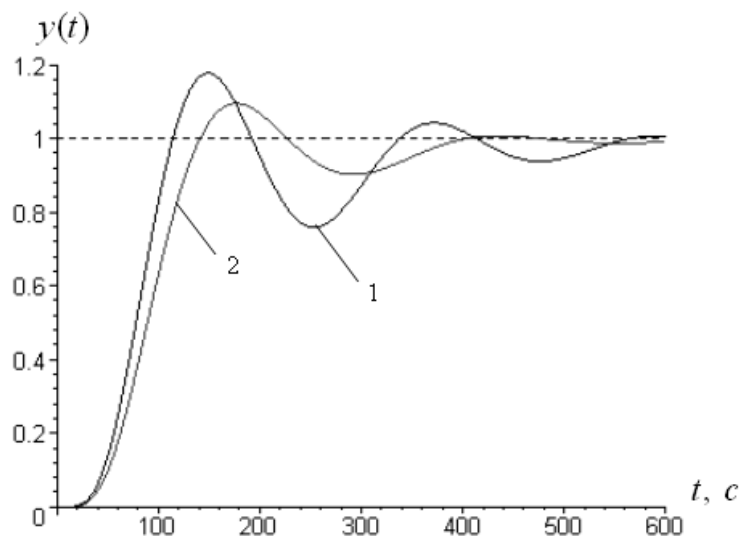


Рисунок 7.3 – Переходные процессы в системе при значениях величины m_{II} , заданных равенствами: 1 – (7.1.18); 2 – (7.1.22)

Как видно из рисунка 7.3, при выполнении равенства (7.1.18) обеспечивается более высокое качество переходных процессов в системе, по сравнению со случаем, когда выполняется равенство (7.1.22).

Таким образом, если на систему действуют только низкочастотные возмущения, ширина спектра которых не превосходит интервала частот $0 \dots \omega_\phi$, то целесообразно задавать значение величины m_Π согласно равенству (7.1.18), поскольку в этом случае обеспечивается лучшая фильтрация указанных возмущений (рис. 7.2). Но, при действии на систему возмущений, содержащих наряду с низкочастотными компонентами достаточно интенсивные высокочастотные составляющие, например, единичного ступенчатого возмущения $1(t)$, выбор значения m_Π , исходя из равенства (7.1.22), более предпочтителен.

Рассмотрим особенности **расчета параметров настройки систем с ПИД-регуляторами**. Поскольку для систем с данными регуляторами $n_p = 3$, то согласно равенству (7.1.2) $n_d = 4$. В соответствии с требованиями (6.3.1) оптимальное расположение доминирующих полюсов системы в рассматриваемом случае представим в виде

$$s_{1,3} = \eta \left(-1 + i \frac{1}{m_\Pi} \right); \quad s_{2,4} = -\eta \left(1 + i \frac{1}{m_\Pi} \right). \quad (7.1.28)$$

Поскольку в этом случае величина n_d является четной, то при расчете параметров настройки ПИД-регулятора используются лишь уравнения (7.1.6). Принимая во внимание выражение для передаточной функции ПИД-регулятора (2.3.4) и равенство $N_d = 2$, эти уравнения приведем к виду

$$K_p T_D \eta^2 \left(1 - \frac{1}{m_\Pi^2} \right) - K_p \eta + \frac{K_p}{T_I} + \\ + i \left(-K_p T_D \frac{2\eta^2}{m_\Pi} + K_p \frac{\eta}{m_\Pi} \right) = F_R(\eta) + iF_I(\eta); \quad (7.1.29)$$

$$-2\eta K_p T_D + K_p + i \left(\frac{2\eta}{m_{II}} K_p T_D \right) = \Phi_R(\eta) + i\Phi_I(\eta), \quad (7.1.30)$$

где

$$\Phi_R(\eta) = -\operatorname{Re} \left\{ \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{s}{W_{об}(s)} \right] \right|_{s = -\eta + i(\eta/m_{II})} \right\};$$

$$\Phi_I(\eta) = -\operatorname{Im} \left\{ \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{s}{W_{об}(s)} \right] \right|_{s = -\eta + i(\eta/m_{II})} \right\}.$$

Разделив в уравнениях (7.1.29) и (7.1.30) вещественные и мнимые части приходим к системе из четырех уравнений

$$K_p T_D \eta^2 \left(1 - \frac{1}{m_{II}^2} \right) - K_p \eta + \frac{K_p}{T_I} = F_R(\eta); \quad (7.1.31)$$

$$-K_p T_D \frac{2\eta^2}{m_{II}} + K_p \frac{\eta}{m_{II}} = F_I(\eta); \quad (7.1.32)$$

$$-2\eta K_p T_D + K_p = \Phi_R(\eta); \quad (7.1.33)$$

$$\frac{2\eta}{m_{II}} K_p T_D = \Phi_I(\eta). \quad (7.1.34)$$

Из уравнения (7.1.34) установим, что

$$K_p T_D = \frac{m_{II}}{2\eta} \Phi_I(\eta). \quad (7.1.35)$$

Подставив выражение (7.1.35) в уравнение (7.1.33) определим коэффициент передачи ПИД-регулятора

$$K_p = \Phi_R(\eta) + m_{II} \Phi_I(\eta). \quad (7.1.36)$$

Воспользовавшись равенствами (7.1.35), (7.1.36) и уравнением (7.1.31), для постоянной времени интегрирования ПИД-регулятора получим следующее выражение:

$$T_I = \frac{\Phi_R(\eta) + m_{II}\Phi_I(\eta)}{F_R(\eta) + \eta\Phi_R(\eta) + m_{II}\eta\Phi_I(\eta) - \frac{1}{2}\Phi_I(\eta)\eta\left(m_{II} - \frac{1}{m_{II}}\right)}. \quad (7.1.37)$$

Из выражений (7.1.35) и (7.1.36) имеем

$$T_D = \frac{m_{II}\Phi_I(\eta)}{2\eta[\Phi_R(\eta) + m_{II}\Phi_I(\eta)]}. \quad (7.1.38)$$

Таким образом, для определения параметров настройки ПИД-регулятора получены выражения (7.1.36), (7.1.37) и (7.1.38). Чтобы установить в них правильное значение переменной η , подставим выражения (7.1.35) и (7.1.36) в уравнение (7.1.32). В результате приходим к уравнению

$$\frac{\eta}{m_{II}}\Phi_R(\eta) = F_I(\eta), \quad (7.1.39)$$

решив которое, определим искомое значение η .

Для иллюстрации методов расчета параметров настройки типовых регуляторов, обеспечивающих робастность системы, рассмотрим пример.

Пример 7.2. Допустим, что передаточная функция объекта задается равенствами (7.1.16) и (7.1.17).

Определим параметры настройки ПИД-регулятора, используемого для управления выбранным объектом.

Параметры настройки ПИД-регулятора определяются в результате численного решения нелинейного алгебраического уравнения (7.1.39), с последующим использованием выражений (7.1.36), (7.1.37) и (7.1.38).

Полагая, что значение величины m_{II} задано равенством (7.1.18), получим

$$\eta = 0,0083612 \text{ с}^{-1}; \quad (7.1.40)$$

$$K_p = 1,0817; T_D = 31,057 \text{ с}; T_I = 28,637 \text{ с}, \quad (7.1.41)$$

причем

$$T_I/T_D = 0,92208; \quad (7.1.42)$$

$$K_p/T_I = 0,037773 \text{ с}^{-1}. \quad (7.1.43)$$

В том случае, когда значение величины m_{II} определяется равенством (7.1.22), имеем

$$\eta = 0,012054 \text{ с}^{-1}; \quad (7.1.44)$$

$$K_p = 0,84435; T_D = 25,881 \text{ с}; T_I = 38,912 \text{ с}, \quad (7.1.45)$$

причем

$$T_I/T_D = 1,5035; \quad (7.1.46)$$

$$K_p/T_I = 0,021699 \text{ с}^{-1}. \quad (7.1.47)$$

Выберем также значение показателя m_{II} согласно следующему равенству:

$$m_{II} = 0,3949. \quad (7.1.48)$$

В таком случае на основании расчетов, аналогичных выполненным выше, устанавливаем, что параметры настройки ПИД-регулятора принимают следующие значения:

$$K_p = 0,80487; T_D = 25,166 \text{ с}; T_I = 40,719 \text{ с}, \quad (7.1.49)$$

причем

$$\eta = 0,012668 \text{ с}^{-1}; \quad (7.1.50)$$

$$T_I/T_D = 1,6180; \quad (7.1.51)$$

$$K_p/T_I = 0,019766 \text{ с}^{-1}. \quad (7.1.52)$$

Исходя из равенств (7.1.43), (7.1.47) и (7.1.52) установим, что с возрастанием m_{II} фильтрующие свойства системы в окрестности частоты $\omega = 0$ ухудшаются. Этот вывод подтверждается также при сопоставлении графиков АЧХ замкнутой системы, приведенных на рисунке 7.4.

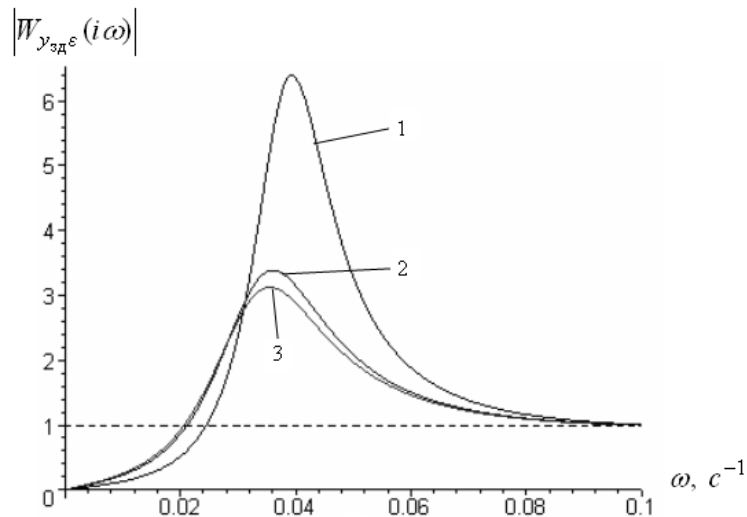


Рисунок 7.4 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \epsilon(t)$ при значениях m_{II} , заданных равенствами: 1 – (7.1.19); 2 – (7.1.23); 3 – (7.1.48)

Интересно, что графики АЧХ (рис. 7.4) при значениях m_{II} , заданных равенствами (7.1.23) и (7.1.48), весьма близки в широком интервале частот ω , верхняя граница которого лишь немного меньше резонансных частот данных АЧХ. Это обусловлено близостью соответствующих значений величин η и K_p/T_{II} , заданных равенствами (7.1.44), (7.1.50) и (7.1.47), (7.1.52). Напротив, в этом же интервале частот ω значения АЧХ, отвечающей значению m_{II} , заданному равенством (7.1.19), заметно меньше, чем у двух других, т. к. согласно равенству (7.1.43), показатель K_p/T_{II} принимает в этом случае существенно большее значение.

Следует также отметить, что согласно равенствам (7.1.40), (7.1.44) и (7.1.50) значения показателя быстродействия замкнутой системы η увеличиваются при возрастании m_{II} , что объясняется наличием у рассматриваемой системы трех недоминирующих полюсов, приближающихся к мнимой оси с ростом величины m_{II} .

Тесная взаимосвязь между показателями m и M подтверждается графиками АЧХ, приведенными на рисунке 7.5.

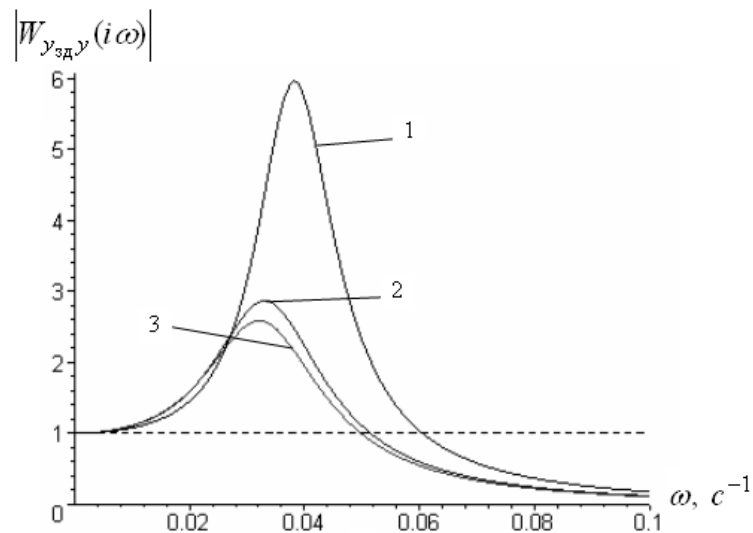


Рисунок 7.5 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ при значениях m_{II} , заданных равенствами: 1 – (7.1.19); 2 – (7.1.23); 3 – (7.1.48)

Согласно рисунку 7.4 значения показателя колебательности M увеличиваются при уменьшении m_{II} , что приводит к возрастанию величины перерегулирования у переходных процессов, графики которых представлены на рисунке 7.6.

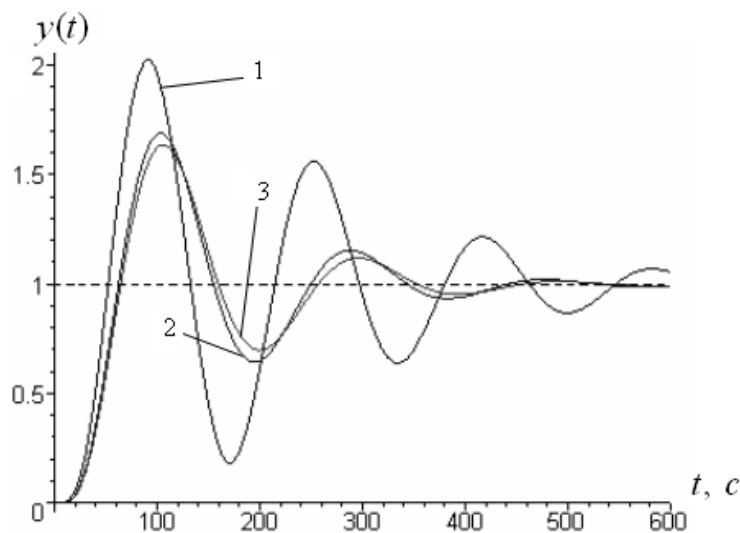


Рисунок 7.6 – Переходные процессы в системе при значениях величины m_{II} , заданных равенствами: 1 – (7.1.19); 2 – (7.1.23); 3 – (7.1.48)

Как видно из рисунка 7.6, наилучшее качество переходных процессов обеспечивается при выполнении равенства (7.1.48), когда для отношения T_{II}/T_D , согласно равенству (7.1.51), выполняется требование (6.3.34).

Вместе с тем, можно заметить, что у переходного процесса 3, представленного на рисунке 6.5, качество выше, чем у такого же процесса, приведенного на рисунке 7.6, хотя в обоих случаях выполняется требование (6.3.34).

Это различие объясняется тем, что качество первого переходного процесса целиком обусловлено расположением лишь доминирующих полюсов системы, т.к. в этом случае недоминирующие полюсы отсутствуют. Напротив, на качество второго переходного процесса влияют также и недоминирующие полюсы системы, на расположении которых изменение отношения $T_{И}/T_{Д}$ сказывается весьма незначительно.

Таким образом, рассмотренные примеры 7.1 и 7.2 показали, что условия робастности управления, заданные в виде требований (7.1.8) и (7.1.28) к расположению доминирующих полюсов систем с ПИ и ПИД-регуляторами, оказываются весьма эффективными и в случае неполной обратной связи по состоянию.

Выполним также сравнительный анализ эффективности управления при использовании ПИ и ПИД-регуляторов.

Для этого воспользуемся результатами, полученными в примерах 7.1 и 7.2. для случая, когда значение $m_{Д}$ задано равенством (7.1.22).

На рисунке 7.7 представлены АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$.

Согласно рисунку 7.7 при одинаковых значениях показателя $m_{Д}$, колебательность системы с ПИ-регулятором значительно меньше, чем у системы с ПИД-регулятором, что объясняется наличием у второй системы кратных доминирующих полюсов.

Действительно, в качестве такой системы рассмотрим два последовательно соединенных одинаковых колебательных звена, имеющих показатели колебательности M . Тогда входной гармонический сигнал с амплитудой a и частотой ω , равной резонансной частоте этих звеньев ω_p , на выходе имеет амплитуду равную aM^2 , что указывает на резкое возрастание резонансного пика системы при слиянии доминирующих полюсов.

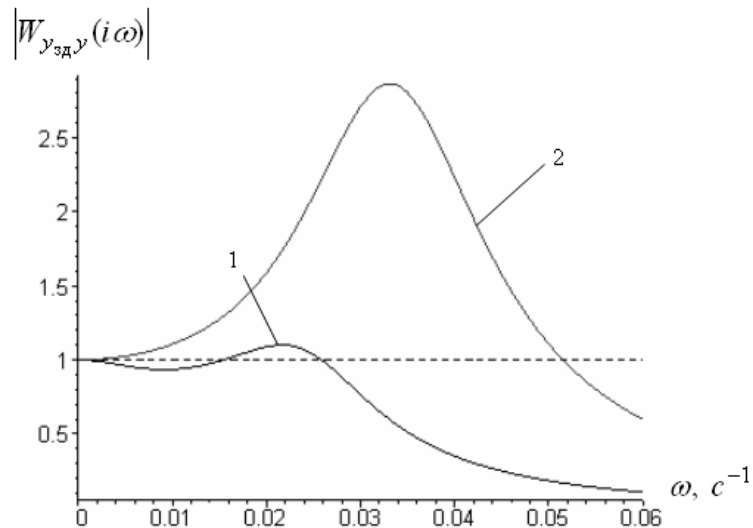


Рисунок 7.7 – АЧХ канала передачи систем $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$, в которых используются: 1 – ПИ-регулятор; 2 – ПИД-регулятор

Следовательно, для робастных систем с ПИД-регуляторами, параметры настройки которых определяются исходя из требований (7.1.28), весьма нежелательно наличие высокочастотных возмущающих воздействий, интенсивность которых достаточно велика в окрестности резонансной частоты системы.

Конечно, увеличив значение m_D , можно уменьшить колебательность системы с ПИД-регулятором до вполне приемлемых значений, но это приводит к снижению эффективности управления, и целесообразность использования данных регуляторов становится весьма сомнительной.

На рисунке 7.8 представлены АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$.

Как можно заметить из рисунка 7.8, значения АЧХ системы с ПИД-регулятором значительно меньше, чем у системы с ПИ-регулятором в весьма широкой области частот, верхняя граница которой совпадает с резонансной частотой системы с ПИ-регулятором, что указывает на возможность весьма эффективного использования робастных систем с ПИД-регуляторами даже при действии на них достаточно высокочастотных возмущений.

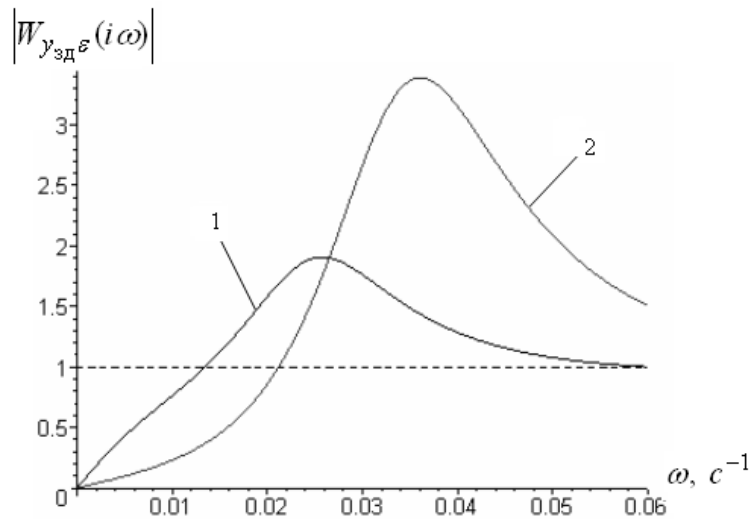


Рисунок 7.8 – АЧХ канала передачи систем $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$, в которых используются: 1 – ПИ-регулятор; 2 – ПИД-регулятор

На рисунке 7.9 показаны переходные процессы в системах, возникающие при действии единичного ступенчатого возмущения $1(t)$ по каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$.

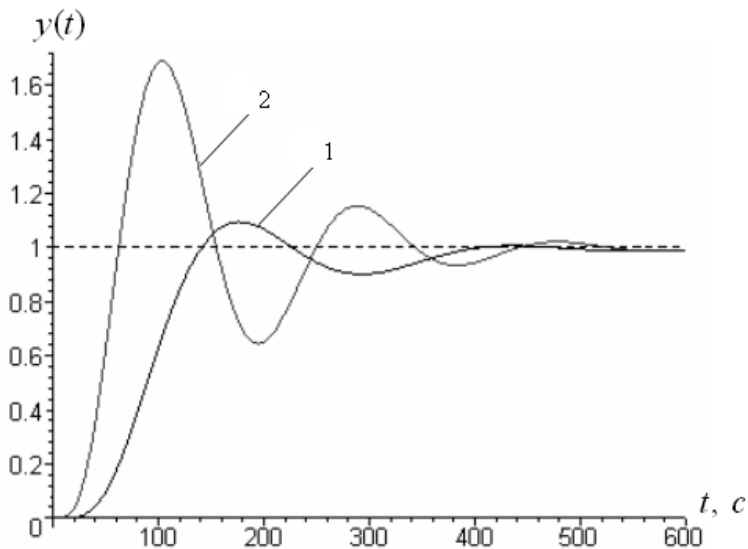


Рисунок 7.9 – Переходные процессы в системе при использовании: 1 – ПИ-регулятора; 2 – ПИД-регулятора

Согласно рисунку 7.9 перерегулирование у переходного процесса в системе с ПИД-регулятором, значительно больше, чем в системы с ПИ-регулятором, причем в системе с ПИД-регулятором оно превышает 60 %, а в системе с ПИ-регулятором меньше 10 %. Следовательно, в первом случае перерегулирование слишком велико, а во втором оно явно занижено.

На основании проведенного анализа приходим к выводу, что при действии на систему с ПИД-регулятором возмущений, интенсивность которых в окрестности резонансной частоты системы может быть достаточно велика, необходимо изменить требования (7.1.28) к расположению доминирующих полюсов таким образом, чтобы обеспечить правильный выбор значений перерегулирования и колебательности.

Для этого зададим расположение полюсов следующим образом:

$$s_{1,2} = \eta(1 - \beta) \left(-1 \pm i \frac{1}{m_{\Pi}} \right); \quad s_{3,4} = \eta(1 + \beta) \left(-1 \pm i \frac{1}{m_{\Pi}} \right), \quad (7.1.53)$$

где β – вещественное число, причем $0 < \beta < 1$.

Цель изменений в расположении доминирующих полюсов заключается в том, чтобы несколько раздвинуть кратные доминирующие полюсы системы и благодаря этому уменьшить ее колебательность, не меняя при этом значения m_{Π} .

Систему уравнений для определения значений параметров настройки ПИД-регулятора, при которых выполняются требования (7.1.53), представим в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Theta \left[\eta(1 - \beta) \left(-1 + i \frac{1}{m_{\Pi}} \right) \right] &= 0; \\ \operatorname{Im} \Theta \left[\eta(1 - \beta) \left(-1 + i \frac{1}{m_{\Pi}} \right) \right] &= 0; \end{aligned} \quad (7.1.54)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Theta \left[\eta(1 + \beta) \left(-1 + i \frac{1}{m_{\Pi}} \right) \right] &= 0; \\ \operatorname{Im} \Theta \left[\eta(1 + \beta) \left(-1 + i \frac{1}{m_{\Pi}} \right) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (7.1.55)$$

где функция $\Theta(s)$ определяется выражением (7.1.1).

Значения величин m_{Π} и β в уравнениях (7.1.54) и (7.1.55) выберем так, чтобы для отношения $T_{И}/T_{Д}$ и показателя колебательности M выполнялись соответственно требование (6.3.34), т. е. $T_{И}/T_{Д} = \Phi$, и равенство

$$M = \Phi, \quad (7.1.56)$$

поскольку при этом обеспечивается правильный баланс между колебательным и апериодическим движениями системы, что особенно важно в условиях информационной неопределенности относительно характеристик возмущающих воздействий.

Рассмотрим эту проблему более подробно. В любой системе происходит, как рассеивание части поступающую в нее энергии, так и ее преобразование из одной формы в другую.

При рассеивании энергии система совершает апериодическое, затухающее движение, а преобразование энергии приводит к колебательному движению. Казалось бы, что систему управления необходимо синтезировать так, чтобы полностью исключить колебательное движение, как выводящее систему из равновесного состояния, когда $y_{зд}(t) = y(t)$. Но при наличии колебательности система, вообще говоря, быстрее приходит в равновесное состояние, т. к. в этом случае отток энергии из нее происходит более интенсивно.

Для сбалансированного протекания обоих процессов в системе необходимо ее апериодические и колебательные свойства распределить по золотому сечению. Поскольку при недостаточном затухании переходных процессов система является неработоспособной, то затухание должно преобладать.

Поскольку все процессы в системе протекают апериодически, если выполняется равенство $M = 1$, то ее колебательность характеризует разность $M - 1$.

В таком случае апериодические и колебательные свойства системы распределены по золотому сечению, если выполняется отношение

$$\frac{(M - 1) + 1}{1} = \frac{1}{M - 1},$$

из которого следует, что искомое значение показателя колебательности M является положительным решением уравнения

$$M^2 - M - 1 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что решение данного уравнения удовлетворяет требованию (7.1.56).

Отметим также, что в уравнениях (7.1.54) и (7.1.55) не используются производные по s от функции $\Theta(s)$, что весьма удобно при синтезе адаптивных систем управления, т.к. для таких систем определение значений указанных производных связано с дополнительными затруднениями.

С учетом выражений (2.3.4) и (7.1.1) для передаточной функции ПИД-регулятора и функции $\Theta(s)$, систему уравнений (7.1.54) и (7.1.55) представим в виде

$$\eta^2(1-\beta)^2 \left(1 - \frac{1}{m_{II}^2}\right) K_p T_D - \eta(1-\beta) K_p + \frac{K_p}{T_I} = \chi_1(\eta, m_{II}); \quad (7.1.57)$$

$$-2\eta^2(1-\beta)^2 K_p T_D + \eta(1-\beta) K_p = \chi_2(\eta, m_{II}); \quad (7.1.58)$$

$$\eta^2(1+\beta)^2 \left(1 - \frac{1}{m_{II}^2}\right) K_p T_D - \eta(1+\beta) K_p + \frac{K_p}{T_I} = \chi_3(\eta, m_{II}); \quad (7.1.59)$$

$$-2\eta^2(1+\beta)^2 K_p T_D + \eta(1+\beta) K_p = \chi_4(\eta, m_{II}), \quad (7.1.60)$$

где

$$\chi_1(\eta, m_{II}) = -\operatorname{Re} \frac{s}{W_{об}(s)} \Big|_{s=\eta(1-\beta)(-1+i/m_{II})};$$

$$\chi_2(\eta, m_{II}) = -m_{II} \operatorname{Im} \frac{s}{W_{об}(s)} \Big|_{s=\eta(1-\beta)(-1+i/m_{II})};$$

$$\chi_3(\eta, m_{II}) = -\operatorname{Re} \frac{s}{W_{об}(s)} \Big|_{s=\eta(1+\beta)(-1+i/m_{II})};$$

$$\chi_4(\eta, m_{II}) = -m_{II} \operatorname{Im} \frac{s}{W_{об}(s)} \Big|_{s=\eta(1+\beta)(-1+i/m_{II})}.$$

Таким образом, в результате решения системы уравнений (7.1.57) – (7.1.60) определяются значения параметров настройки ПИД-регулятора K_p , T_D и T_I , обеспечивающие выполнение требований (6.3.34) и (7.1.56).

Для иллюстрации описанного метода расчета рассмотрим пример.

Пример 7.3. Исследуем систему управления, рассмотренную в примере 6.1.

Выполнив преобразования, аналогичные тем, которые были сделаны в примере 6.1, для параметров настройки ПИД-регулятора при расположении полюсов системы согласно равенствам (7.1.53), получим следующие выражения:

$$K_p = \frac{1}{K_{об}} \left[4T^3 \eta^3 (1 - \beta^2) \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2} \right) - 1 \right]; \quad (7.1.61)$$

$$T_D = \frac{T}{K_p K_{об}} \left\{ 2\eta^2 T^2 \left[3 - \beta^2 + \frac{1 + \beta^2}{m_{II}^2} \right] - 3 \right\}; \quad (7.1.62)$$

$$T_I = \frac{K_p K_{об}}{T^3 \eta^4 (1 - \beta^2)^2 \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2} \right)^2}; \quad (7.1.63)$$

где

$$\eta = \frac{3}{4T}. \quad (7.1.64)$$

Полагая

$$\beta = 0,236, \quad (7.1.65)$$

и принимая во внимание выражения (7.1.62) – (7.1.64), установим, что требование (6.3.34) выполняется, если

$$m_{II} = 0,56842. \quad (7.1.66)$$

Тогда, воспользовавшись равенствами (7.1.61) – (7.1.66), определим значения параметров настройки ПИД-регулятора

$$K_p = 2,7627; T_D = 10,827 \text{ с}; T_I = 17,518 \text{ с}, \quad (7.1.67)$$

причем $\eta = 0,05 \text{ с}^{-1}$.

Для системы управления, у которой значения параметров настройки ПИД-регулятора заданы равенствами (7.1.67), выполняются требования (6.3.34), т. к. $T_I / T_D = \Phi$, и (7.1.56), что видно из рисунка 7.10.

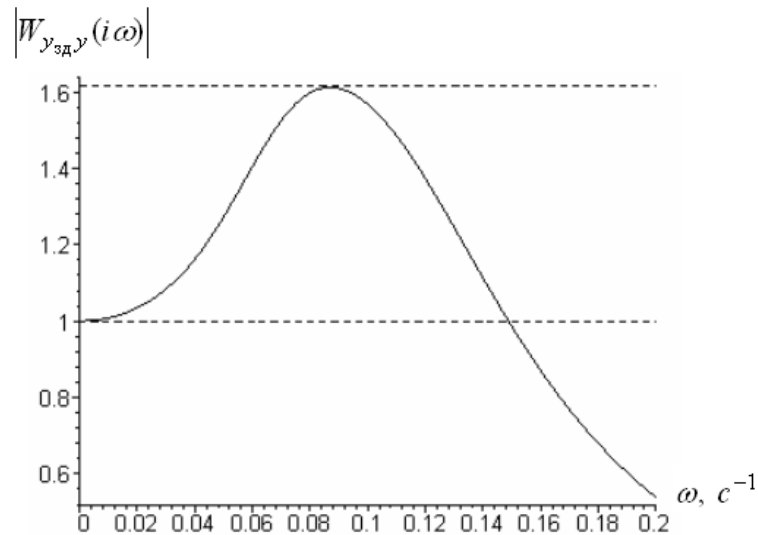


Рисунок 7.10 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$

Сравним динамические характеристики рассматриваемой системы в тех случаях, когда параметры настройки ПИД-регулятора заданы равенствами (6.3.37) и (7.1.67).

На рисунке 7.11 представлены графики АЧХ системы, характеризующие ее фильтрующие свойства.

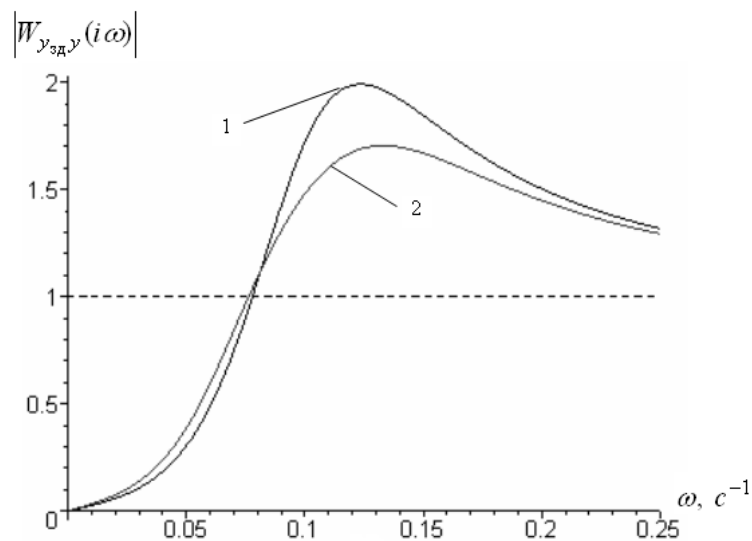


Рисунок 7.11 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$, причем параметры настройки ПИД-регулятора заданы равенствами:
1 – (6.3.37); 2 – (7.1.67).

Согласно рисунку 7.11 незначительное улучшение фильтрующих свойств системы, наблюдающееся при выполнении единственного требования (6.3.34), приводит к существенному возрастанию

резонансного пика АЧХ, по сравнению со случаем одновременного выполнения требований (6.3.34) и (7.1.56).

Чтобы оценить, в какой мере дополнительное требование (7.1.56) способствует улучшению реакции системы на единичное ступенчатое воздействие $1(t)$, рассмотрим графики переходных процессов, представленные на рисунке 7.12.

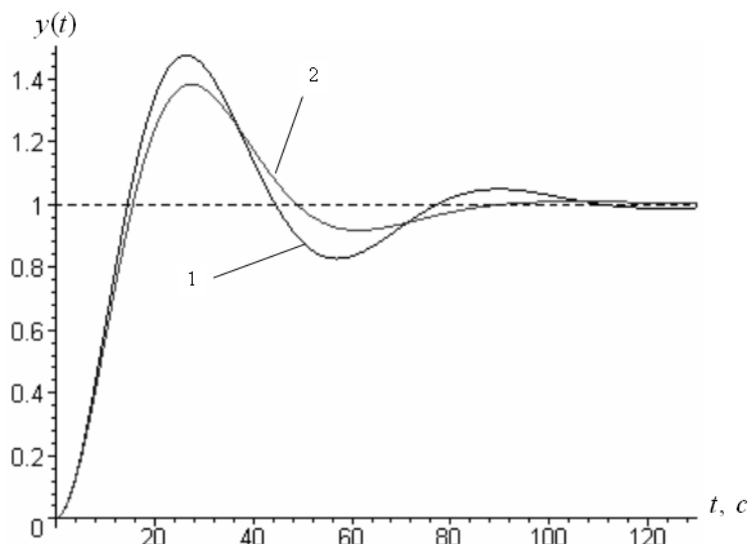


Рисунок 7.12 – Переходные процессы в системе при использовании ПИД-регулятора, параметры настройки которого заданы равенствами: 1 – (6.3.37); 2 – (7.1.67)

Как видно из рисунка 7.12, при совместном выполнении требований (6.3.34) и (7.1.56) обеспечивается существенно лучшее качество переходного процесса, чем в случае, когда выполняется единственное требование (6.3.34).

Следовательно, использование требования (7.1.56) приводит к сравнительно небольшому ухудшению фильтрующих свойств системы, обеспечивая при этом существенное повышение качества переходных процессов, по которому можно достаточно объективно оценить, в какой мере сбалансированы фильтрующие и усиливающие свойства системы по отношению к низкочастотным и высокочастотным возмущениям соответственно.

Таким образом, рассмотренный пример подтверждает высокую эффективность метода синтеза робастных систем с ПИД-регулятором, исходя из уравнений (7.1.57) – (7.1.60) и требований (6.3.34), (7.1.56).

На основании выполненного анализа можно заключить, что при управлении одним и тем же объектом в условиях информационной неопределенности относительно характеристик возмущающих воздействий, робастные системы с ПИД-регулятором, вообще говоря, значительно эффективнее систем с ПИ-регулятором. Однако они нуждаются в использовании более сложных методов расчета параметров настройки, требующих дополнительной информации о динамических характеристиках управляемых объектов. Поэтому когда такая информация отсутствует, и ее получение по тем или иным причинам оказывается затруднительным, приходится применять ПИ-регуляторы.

Для систем с ПИД-регулятором можно наметить две стратегии управления.

Во-первых, когда интенсивность высокочастотных воздействий незначительна, то можно максимально расширить интервал частот $0 \dots \omega_\phi$, выбрав значение m_D из интервала $0,221 \dots 0,366$, а значения параметров настройки ПИД-регулятора определить в результате решения уравнения (7.1.39), с последующим использованием выражений (7.1.36) – (7.1.38).

Эффективность данного подхода к синтезу робастных систем управления можно оценить, воспользовавшись рисунком 6.4, где наглядно показано, насколько можно улучшить фильтрующие свойства системы управления по отношению к возмущающим воздействиям.

Во-вторых, когда высокочастотными воздействиями пренебречь нельзя, то при расчете значений параметров настройки ПИД-регулятора необходимо использовать требования (6.3.34) и (7.1.56), а также систему уравнений (7.1.57) – (7.1.60).

Рассмотрим теперь метод расчета параметров настройки **многопараметрических регуляторов**.

Выше, было показано, что эффективность робастных систем с ПИД-регуляторами, вообще говоря, выше, чем систем с ПИ-регуляторами. Это преимущество обусловлено возможностью выполнения для систем с ПИД-регуляторами условий робастности управления (6.3.1) для большего числа доминирующих полюсов системы, чем в случае использования ПИ-регуляторов. Согласно условию (7.1.2), число доминирующих полюсов n_D определяется числом

параметров настройки n_p используемого регулятора. Поэтому для синтеза регуляторов более эффективных, чем ПИД-регулятор, необходимо ввести в его передаточную функцию (1.4.41) дополнительные слагаемые.

С учетом сделанных замечаний рассмотрим передаточную функцию регулятора $W_{рег}(s)$ следующего вида:

$$W_{рег}(s) = W_{МП}(s) = K_1 s + K_2 \sqrt[3]{s^2} + K_3 \sqrt[3]{s} + K_4 + \frac{K_5}{s},$$

где $K_h, h = \overline{1,5}$ – параметры настройки.

Обычно эту передаточную функцию можно представить в более удобном виде

$$W_{МП}(s) = K_p T_D s - K_p \sqrt[3]{T_{2/3}^2 s^2} + K_p \sqrt[3]{T_{1/3} s} - K_p + \frac{K_p}{T_I s}, \quad (7.1.68)$$

где $T_{2/3}$ и $T_{1/3}$ – постоянные времени.

Поскольку рассматриваемый регулятор с передаточной функцией (7.1.68) имеет большее число параметров настройки, чем ПИД-регулятор, то назовем его *многопараметрическим*.

Как видно из выражения (7.1.68), в алгоритме управления многопараметрических регуляторов не используются производные по времени выше первого порядка, что позволяет применять эти регуляторы при наличии шумовой компоненты в сигнале ошибки управления $\varepsilon(t)$.

Согласно выражению (7.1.68), для многопараметрического регулятора $n_p = 5$. В таком случае ввиду условия (7.1.2) выполняются равенства: $n_d = 6$ и $N_d = n_d / 2 = 3$.

Следовательно, требования к расположению доминирующих полюсов (6.3.1) для систем с многопараметрическими регуляторами принимают вид

$$s_{1,3,5} = -\eta + i \frac{\eta}{m_{\Pi}}; \quad s_{2,4,6} = -\eta - i \frac{\eta}{m_{\Pi}}. \quad (7.1.69)$$

В том случае, когда высокочастотными возмущениями можно пренебречь, значения параметров настройки многопараметрического регулятора и величины η , при которых обеспечивается располо-

жение доминирующих полюсов системы в соответствии с требованиями (7.1.69) определяются в результате решения системы уравнений (7.1.6), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\operatorname{Re} \Theta \left(-\eta + i \frac{\eta}{m_{\Pi}} \right) = 0; \quad \operatorname{Im} \Theta \left(-\eta + i \frac{\eta}{m_{\Pi}} \right) = 0; \quad (7.1.70)$$

$$\operatorname{Re} \frac{d\Theta(s)}{ds} \Big|_{s = -\eta + i(\eta/m_{\Pi})} = 0; \quad \operatorname{Im} \frac{d\Theta(s)}{ds} \Big|_{s = -\eta + i(\eta/m_{\Pi})} = 0; \quad (7.1.71)$$

$$\operatorname{Re} \frac{d^2\Theta(s)}{ds^2} \Big|_{s = -\eta + i(\eta/m_{\Pi})} = 0; \quad \operatorname{Im} \frac{d^2\Theta(s)}{ds^2} \Big|_{s = -\eta + i(\eta/m_{\Pi})} = 0. \quad (7.1.72)$$

Если влиянием высокочастотных возмущений на качество управления пренебречь нельзя, то необходимо обеспечить следующее расположение доминирующих полюсов системы:

$$s_{1,2} = \eta(1 - \beta) \left(-1 \pm i \frac{1}{m_{\Pi}} \right); \quad s_{3,4} = \eta \left(-1 \pm i \frac{1}{m_{\Pi}} \right); \quad (7.1.73)$$

$$s_{5,6} = \eta(1 + \beta) \left(-1 \pm i \frac{1}{m_{\Pi}} \right), \quad (7.1.74)$$

где значение параметра β устанавливается согласно требованию (7.1.56), а значение показателя m_{Π} выбирается исходя из требования (6.3.34).

Поскольку полюсы s_k , $k = \overline{1,6}$ односвязной системы с многопараметрическим регулятором, заданные выражениями (7.1.73) и (7.1.74) являются также корнями уравнения (7.1.1), то параметры настройки данного регулятора и величина η определяются в результате решения следующей системы уравнений:

$$\operatorname{Re} \Theta \left[\eta(1 - \beta) \left(-1 + i \frac{1}{m_{\Pi}} \right) \right] = 0;$$

$$\operatorname{Im} \Theta \left[\eta(1 - \beta) \left(-1 + i \frac{1}{m_{\Pi}} \right) \right] = 0; \quad (7.1.75)$$

$$\operatorname{Re} \Theta \left[\eta \left(-1 + i \frac{1}{m_{\Pi}} \right) \right] = 0; \quad \operatorname{Im} \Theta \left[\eta \left(-1 + i \frac{1}{m_{\Pi}} \right) \right] = 0; \quad (7.1.76)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Theta \left[\eta(1 + \beta) \left(-1 + i \frac{1}{m_{II}} \right) \right] &= 0; \\ \operatorname{Im} \Theta \left[\eta(1 + \beta) \left(-1 + i \frac{1}{m_{II}} \right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (7.1.77)$$

Для оценки эффективности систем с многопараметрическим регулятором в случаях, когда высокочастотные возмущения пренебрежимо малы, рассмотрим пример.

Пример 7.4. В целях упрощения сравнительного анализа выберем объект, передаточная функция которого задается равенствами (7.1.16) и (7.1.17). Этот объект уже рассматривался в примерах 7.1 и 7.2.

Для управления данным объектом воспользуемся многопараметрическим регулятором с передаточной функцией (7.1.68).

В таком случае для функции $\Theta(s)$ получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Theta(s) &= K_p T_D s^2 - K_p s \sqrt[3]{T_{2/3}^2 s^2} + K_p s \sqrt[3]{T_{1/3} s} - \\ &- K_p s + \frac{K_p}{T_{II}} + \frac{1}{K_{об}} (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)^2 (1 + T_3 s)^3. \end{aligned} \quad (7.1.78)$$

Предположим, что влиянием высокочастотных возмущений можно пренебречь. Тогда, полагая, что $m_{II} = 0,366$, в результате решения с учетом выражений (7.1.16), (7.1.17) и (7.1.78) системы уравнений (7.1.70) – (7.1.72) получим

$$\eta = 0,015393 \text{ c}^{-1}; \quad (7.1.79)$$

$$K_p = 14,682; T_{II} = 124,94 \text{ c}; T_D = 25,711 \text{ c}; \quad (7.1.80)$$

$$T_{2/3} = 96,370 \text{ c}; T_{1/3} = 479,70 \text{ c}. \quad (7.1.81)$$

Характерные частоты рассматриваемой системы определяются следующими равенствами:

$$\omega_* = 0,042058 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_{zp} = 0,739\omega_* = 0,031081 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_\phi = 0,028119 \text{ c}^{-1},$$

причем

$$\frac{\omega_{zp}}{\omega_{\phi}} = 1,1053. \quad (7.1.82)$$

На основании равенства (7.1.82) можно заключить об оптимальности фильтрующих свойств системы на всем интервале частот $0 \dots \omega_{\phi}$.

Сравним эффективность управления рассматриваемым объектом при использовании ПИД и многопараметрических регуляторов.

Для этого сопоставим равенства (7.1.44) и (7.1.79). В результате установим, что в случае применения многопараметрического регулятора значение показателя η , характеризующего быстродействие системы, возрастает на 27,7 %.

Интересно, что при замене ПИ-регулятора на ПИД-регулятор, показатель η возрастает на 35,8 %, что можно установить, исходя из равенств (7.1.23) и (7.1.44).

Следовательно, при переходе от ПИД-регулятора к многопараметрическому регулятору рост эффективности управления сопоставим с тем, которого можно достичь в результате замены ПИ-регулятора на ПИД-регулятор.

Сравним также фильтрующие свойства системы с ПИ, ПИД и многопараметрическими регуляторами, параметры настройки которых, заданы соответственно равенствами (7.1.24), (7.1.45) и (7.1.80), (7.1.81). Графики АЧХ замкнутых систем с этими регуляторами представлены на рисунке 7.13.

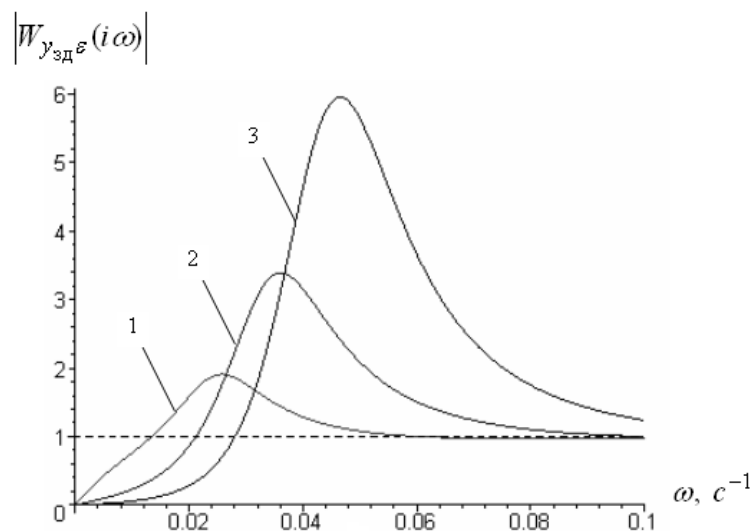


Рисунок 7.13 – АЧХ канала $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ замкнутых систем со следующими регуляторами: 1 – ПИ; 2 – ПИД; 3 – многопараметрический

Согласно рисунку 7.13 фильтрующие свойства системы при замене используемого закона управления на более совершенный значительно улучшаются, причем значения АЧХ уменьшаются в весьма широких интервалах частот $0 \dots \omega_p$, что дополнительно свидетельствует о сопоставимом повышении качества управления в случаях, когда ПИ-регулятор заменяется на ПИД-регулятор, а ПИД-регулятор, в свою очередь, заменяется многопараметрическим регулятором.

Следует отметить, что разработка новых, более эффективных законов управления экономически чрезвычайно эффективна, т.к. их применение позволяет резко повысить качество управления, без существенных финансовых затрат.

Действительно, поскольку в настоящее время для управления технологическими процессами широко применяются микропроцессорные контроллеры, то замена используемого закона управления сводится к замене, реализующей этот закон компьютерной программы.

Возможность широкого практического применения новых законов управления позволяет получить большой экономический эффект от их использования даже в тех случаях, когда повышение экономической эффективности составляет всего лишь доли процента.

Изменение колебательности системы при указанных заменах иллюстрируется рисунок 7.13.

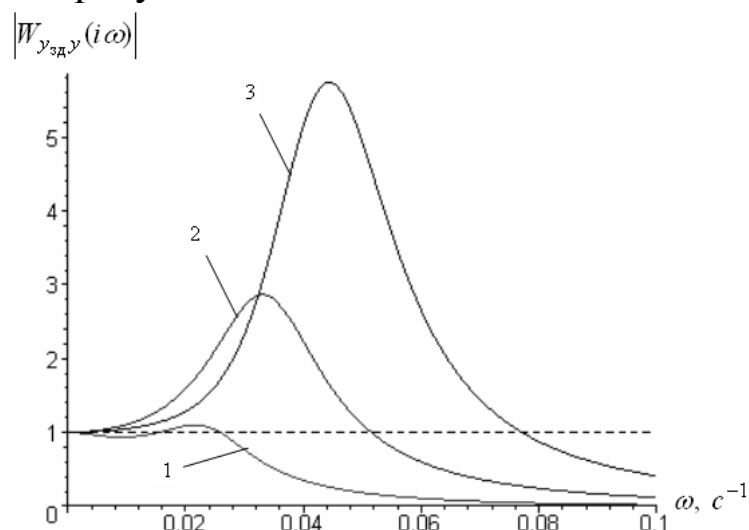


Рисунок 7.14 – АЧХ канала $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ замкнутых систем со следующими регуляторами: 1 – ПИ; 2 – ПИД; 3 – многопараметрический

Как видно из рис. 7.14, при замене ПИ-регулятора на ПИД-регулятор показатель колебательности системы M возрастает многократно, а в случае перехода от ПИД к многопараметрическому регулятору он увеличивается почти в два раза.

Влияние колебательности системы на качество переходных процессов показано на рисунке 7.15.

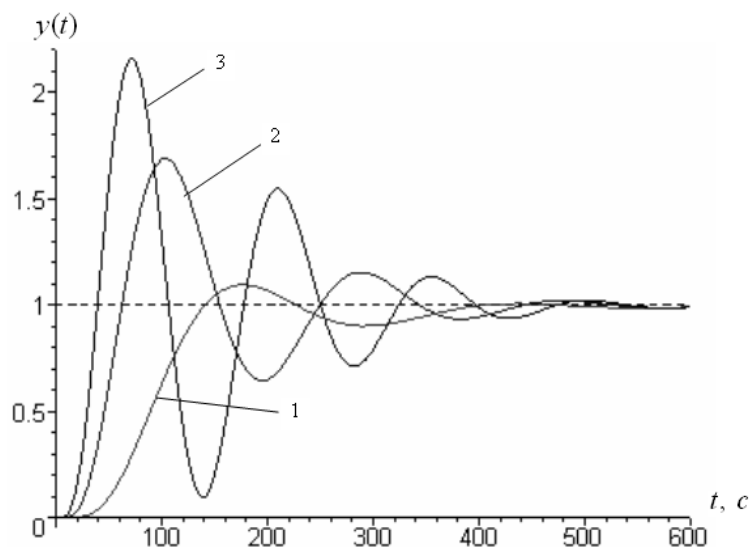


Рисунок 7.15 – Переходные процессы при действии по каналу $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ единичного ступенчатого возмущения в системах со следующими регуляторами: 1 – ПИ; 2 – ПИД; 3 – многопараметрический

Чтобы оценить эффективность систем управления с многопараметрическими регуляторами при совместном действии на них высокочастотных и низкочастотных возмущений рассмотрим пример.

Пример 7.5. Предположим, что передаточная функция объекта задана равенствами (7.1.16) и (7.1.17).

Сопоставим эффективность систем, в которых для управления заданным объектом используются ПИД и многопараметрический регуляторы.

Поскольку предполагается совместное действие на систему управления как низкочастотных, так и высокочастотных возмущений, то при расчете значений параметров настройки используемых регуляторов необходимо учитывать требования (6.3.34) и (7.1.56).

Для системы с ПИД-регулятором значения параметров настройки определяются в результате решения системы уравнений (7.1.57) – (7.1.60) с учетом требований (6.3.34) и (7.1.56).

В результате выполнения численных расчетов установим, что

$$\beta = 0,26; \quad m_{II} = 0,45465;$$

$$K_p = 0,61358; \quad T_D = 27,042 \text{ с}; \quad T_{II} = 43,754 \text{ с}.$$

Для системы с многопараметрическим регулятором для определения значений параметров настройки необходимо решить систему уравнений (7.1.75) – (7.1.77), принимая при этом во внимание требования (6.3.34) и (7.1.56).

В результате численного решения указанной системы имеем

$$\beta = 0,364; \quad m_{II} = 0,6807; \quad \eta = 0,020239 \text{ с}^{-1}; \quad (7.1.83)$$

$$K_p = 1,8955; \quad T_D = 49,486 \text{ с}; \quad T_{II} = 80,069 \text{ с}; \quad (7.1.84)$$

$$T_{2/3} = 185,87 \text{ с}; \quad T_{1/3} = 1313,7 \text{ с}.$$

В выполнении для обеих систем требования (7.1.56) можно убедиться по графикам их АЧХ, представленным на рисунке 7.16.

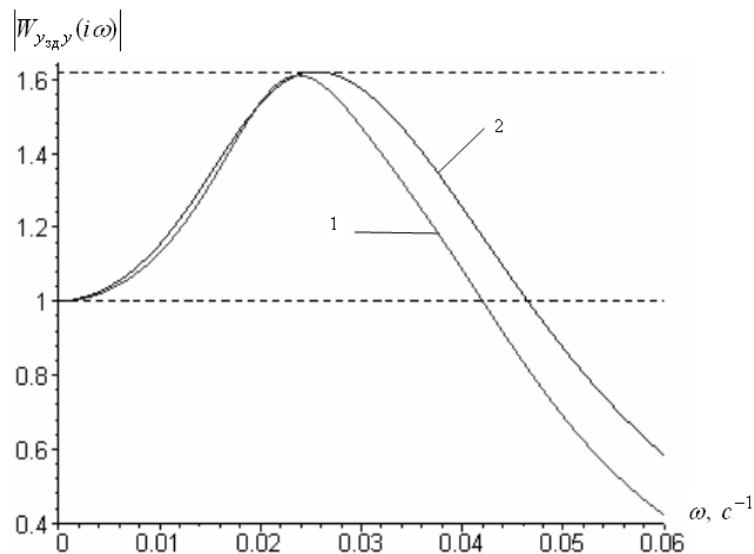


Рисунок 7.16 – АЧХ канала $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ замкнутых систем со следующими регуляторами: 1 – ПИД; 2 – многопараметрический

Об улучшении фильтрующих свойств системы при замене ПИД-регулятора на многопараметрический регулятор можно судить на основании рисунок 7.17.

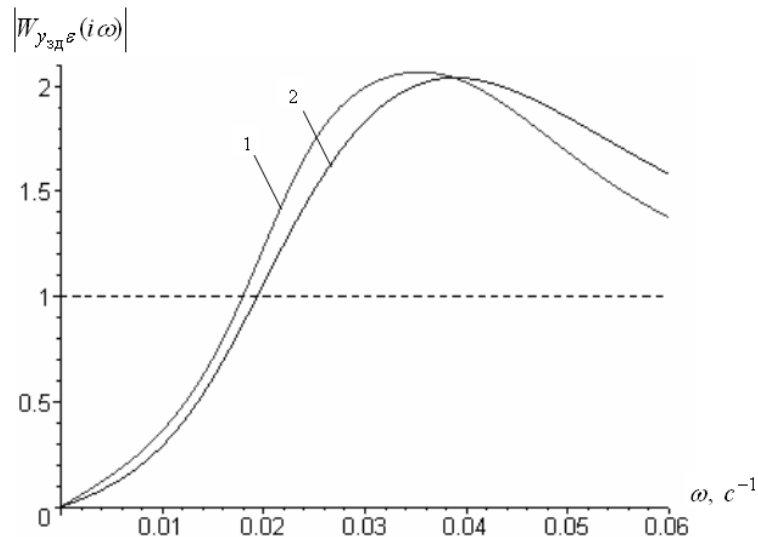


Рисунок 7.17 – АЧХ канала $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ замкнутых систем со следующими регуляторами: 1 – ПИД; 2 – многопараметрический

На основании рисунка 7.17 можно заключить, что в системе с многопараметрическим регулятором обеспечивается уменьшение значений АЧХ, отвечающей каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$, в весьма широком интервале частот, верхняя граница которого превышает резонансную частоту системы с ПИД-регулятором.

О качестве переходных процессов в рассматриваемых системах можно судить по рисунку 7.18.

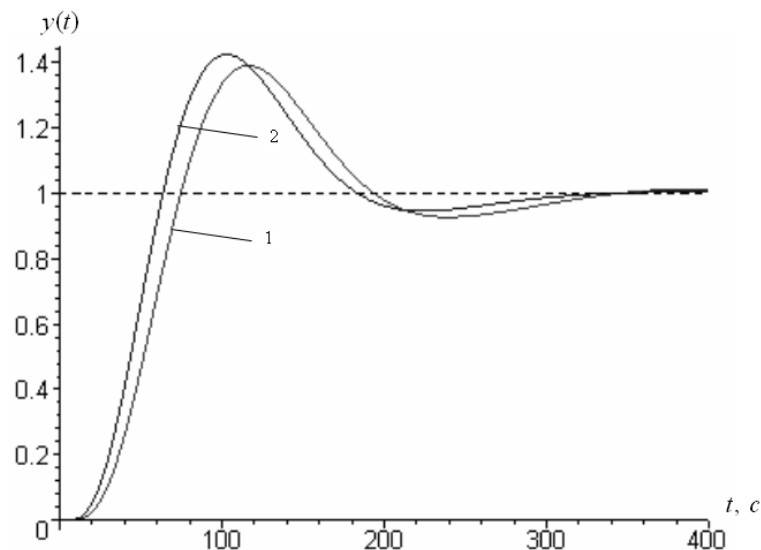


Рисунок 7.18 – Переходные процессы при действии по каналу $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ единичного ступенчатого возмущения в системах со следующими регуляторами: 1 – ПИД; 2 – многопараметрический

Как видно из рисунка 7.18, переходный процесс в системе с ПИД-регулятором оказывается более затянутым, чем в системе с многопараметрическим регулятором, но при этом величина перерегулирования у него несколько меньше.

Поэтому, если на систему изредка действуют ступенчатые возмущения значительной амплитуды, то более предпочтительно использовать ПИД-регулятор, т. к. в этом случае существует риск выхода управляемой величины $y(t)$ за допустимые пределы изменения, а благодаря их редкому появлению переходный процесс, несмотря на его затянутость, успеет завершиться еще до того, как на систему подействует очередное ступенчатое возмущение.

Однако при частом действии на систему ступенчатых возмущений целесообразно использовать многопараметрический регулятор, поскольку различие в перерегулировании для обеих систем не столь значительно, и более важным является достижение более быстрого затухания переходных процессов.

Таким образом, рассмотренный пример свидетельствует, что и в тех случаях, когда на систему действуют как низкочастотные, так и высокочастотные возмущения, многопараметрические регуляторы могут оказаться предпочтительнее традиционных ПИД-регуляторов, хотя при данных обстоятельствах их превосходство уже не столь впечатляюще, как при действии на систему лишь низкочастотных возмущений.

Отметим, что аналоговые регуляторы с передаточной функцией (7.1.68) достаточно сложно реализовать технически. Поэтому желательно заменить их более простыми устройствами с близкими динамическими характеристиками.

В качестве одного из таких устройств рассмотрим эквивалентный регулятор с передаточной функцией

$$W_{МП}^{экв}(s) = \frac{K_D s^5 + K_6 s^4 + K_5 s^3 + K_4 s^2 + K_3 s + K_{II}}{s(s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + 1)}, (7.1.85)$$

где K_D и K_{II} , а также K_r , $r = \overline{1,6}$ – параметры настройки.

Значения параметров настройки K_D и K_{II} эквивалентного регулятора (7.1.85) выбираются исходя из равенств

$$K_D = K_p T_D; K_{II} = K_p / T_{II}, \quad (7.1.86)$$

в которых значения параметров K_p , T_D и T_{II} совпадают со значениями соответствующих параметров настройки многопараметрического регулятора (7.1.68).

В таком случае, с учетом выражений (7.1.68), (7.1.85) и (7.1.86) установим, что

$$\lim_{|s| \rightarrow 0} W_{рег}(s) = \lim_{|s| \rightarrow 0} W_{экр}(s); \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} W_{рег}(s) = \lim_{|s| \rightarrow \infty} W_{экр}(s). \quad (7.1.87)$$

В силу равенств (7.1.87) частотные характеристики, соответствующие передаточным функциям $W_{рег}(s)$ и $W_{экр}(s)$, совпадают на высоких и низких частотах.

В области средних частот желаемая близость частотных характеристик достигается подходящим выбором значений параметров настройки K_r , $r = \overline{1,6}$ эквивалентного регулятора.

Поскольку качество управления определяется расположением доминирующих полюсов передаточных функций замкнутой системы, то значения указанных параметров необходимо выбрать так, чтобы расположения этих полюсов в системах с многопараметрическим регулятором и эквивалентным регулятором совпадали, что обеспечивается выполнением следующих равенств:

$$Z(s_k) = 0; \quad k = \overline{1,6}, \quad (7.1.88)$$

где

$$Z(s_k) = s_k W_{экр}(s_k) + \frac{s_k}{W_{об}(s_k)} = 0, \quad (7.1.89)$$

а s_k , $k = \overline{1,6}$ – доминирующие полюсы системы с многопараметрическим регулятором.

Таким образом, замена многопараметрического регулятора эквивалентным предполагает выполнение следующих действий:

1. Для многопараметрического регулятора с передаточной функцией вида (7.1.68) определяются значения его параметров настройки и доминирующие полюсы s_k , $k = \overline{1,6}$.

2. Определяются параметры настройки эквивалентного регулятора K_D и K_{II} на основании равенств (7.1.86).

3. В результате решения системы уравнений (7.1.88), (7.1.89) определяются неизвестные значения параметров настройки K_r , $r = \overline{1,6}$ эквивалентного регулятора.

Для оценки близости качества управления в системах с эквивалентными и многопараметрическими регуляторами рассмотрим пример.

Пример 7.6. Синтезируем эквивалентный регулятор для системы, рассмотренной в примере 7.5.

Поскольку расположение доминирующих полюсов для анализируемой системы определяется выражениями (7.1.73) и (7.1.74), то с учетом равенств (7.1.83) получим

$$\begin{aligned} s_1 &= -0,012872 + i0,018909 c^{-1}; \\ s_2 &= -0,012872 - i0,018909 c^{-1}; \end{aligned} \quad (7.1.89)$$

$$\begin{aligned} s_3 &= -0,020239 + i0,029731 c^{-1}; \\ s_4 &= -0,020239 - i0,029731 c^{-1}; \end{aligned} \quad (7.1.90)$$

$$\begin{aligned} s_5 &= -0,027606 + i0,040554 c^{-1}; \\ s_6 &= -0,027606 - i0,040554 c^{-1}. \end{aligned} \quad (7.1.91)$$

Воспользовавшись равенствами (7.1.86) установим, что

$$K_D = 93,802 c; \quad K_I = 0,023674 c^{-1}. \quad (7.1.92)$$

С учетом выражений (7.1.85) и (7.1.89) уравнения (7.1.88) принимают вид

$$\begin{aligned} &K_6 s_k^4 + K_5 s_k^3 + K_4 s_k^2 + K_3 s_k + K_2 \frac{s_k^3}{W_{o\bar{o}}(s_k)} + K_1 \frac{s_k^2}{W_{o\bar{o}}(s_k)} = \\ &= -K_D s_k^5 - K_I - \frac{s_k^4}{W_{o\bar{o}}(s_k)} - \frac{s_k}{W_{o\bar{o}}(s_k)}; \quad k = \overline{1,6}. \end{aligned} \quad (7.1.93)$$

На основании равенств (7.1.93) можно заключить о линейности полученной системы уравнений.

Решив систему (7.1.93) определим значения параметров настройки эквивалентного регулятора

$$K_6 = 26171 c^3; \quad K_5 = 2548,0 c^2; \quad K_4 = 117,41 c;$$

$$K_3 = 2,4143; \quad K_2 = 605,65 \text{ с}^2; \quad K_1 = 90,343 \text{ с}.$$

Из рисунка 7.19 видно, что показатель колебательности системы с эквивалентным регулятором немного больше, чем в случае системы с многопараметрическим регулятором.

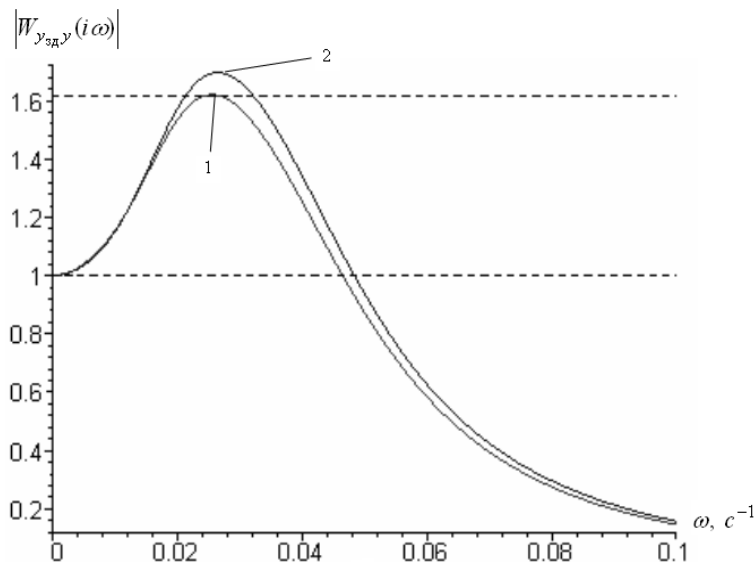


Рисунок 7.19 – АЧХ канала $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ замкнутых систем со следующими регуляторами: 1 – многопараметрический; 2 – эквивалентный

Из рисунка 7.20 можно сделать вывод, что системы с эквивалентным и многопараметрическим регуляторами обладают практически идентичными фильтрующими свойствами.

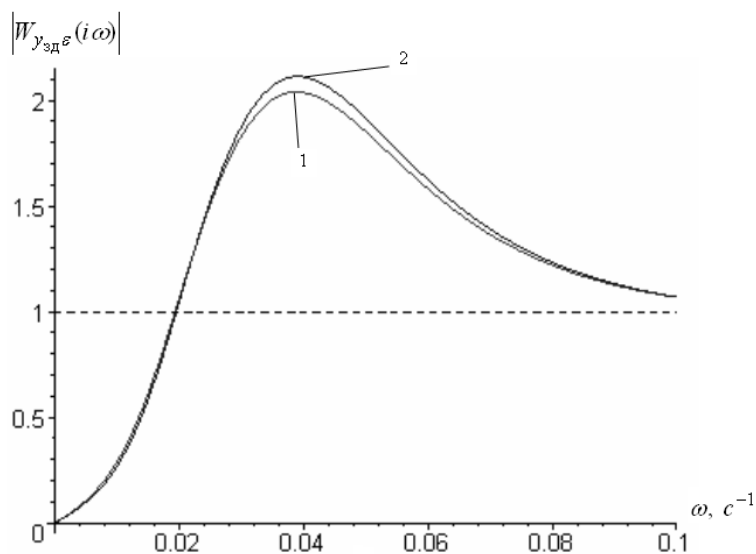


Рисунок 7.20 – АЧХ канала $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ замкнутых систем со следующими регуляторами: 1 – многопараметрический; 2 – эквивалентный

Близость АЧХ рассматриваемых систем, обеспечивает в итоге и практически равноценное качество протекающих в них переходных процессов, что иллюстрируется рисунком 7.21.

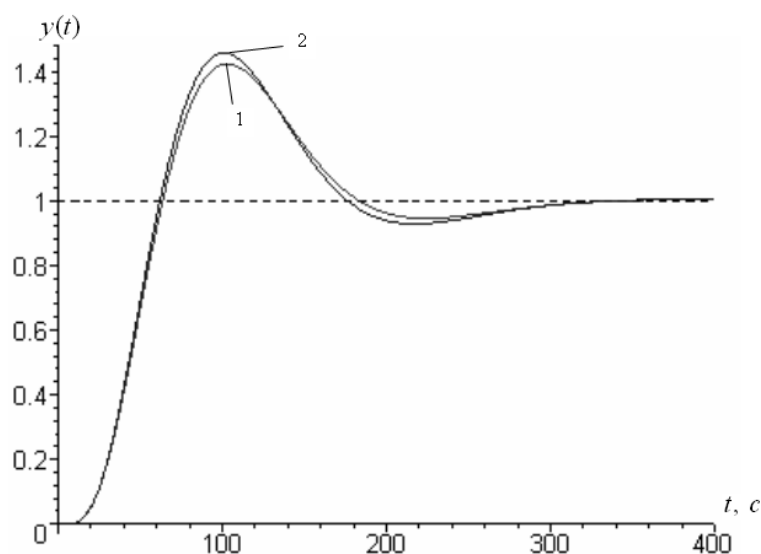


Рисунок 7.21 – Переходные процессы при действии по каналу $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ единичного ступенчатого возмущения в системах со следующими регуляторами: 1 – многопараметрический; 2 – эквивалентный

На основании рассмотренного примера можно сделать вывод, что в системах с многопараметрическим и эквивалентным регуляторами обеспечивается практически равноценное качество управления. Кроме того, данный пример убедительно подтверждает, что расположение доминирующих полюсов системы по существу определяет качество управления.

Однако возможность равноценной замены многопараметрического регулятора более простым эквивалентным регулятором, облегчает не только техническую, но и программную реализацию многопараметрических алгоритмов управления при использовании **цифровых систем**.

Рассмотрим теперь **каскадные системы**, относящиеся к наиболее простым представителям обширного класса многосвязных систем.

Функциональная схема каскадных систем представлена на рисунке 3.2.

Эквивалентное уравнение каскадной системы (3.1.35) преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Xi(s) &= \frac{s}{W_{об}^{2л}(s)W_{об}^{6с}(s)} + \frac{s}{W_{об}^{2л}(s)}W_{рег}^{6с}(s) + \\ &+ \frac{s}{W_{об}^{6с}(s)}W_{рег}^{6с}(s)W_{рег}^{2л}(s) = 0, \end{aligned} \quad (7.1.94)$$

где

$$\Xi(s) = \frac{s\Delta_{\vartheta}(s)}{W_{об}^{2л}(s)W_{об}^{6с}(s)}.$$

Согласно уравнению (7.1.94) каскадная система может рассматриваться как односвязная система, с эквивалентным объектом, которому отвечает передаточная функция

$$W_{об}^{экв}(s) = W_{об}^{2л}(s)W_{об}^{6с}(s), \quad (7.1.95)$$

и эквивалентным регулятором, со следующей передаточной функцией:

$$W_{рег}^{экв}(s) = \frac{s}{W_{об}^{2л}(s)}W_{рег}^{6с}(s) + \frac{s}{W_{об}^{6с}(s)}W_{рег}^{6с}(s)W_{рег}^{2л}(s). \quad (7.1.96)$$

Как видно из выражения (7.1.95), эквивалентный объект состоит из двух последовательно соединенных между собой объектов с передаточными функциями $W_{об}^{2л}(s)$ и $W_{об}^{6с}(s)$.

Согласно выражению (7.1.96) эквивалентный регулятор состоит из двух параллельно соединенных звеньев с передаточными функциями $W_1^{3б}(s)$ и $W_2^{3б}(s)$, причем

$$W_1^{3б}(s) = \frac{1}{W_{об}^{2л}(s)}W_{рег}^{6с}(s); \quad W_2^{3б}(s) = \frac{1}{W_{об}^{6с}(s)}W_{рег}^{6с}(s)W_{рег}^{2л}(s). \quad (7.1.97)$$

С учетом выражений (7.1.95) и (7.1.96) уравнение (7.1.94) принимает вид

$$\Xi(s) = \frac{s}{W_{об}^{экв}(s)} + sW_{рег}^{экв}(s) = 0. \quad (7.1.98)$$

Сопоставив уравнения (7.1.98) и (7.1.1), приходим к выводу об одинаковом расположении полюсов каскадной и односвязной системы с эквивалентными объектом и регулятором.

В таком случае число доминирующих полюсов каскадной системы n_d , определяется по формуле (7.1.2), где в качестве n_p используется число *взаимно независимых параметров* настройки звена с передаточной функцией $W_2^{36}(s)$, заданной выражением (7.1.97). В качестве таких параметров рассматриваются комбинации при одинаковых степенях s из параметров настройки главного и вспомогательного регуляторов.

Для иллюстрации полученных выводов рассмотрим случай, когда в качестве главного и вспомогательного регуляторов используются ПИ-регуляторы, т. е.

$$W_{рег}^{2л}(s) = K_p^{2л} + \frac{K_p^{2л}}{sT_{И}^{2л}}; W_{рег}^{6с}(s) = K_p^{6с} + \frac{K_p^{6с}}{sT_{И}^{6с}}. \quad (7.1.99)$$

Исходя из выражений (7.1.97) и (7.1.99) получим

$$W_2^{36}(s) = \frac{K_{21}^{36} + K_{22}^{36} \frac{1}{s} + K_{23}^{36} \frac{1}{s^2}}{W_{об}^{6с}(s)}; \quad (7.1.100)$$

$$W_1^{36}(s) = \frac{K_{11}^{36} + K_{12}^{36} \frac{1}{s}}{W_{об}^{2л}(s)}, \quad (7.1.101)$$

где

$$K_{21}^{36} = K_p^{гл} K_p^{6с}; K_{22}^{36} = K_p^{гл} K_p^{6с} \left(\frac{1}{T_{И}^{6с}} + \frac{1}{T_{И}^{гл}} \right);$$

$$K_{22}^{36} = \frac{K_p^{гл} K_p^{6с}}{T_{И}^{гл} T_{И}^{6с}}; \quad (7.1.102)$$

$$K_{11}^{36} = K_p^{6с}; K_{12}^{36} = \frac{K_p^{6с}}{T_{И}^{6с}}. \quad (7.1.103)$$

Определим число взаимно независимых параметров настройки звена с передаточной функцией (7.1.100), которые могут принимать произвольные значения. Для этого, воспользовавшись выражениями (7.1.102) выразим параметры настройки главного и вспомогательного регуляторов через параметры настройки K_{21}^{36} , K_{22}^{36} и K_{23}^{36} указанного звена.

В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$K_p^{2l} = \frac{K_{21}^{36}}{K_p^{6c}}; \quad (7.1.104)$$

$$T_{II}^{6c} + T_{II}^{2l} = \frac{K_{22}^{36}}{K_{23}^{36}}; \quad (7.1.105)$$

$$T_{II}^{6c} T_{II}^{2l} = \frac{K_{21}^{36}}{K_{23}^{36}}. \quad (7.1.106)$$

На основании уравнения (7.1.104) можно заключить о возможности независимого изменения параметра K_{21}^{36} , т.к. при любых вещественных значениях K_{21}^{36} и K_p^{6c} найдется такое значение K_p^{2l} , при котором обеспечивается выполнение равенства (7.1.104).

Однако параметры K_{22}^{36} и K_{23}^{36} не всегда могут изменяться независимо друг от друга.

Действительно, систему уравнений (7.1.105) и (7.1.106) можно разрешить лишь в том случае, когда квадратное уравнение

$$\zeta^2 + \frac{K_{22}^{36}}{K_{23}^{36}} \zeta + \frac{K_{21}^{36}}{K_{23}^{36}} = 0,$$

имеет вещественные корни, что возможно лишь при выполнении неравенства

$$K_{22}^{36} \geq 4K_{21}^{36} K_{23}^{36}. \quad (7.1.107)$$

Таким образом, если имеет место неравенство (7.1.107), то звено с передаточной функцией (7.1.100) может рассматриваться как регулятор с параметрами настройки K_{21}^{36} , K_{22}^{36} и K_{23}^{36} , способными независимо друг от друга принимать требуемые значения.

При данных обстоятельствах $n_p = 3$ и значения параметров K_{21}^{36} , K_{22}^{36} и K_{23}^{36} следует выбирать таким образом, чтобы обеспечить выполнение требований (7.1.28) к расположению доминирующих полюсов каскадной системы.

В тех случаях, когда неравенство (7.1.107) выполнить не удастся, следует пересмотреть структуру регулирующих звеньев, переме-

стив слагаемое $K_{23}^{36} / s^2 / W_{об}^{6c}(s)$ из второго звена в первое.

В результате передаточные функции второго и первого регулируемых звеньев принимают вид

$$W_2^{36}(s) = \frac{K_{21}^{36} + K_{22}^{36} \frac{1}{s}}{W_{об}^{6c}(s)}; \quad (7.1.108)$$

$$W_1^{36}(s) = \frac{K_{11}^{36} + K_{12}^{36} \frac{1}{s}}{W_{об}^{2l}(s)} + \frac{K_{23}^{36} \frac{1}{s^2}}{W_{об}^{6c}(s)}. \quad (7.1.109)$$

Согласно выражению (7.1.108) выполняется равенство $n_p = 2$, и значения параметров K_{21}^{36} и K_{22}^{36} выбираются в соответствии с требованиями (7.1.8) к расположению доминирующих полюсов.

Что касается первого регулирующего звена, передаточная функция которого может быть задана выражениями (7.1.101) или (7.1.109), то параметр его настройки K_{11}^{36} способен изменяться независимо и его значение выбирается так, чтобы выполнялось требование

$$\eta \rightarrow \max. \quad (7.1.110)$$

Поскольку остальные параметры первого регулирующего звена зависят, то их значения определяются в результате выполнения тех или иных требований к расположению полюсов каскадной системы.

Сделаем ряд замечаний по поводу выбора главного и вспомогательного регуляторов.

Поскольку главный регулятор используется для управления объектом по наиболее инерционному каналу с передаточной функцией $W_{об}^{2l}(s)$, то в качестве такого регулятора целесообразно выбрать наиболее эффективный среди существующих линейных регуляторов.

На основании выполненного анализа можно утверждать, что к таким регуляторам относятся многопараметрические регуляторы, а в некоторых случаях и ПИД-регуляторы.

Для реализации вспомогательного регулятора целесообразно выбрать П-регулятор, т. к. другие виды типовых регуляторов содержат интегральную или дифференциальную составляющие, уже вхо-

дящие в ПИД или многопараметрический законы управления, и поэтому введение дополнительной интегральной компоненты приведет к нежелательному повышению инерционности замкнутой системы, а наличие второй дифференциальной составляющей может чрезмерно увеличить влияние на систему шумов и помех, присутствующих в сигналах ошибок управления $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$.

Таким образом, передаточная функция главного регулятора определяется выражениями (7.1.68) или (2.3.4), а передаточная функция вспомогательного регулятора задается выражением (2.3.1).

Если в качестве главного регулятора применяется ПИД-регулятор, то в зависимости от выбранной стратегии управления доминирующие полюсы системы располагаются на комплексной плоскости в соответствии с требованиями (7.1.28) или (7.1.53), а когда главный регулятор реализует многопараметрический закон управления, используются требования (7.1.69), либо (7.1.73), (7.1.74).

Отметим также, что эффективность применения каскадных систем во многом определяется тем, насколько удачно выбрана вспомогательная величина $\mu(t)$, изменение которой влияет на основную управляемую величину $y(t)$, причем инерционность канала управления вспомогательной величиной $\mu(t)$ должна быть значительно меньше инерционности канала управления основной величиной $y(t)$.

Для иллюстрации преимуществ каскадных систем перед односвязными рассмотрим пример.

Пример 7.7. Предположим, что передаточная функция канала управления основной величиной $y(t)$ задана выражениями (7.1.16), (7.1.17) а передаточную функцию канала управления вспомогательной величиной $\mu(t)$ зададим следующим выражением:

$$W_{об}^{вс}(s) = \frac{K_{об}^{вс}}{(1 + T_4 s)^3},$$

где

$$K_{об}^{вс} = 1,5; T_4 = 3 \text{ с}.$$

В качестве главного и вспомогательного регуляторов будем соответственно использовать ПИД-регулятор, передаточную функцию которого представим в виде

$$W_{рег}^{2л}(s) = K_p^{2л} T_D s + K_p^{2л} + \frac{K_p^{2л}}{s T_I}, \quad (7.1.111)$$

и П-регулятор с передаточной функцией

$$W_{рег}^{6с}(s) = K_p^{6с}. \quad (7.1.112)$$

В рассматриваемом случае передаточные функции звеньев, входящих в состав эквивалентного регулятора (7.1.96), с учетом выражений (7.1.111) и (7.1.112) принимают вид

$$W_2^{36}(s) = \frac{K_{21}^{36} s + K_{22}^{36} + K_{23}^{36} \frac{1}{s}}{W_{об}^{6с}(s)}; \quad W_1^{36}(s) = \frac{K_{11}^{36}}{W_{об}^{2л}(s)},$$

где

$$K_{21}^{36} = K_p^{6с} K_p^{2л} T_D; \quad K_{22}^{36} = K_p^{6с} K_p^{2л}; \quad K_{23}^{36} = \frac{K_p^{6с} K_p^{2л}}{T_I};$$

$$K_{11}^{36} = K_p^{6с} \quad (7.1.113)$$

Согласно равенствам (7.1.113) все параметры настройки регулирующих звеньев взаимно независимы.

Выберем стратегию управления, обеспечивающую сбалансированный по методу золотого сечения отклик системы на действие низкочастотных и высокочастотных возмущений.

При данных обстоятельствах расположение доминирующих полюсов устанавливается на основе требований (7.1.53), причем значения величин m_{II} и β определяются соответственно согласно требованиям (6.3.34) и (7.1.56).

Поскольку каскадная система содержит три контура управления (два контура управления вспомогательной и один основной величинами), и каждый из этих контуров имеет свой показатель колебательности, то необходимо определить, какой из них целесообразно использовать в требовании (7.1.56).

Ввиду того, что качество управления каскадной системой определяется изменением основной величины $y(t)$, то целесообразно использовать показатель колебательности M , отвечающий АЧХ замкнутой системы $\left| W_{y_{зд}, y}(i\omega) \right|$.

В результате расчетов, выполненных с учетом сделанных замечаний, для параметров настройки регулирующих звеньев получим следующие значения:

$$\begin{aligned} K_{21}^{36} &= 133,24 \text{ с}; K_{22}^{36} = 5,3330; K_{23}^{36} = 0,13192 \text{ с}^{-1}; \\ K_{11}^{36} &= 4. \end{aligned} \quad (7.1.114)$$

Принимая во внимание выражения (7.1.113) и равенства (7.1.114) имеем

$$K_p^{2l} = 1,3333; T_D = 24,984 \text{ с}; T_I = 40,425 \text{ с}; K_p^{6c} = 4. \quad (7.1.115)$$

При выполнении равенств (7.1.115) величины, характеризующие расположение доминирующих полюсов системы, принимают следующие значения:

$$\beta = 0,248; m_{II} = 0,4664; \eta = 0,015768 \text{ с}^{-1}.$$

Значения параметров настройки ПИД-регулятора, используемого в односвязной системе для управления рассматриваемым объектом, были установлены в примере 7.5.

О колебательности сравниваемых систем можно судить по рис. 7.22, согласно которому для каждой из них выполняется требование (7.1.56).

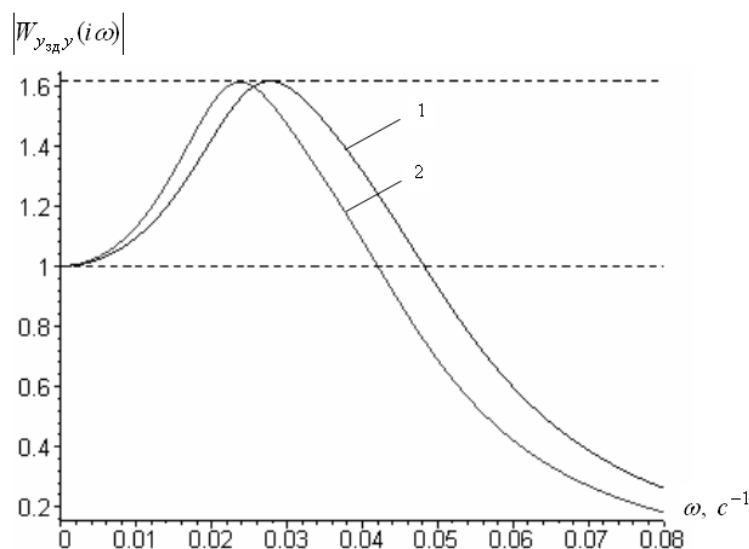


Рисунок 7.22 – АЧХ канала $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ замкнутых систем:

1 – каскадная; 2 – односвязная

Графики АЧХ, представленные на рисунке 7.23, характеризуют фильтрующие свойства анализируемых систем.

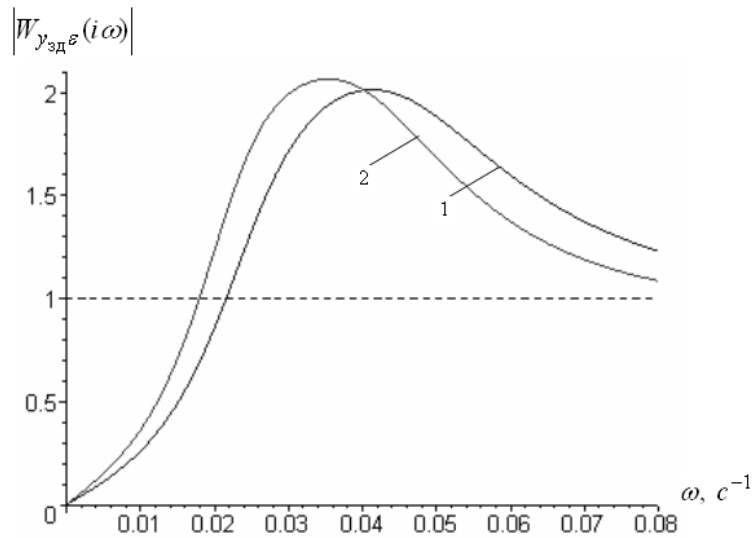


Рис. 7.23. АЧХ канала $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ замкнутой системы:
 1 – каскадная; 2 – односвязная

На основании рисунка 7.23 можно сделать вывод о том, что фильтрующие свойства канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ каскадной системы значительно лучше, чем у односвязной.

Переходные процессы в рассматриваемых системах представлены на рисунке 7.24.

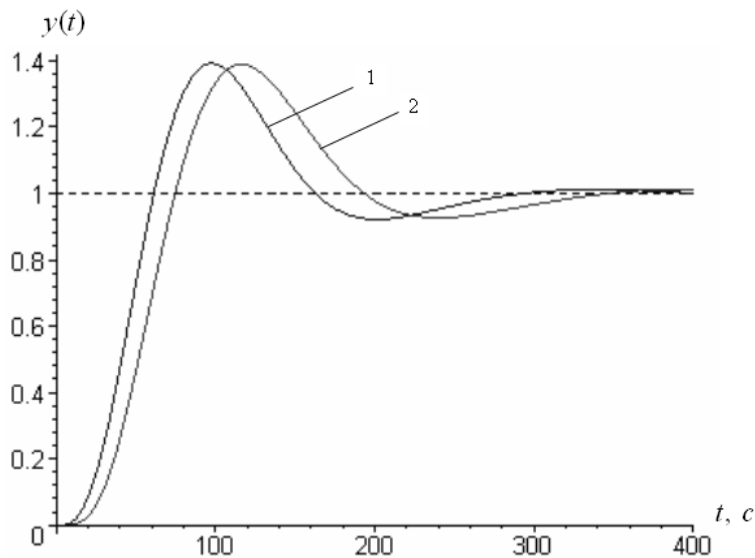


Рисунок 7.24 – Переходные процессы при действии по каналу $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ единичного ступенчатого возмущения в системах:
 1 – каскадная; 2 – односвязная

Как видно из рисунка 7.24, переходный процесс в каскадной системе затухает заметно быстрее, чем в односвязной, а величины перерегулирования практически одинаковые.

Таким образом, рассмотренный пример позволил весьма убедительно продемонстрировать преимущества каскадных систем перед односвязными.

Следует обратить внимание, на то, что член $sW_{pez}^{bc}(s)/W_{об}^{zl}(s)$ в выражении (7.1.96) для передаточной функции эквивалентного регулятора, появляется благодаря наличию дополнительного по сравнению с односвязной системой канала передачи $u_2(t) \rightarrow \mu(t)$ управляющего воздействия $u_2(t)$ вспомогательного регулятора.

Применение в отсутствие этого канала последовательно соединенных ПИД и П-регуляторов, не дало бы никаких преимуществ перед обычной односвязной системой управления с ПИД-регулятором.

Поэтому создание дополнительных каналов для управления объектом позволяет наиболее полно реализовать имеющиеся возможности повышения качества управления.

Создавая такие каналы и используя уже имеющиеся, приходим к **многосвязным системам** управления.

В целях наглядной иллюстрации методов робастного управления многосвязными системами рассмотрим одну из простейших среди данных систем, а именно, систему с двумя входами и выходами.

При данных обстоятельствах выполняются равенства

$$\mathbf{W}^{об}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}^{об}(s) & W_{12}^{об}(s) \\ W_{21}^{об}(s) & W_{22}^{об}(s) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{W}^{pez}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}^{pez}(s) & W_{12}^{pez}(s) \\ W_{21}^{pez}(s) & W_{22}^{pez}(s) \end{bmatrix}. \quad (7.1.116)$$

В рассматриваемом случае эквивалентное уравнение (3.1.44) с учетом выражений (7.1.116) принимает вид

$$\Delta_9(s) = [W_{11}^{об}(s)W_{22}^{об}(s) - W_{12}^{об}(s)W_{21}^{об}(s)][W_{11}^{pez}(s)W_{22}^{pez}(s) - W_{12}^{pez}(s)W_{21}^{pez}(s)] + W_{11}^{об}(s)W_{11}^{pez}(s) + W_{12}^{об}(s)W_{21}^{pez}(s) + W_{21}^{об}(s)W_{12}^{pez}(s) + W_{22}^{об}(s)W_{22}^{pez}(s) + 1 = 0. \quad (7.1.116)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} W_{11}^{o\bar{o}}(s)W_{22}^{o\bar{o}}(s) - W_{12}^{o\bar{o}}(s)W_{21}^{o\bar{o}}(s) &= \det \mathbf{W}^{o\bar{o}}(s); \\ W_{11}^{pe\bar{z}}(s)W_{22}^{pe\bar{z}}(s) - W_{12}^{pe\bar{z}}(s)W_{21}^{pe\bar{z}}(s) &= \det \mathbf{W}^{pe\bar{z}}(s); \\ W_{12}^{o\bar{o}}(s)W_{21}^{pe\bar{z}}(s) + W_{21}^{o\bar{o}}(s)W_{12}^{pe\bar{z}}(s) + W_{22}^{o\bar{o}}(s)W_{22}^{pe\bar{z}}(s) &= \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n W_{kh}^{o\bar{o}}(s)W_{hk}^{pe\bar{z}}(s), \end{aligned}$$

то уравнение (7.1.116) можно записать более компактно

$$\begin{aligned} \Delta_{\vartheta}(s) &= \det \mathbf{W}^{o\bar{o}}(s) \det \mathbf{W}^{per}(s) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n W_{kh}^{o\bar{o}}(s)W_{kh}^{o\bar{o}}(s)W_{hk}^{per}(s) + 1 = 0, \end{aligned} \quad (7.1.117)$$

где $n = 2$.

Отметим, что важным преимуществом уравнения (7.1.117) перед уравнением (7.1.116) является возможность его применения и в тех случаях, когда $n > 2$.

Выполнив в уравнении (7.1.117) замену

$$E(s) = \frac{s\Delta_{\vartheta}(s)}{\prod_{k=1}^n \prod_{h=1}^n W_{kh}^{o\bar{o}}(s)},$$

приведем его к виду

$$\begin{aligned} E(s) &= s \frac{\det \mathbf{W}^{o\bar{o}}(s) \det \mathbf{W}^{pe\bar{z}}(s)}{\prod_{k=1}^n \prod_{h=1}^n W_{kh}^{o\bar{o}}(s)} + s \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n W_{kh}^{o\bar{o}}(s)W_{hk}^{pe\bar{z}}(s)}{\prod_{k=1}^n \prod_{h=1}^n W_{kh}^{o\bar{o}}(s)} + \\ &+ \frac{s}{\prod_{k=1}^n \prod_{h=1}^n W_{kh}^{o\bar{o}}(s)} = 0. \end{aligned} \quad (7.1.118)$$

Обозначив

$$W_{pe\bar{z}}^{э\bar{k}\bar{o}}(s) = \frac{\det \mathbf{W}^{o\bar{o}}(s) \det \mathbf{W}^{pe\bar{z}}(s)}{\prod_{k=1}^n \prod_{h=1}^n W_{kh}^{o\bar{o}}(s)} + \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n W_{kh}^{o\bar{o}}(s)W_{hk}^{pe\bar{z}}(s)}{\prod_{k=1}^n \prod_{h=1}^n W_{kh}^{o\bar{o}}(s)};$$

$$W_{об}^{экв}(s) = \prod_{k=1}^n \prod_{h=1}^n W_{kh}^{об}(s),$$

заменяем уравнение (7.1.118) следующим:

$$E(s) = W_{рег}^{экв}(s) + \frac{s}{W_{об}^{экв}(s)} = 0. \quad (7.1.119)$$

Таким образом, для многосвязных систем, так же как и для каскадных, задача достижения робастных свойств по существу сводится к рассмотренному ранее случаю односвязных систем, т.к. уравнения (7.1.118) и (7.1.119) имеют одинаковые корни.

Эквивалентный регулятор представим в виде двух параллельно соединенных звеньев со следующими передаточными функциями:

$$W_1^{3б}(s) = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n W_{kh}^{об}(s) W_{hk}^{рег}(s)}{\prod_{k=1}^n \prod_{h=1}^n W_{kh}^{об}(s)};$$

$$W_2^{3б}(s) = \frac{\det \mathbf{W}^{об}(s) \det \mathbf{W}^{рег}(s)}{\prod_{k=1}^n \prod_{h=1}^n W_{kh}^{об}(s)}.$$

Как и в случае каскадных систем, параметры настройки звеньев с передаточными функциями $W_2^{3б}(s)$ и $W_1^{3б}(s)$ соответственно выбираются так, чтобы обеспечить выполнение заданных требований к расположению полюсов системы и требования максимального быстродействия (7.1.110).

В заключение необходимо отметить важное преимущество многосвязных систем, заключающееся в том, что передаточные функции матрицы $\mathbf{W}^{рег}(s)$ перемножаются, хотя при этом отсутствует последовательное включение регуляторов.

Следовательно, применение многосвязных систем способствует повышению качества управления объектом, т.к. позволяет увеличить число параметров эквивалентного регулятора, не используя при этом в алгоритмах управления производных по времени выше первого порядка.

7.2. Методы расчета параметров настройки регуляторов при ограничениях на величину показателя колебательности

При использовании ограничений на величину показателя колебательности M расчет параметров настройки осуществляется на основе данных о КЧХ объекта $W_{об}(i\omega)$. Эту динамическую характеристику управляемого объекта экспериментально определить значительно проще, чем расширенную КЧХ объекта $W_{об}(-\eta + i\frac{\eta}{m_{II}})$, ис-

пользуемую в методах расчета, основанных на определенных требованиях к расположению доминирующих полюсов системы. Поэтому методы расчета параметров настройки регуляторов, использующие ограничения на величину M , получили широкую известность.

Главным их недостатком является довольно ограниченная применимость, т.к. обычно они используются для односвязных систем, а при попытках их распространения на каскадные и многосвязные системы встречаются серьезные трудности. Кроме того, с помощью показателя колебательности динамические свойства замкнутой системы характеризуются косвенным образом и к тому же не столь детально, как при использовании требований к расположению доминирующих полюсов системы.

При расчетах параметров настройки регуляторов с использованием показателя колебательности (3.3.5), для наделения системы свойством робастности применяется требование (5.3.33), дополненное ограничением (3.3.6).

Поскольку методы расчета параметров настройки регуляторов при ограничениях на величину показателя колебательности в основном применяются для односвязных систем, то при использовании в этих системах ПИ и ПИД-регуляторов, требование (5.3.33) можно заменить следующим:

$$\frac{K_p}{T_{II}} = \max. \quad (7.2.1)$$

Действительно, рассмотрим односвязную систему с ПИД-регулятором и объектом, передаточная функция которого имеет вид

$$W(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{h=0}^n a_h s^h},$$

где n и m – целые неотрицательные числа ($n \geq m$); a_h и b_k – вещественные коэффициенты.

Характеристическое уравнение данной системы можно записать следующим образом:

$$\Delta(s) = s \sum_{h=0}^n a_h s^h + \left(K_p T_D s^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_I} \right) \sum_{k=0}^m b_k s^k = 0.$$

Поскольку

$$\alpha_0 = \Delta(0) = \frac{K_p}{T_I} b_0,$$

и $b_0 = \text{const}$, то при выполнении требования (7.2.1) выполняется также требование (5.3.33).

Для оценки качества управления, достигающегося при использовании требования (7.2.1) с учетом ограничения (3.3.6) рассмотрим пример.

Пример 7.8. Пусть канал управления объекта описывается передаточной функцией

$$W_{об}(s) = \frac{K_{об}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)^3},$$

где

$$K_{об} = 3,32; \quad T_1 = 55 \text{ с}; \quad T_2 = 22 \text{ с}.$$

Полагая

$$M = M_{II} = 1,66,$$

в результате численных расчетов установим, что требование (7.2.1) с учетом ограничения (3.3.6) для односвязной системы с ПИД регулятором выполняется при следующих значениях параметров настройки данного регулятора:

$$K_p = 1,03; \quad T_D = 57 \text{ с}; \quad T_I = 28,5 \text{ с}. \quad (7.2.2)$$

При значениях параметров настройки (7.2.2)) имеют место равенства

$$\frac{K_p}{T_I} = 0,03614 \text{ c}^{-1}; \quad (7.2.3)$$

$$\frac{T_I}{T_D} = 0,5. \quad (7.2.4)$$

АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ представлена на рисунке 7.25.

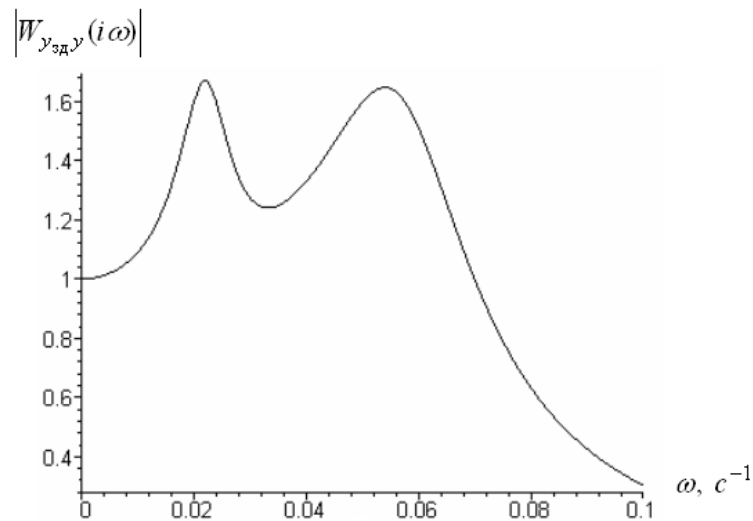


Рисунок 7.25 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$

Вид этой АЧХ отличается от всех полученных ранее аналогичных характеристик, т.к. она имеет два равновеликих резонансных пика.

Чтобы понять, почему АЧХ замкнутой системы имеет столь необычный вид, проанализируем расположение полюсов системы, которое определяется равенствами

$$s_1 = -0,1161 \text{ c}^{-1}; s_{2,3} = -0,01404 \pm i0,05667 \text{ c}^{-1}; \quad (7.2.5)$$

$$s_{4,5} = -0,005173 \pm i0,02216 \text{ c}^{-1}. \quad (7.2.6)$$

Согласно равенствам (7.2.5) и (7.2.6) система имеет две пары комплексно–сопряженных полюсов $s_{2,3}$ и $s_{4,5}$ разведенных вдоль вещественной оси на значительное расстояние друг от друга, что и объясняет наличие двух резонансных пиков.

Исходя из равенств (7.2.5) и (7.2.6) установим, что

$$\eta = 0,005173 \text{ c}^{-1}. \quad (7.2.7)$$

Два резонансных пика, но не равновеликие, имеет и АЧХ, соответствующая каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$, график которой приведен на рисунок 7.26.

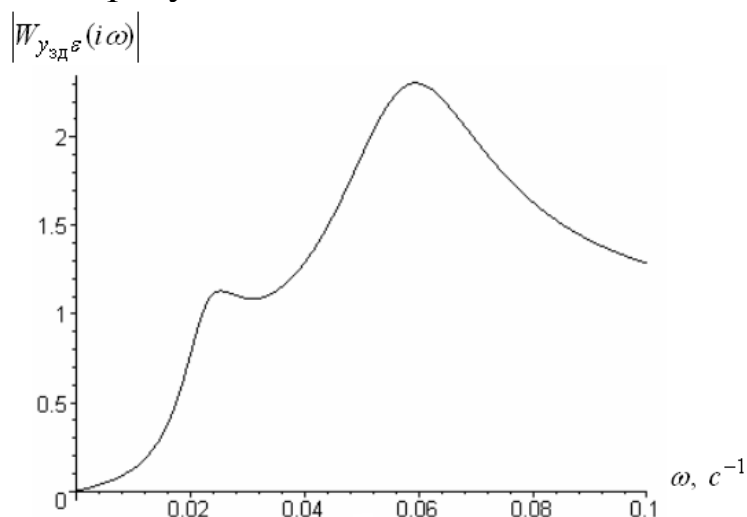


Рисунок 7.26 – График АЧХ, соответствующей каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$

Необходимо отметить, что согласно теореме 6.3 чрезмерное разведение комплексно-сопряженных доминирующих полюсов системы приводит к существенному снижению ее быстродействия.

Кроме того, при использовании данного метода расчета невозможно, как это видно из равенства (7.2.4), распределить веса интегральной и дифференциальной компонент ПИД-закона управления по золотой пропорции (6.3.34).

Таким образом, в примере 7.8 были определены показатели качества робастной односвязной системы с ПИД-регулятором, достигающиеся при выполнении требования (5.3.33) с учетом ограничения на запас устойчивости (3.3.6), и указаны присущие данному методу расчета недостатки.

Для их исправления был разработан метод, названный **методом вспомогательной функции**.

В результате проведенных исследований было установлено [7, 8], что взаимосвязь между параметрами настройки ПИД-регулятора и показателем колебательности замкнутой системы M определяется выражением

$$\frac{K_p}{T_H} = \frac{M^2 \omega}{(M^2 - 1)(A + a \sin \gamma)} \left[\cos \gamma + \omega T_D \sin \gamma + \frac{a}{A} \sin \gamma \cos \gamma - \sqrt{\left(\frac{1}{M}\right)^2 \left(1 + \frac{a}{A} \sin \gamma\right)^2 - \left(\frac{a}{A}\right)^2 \sin^4 \gamma} \right], \quad (7.2.8)$$

где

$$\gamma = \gamma(\omega) = -\arg W_{об}(i\omega) - \frac{\pi}{2}; \quad A = A(\omega) = |W_{об}(i\omega)|,$$

причем a – вещественный параметр, а $W_{об}(i\omega)$ – КЧХ канала управления объекта.

В тех случаях, когда требование (7.2.1) выполняется не на границе области допустимых значений a , то функция (7.2.8) принимает экстремальное значение при его выполнении, т.е. выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{K_p}{T_H} \right) = 0. \quad (7.2.9)$$

Подставив в равенство (7.2.9) выражение (7.2.8) получим уравнение

$$\frac{1}{A + a \sin \gamma} \left[\frac{\sin \gamma \cos \gamma}{A} - \frac{1}{A} \left(\frac{A + a \sin \gamma}{M^2 \sin \gamma} - a \sin^2 \gamma \right) \times \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\left(\frac{A + a \sin \gamma}{M \sin \gamma}\right)^2 - \sin^2 \gamma}} \right] - \sin \gamma \frac{\cos \gamma + \omega T_D \sin \gamma + \frac{a \sin \gamma \cos \gamma}{A}}{(A + a \sin \gamma)^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{(A + a \sin \gamma)^2} \sqrt{\left(\frac{A + a \sin \gamma}{M \sin \gamma}\right)^2 - a^2 \sin^2 \gamma} = 0. \quad (7.2.10)$$

Уравнение (7.2.10) имеет два решения

$$a_{1,2} = \frac{\omega T_D A}{\sin \gamma} \left[\frac{\omega T_D \pm \sqrt{M^2 \sin^2 \gamma (1 + \omega^2 T_D^2)}}{M^2 \sin^2 \gamma (1 + \omega^2 T_D^2) - \omega^2 T_D^2} \right], \quad (7.2.11)$$

причем при расчетах параметров настройки получают правильные результаты, если в выражении (7.2.11) выбрать положительный знак, т. е.

$$a = \frac{\omega T_D A}{\sin \gamma} \left[\frac{\omega T_D + \sqrt{M^2 \sin^2 \gamma (1 + \omega^2 T_D^2)}}{M^2 \sin^2 \gamma (1 + \omega^2 T_D^2) - \omega^2 T_D^2} \right] =$$

$$= \frac{A}{\sin \gamma} \left(\frac{\omega T_D}{M \sin \gamma \sqrt{1 + \omega^2 T_D^2} - \omega T_D} \right). \quad (7.2.12)$$

Подставив выражение (7.2.12) в равенство (7.2.8) имеем

$$F_{ПИД}^{вс}(\omega) = \frac{K_p}{T_I} = \frac{M\omega}{(M^2 - 1)A} (M \cos \gamma +$$

$$+ T_D \omega M \sin \gamma - \sqrt{1 - T_D^2 \omega^2}). \quad (7.2.13)$$

Выражение (7.2.13) получило название **вспомогательной функции**, т. к. его использование существенно упрощает расчеты оптимальных значений параметров настройки типовых регуляторов.

При использовании метода вспомогательной функции необходимо расчетным путем определить значения ω и T_D , при которых достигается максимум выражения (7.2.13), т.е. выполняется требование (7.2.1). После этого оптимальное значение K_p устанавливается по формуле

$$K_p = \frac{M^2 \sin \gamma}{A(M^2 - 1)} \left(1 - \frac{T_D \omega}{M \sin \gamma \sqrt{1 + T_D^2 \omega^2}} \right). \quad (7.2.14)$$

Таким образом, значение T_D устанавливается в процессе поиска максимума отношения K_p/T_I , а затем по формулам (7.2.14) и (7.2.13) определяются значения параметров настройки K_p и T_I .

В случае выполнения расчетов для систем с ПИ-регулятором, в выражениях (7.2.14) и (7.2.13) необходимо положить $T_D = 0$, т.к. при этом значении T_D передаточная функция ПИД-регулятора преобразуется в передаточную функцию ПИ-регулятора.

Следовательно, вспомогательная функция для ПИ-регулятора принимает вид

$$F_{ПИ}^{вс}(\omega) = \frac{K_p}{T_I} = \frac{M\omega}{(M^2 - 1)A} (M \cos \gamma - 1), \quad (7.2.15)$$

а значение K_p определяется выражением

$$K_p = \frac{M^2}{(M^2 - 1)A} \sin \gamma. \quad (7.2.16)$$

Чтобы получить наглядное представление о виде вспомогательной функции для ПИ и ПИД-регуляторов и оценить преимущества ее использования, рассмотрим пример.

Пример 7.9. Для объекта, рассмотренного в примере 7.8, построим графики вспомогательной функции (7.2.13) при различных значениях T_D , полагая $M = M_{II} = 1,66$.

На рисунке 7.27 представлен график вспомогательной функции (7.2.15) для ПИ-регулятора, когда $T_D = 0$.

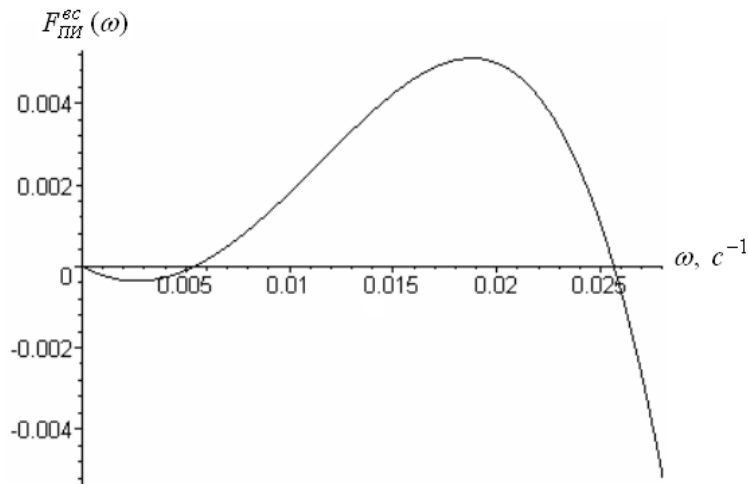


Рисунок 7.27 – График вспомогательной функции для ПИ-регулятора

Эта функция имеет локальный максимум и при настройке ПИ регулятора необходимо определить ее максимальное значение, а также значение резонансной частоты $\omega = \omega_p$, при которой этот максимум достигается.

По значению вспомогательной функции в точке максимума $F_{ПИ}^{вс}(\omega_p)$ определяется отношение K_p/T_I , удовлетворяющее требованию (7.2.1), а при $\omega = \omega_p$ устанавливаются значения величин

$A = A(\omega_p)$ и $\gamma = \gamma(\omega_p)$, которые затем используются при вычислении K_p согласно выражению (7.2.16).

На рисунке 7.28 приводятся графики вспомогательной функции (7.2.13) для ПИД-регулятора.

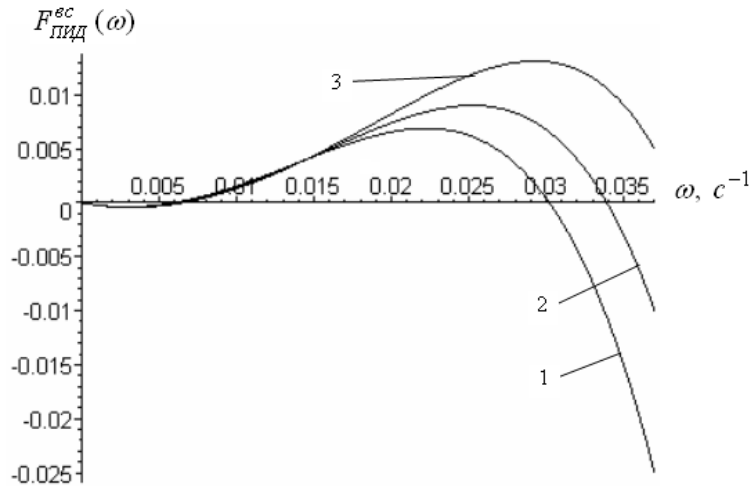


Рисунок 7.28 – Графики вспомогательной функции для ПИД регулятора:
 $1 - T_D = 10 \text{ c}; 2 - T_D = 15 \text{ c}; 3 - T_D = 20 \text{ c}$

Из рисунке 7.28 видно, что с возрастанием T_D увеличивается и максимальное значение вспомогательной функции $F_{ПИД}^{sc}(\omega_p)$. Поэтому при использовании метода вспомогательной функции для систем с ПИД-регулятором приходится, последовательно увеличивая T_D , находить максимум функции $F_{ПИД}^{sc}(\omega)$, и так до тех пор, пока не нарушится ограничение (3.3.6).

Расчеты показывают, что при использовании метода вспомогательной функции требование (7.2.1) с учетом ограничения (3.3.6) выполняется при следующих значениях параметров настройки ПИД-регулятора:

$$K_p = 1,0904; T_D = 34,8 \text{ c}; T_I = 43,681 \text{ c}. \quad (7.2.17)$$

Согласно (7.2.17) имеем

$$\frac{K_p}{T_I} = 0,02496 \text{ c}^{-1}; \quad (7.2.18)$$

$$\frac{T_{II}}{T_D} = 1,255. \quad (7.2.19)$$

Сравнив равенства (7.2.3), (7.2.4) и (7.2.18), (7.2.19) установим, что при использовании метода вспомогательной функции отношение K_p/T_{II} уменьшается на 31 %, а отношение T_{II}/T_D возрастает на 151 %. Чтобы оценить последствия такого изменения параметров настройки, определим значения других показателей.

Расположение полюсов системы определяется равенствами

$$s_1 = -0,10437 \text{ c}^{-1}; s_{2,3} = -0,015205 \pm i0,044737 \text{ c}^{-1}; \quad (7.2.20)$$

$$s_{4,5} = -0,0098827 \pm i0,022576 \text{ c}^{-1}. \quad (7.2.21)$$

Сравнивая значения (7.2.7) и (7.2.28) показателя быстродействия системы η , приходим к выводу, что он увеличился на 91 %. Столь значительное возрастание величины η было достигнуто благодаря сближению комплексно-сопряженных полюсов $s_{2,3}$ и $s_{4,5}$, что видно из равенств (7.2.5), (7.2.6) и (7.2.20), (7.2.21).

Сближение разведенных вдоль вещественной оси комплексно-сопряженных полюсов приводит к слиянию резонансных пиков АЧХ, как показано на рисунке 7.29.

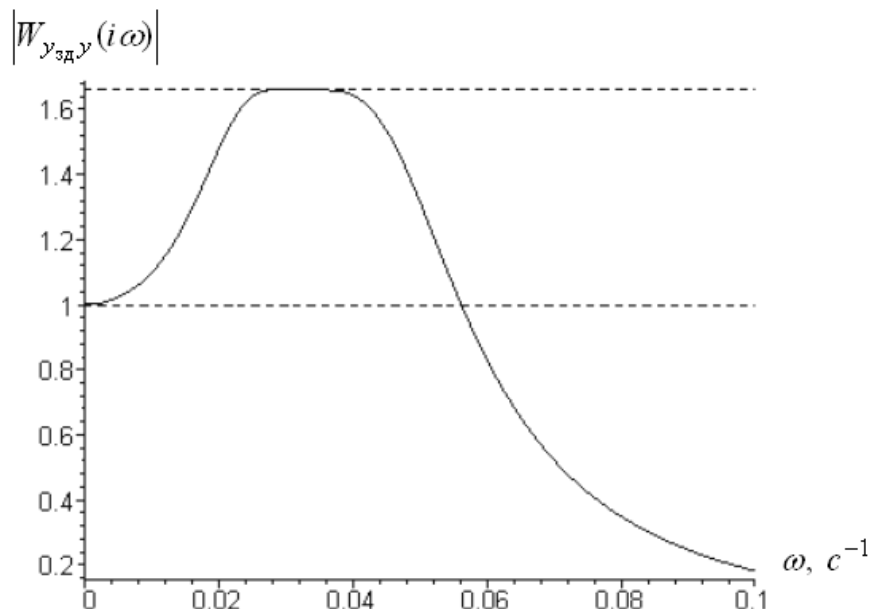


Рисунок 7.29 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$

Вместе с тем, уменьшение отношения K_p/T_{II} приводит к не-

которому ухудшению фильтрующих свойств системы в области низких частот, что видно из рисунка 7.30.

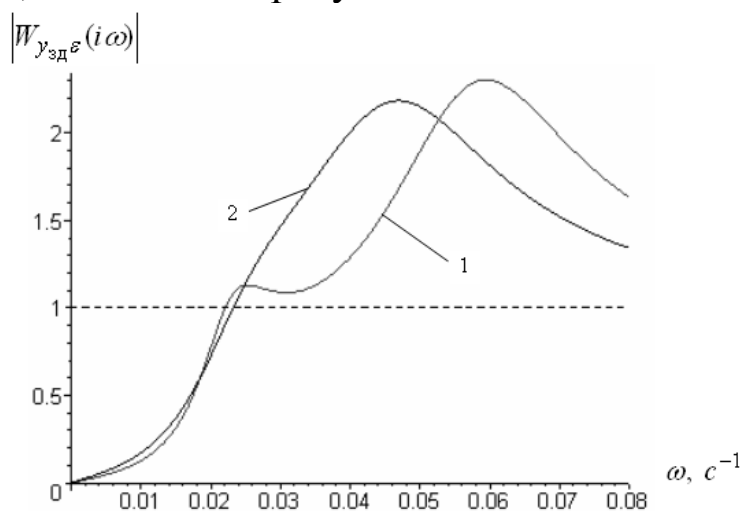


Рисунок 7.30 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ при значениях параметров настройки, заданных:
 1 – равенствами (7.2.2); 2 – равенствами (7.2.17)

Однако незначительное ухудшение фильтрующих свойств системы вполне окупается повышением качества переходных процессов, что видно из рисунка 7.31.

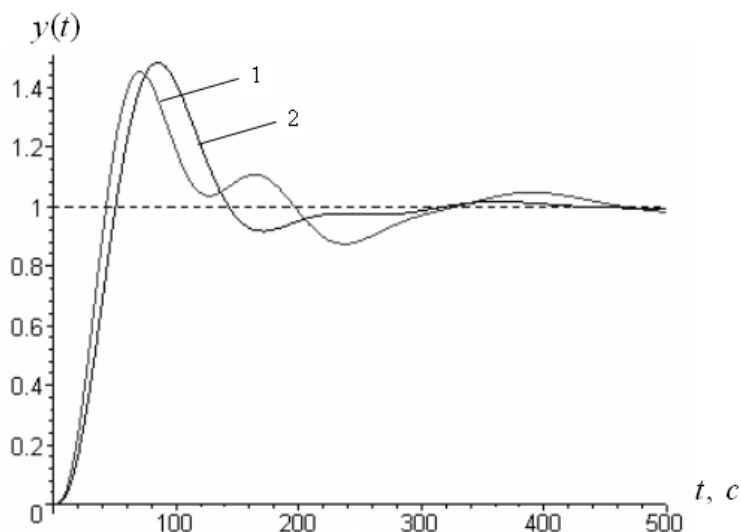


Рисунок 7.31 – Переходные процессы в системе с ПИД регулятором при действии единичного ступенчатого возмущения по каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$:

1 – параметры настройки заданы равенствами (7.2.2);
 2 – параметры настройки заданы равенствами (7.2.17).

Согласно рисунку 7.31 при настройке ПИД-регулятора по методу вспомогательной функции значительно уменьшается длительность переходного процесса при небольшом возрастании величины перерегулирования.

Таким образом, рассмотренный пример 7.9 позволил убедительно продемонстрировать преимущества метода настройки типовых регуляторов с помощью вспомогательной функции, заключающиеся в повышении быстродействия системы и качества переходных процессов.

Важным достоинством метода вспомогательной функции является возможность учета требований (6.3.34) и (7.1.56), выполнение которых обеспечивает в условиях информационной неопределенности относительно характеристик действующих на систему возмущений, ее сбалансированную реакцию на низкочастотные и высокочастотные возмущения.

Принимая во внимание требования (6.3.34) и (7.1.56) выражение (7.2.13) для вспомогательной функции представим в виде

$$F_{ПИД}^{вс}(\omega) = \frac{K_p}{T_I} = \frac{\omega}{A} \left(\Phi \cos \gamma + T_I \omega \sin \gamma - \sqrt{1 - \frac{T_I^2 \omega^2}{\Phi^2}} \right). \quad (7.2.23)$$

При этом формулу (7.2.14) запишем следующим образом:

$$K_p = \frac{\sin \gamma}{A} \left(\Phi - \frac{T_I \omega}{\sin \gamma \sqrt{\Phi^2 + T_I^2 \omega^2}} \right). \quad (7.2.24)$$

Отметим, что при выводе формул (7.2.23) и (7.2.24) использовалось равенство

$$\Phi^2 = \Phi + 1.$$

В результате для каждого значения ω имеем систему из двух уравнений, решив которую, определим значения параметров настройки K_p и T_I .

Подставив найденные таким образом значения K_p , T_I и T_D в выражение

$$\left| W_{y_{зд}y}(i\omega) \right| = \frac{\sqrt{\Phi^2 + \left(T_H \omega - \frac{\Phi}{T_H \omega} \right)^2}}{\left| \frac{\Phi}{K_p W_{об}(i\omega)} + \Phi + i \left(T_H \omega - \frac{\Phi}{T_H \omega} \right) \right|}, \quad (7.2.25)$$

установим, что выполняется равенство

$$\left| W_{y_{зд}y}(i\omega) \right| = \Phi. \quad (7.2.26)$$

Однако наряду с равенством (7.2.26) при $\omega = \omega_p$ должно выполняться также и равенство

$$\frac{d}{d\omega} \left| W_{y_{зд}y}(i\omega) \right| = 0, \quad (7.2.27)$$

указывающее на наличие экстремума у функции (7.2.25).

Следовательно, при расчете с помощью вспомогательной функции сбалансированных по золотой пропорции значений параметров настройки ПИД-регулятора необходимо, решая для каждого значения ω систему уравнений (7.2.23) и (7.2.24), определить среди них такое, при котором имеет место равенство (7.2.27).

При этом выполнение неравенств

$$\frac{d}{d\omega} \left| W_{y_{зд}y}(i\omega) \right| < 0; \quad (7.2.28)$$

$$\frac{d}{d\omega} \left| W_{y_{зд}y}(i\omega) \right| > 0, \quad (7.2.29)$$

указывает соответственно на то, что $\omega < \omega_p$ и $\omega > \omega_p$.

Когда такое значение ω будет установлено, то значение параметра T_D определяется согласно требованию (6.3.34).

Для иллюстрации описанного метода расчета параметров настройки ПИД-регуляторов рассмотрим пример.

Пример 7.10. Для объекта, рассмотренного в примерах 7.8 и 7.9, определим параметры настройки ПИД-регулятора, используя уравнения (7.2.23) и (7.2.24).

Полагая $\omega_1 = 0,03 \text{ c}^{-1}$, получим

$$K_p = 0,84525; T_H = 48,095 \text{ c}; T_D = 29,724 \text{ c}. \quad (7.2.30)$$

Подставив равенства (7.2.30) в выражение (7.2.25) установим, что

$$\frac{d}{d\omega} \left| W_{y_{зд}y}(i\omega) \right| \Big|_{\omega=\omega_1=0,03 c^{-1}} = -42,777 < 0. \quad (7.2.31)$$

Ввиду выполнения неравенства (7.2.31) приходим к выводу, что $\omega_1 < \omega_p$.

Следовательно, значение частоты ω_1 должно быть увеличено. Выберем $\Delta\omega = 0,005 c^{-1}$, тогда при $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega = 0,035 c^{-1}$ получим

$$K_p = 1,1274; T_{II} = 53,132 c; T_D = 32,837 c. \quad (7.2.32)$$

Поскольку при выполнении равенств (7.2.32) имеем

$$\frac{d}{d\omega} \left| W_{y_{зд}y}(i\omega) \right| \Big|_{\omega=\omega_2=0,035 c^{-1}} = 18,949 > 0, \quad (7.2.33)$$

то на основании неравенства (7.2.33) установим, что $\omega_2 > \omega_p$.

Следовательно, значение частоты ω необходимо уменьшить, причем так, чтобы выполнялось неравенство $\omega_1 < \omega < \omega_2$. Пусть $\Delta\omega = 0,0020009 c^{-1}$, тогда полагая $\omega_3 = \omega_2 - \Delta\omega = 0,0329991 c^{-1}$, приходим к равенствам

$$K_p = 1,0223; T_{II} = 50,988 c; T_D = 31,512 c, \quad (7.2.34)$$

причем

$$\eta = 0,011736 c^{-1}; \quad (7.2.35)$$

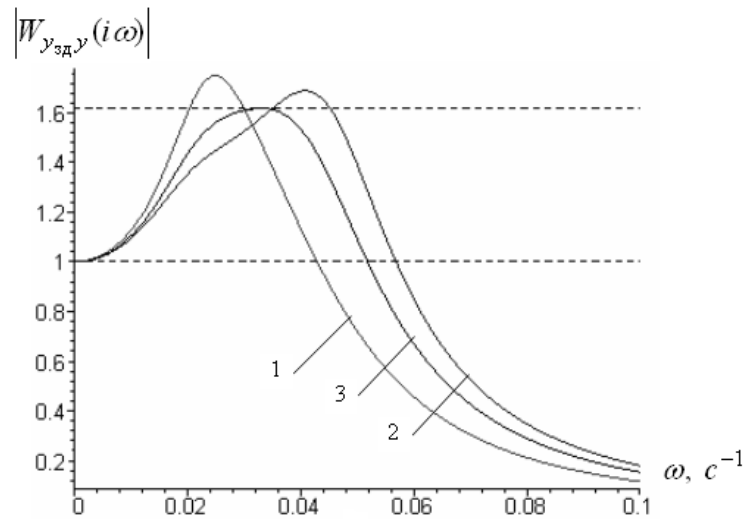
$$\frac{K_p}{T_{II}} = 0,02005 c^{-1}. \quad (7.2.36)$$

Принимая во внимание равенства (7.2.34) установим, что

$$\frac{d}{d\omega} \left| W_{y_{зд}y}(i\omega) \right| \Big|_{\omega=\omega_3=0,0329991 c^{-1}} = 0. \quad (7.2.37)$$

На основании равенства (7.2.37) приходим к выводу, что $\omega_3 = \omega_p$.

На рисунке 7.32 представлены графики АЧХ замкнутой системы, при параметрах настройки ПИД-регулятора, заданных равенствами (7.2.30), (7.2.32) и (7.2.34).



**Рисунок 7.32 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$, при значениях параметров настройки ПИД-регулятора, заданных равенствами:
1 – (7.2.30); 2 – (7.2.32); 3 – (7.2.34)**

Определим теперь при $M = \Phi$ параметры настройки ПИД-регулятора, воспользовавшись для этого выражениями (7.2.13), (7.2.14).

В результате получим

$$K_p = 1,0223; T_I = 50,988 \text{ с}; T_D = 31,512 \text{ с}, \quad (7.2.38)$$

причем

$$\eta = 0,010093 \text{ с}^{-1}; \quad (7.2.39)$$

$$\frac{K_p}{T_I} = 0,023586 \text{ с}^{-1}. \quad (7.2.40)$$

Сопоставив равенства (7.2.35), (7.2.36) и (7.2.39), (7.2.40), приходим к выводу, что при замене равенств (7.2.38) равенствами (7.2.34) значения показателей η и K_p/T_I соответственно увеличиваются и уменьшаются.

Следовательно, при настройке систем по методу вспомогательной функции, когда не обеспечивается выполнение требования

(6.3.34), их фильтрующие свойства лучше, но быстродействие более низкое, сравнительно со случаем, когда это требование выполняется.

На рисунке 7.33 приводятся графики АЧХ замкнутой системы в обоих рассматриваемых случаях, позволяющие убедиться в выполнении требования $M = \Phi$.

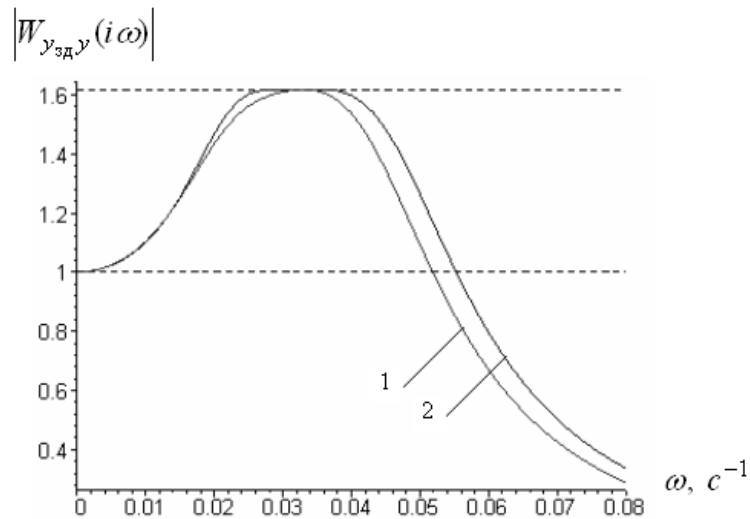


Рисунок 7.33 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$, при значениях параметров настройки ПИД-регулятора, заданных равенствами: 1 – (7.2.34); 2 – (7.2.38)

О степени ухудшения фильтрующих свойств системы при выполнении требования (6.3.34), можно судить по рисунку 7.34.

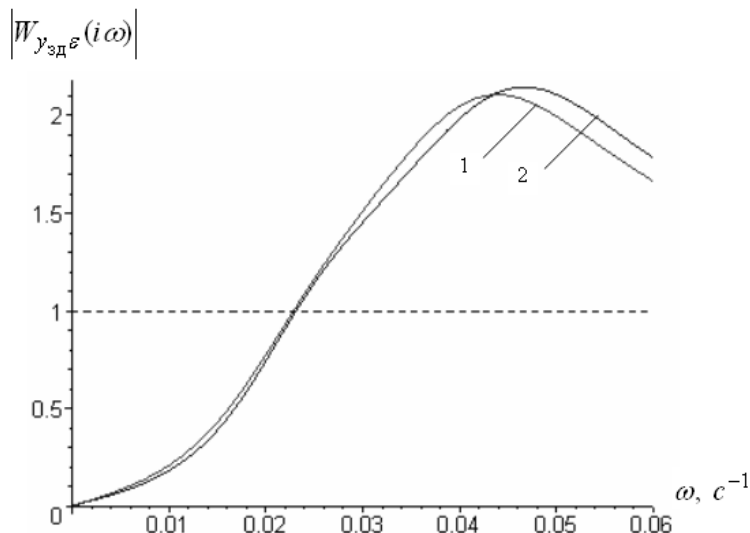


Рисунок 7.34 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$, при значениях параметров настройки ПИД-регулятора, заданных равенствами: 1 – (7.2.34); 2 – (7.2.38)

Как видно из рисунка 7.34, ухудшение фильтрующих свойств системы при замене равенств (7.2.38) равенствами (7.2.34), оказывается довольно незначительным и вполне окупается некоторым улучшением качества переходных процессов в системе, представленных на рисунке 7.35.

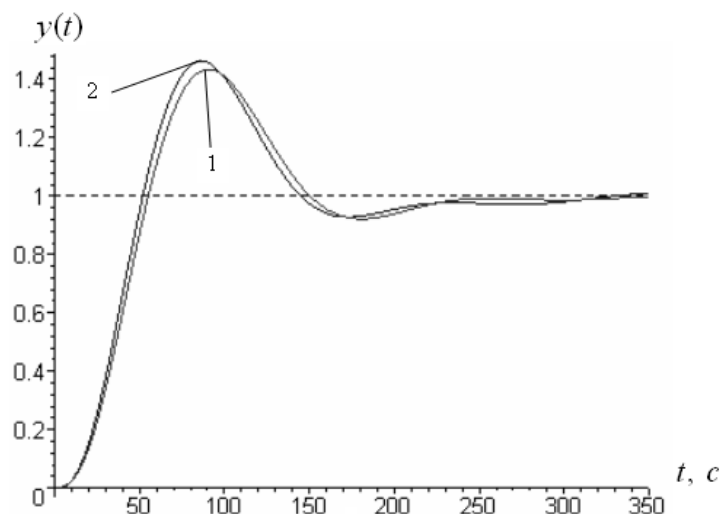


Рисунок 7.35 – Переходные процессы в системе с ПИД регулятором при действии единичного ступенчатого возмущения по каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$: 1 – параметры настройки заданы равенствами (7.2.34); 2 – параметры настройки заданы равенствами (7.2.38)

Как видно из рисунка 7.35, использование требования (6.3.34) позволяет одновременно уменьшить величину перерегулирования и длительность переходного процесса.

Следовательно, при настройке систем с ПИД-регулятором методом вспомогательной функции, совместное применение требований (6.3.34) и (7.1.56) позволяет не только значительно упростить процедуру выбора оптимального значения T_d , но и повысить качество управления.

Отметим, что при использовании для настройки ПИД-регуляторов метода вспомогательной функции достаточно просто выполнить требование (7.1.56), т.к. для этого в выражениях (7.2.13) и (7.2.14) достаточно задать значение показателя колебательности M равным золотому числу Φ .

Однако выполнить требование (6.3.34), обеспечивающее отношение между параметрами настройки T_H и T_d по золотой пропорции, удастся далеко не всегда. Это касается, например, систем с рядом тепловых объектов.

Пример 7.11. Предположим, что для управления тепловым объектом, рассмотренным ранее в примере 1.5, используется ПИД-регулятор, причем граничные условия (1.1.46) в рассматриваемом случае принимают вид

$$T(0, t) = T(l, t) = u(t), \quad (7.2.41)$$

где $u(t)$ – функция времени.

Условие (7.2.41) означает, что управление калориферами осуществляется согласованно.

Применив к уравнению (1.1.45) одностороннее преобразование Лапласа по времени получим

$$s\tilde{T}(x, s) = a^2 \frac{d^2 \tilde{T}(x, s)}{dx^2}, \quad (7.2.42)$$

где $\tilde{T}(x, s)$ – изображение по Лапласу функции $T(x, t)$, а s – комплексная переменная.

После применения к граничным условиям (7.2.41) указанного преобразования, они принимают вид

$$\tilde{T}(0, s) = \tilde{T}(l, s) = \tilde{u}(s). \quad (7.2.43)$$

где $\tilde{u}(s)$ – изображение по Лапласу функции $u(t)$.

Примем во внимание, что передаточная функция системы управления температурой внутренней воздушной среды теплицы определяется выражением

$$W_{uT}(x, s) = \frac{\partial \tilde{T}(x, s)}{\partial \tilde{u}(s)}. \quad (7.2.44)$$

где $W_{uT}(x, s)$ – передаточная функция, отвечающая каналу передачи $u(t) \rightarrow T(x, t)$.

Продифференцировав с учетом выражения (7.2.44) уравнение (7.2.42) и граничные условия (7.2.43) по $\tilde{u}(s)$, получим уравнение

$$sW_{uT}(x, s) = a^2 \frac{d^2 W_{uT}(x, s)}{dx^2}, \quad (7.2.45)$$

которому отвечают уже следующие граничные условия:

$$W_{uT}(0, s) = W_{uT}(l, s) = 1. \quad (7.2.46)$$

Решение уравнения (7.2.45) имеет вид

$$W_{uT}(x, s) = Ae^{x\sqrt{s}/a} + Be^{-x\sqrt{s}/a}, \quad (7.2.47)$$

где A и B – неизвестные постоянные, значения которых можно определить, воспользовавшись граничными условиями (7.2.46).

В результате получим линейную систему из двух уравнений

$$\begin{cases} Ae^{l\sqrt{s}/a} + Be^{-l\sqrt{s}/a} = 1; \\ A + B = 1. \end{cases} \quad (7.2.48)$$

Решив систему (7.2.48) и подставив полученные значения A и B в выражение (7.2.47), имеем

$$W_{uT}(x, s) = \frac{e^{x\sqrt{s}/a} - e^{-x\sqrt{s}/a} + e^{(l-x)\sqrt{s}/a} - e^{-(l-x)\sqrt{s}/a}}{e^{l\sqrt{s}/a} - e^{-l\sqrt{s}/a}}. \quad (7.2.49)$$

Таким образом, получено выражение (7.2.49) для передаточной функции $W_{uT}(x, s)$, описывающей динамические свойства канала управления температурой $T(x, t)$ внутренней воздушной среды теплицы.

Представим выражение (7.2.49) в безразмерном виде

$$W_{uT}(\chi, \nu) = \frac{e^{\chi\sqrt{\nu}} - e^{-\chi\sqrt{\nu}} + e^{(1-\chi)\sqrt{\nu}} - e^{-(1-\chi)\sqrt{\nu}}}{e^{\sqrt{\nu}} - e^{-\sqrt{\nu}}}, \quad (7.2.50)$$

выполнив при этом следующие замены: $\chi = x/l$ и $\nu = sl^2/a^2$, где χ и ν – соответственно вещественная и комплексная безразмерные переменные.

Поскольку в выражении (7.2.50) используются безразмерные переменные χ и ν , то передаточную функцию ПИД-регулятора (2.3.4) также приведем к безразмерному виду

$$W_{\text{пид}}(\nu) = K_p \tau_d \nu + K_p + \frac{K_p}{\tau_{\text{и}} \nu},$$

где

$$\tau_D = T_D \left(\frac{a}{l} \right)^2 ; \tau_H = T_H \left(\frac{a}{l} \right)^2 .$$

Для определенности будем считать, что датчик температуры расположен на равных расстояниях от калориферов (см. рис. 1.1), т.е. $x = l/2$, а значит

$$\chi = x/l = 1/2 .$$

Предположим, что

$$\tau_D = 0,005 , \tag{7.2.51}$$

тогда, используя выражения (7.2.13) и (7.2.14) получим

$$K_p = 4,9427 ; \tau_H = 0,057670 , \tag{7.2.52}$$

причем

$$\frac{\tau_H}{\tau_D} = \frac{T_H}{T_D} = 11,534 . \tag{7.2.53}$$

Поскольку из равенства (7.2.53) видно, что при выборе значения τ_D согласно равенству (7.2.51), требование (6.3.34) не выполняется, то несколько увеличим значение данного параметра.

Пусть

$$\tau_D = 0,0127 , \tag{7.2.54}$$

в таком случае с учетом выражений (7.2.13) и (7.2.14) имеем

$$K_p = 8,4332 ; \tau_H = 0,033355 , \tag{7.2.55}$$

причем

$$\frac{\tau_H}{\tau_D} = 2,6264 . \tag{7.2.56}$$

На основании равенства (7.2.56) приходим к выводу, что увеличение значения τ_D способствовало приближению отношения τ_H / τ_D к золотому числу Φ .

Поэтому, дополнительно увеличим значение данного параметра, полагая, что

$$\tau_D = 0,01526 . \tag{7.2.57}$$

В результате получим

$$K_p = 9,0283; \tau_{II} = 0,024700, \quad (7.2.58)$$

причем

$$\frac{\tau_{II}}{\tau_D} = 1,6186. \quad (7.2.59)$$

Согласно равенству (7.2.59) при выполнении равенства (7.2.57) обеспечивается достаточно точное приближение к выполнению требования (6.3.34).

Графики АЧХ замкнутой системы при полученных значениях параметров настройки ПИД-регулятора представлены на рис. 7.36, причем безразмерная частота Ω определяется выражением $\Omega = \omega l^2 / a^2$.

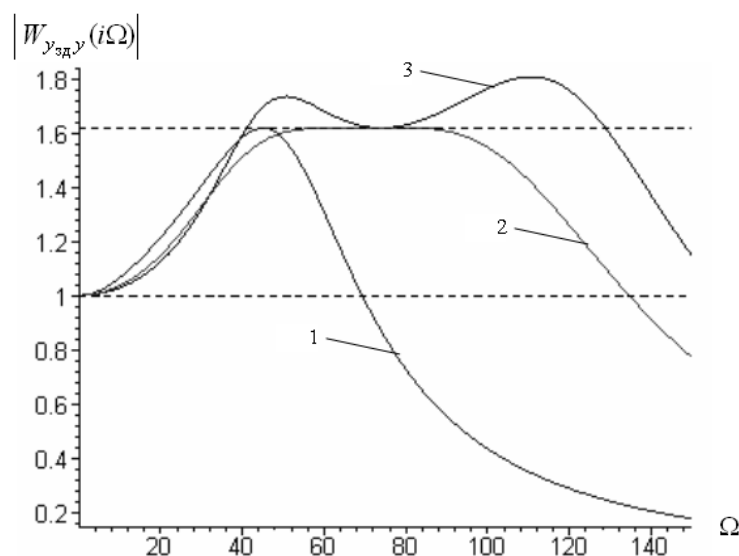


Рисунок 7.36 – АЧХ канала передачи $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ при различных значениях параметров настройки ПИД-регулятора:
 1 – (7.2.51), (7.2.52); 2 – (7.2.54), (7.2.55); 3 – (7.2.57), (7.2.58)

Анализируя графики на рисунке 7.36, можно заметить, что при выполнении требования (7.1.56) показатель колебательности M заметно превышает значение золотого числа Φ , которому отвечает верхняя пунктирная линия.

Однако при попытке уменьшить значение параметра τ_D с целью выполнения равенства $M = \Phi$ нарушается требование (7.1.56), что следует из равенств (7.2.56) и (7.2.59).

Следовательно, для рассматриваемого объекта управления с помощью вспомогательной функции невозможно одновременно удовлетворить требованиям (6.3.34), (7.1.56) и приходится ограничиться выполнением лишь наиболее важного требования (7.1.56).

В тех случаях, когда при управлении объектом с передаточной функцией (7.2.50) настройка ПИД-регулятора осуществляется на основе требований (7.1.53) к расположению доминирующих полюсов системы, то одновременное выполнение требований (6.3.34) и (7.1.56) оказывается возможным.

В результате решения системы уравнений (7.1.54) и (7.1.55) установим, что указанные требования выполняются при следующих значениях параметров настройки ПИД-регулятора:

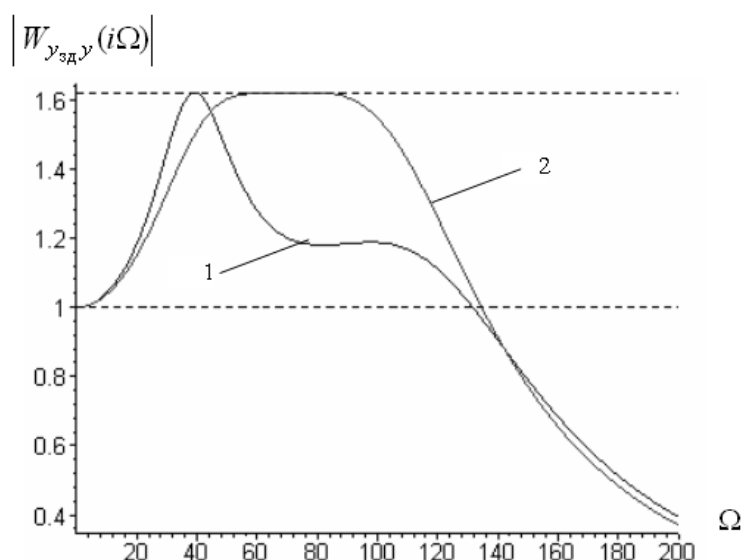
$$K_p = 6,7594; \tau_D = 0,016766; \tau_I = 0,027127, \quad (7.2.60)$$

причем

$$m_{II} = 0,40879; \beta = 0,51.$$

Сравним качество управления в тех случаях, когда настройка ПИД-регулятора выполняется согласно равенствам (7.2.60) и (7.2.54), (7.2.55).

Соответствующие графики АЧХ представлены на рисунках 7.37 и 7.38.



**Рисунок 7.37 – АЧХ канала передачи $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ при различных значениях параметров настройки ПИД регулятора:
1 – (7.2.60); 2 – (7.2.54), (7.2.55)**

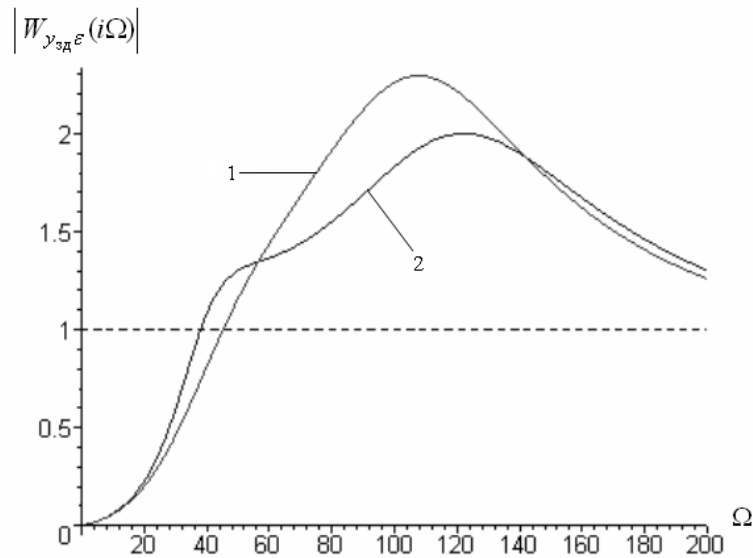


Рисунок 7.38 – АЧХ канала передачи $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$ при различных значениях параметров настройки ПИД регулятора: 1 – (7.2.54), (7.2.55); 2 – (7.2.60).

На основании графиков АЧХ, представленных на рисунке 7.37, можно заключить о выполнении в обоих случаях требования (7.1.56).

Согласно рисунку 7.38, фильтрующие свойства системы лучше, когда параметры настройки заданы равенствами (7.2.54), (7.2.55), т. е. при использовании метода вспомогательной функции, но при этом наблюдается возрастание значений АЧХ в окрестности резонансной частоты.

Чтобы разрешить вопрос о выборе наиболее подходящего метода настройки ПИД-регуляторов при управлении рассматриваемым объектом построим графики переходных процессов $y(\tau)$, возникающих на выходе системы при единичном ступенчатом входном сигнале в тех случаях, когда значения параметров настройки ПИД-регулятора заданы равенствами (7.2.54), (7.2.55) или (7.2.60).

Соответствующие графики представлены на рисунках 7.39 и 7.40, причем безразмерная переменная времени τ определяется выражением $\tau = ta^2 / l^2$.

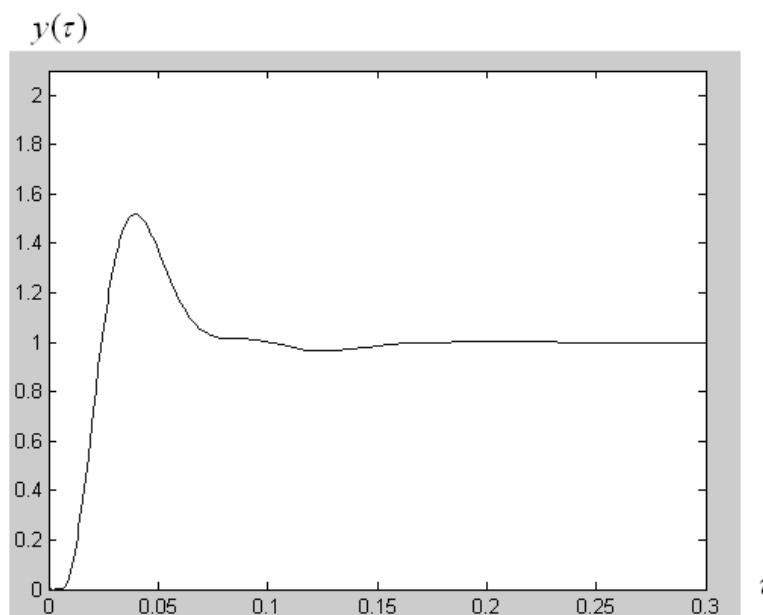


Рисунок 7.39 – Переходные процессы на выходе системы при значениях параметров настройки ПИД-регулятора, заданных равенствами (7.2.54), (7.2.55)

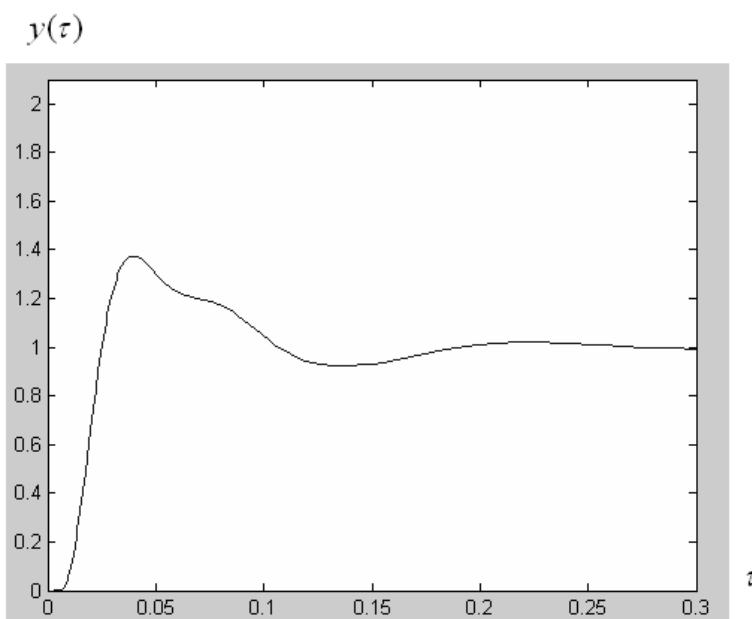


Рисунок 7.40 – Переходные процессы на выходе системы при значениях параметров настройки ПИД-регулятора, заданных равенствами (7.2.60)

Сопоставив графики переходных процессов на рисунках 7.39 и 7.40, приходим к выводу, что использование для настройки ПИД-регулятора метода вспомогательной функции приводит к возрастанию величины перерегулирования для переходных процессов в системе.

Указанное обстоятельство дополнительно подтверждает преимущества совместного использования требований (6.3.34) и (7.1.56), позволяющего правильно сбалансировать реакцию системы на низкочастотные и высокочастотные возмущения.

7.3. Применение интегрального квадратичного критерия для достижения робастности систем управления

Методы робастного управления технологическими процессами относятся к числу наиболее эффективных, т. к. позволяют добиться высокого качества управления в условиях информационной неопределенности, т.е. неполноте информации о действующих на управляемый объект возмущениях. Однако при оптимизации робастных систем возникают определенные трудности, связанные с использованием традиционных критериев управления.

Рассмотрим один из них, известный как *интегральный квадратичный критерий*, получивший широкое распространение ввиду своей простоты в математическом отношении, а также благодаря тому, что во многих практических задачах управления он является удовлетворительной мерой успешности их решения.

Интегральный квадратичный критерий J определяется следующим выражением:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2(t) dt, \quad (7.3.1)$$

где t – переменная времени.

Поскольку в случае линейных стационарных систем удобно использовать частотные методы анализа и синтеза, то воспользуемся известным соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varepsilon}(i\omega)|^2 d\omega, \quad (7.3.2)$$

где $\tilde{\varepsilon}(i\omega)$ – Фурье-изображение ошибки управления $\varepsilon(t)$.

Для односвязной системы, функциональная схема которой представлена на рисунке 7.37, выполняется равенство

$$\tilde{\varepsilon}(i\omega) = -\frac{\tilde{v}(i\omega)}{1 + W_{рег}(i\omega)W_{об}(i\omega)}, \quad (7.3.3)$$

где $\tilde{v}(i\omega)$ – Фурье-изображение приведенного к выходу объекта возмущающего воздействия $v(t)$ с неизвестными характеристиками; $W_{рег}(i\omega)$ и $W_{об}(i\omega)$ – КЧХ регулятора и объекта соответственно.

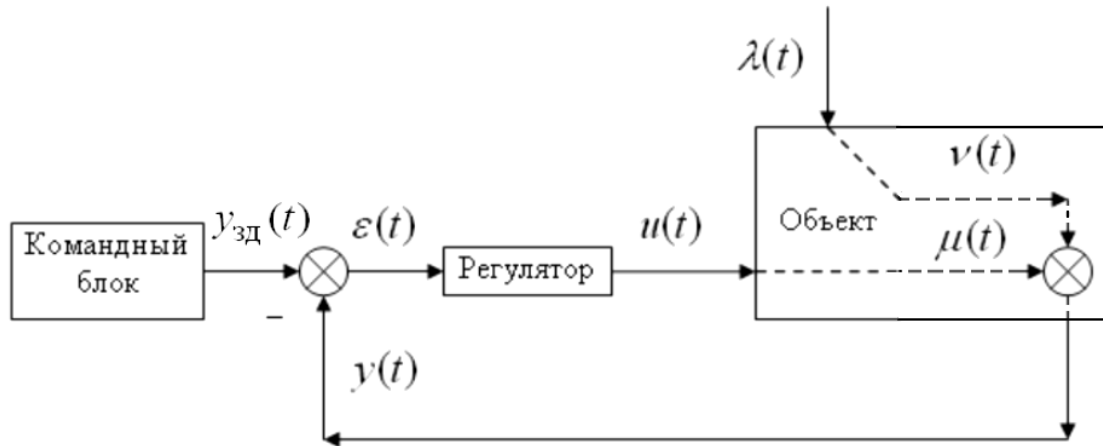


Рисунок 7.37 – Односвязная система управления: $v(t)$ – возмущение, приведенное к выходу объекта; $\lambda(t)$ – возмущение, действующее на объект; $\mu(t)$ – выходной сигнал объекта в отсутствии возмущений

С учетом равенства

$$\frac{1}{1 + W_{рег}(i\omega)W_{об}(i\omega)} = 1 - \frac{W_{рег}(i\omega)W_{об}(i\omega)}{1 + W_{рег}(i\omega)W_{об}(i\omega)}, \quad (7.3.4)$$

а также соотношений (7.3.2) и (7.3.3) выражение (7.3.1) представим в виде

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| 1 - \frac{W_{рег}(i\omega)W_{об}(i\omega)}{1 + W_{рег}(i\omega)W_{об}(i\omega)} \right|^2 |\tilde{v}(i\omega)|^2 d\omega. \quad (7.3.5)$$

Ввиду выполнения неравенства

$$\left| 1 - \frac{W_{рег}(i\omega)W_{об}(i\omega)}{1 + W_{рег}(i\omega)W_{об}(i\omega)} \right|^2 \leq \left(1 + \left| \frac{W_{рег}(i\omega)W_{об}(i\omega)}{1 + W_{рег}(i\omega)W_{об}(i\omega)} \right| \right)^2 =$$

$$= [1 + A_{y_{зд}\mu}(\omega)]^2,$$

для выражения (7.3.5) получим мажорирующую оценку

$$J \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + A_{y_{зд}\mu}(\omega)]^2 |\tilde{v}(i\omega)|^2 d\omega, \quad (7.3.6)$$

где $A_{y_{зд}\mu}(\omega)$ – АЧХ замкнутой системы $\left| W_{y_{зд}\mu}(i\omega) \right|$, соответствующая каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \mu(t)$.

Поскольку $A_{y_{зд}\mu}(\omega) \leq M$, то неравенство (7.3.6) заменим следующим:

$$J \leq (1 + M)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{v}(i\omega)|^2 d\omega, \quad (7.3.7)$$

где M – показатель колебательности замкнутой системы.

На основании оценок (7.3.6) и (7.3.7) установим, что при действии на рассматриваемую систему возмущения $v(t)$ с неизвестными характеристиками для минимизации критерия J целесообразно в интервале частот $[-\omega_p, \omega_p]$ выполнить требование

$$A_{y_{зд}\mu}(\omega) \rightarrow \min (|\omega| \leq \omega_p), \quad (7.3.8)$$

где ω_p – резонансная частота системы, при которой выполняется равенство $A_{y_{зд}\mu}(\omega_p) = M$.

Примем во внимание, что из равенства (7.3.4) можно получить неравенство

$$\begin{aligned} A_{y_{зд}\varepsilon}(\omega) &= \left| \frac{1}{1 + W_{pez}(i\omega)W_{об}(i\omega)} \right| = \\ &= \left| \frac{W_{pez}(i\omega)W_{об}(i\omega)}{1 + W_{pez}(i\omega)W_{об}(i\omega)} - 1 \right| \geq A_{y_{зд}\mu}(\omega) - 1, \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

где $A_{y_{зд}\varepsilon}(\omega)$ – АЧХ замкнутой системы $\left| W_{y_{зд}\varepsilon}(i\omega) \right|$, соответствующая каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$.

Поскольку из неравенства (7.3.9) следует, что

$$A_{y_{зд}\mu}(\omega) \leq A_{y_{зд}\varepsilon}(\omega) + 1,$$

то требование (7.3.8) можно заменить следующим:

$$A_{y_{3д}\varepsilon}(\omega) \rightarrow \min (|\omega| \leq \omega_p). \quad (7.3.10)$$

Поскольку с учетом равенства (6.3.5) выражения (7.1.8), (7.1.28) и (7.1.69), определяющие такое расположение доминирующих полюсов систем с ПИ, ПИД и многопараметрическим регуляторами, при котором значения функции $A_{y_{3д}\varepsilon}(\omega)$ минимизируются в интервале частот $|\omega| \leq \omega_{2p}$ принимают следующий вид:

$$s_{1,2} = -m_{\Pi}\omega_* \pm i\omega_*, \quad s_3 = -m_{\Pi}\omega_*; \quad (7.3.11)$$

$$s_{1,3} = -m_{\Pi}\omega_* + i\omega_*, \quad s_{2,4} = -m_{\Pi}\omega_* - i\omega_*; \quad (7.3.12)$$

$$s_{1,3,5} = -m_{\Pi}\omega_* + i\omega_*, \quad s_{2,4,6} = -m_{\Pi}\omega_* - i\omega_*, \quad (7.3.13)$$

где $\omega_* = \eta / m_{\Pi}$ – собственная частота свободных колебаний замкнутой системы.

Значение граничной частоты ω_{2p} определяется при решении уравнения (6.3.2), где N принимает соответственно значения 1, 2 или 3 в зависимости от того, какое из равенств (7.3.11), (7.3.12) или (7.3.13) выполняется.

Величина m_{Π} в равенствах (7.3.11) – (7.3.13) и в уравнении (6.3.2) выбирается таким образом, чтобы выполнить условие

$$\omega_{2p} = \omega_p, \quad (7.3.14)$$

т. к. в этом случае значения функции $A_{y_{3д}\varepsilon}(\omega)$ минимизируются в заданном интервале частот $[-\omega_p, \omega_p]$, а значит, выполняется требование (7.3.10).

Следовательно, в случае отсутствия информации о возмущающем воздействии $v(t)$, для минимизации мажорирующих оценок (7.3.6) и (7.3.7) критерия J , необходимо выбрать значения параметров настройки используемого регулятора таким образом, чтобы доминирующие корни характеристического уравнения замкнутой системы располагались на комплексной плоскости в соответствии с требованиями (7.3.11), (7.3.12) или (7.3.13), в зависимости от типа используемого регулятора, причем значение m_{Π} в равенствах (7.3.11) – (7.3.13) задается так, чтобы решение уравнения (6.3.2) удовлетворяло условию (7.3.14).

Оценим эффективность метода оптимизации робастных систем на основе интегрального квадратичного критерия.

Пример 7.12. Для управления объектом, рассмотренным в примере 7.8, воспользуемся ПИ, ПИД и многопараметрическим регуляторами.

Рассмотрим систему с ПИ-регулятором, полагая, что первоначальное значение величины m_{II} задано следующим равенством:

$$m_{II} = 0,49. \quad (7.3.15)$$

Тогда в результате решения уравнения (7.1.13) получим

$$\eta = 0,0091746 \text{ с}^{-1}.$$

Воспользовавшись выражениями (7.1.14) и (7.1.15) определим с учетом равенств (7.3.15) и (7.3.16) следующие значения параметров настройки ПИ-регулятора:

$$K_p = 0,70293; T_{II} = 85,444 \text{ с}. \quad (7.3.17)$$

Поскольку при выполнении равенств (7.3.17) выполняются требования (7.3.11), то значения АЧХ замкнутой системы $A_{y_{зд}\varepsilon}(\omega)$ в интервале частот $[-\omega_{zp}, \omega_{zp}]$ минимизируются.

Значение отношения частот

$$\omega_* / \omega_{zp} = 0,78743, \quad (7.3.18)$$

с учетом равенств (7.3.15) и $N = 1$ определяется в результате решения уравнения (6.3.2).

Поскольку $\omega_* = \eta / m_{II}$, то принимая во внимание равенства (7.3.15) и (7.3.16) имеем

$$\omega_* = 0.018724 \text{ с}^{-1}. \quad (7.3.19)$$

На основании равенств (7.3.18) и (7.3.19) установим, что

$$\omega_{zp} = 0,014744 \text{ с}^{-1}. \quad (7.3.20)$$

Воспользовавшись графиком функции $A_{y_{зд}\mu}(\omega)$, представленным на рисунке 7.38, определим, что

$$\omega_p = 0,0148 \text{ с}^{-1}. \quad (7.3.21)$$

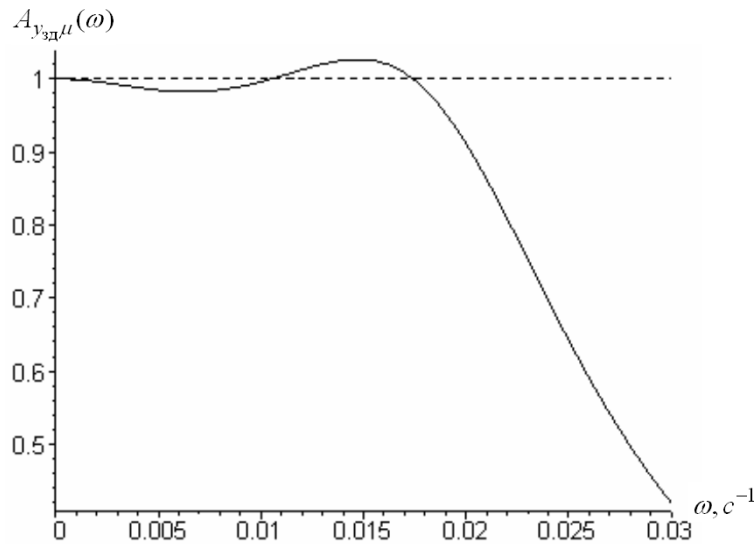


Рисунок 7.38 – АЧХ замкнутой системы с ПИ-регулятором по каналу $y_{зд}(t) \rightarrow \mu(t)$ при выполнении равенств (7.3.17)

Поскольку требование (7.3.14) при выбранном значении (7.3.15) величины m_{II} выполняется достаточно точно, то на этом процесс уточнения ее значений можно прекратить.

В тех случаях, когда выбранное значение m_{II} не обеспечивает выполнения требования (7.3.14), то m_{II} необходимо скорректировать в сторону уменьшения, если окажется, что $\omega_{зр} > \omega_p$, или же, напротив, увеличить при $\omega_{зр} < \omega_p$.

Для системы с ПИД-регулятором выберем

$$m_{II} = 0,8735, \quad (7.3.22)$$

и решив уравнение (7.1.39) получим

$$\eta = 0,017834c^{-1}. \quad (7.3.23)$$

Воспользовавшись выражениями (7.1.36), (7.1.37) и (7.1.38), с учетом равенств (7.3.22) и (7.3.23) имеем

$$K_p = 1,4391; T_D = 23,153 c; T_I = 71,091 c. \quad (7.3.24)$$

Выполнив аналогичную проверку, как в случае, когда использовался ПИ-регулятор, установим выполнение требования (7.3.14).

Перейдем к анализу системы с многопараметрическим регулятором. Полагая

$$m_{II} = 0,98, \quad (7.3.25)$$

в результате решения системы уравнений (7.1.70) – (7.1.72) установим, что

$$\eta = 0,022517c^{-1}. \quad (7.3.26)$$

$$K_p = 2,0061; T_D = 105,14 c; T_I = 36,841 c; \quad (7.3.27)$$

$$T_{2/3} = 426,86c; T_{1/3} = 5987,7c. \quad (7.3.28)$$

Выполнив проверку, для системы с многопараметрическим регулятором также установим выполнение требования (7.3.14).

Графики АЧХ замкнутой системы $A_{y_{зд}\mu}(\omega)$ представлены на рисунок 7.39.

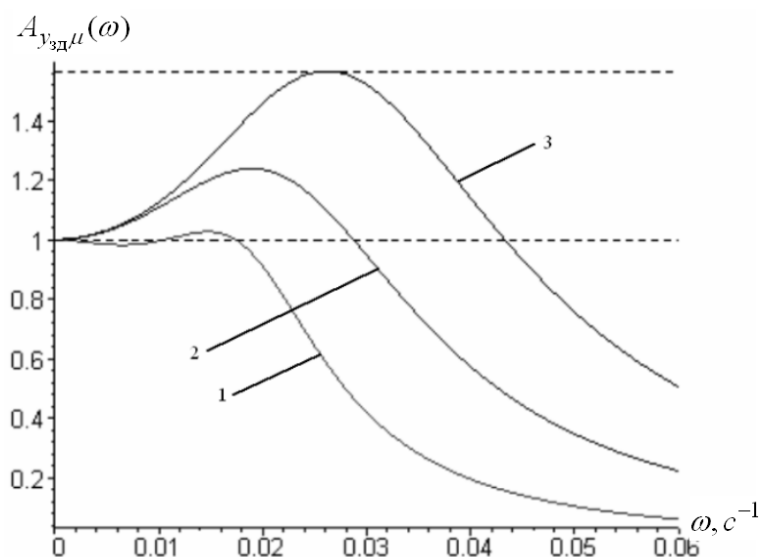


Рисунок 7.39 – АЧХ замкнутой системы по каналу $z(t) \rightarrow \mu(t)$ при использовании следующих регуляторов: 1 – ПИ; 2 – ПИД; 3 – многопараметрический

На основании полученных графиков установим, что при использовании ПИ, ПИД и многопараметрического регуляторов показатель колебательности системы M принимает соответственно следующие значения: 1,027; 1,24; 1,567.

Фильтрующие свойства системы характеризуют графики АЧХ $A_{y_{зд}\varepsilon}(\omega)$, приведенные на рисунке 7.40.

Согласно рисунку 7.40 наилучшими фильтрующими свойствами в интервале низких частот, на котором выполняется неравенство $A_{y_{зд}\varepsilon}(\omega) < 1$, обладает система с многопараметрическим регулятором.

Для оценки эффективности парирования системой возмущающих воздействий построим графики переходных процессов, возникающих при скачкообразном изменении сигнала задания $y_{зд}(t)$.

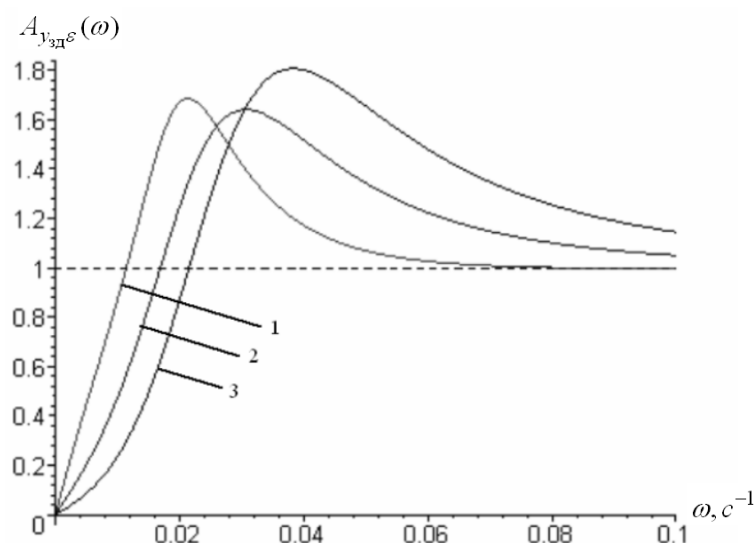


Рисунок 7.40 – АЧХ замкнутой системы по каналу $z(t) \rightarrow \epsilon(t)$ при использовании следующих регуляторов:
 1 – ПИ; 2 – ПИД; 3 – многопараметрический

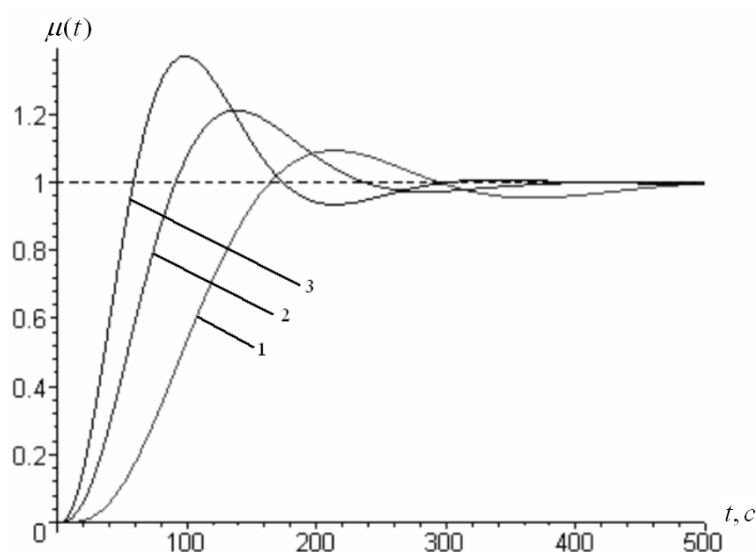


Рисунок 7.41 – Переходные процессы на выходе системы при использовании следующих регуляторов:
 1 – ПИ; 2 – ПИД; 3 – многопараметрический

В соответствии с графиками на рисунке 7.41, приходим к выводу, что наиболее быстрое затухание переходных процессов обеспечивается в системе с многопараметрическим регулятором, но при этом перерегулирование примерно на 20 % больше, чем для системы с ПИД-регулятором.

Следовательно, при оптимизации на основе разработанного метода систем управления с неизвестными характеристиками возмущений, целесообразно использовать многопараметрические регуляторы, если не существует достаточно жестких ограничений на величину перерегулирования. В противном случае необходимо применять ПИД или ПИ регуляторы.

7.4. Тест 7

1. Число доминирующих полюсов для односвязных стационарных систем ... параметров настройки регулятора.

- а) на единицу превышает число;
- б) на единицу меньше числа;
- в) равно числу.

2. Односвязные стационарные системы с ПИ-регулятором при выполнении для них условий робастности

- а) имеют пять доминирующих полюсов;
- б) имеют три доминирующих полюса;
- в) не имеют доминирующих полюсов.

3. Односвязные стационарные системы с ПИД-регулятором при выполнении для них условий робастности

- а) имеют четыре доминирующих полюса;
- б) не имеют доминирующих полюсов;
- в) имеют пять доминирующих полюсов.

4. При управлении технологическим объектом большей эффективности управления можно добиться

- а) при использовании ПИ-регулятора;
- б) при использовании ПИД-регулятора;
- в) не используя регуляторов.

5. В условиях информационной неопределенности относительно характеристик действующих на систему возмущений значение показателя колебательности рекомендуется выбирать равным

- а) двум;
- б) единице;
- в) золотому числу.

6. В условиях информационной неопределенности относительно характеристик действующих на систему возмущений значе-

ние отношения постоянных времени ПИД-регулятора рекомендуется выбирать равным

- а) единице;
- б) золотому числу;
- в) двум.

7. Целесообразность использования многопараметрических регуляторов обусловлена

- а) зашумленностью сигнала управления;
- б) их более высокой эффективностью по сравнению с традиционными типовыми регуляторами;
- в) тем, что в их алгоритме управления не используются производные по времени выше первого порядка.

8. Односвязные стационарные системы управления с многопараметрическими регуляторами при выполнении для них условий робастности имеют

- а) четыре доминирующих полюса;
- б) пять доминирующих полюсов;
- в) шесть доминирующих полюсов.

9. Условия робастности для замкнутых стационарных систем заключаются) в определенном расположении

- а) их доминирующих полюсов;
- б) нулей их передаточных функций;
- в) их полюсов.

10. Преимущества каскадных и многосвязных систем перед односвязными обусловлены использованием

- а) дополнительных информационных каналов;
- б) большего числа регуляторов;
- в) более сложных алгоритмов управления.

ГЛАВА VIII

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОВ И СИСТЕМ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

8.1. Коррекция управления по отношению к задающим воздействиям

Одна из главных задач, среди решаемых разработчиками автоматических систем – это повышение качества управления. Эффективным средством для этого может служить учет информации о контролируемых воздействиях на систему управления, не относящихся к управляющим, но влияющим на качество управления. К таким воздействиям следует отнести задающее воздействие $y_{зд}(t)$, т. к. при резких скачкообразных изменениях сигнала $y_{зд}(t)$ в системе возникают нежелательные переходные процессы.

Рассмотрим *коррекцию сигнала задания*. На рис. 8.1 приводится функциональная схема системы управления с коррекцией сигнала задания.

Как видно из рисунка 8.1, сигнал $y_{зд}(t)$ поступает на вход специального устройства, называемого корректирующим, которое преобразует его в сигнал $\zeta(t)$, фактически исполняющий роль задающего воздействия.

Рассмотрим метод синтеза передаточной функции корректирующего устройства $W_{кр}(s)$ с учетом расположения доминирующих полюсов системы управления.

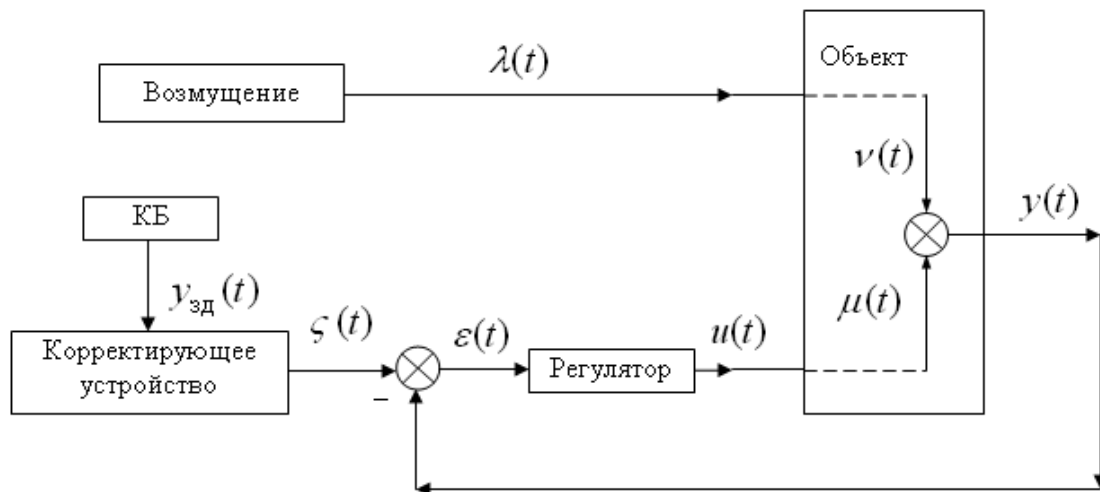


Рисунок 8.1 – Функциональная схема системы управления с коррекцией сигнала задания

Поскольку передаточная функция от входа до выхода, представленной на рисунок 8.1 системы, определяется выражением

$$W_{y_{зд}y}(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{y}_{зд}(s)} = W_{kp}(s) \frac{W_{об}(s)W_{рег}(s)}{1 + W_{об}(s)W_{рег}(s)}, \quad (8.1.1)$$

где $\tilde{y}(s)$ и $\tilde{y}_{зд}(s)$ – изображения по Лапласу сигналов $y(t)$ и $y_{зд}(t)$ соответственно, то передаточную функцию $W_{kp}(s)$ можно выбрать так, чтобы ее числитель и доминирующие полюсы замкнутой системы взаимно сократились. Тогда в знаменателе передаточной функции (8.1.1) доминировать станут полюсы более удаленные от мнимой оси, чем те, которые удалось сократить. Вследствие этого качество переходных процессов в системе при изменениях сигнала $y_{зд}(t)$ резко повышается.

Пусть $\hat{s}_h, h = \overline{1, n_d}$ – совокупность всех доминирующих полюсов замкнутой системы, тогда синтезируемую передаточную функцию можно представить в виде

$$W_{kp}(s) = K_{kp} \frac{\prod_{h=1}^{n_d} (s - \hat{s}_h)}{(1 + T_{kp}s)^{n_d}}, \quad (8.1.2)$$

где K_{kp} и T_{kp} – соответственно коэффициент передачи и постоянная времени корректирующего устройства.

Отметим, что устройство с передаточной функцией (8.1.2) технически реализуемо, т. к. степень полинома ее числителя не превышает степени полинома знаменателя.

Выберем значения постоянных K_{kp} и T_{kp} так, чтобы выполнялись следующие требования:

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} W_{kp}(s) &= 1; \\ W_{kp}(0) &= 1. \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

При выполнении требований (8.1.3) и (8.1.4) корректирующее устройство мало влияет как на медленно, так и на весьма быстро изменяющиеся сигналы $y_{зд}(t)$, пропуская их практически без изменений. Зато, все остальные сигналы изменяются им таким образом, чтобы переходный процесс завершился наиболее быстро.

Исходя из выражения (8.1.2) и требования (8.1.3) получим

$$T_{kp} = (K_{kp})^{1/n_d}, \quad (8.1.5)$$

а с учетом требования (8.1.4) имеем

$$K_{kp} = 1 / \prod_{h=1}^{n_d} (-\hat{s}_h). \quad (8.1.6)$$

Используя выражения (8.1.5) и (8.1.6) можно определить неизвестные параметры передаточной функции корректирующего устройства (8.1.2).

С целью оценки эффективности коррекции задающих воздействий рассмотрим пример.

Пример 8.1. Рассмотрим односвязную систему управления с ПИД-регулятором, проанализированную ранее в примере 7.2.

Поскольку для данной системы $n_d = 4$, то согласно выражению (8.1.2) передаточная функция корректирующего устройства имеет следующий вид:

$$W_{kp}(s) = K_{kp} \frac{\prod_{h=1}^4 (s - \hat{s}_h)}{(1 + T_{kp}s)^4},$$

где

$$\hat{s}_{1,3} = -\eta + i \frac{\eta}{m_{II}}; \quad \hat{s}_{2,4} = -\eta - i \frac{\eta}{m_{II}},$$

причем

$$\eta = 0,012054 \text{ c}^{-1}; \quad m_{II} = 0,366.$$

В таком случае

$$\prod_{h=1}^4 (s - \hat{s}_h) = \left[(s + \eta)^2 + \frac{\eta^2}{m_{II}^2} \right]^2.$$

Используя выражения (8.1.5) и (8.1.6) определим значения параметров настройки корректирующего устройства

$$K_{кр} = \frac{1}{\prod_{h=1}^4 (-\hat{s}_h)} = \frac{m_{II}^4}{\eta^4 (1 + m_{II}^2)^2} = 661008,7167 \text{ c}^4;$$

$$T_{кр} = (K_{кр})^{1/4} = 28,5 \text{ c}.$$

Чтобы убедиться в эффективности данного устройства, построим графики АЧХ каналов передачи задающего воздействия $y_{зд}(t)$ с коррекцией и без нее, которые представлены на рисунках 8.2 и 8.3.

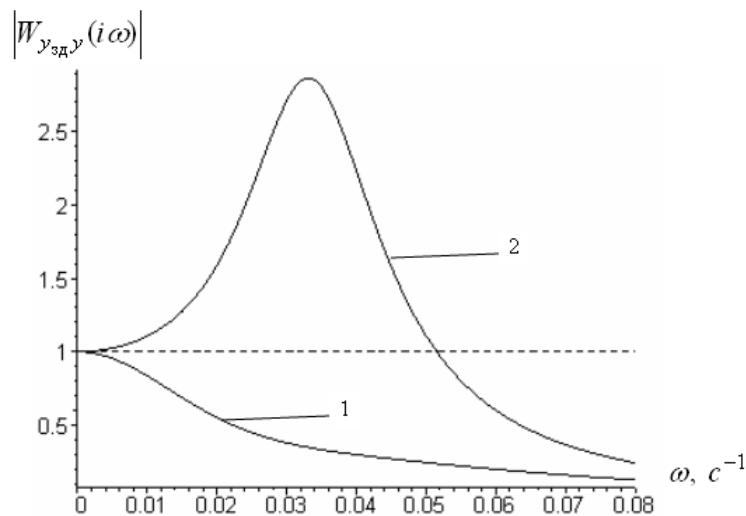


Рисунок 8.2 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$:
1 – с коррекцией; 2 – без коррекции

Как видно из рис. 8.2, применение синтезированного корректирующего устройства позволило полностью устранить резонансный пик АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$, что способствует резкому уменьшению колебательности системы, без снижения ее быстродействия, т. к. значение показателя η при этом остается неизменным.

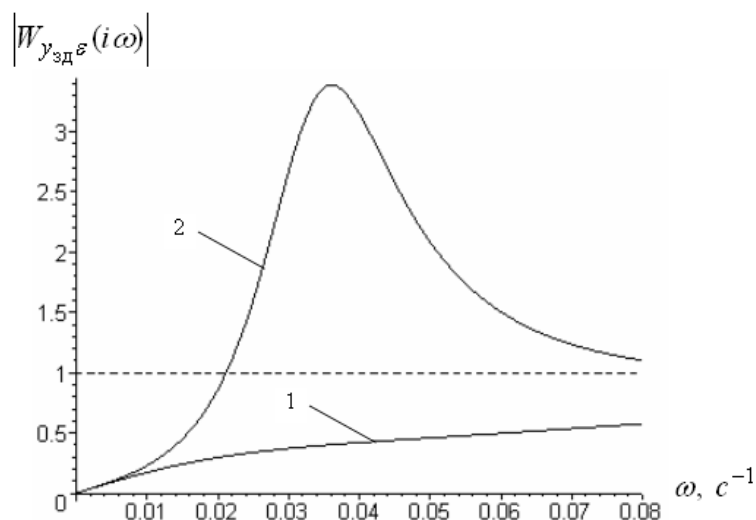


Рисунок 8.3 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \epsilon(t)$:

1 – с коррекцией; 2 – без коррекции

Согласно рисунку 8.3, с помощью корректирующего устройства можно резко улучшить фильтрующие свойства системы по каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow \epsilon(t)$, т.к. у АЧХ данного канала исчезает резонансный пик, и при этом не возрастают ее значения в области низких частот.

Следовательно, применение корректирующего устройства позволяет полностью устранить негативные последствия слияния доминирующих полюсов при настройке системы, выражающиеся в возрастании ее резонансных пиков, сохранив, однако, достигнутое при упомянутом слиянии высокое быстродействие.

Повышение качества переходных процессов в системе при использовании корректирующего устройства иллюстрируется рисунком 8.4.

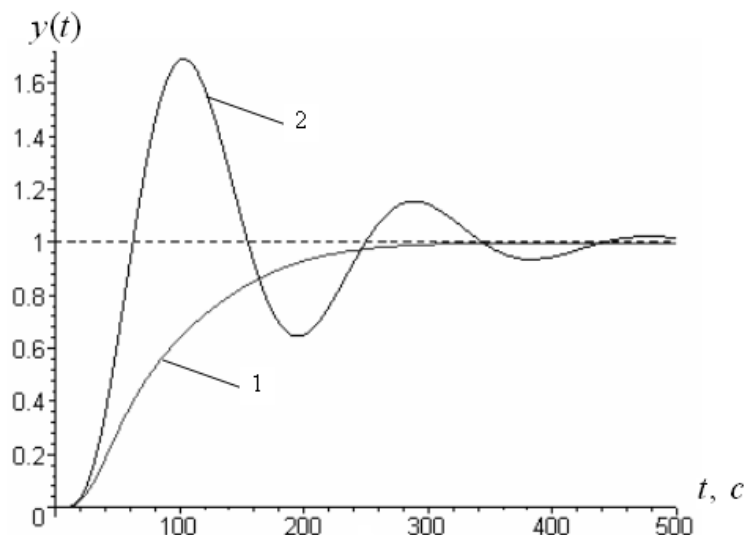


Рисунок 8.4 – Переходные процессы при действии единичного ступенчатого возмущения по каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$:

1 – процесс без коррекции; 2 – процесс с коррекцией

Анализируя графики, представленные на рисунке 8.4, приходим к выводу, что применение корректирующего устройства позволяет полностью устранить перерегулирование и колебательность.

Это подтверждает также определяющее влияние доминирующих полюсов замкнутой системы на качество управления, т. к. используемый метод коррекции основан на сокращении доминирующих полюсов.

Отметим, что устранение колебательности особенно полезно при управлении температурой, т. к. в таких системах обычно отсутствуют устройства, обеспечивающие искусственное охлаждение объекта при превышении температурой заданного значения, а при его естественном охлаждении требуется довольно длительное время для устранения, возникшего перерегулирования.

Таким образом, рассмотренный пример 8.1 убедительно показал значительные преимущества метода синтеза корректирующих устройств, основанного на сокращении доминирующих полюсов системы.

8.2. Коррекция управления по отношению к контролируемым возмущениям

Рассмотрим теперь *коррекцию управления по отношению к контролируемому возмущающему воздействию $\lambda(t)$* . В этом слу-

чае функциональная схема системы управления представлена на рисунке 8.5.

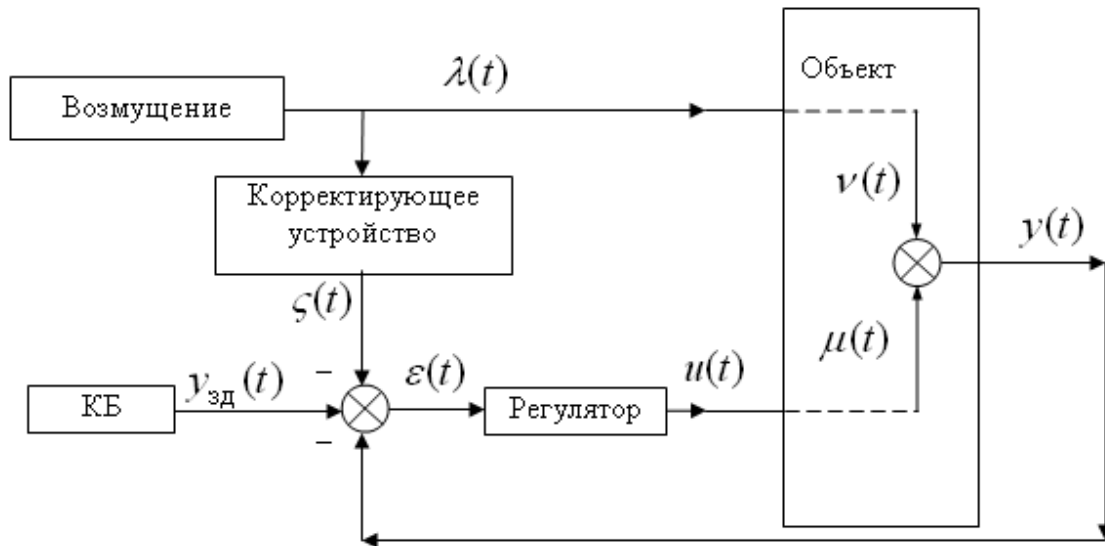


Рисунок 8.5 – Функциональная схема системы управления

При решении данной задачи обычно стараются выбрать передаточную функцию корректирующего устройства $W_{kp}(s)$ так, чтобы выполнялось тождество

$$W_{\lambda y}(s) \equiv 0, \quad (8.2.1)$$

где $W_{\lambda y}(s)$ – передаточная функция объекта по каналу действия возмущения $\lambda(t)$ на выходную величину $y(t)$.

Чтобы определить условия, при которых выполняется тождество (8.2.1), получим выражение для передаточной функции $W_{\lambda y}(s)$, воспользовавшись следующими равенствами:

$$\tilde{y}(s) = \tilde{v}(s) + \tilde{\mu}(s); \quad (8.2.2)$$

$$\tilde{v}(s) = W_{\lambda v}^{об}(s) \tilde{\lambda}(s); \quad (8.2.3)$$

$$\tilde{\mu}(s) = W_{u\mu}^{об}(s) \tilde{u}(s); \quad (8.2.4)$$

$$\tilde{u}(s) = W_{pez}(s) \tilde{\varepsilon}(s); \quad (8.2.5)$$

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \tilde{y}_{зд}(s) - \tilde{y}(s) - W_{kp}(s) \tilde{\lambda}(s), \quad (8.2.6)$$

где $\tilde{v}(s)$ и $\tilde{\mu}(s)$ – изображения по Лапласу выходных сигналов объекта $v(t)$ и $\mu(t)$, обусловленных воздействиями $\lambda(t)$ и $u(t)$ соответ-

ственно; $W_{\lambda\nu}^{об}(s)$ и $W_{u\mu}^{об}(s)$ – передаточные функции объекта по каналам передачи $\tilde{\lambda}(s) \rightarrow \tilde{\nu}(s)$ и $\tilde{u}(s) \rightarrow \tilde{\mu}(s)$.

Поскольку

$$W_{\lambda y}(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{\lambda}(s)},$$

то с учетом равенств (8.2.2) – (8.2.6) имеем

$$W_{\lambda y}(s) = \frac{W_{\lambda\nu}^{об}(s) - W_{u\mu}^{об}(s)W_{pez}(s)W_{kp}(s)}{1 + W_{u\mu}^{об}(s)W_{pez}(s)}. \quad (8.2.7)$$

Следовательно, тождество (8.2.1) выполняется, если

$$W_{kp}(s) = \frac{W_{\lambda\nu}^{об}(s)}{W_{u\mu}^{об}(s)W_{pez}(s)}. \quad (8.2.8)$$

Чтобы корректирующее звено, синтезируемое согласно выражению (8.2.8), было технически реализуемо, канал передачи объекта $\lambda(t) \rightarrow \nu(t)$ должен быть более инерционным, чем его канал передачи $u(t) \rightarrow \mu(t)$. В таком случае степень полинома числителя передаточной функции (8.2.8) не превышает степени полинома ее знаменателя.

В тех случаях, когда корректирующее устройство с передаточной функцией (8.2.8) технически реализуемо, то его синтез осуществляется в два этапа.

На первом этапе выбирается закон управления, т.е. определяется из тех или иных соображений тип регулятора и значения его параметров настройки.

На втором этапе, когда передаточная функция регулятора $W_{pez}(s)$ уже известна, в соответствии с выражением (8.2.8) определяется передаточная функция корректирующего устройства.

Однако на практике синтез корректирующих устройств на основе выражения (8.2.8) зачастую оказывается невозможным, т.к. канал объекта, по которому действует возмущение $\lambda(t)$, является менее инерционным, чем канал передачи управляющих воздействий $u(t)$. Поэтому в таких случаях приходится искать другие способы решения задачи коррекции управления по отношению к контролируемым возмущениям.

Рассмотрим один из подходов к решению данной проблемы, основанный на взаимном сокращении нулей числителя и доминирующих полюсов знаменателя передаточной функции $W_{\lambda y}(s)$, заданной выражением (8.2.7).

В этом случае на *первом этапе*, когда выбирается закон управления, и определяются значения параметров настройки регулятора необходимо использовать методы расчета, базирующиеся на каком-либо из требований: (7.1.8), (7.1.28) или (7.1.69), к расположению доминирующих полюсов замкнутой системы.

Целесообразность использования указанных методов объясняется тем, что они позволяют определить не только значения параметров настройки выбранного регулятора, но и расположение доминирующих полюсов s_k , $k = \overline{1, n_d}$ замкнутой системы.

Поскольку для знаменателя передаточной функции (8.2.7) выполняются равенства

$$1 + W_{u\mu}^{об}(s_k)W_{рег}(s_k) = 0, \quad k = \overline{1, n_d},$$

то для взаимного сокращения нулей и доминирующих полюсов системы числитель этой передаточной функции при $s = s_k$, $k = \overline{1, n_d}$ также должен обращаться в нуль, т.е.

$$W_{\lambda v}^{об}(s_k) - W_{u\mu}^{об}(s_k)W_{рег}(s_k)W_{kp}(s_k) = 0, \quad k = \overline{1, n_d}. \quad (8.2.9)$$

Поэтому на *втором этапе* синтеза корректирующего устройства его передаточная функция $W_{kp}(s)$ ищется в виде

$$W_{kp}(s) = \frac{s}{(1 + \tau_k s)^{n_d}} \sum_{h=0}^{n_d-1} K_h s^h, \quad (8.2.10)$$

где K_h , $h = \overline{0, n_d-1}$ – параметры настройки корректирующего устройства; τ_k – заданная постоянная времени корректирующего устройства.

Ввиду того, что степень полинома числителя передаточной функции (8.2.10) не превышает степени полинома ее знаменателя, то синтезируемое корректирующее устройство технически реализуемо.

Так как после выполнения первого этапа синтеза расположение доминирующих полюсов системы становится известным, то согласно требованиям (7.1.8), (7.1.28) и (7.1.69) получают определенные значения входящие в них величины η и m_{Π} .

В таком случае выберем значение постоянной времени τ_k , исходя из условия

$$\tau_k < \frac{1}{\eta}, \quad (8.2.11)$$

выполнение которого гарантирует, что корректирующее устройство не будет существенно повышать инерционность канала передачи сигналов $\lambda(t) \rightarrow y(t)$, т.к. это привело бы к нежелательному затягиванию возникающих при изменениях возмущающего воздействия $\lambda(t)$ переходных процессов $y(t)$ на выходе системы.

Пусть

$$Q(s) = \frac{W_{\lambda v}^{об}(s)(1 + \tau_k s)^{n_d}}{s W_{u\mu}^{об}(s) W_{pez}(s)} - \sum_{h=0}^{n_d-1} K_h s^h, \quad (8.2.12)$$

тогда требования (8.2.9) можно представить в виде

$$Q(s_k) = 0, \quad k = \overline{1, n_d}. \quad (8.2.13)$$

Рассмотрим случай, когда для управления объектом используется ПИ-регулятор. При данных обстоятельствах $n_d = 3$ и система уравнений (8.2.13) для определения значений параметров настройки корректирующего устройства принимает вид

$$Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0; \quad (8.2.14)$$

$$Q(s) \Big|_{s=-\eta-i\eta/m_{\Pi}} = 0; \quad (8.2.15)$$

$$Q(s) \Big|_{s=-\eta} = 0. \quad (8.2.16)$$

Запишем уравнения (8.2.14) и (8.2.15) следующим образом:

$$\operatorname{Re} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} + i \operatorname{Im} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0; \quad (8.2.17)$$

$$\operatorname{Re} Q(s) \Big|_{s=-\eta-i\eta/m_{\Pi}} + i \operatorname{Im} Q(s) \Big|_{s=-\eta-i\eta/m_{\Pi}} = 0; \quad (8.2.18)$$

Подставив выражения

$$\operatorname{Re} Q(s) \Big|_{s=-\eta-i\eta/m_{\Pi}} = \operatorname{Re} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}};$$

$$\operatorname{Im} Q(s) \Big|_{s=-\eta-i\eta/m_{\Pi}} = -\operatorname{Im} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}},$$

в уравнение (8.2.18), получим

$$\operatorname{Re} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} - i \operatorname{Im} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0. \quad (8.2.19)$$

В результате уравнения (8.2.17) и (8.2.19) заменяются следующими:

$$\operatorname{Re} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0;$$

$$\operatorname{Im} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0,$$

и первоначальная система уравнений (8.2.14) – (8.2.16) приводится к виду

$$\begin{cases} \operatorname{Re} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0; \\ \operatorname{Im} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0; \\ Q(s) \Big|_{s=-\eta} = 0. \end{cases} \quad (8.2.20)$$

Решив систему уравнений (8.2.20) определим значения параметров настройки корректирующего устройства K_0 , K_1 и K_2 при которых выполняются требования (8.2.9).

Если для управления объектом применяется ПИД-регулятор, то $n_{\text{д}} = 4$ и значения параметров настройки корректирующего устройства K_h , $h = \overline{0,3}$, при которых обеспечивается выполнение требований (8.2.9) определяются в результате решения системы уравнений следующего вида:

$$\operatorname{Re} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0; \operatorname{Im} Q(s) \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0; \quad (8.2.21)$$

$$\operatorname{Re} \frac{dQ(s)}{ds} \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0; \operatorname{Im} \frac{dQ(s)}{ds} \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0. \quad (8.2.22)$$

В случае использования многопараметрических регуляторов ($n_{\text{д}} = 6$) к системе уравнений (8.2.21) и (8.2.22) добавляются еще два уравнения

$$\operatorname{Re} \frac{d^2 Q(s)}{ds^2} \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0; \operatorname{Im} \frac{d^2 Q(s)}{ds^2} \Big|_{s=-\eta+i\eta/m_{\Pi}} = 0.$$

Для иллюстрации эффективности метода синтеза корректирующего устройства, обеспечивающего повышение качества управле-

ния при действии на систему контролируемых возмущений, рассмотрим пример.

Пример 8.2. Предположим, что каналам передачи сигналов $u(t) \rightarrow \mu(t)$ и $\lambda(t) \rightarrow v(t)$ управляемого объекта соответствуют передаточные функции следующего вида:

$$W_{u\mu}^{об}(s) = \frac{e^{-\tau_1 s}}{(1 + T_1 s)^2}; \quad (8.2.23)$$

$$W_{\lambda v}^{об}(s) = \frac{e^{-\tau_2 s}}{(1 + T_2 s)}, \quad (8.2.24)$$

где $\tau_1 = 10 \text{ с}$; $T_1 = 50 \text{ с}$; $\tau_2 = 5 \text{ с}$; $T_2 = 30 \text{ с}$.

Пусть для управления рассматриваемым объектом используется ПИ-регулятор, тогда, подставив равенства (8.2.23) и (8.2.24) в выражение (8.2.8) получим

$$W_{kp}(s) = \frac{e^{(\tau_1 - \tau_2)s} (1 + T_1 s)^2}{(1 + T_2 s) \left(K_p s + \frac{K_p}{T_I s} \right)}. \quad (8.2.25)$$

Поскольку

$$\tau_1 - \tau_2 > 0,$$

то передаточная функция (8.2.25) описывает технически нереализуемое устройство, и поэтому при синтезе корректирующего устройства будем использовать передаточную функцию (8.2.10).

На *первом этапе* синтеза необходимо выбрать подходящее значение постоянной времени τ_k . Для этого, полагая

$$m_{II} = 0,313, \quad (8.2.26)$$

определим значения параметров настройки ПИ-регулятора, исходя из требований к расположению доминирующих полюсов системы (7.1.8).

В результате установим, что

$$K_p = 2,5310; \quad T_{II} = 94,209 \text{ с}, \quad (8.2.27)$$

причем

$$\eta = 0,0096914 \text{ с}^{-1}. \quad (8.2.28)$$

Поскольку из равенства (8.2.28) следует, что $1/\eta = 103,18 \text{ с}$, то в соответствии с условием (8.2.11) для величины τ_k выберем значения, представленные в таблице 8.1.

На *втором этапе* синтеза, решив с учетом полученных равенств (8.2.26) – (8.2.29) и выбранных значений τ_k , систему уравнений (8.2.20), определим искомые значения параметров настройки корректирующего устройства, которые также представлены в таблице 8.1. $K_1, \text{ с}$

Таблица 8.1 – Значения параметров настройки корректирующего устройства

$\tau_k, \text{ с}$	K_0	$K_1, \text{ с}$	$K_2, \text{ с}^2$
20	100286	2725,2	97,000
30	102080	1,3652	2250,4
50	109152	-672,11	4,1448

Графики АЧХ канала передачи сигналов $\lambda(t) \rightarrow \nu(t)$ показаны на рисунке 8.6.

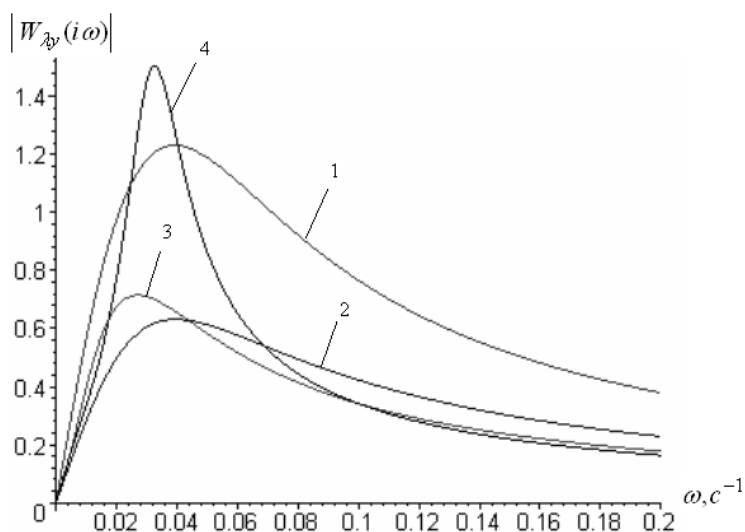


Рисунок 8.6 – АЧХ канала передачи сигналов $\lambda(t) \rightarrow \nu(t)$ при различных значениях постоянной времени τ_k :

1 – $\tau_k = 20 \text{ с}$; 2 – $\tau_k = 30 \text{ с}$; 3 – $\tau_k = 50 \text{ с}$; 4 – без коррекции

Как видно из рисунка 8.6, применение корректирующего устройства позволяет уменьшить величину резонансного пика АЧХ канала передачи сигналов $\lambda(t) \rightarrow \nu(t)$, причем его минимальное

значение достигается при $\tau_k = 30 \text{ с}$. Однако в том случае, когда $\tau_k = 50 \text{ с}$ значения АЧХ в области высоких частот меньше, чем при $\tau_k = 30 \text{ с}$.

Поэтому для обоснованного выбора постоянной времени τ_k целесообразно исследовать, возникающие на выходе системы управления при действии по каналу $\lambda(t) \rightarrow \nu(t)$ единичного ступенчатого возмущения $\lambda(t) = 1(t)$, переходные процессы $y(t)$, графики которых представлены на рисунке 8.7.

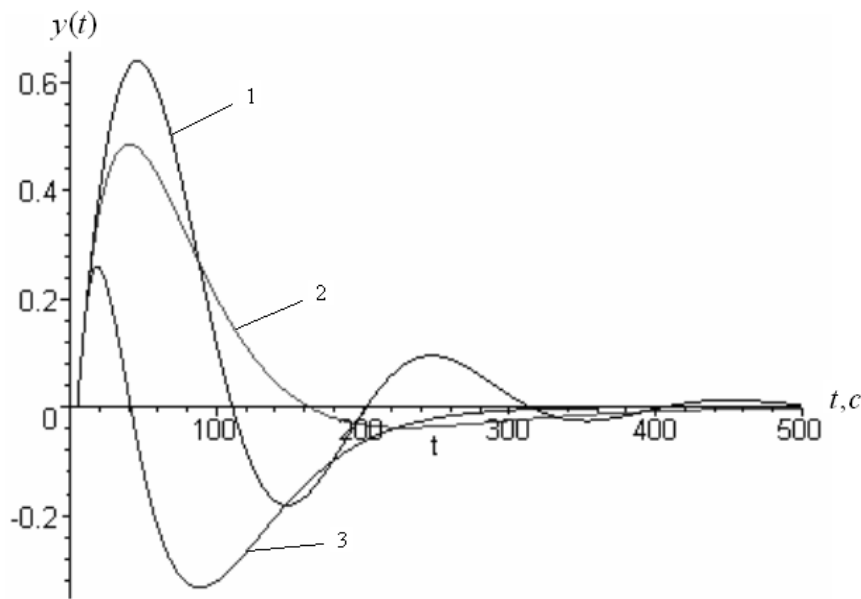


Рисунок 8.7 – Переходные процессы на выходе системы управления:
 1 – без коррекции; 2 – $\tau_k = 50 \text{ с}$; 3 – $\tau_k = 30 \text{ с}$

Как видно из рис. 8.7, минимальные значения выброса и длительности переходного процесса $y(t)$ достигаются при $\tau_k = 30 \text{ с}$.

Поэтому значения параметров настройки корректирующего устройства устанавливаются по данным таблицы 8.1 согласно следующим равенствам:

$$\tau_k = 30 \text{ с}; K_0 = 102080; K_1 = 1,3652 \text{ с}; K_2 = 2250,4 \text{ с}^2.$$

Таким образом, рассмотренный пример 8.2 подтверждает высокую эффективность метода коррекции управления по отношению к контролируемым возмущениям $\lambda(t)$ с неизвестными статистическими характеристиками.

8.3. Расчет параметров настройки регуляторов в системах с неточно заданными параметрами объекта

Рассмотрим задачу управления односвязной системой с объектом, имеющим следующую передаточную функцию:

$$W_{об}(s) = \frac{\sum_{h=0}^{\chi} b_h s^h}{\sum_{k=0}^{\sigma} a_k s^k} e^{-\tau s}, \quad (8.3.1)$$

где χ и σ – целые числа ($\sigma > \chi$); a_k и b_h – неотрицательные вещественные коэффициенты; τ – постоянная времени транспортного запаздывания.

Примем на этот раз во внимание, что значения параметров объекта установлены с некоторой погрешностью, т. е. значения коэффициентов и постоянной времени транспортного запаздывания передаточной функции (8.3.1) с доверительной вероятностью $P_{дв}$ принадлежат следующим доверительным интервалам:

$$|b_h - \hat{b}_h| \leq \Delta b_h, \quad h = \overline{1, \chi}; \quad (8.3.2)$$

$$|a_k - \hat{a}_k| \leq \Delta a_k, \quad k = \overline{1, \sigma}; \quad (8.3.3)$$

$$|\tau - \hat{\tau}| \leq \Delta \tau, \quad (8.3.4)$$

где \hat{a}_k , \hat{b}_h и $\hat{\tau}$ – оценки коэффициентов и постоянной времени транспортного запаздывания; $2\Delta a_k$, $2\Delta b_h$ и $2\Delta \tau$ – доверительные интервалы для величин a_k , b_h и τ .

Задача управления объектом (8.3.1) – (8.3.4) при использовании односвязных систем с ПИ и ПИД-регуляторами заключается в выборе значений параметров настройки данных регуляторов, обеспечивающих выполнение требования

$$K_p / T_I = \max, \quad (8.3.5)$$

с учетом ограничений (2.3.3) и (2.3.4).

Определим множество R параметров настройки регулятора, такое, что при $\mathbf{r} \in R$ для системы с объектом (8.3.1) – (8.3.4) выполняются ограничения (3.3.3) и (3.3.4), где \mathbf{r} – вектор параметров настройки регулятора.

В таком случае задача управления сводится к нахождению такого вектора $\mathbf{r}^* \in R$, для которого выполняется требование (8.3.5).

Чтобы наметить правильный общий подход к решению поставленной задачи рассмотрим несколько частных случаев.

Пример 8.3. Допустим, что передаточная функция объекта имеет вид

$$W_{об}(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}, \quad (8.3.6)$$

где

$$|\hat{b}_0 - b_0| \leq \Delta b_0; |a_0 - \hat{a}_0| \leq \Delta a_0; |a_1 - \hat{a}_1| \leq \Delta a_1. \quad (8.3.7)$$

Предположим, что для управления объектом с передаточной функцией (8.3.6) используется И-регулятор.

При данных обстоятельствах характеристическое уравнение системы принимает вид:

$$\Delta(s) = s^2 + \frac{a_0}{a_1} s + \frac{b_0}{a_1} \frac{K_p}{T_I} = 0.$$

Это уравнение имеет два корня

$$s_{1,2} = -\eta \pm i \frac{\eta}{m}; \quad (m \geq m_{II}),$$

причем

$$s_1 + s_2 = 2\eta = \frac{a_0}{a_1}; \quad (8.3.8)$$

$$s_1 s_2 = \eta^2 \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) = \frac{b_0}{a_1} \frac{K_p}{T_I}. \quad (8.3.9)$$

С учетом выражений (8.3.8) и (8.3.9) получим следующее равенство:

$$\frac{K_p}{T_I} = \frac{a_0^2}{4a_1 b_0} \left(1 + \frac{1}{m^2}\right). \quad (8.3.10)$$

Согласно выражению (8.3.10) требование (8.3.5) выполняется, если

$m \rightarrow \min$.

Тогда с учетом ограничения (3.3.4) имеем

$$m = m_{II},$$

а значит

$$\left(\frac{K_p}{T_{II}} \right)_{\max} = \frac{a_0^2}{4a_1b_0} \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2} \right). \quad (8.3.11)$$

Исходя из выражения (8.3.11) и принимая во внимание неравенства (8.3.7) получим

$$\min \left(\frac{K_p}{T_{II}} \right)_{\max} = \frac{(\hat{a}_0 - \Delta a_0)^2}{4(\hat{a}_1 + \Delta a_1)(\hat{b}_0 + \Delta b_0)} \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2} \right). \quad (8.3.12)$$

В данном примере вектор параметров настройки регулятора \mathbf{r} имеет единственную координату $r_1 = K_p / T_{II}$, а множество R определяется следующей совокупностью ее допустимых значений:

$$R = \{ r_1 \} = \frac{(\hat{a}_0 - \Delta a_0)^2}{4(\hat{a}_1 + \Delta a_1)(\hat{b}_0 + \Delta b_0)} \left(1 + \frac{1}{m^2} \right); \quad m \geq m_{II}.$$

Искомая координата r_1^* задается выражением

$$r_1^* = \frac{(\hat{a}_0 - \Delta a_0)^2}{4(\hat{a}_1 + \Delta a_1)(\hat{b}_0 + \Delta b_0)} \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2} \right). \quad (8.3.13)$$

Покажем, что для любой, реализуемой в действительности координаты

$$r_1 = \frac{a_0^2}{4a_1b_0} \left(1 + \frac{1}{m^2} \right), \quad (8.3.14)$$

выполняется ограничение (3.3.4), если имеет место равенство (8.3.13).

Действительно, полагая

$$r_1 = r_1^*,$$

с учетом равенств (8.3.13) и (8.3.14) получим

$$\frac{a_0^2}{4a_1b_0} \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) = \frac{(\hat{a}_0 - \Delta a_0)^2}{4(\hat{a}_1 + \Delta a_1)(\hat{b}_0 + \Delta b_0)} \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2}\right). \quad (8.3.15)$$

Равенство (8.3.15) представим в виде

$$\left(1 + \frac{1}{m^2}\right) = k \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2}\right), \quad (8.3.16)$$

где

$$k = \left(\frac{\hat{a}_0 - \Delta a_0}{a_0}\right)^2 \left(\frac{a_1}{\hat{a}_1 + \Delta a_1}\right) \left(\frac{b_0}{\hat{b}_0 + \Delta b_0}\right). \quad (8.3.17)$$

На основании выражения (8.3.17) и неравенств (8.3.7) приходим к выводу, что

$$k \leq 1. \quad (8.3.18)$$

Принимая во внимание неравенство (8.3.18) и равенство (8.3.16) получим

$$m \geq m_{II},$$

т. е. при выборе для параметра настройки И-регулятора значения r_1^* и выполнении для параметров объекта неравенств (8.3.7) гарантируется выполнение ограничения (3.3.4).

Рассмотренный в примере 8.3 метод обладает тем преимуществом, что позволяет при определении параметров настройки регуляторов избежать выполнения трудоемких расчетов, основанных на переборе значений параметров объекта, исходя из их доверительных интервалов.

Проанализируем теперь случай, когда управляемый объект имеет более сложную динамику, чем рассмотренный в примере 8.3.

Пример 8.4. Допустим, что в односвязной системе с ПИ-регулятором передаточная функция объекта имеет вид

$$W_{об}(s) = \frac{K_0}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)}, \quad (8.3.19)$$

где

$$\left| \hat{K}_0 - K_0 \right| \leq \Delta K_0; \quad \left| \hat{T}_1 - T_1 \right| \leq \Delta T_1; \quad \left| \hat{T}_2 - T_2 \right| \leq \Delta T_2. \quad (8.3.20)$$

Принимая во внимание выражение (8.3.19) характеристическое уравнение рассматриваемой системы запишем следующим образом:

$$\Delta(s) = s^3 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} s^2 + \frac{1 + K_p K_0}{T_1 T_2} s + \frac{K_0}{T_1 T_2} \frac{K_p}{T_{II}} = 0. \quad (8.3.21)$$

Уравнение (8.3.21) имеет три корня

$$s_{1,2} = -\eta \pm i \frac{\eta}{m}; \quad s_3 = -\eta,$$

причем

$$s_1 + s_2 + s_3 = 3\eta = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}; \quad (8.3.22)$$

$$s_3(s_1 + s_2) + s_1 s_2 = \eta^2 \left(3 + \frac{1}{m^2} \right) = \frac{1 + K_p K_0}{T_1 T_2}; \quad (8.3.23)$$

$$s_1 s_2 s_3 = \eta^3 \left(1 + \frac{1}{m^2} \right) = \frac{K_0}{T_1 T_2} \frac{K_p}{T_{II}}. \quad (8.3.24)$$

Воспользовавшись равенствами (8.3.22) – (8.3.24) получим

$$\frac{K_p}{T_{II}} = \frac{1}{27} \frac{(T_1 + T_2)^3}{K_0 T_1^2 T_2^2} \left(1 + \frac{1}{m^2} \right); \quad (8.3.25)$$

$$K_p = \frac{1}{K_0} \left[\frac{1}{9} \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} \left(3 + \frac{1}{m^2} \right) - 1 \right]. \quad (8.3.26)$$

На основании равенств (8.3.25) и (8.3.26) приходим к выражению

$$T_{II} = \frac{3T_1 T_2 \left[(T_1 + T_2)^2 \left(3 + \frac{1}{m^2} \right) - 3T_1 T_2 \right]}{(T_1 + T_2)^3 \left(1 + \frac{1}{m^2} \right)}. \quad (8.3.27)$$

Согласно выражению (8.3.25) установим, что

$$\left(\frac{K_p}{T_{II}} \right)_{\max} = \frac{1}{27} \frac{(T_1 + T_2)^3}{K_0 T_1^2 T_2^2} \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2} \right), \quad (8.3.28)$$

т. е. требование (8.3.5) с учетом ограничения (2.3.4) выполняется при $m = m_{II}$.

В таком случае выражения (8.3.26) и (8.3.27) принимают вид

$$K_p = \frac{1}{K_0} \left[\frac{1}{9} \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} \left(3 + \frac{1}{m_{II}^2} \right) - 1 \right]; \quad (8.3.29)$$

$$T_{II} = \frac{3T_1 T_2 \left[(T_1 + T_2)^2 \left(3 + \frac{1}{m_{II}^2} \right) - 3T_1 T_2 \right]}{(T_1 + T_2)^3 \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2} \right)}. \quad (8.3.30)$$

Для решения поставленной задачи теперь необходимо выбрать такие значения параметров объекта T_1 , T_2 и K_0 , при которых выполняется требование

$$\left(\frac{K_p}{T_{II}} \right)_{\max} = \min. \quad (8.3.31)$$

Согласно выражению (8.3.29) и неравенствам (8.3.20) искомое значение коэффициента K_0 задается равенством

$$K_0 = \hat{K}_0 + \Delta K_0. \quad (8.3.32)$$

Для определения значений постоянных времени T_1 и T_2 примем во внимание, что согласно (8.3.31) должно выполняться требование

$$\frac{(T_1 + T_2)^3}{T_1^2 T_2^2} = \min. \quad (8.3.33)$$

Чтобы определить условия выполнения требования (8.3.32) воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{T_1 + T_2}{2} \geq \sqrt{T_1 T_2}. \quad (8.3.34)$$

Исходя из неравенства (8.3.34) получим

$$\frac{(T_1 + T_2)^3}{T_1^2 T_2^2} \geq \frac{8}{\sqrt{T_1 T_2}} \geq \frac{8}{\sqrt{(\hat{T}_1 + \Delta T_1)(\hat{T}_2 + \Delta T_2)}}. \quad (8.3.35)$$

В соответствии с неравенствами (8.3.35) приходим к выводу, что требование (8.3.33), а значит и требование (8.3.31), выполняются, если

$$T_1 = \hat{T}_1 + \Delta T_1; T_2 = \hat{T}_2 + \Delta T_2. \quad (8.3.36)$$

Следовательно, для определения параметров настройки ПИ-регулятора с учетом вариаций параметров объекта необходимо равенства (8.3.32) и (8.3.36) подставить в выражения (8.3.29) и (8.3.30).

Необходимо отметить, что тот же результат можно получить, если при расчете параметров настройки регулятора в соответствии с требованиями (6.2.1) использовать передаточную функцию объекта следующего вида:

$$W_{об}^*(s) = \frac{\hat{K}_0 + \Delta K_0}{[1 + (\hat{T}_1 + \Delta T_1)s][1 + (\hat{T}_2 + \Delta T_2)s]}. \quad (8.3.37)$$

На основании рассмотренных примеров 8.3 и 8.4 можно сделать обобщающий вывод, что расчет параметров настройки регуляторов для систем с неточно заданными параметрами объектов следует выполнять, ориентируясь на случай, когда **инерционность объекта максимальна**. Так как именно такому случаю отвечает передаточная функция (8.3.37).

Обоснуем это предположение для объектов с передаточными функциями вида

$$W_{об}(s) = \frac{e^{-\tau s} K_0}{\theta \prod_{h=1} (1 + T_h s)}; \quad (8.3.38)$$

$$|\hat{K}_0 - K_0| \leq \Delta K_0; |\hat{T}_h - T_h| \leq \Delta T_h, h = \overline{1, \theta}; \quad (8.3.39)$$

$$|\tau - \Delta \tau| \leq \Delta \tau. \quad (8.3.40)$$

Покажем, что выполняется приближенное равенство

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1}{\rho \prod_{h=\theta+1} (1 + T_h s)}, \quad (8.3.41)$$

где

$$T_h = \tau / \rho; h = \overline{\theta + 1, \rho}. \quad (8.3.42)$$

Действительно, с учетом выражения (8.3.42) передаточную функцию звена транспортного запаздывания представим в виде

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{e^{\tau s}} = \frac{1}{\prod_{h=\theta+1}^{\rho} e^{T_h s}}. \quad (8.3.43)$$

Выберем значение целочисленной величины ρ в выражении (8.3.42) настолько большим, чтобы с достаточной точностью выполнялись равенства

$$e^{T_h s} \approx 1 + T_h s, \quad h = \overline{\theta+1, \rho}. \quad (8.3.44)$$

Таким образом, принимая во внимание выражения (8.3.43) и (8.3.44) приходим к равенству (8.3.41).

Согласно соотношениям (8.3.40) и (8.3.42) постоянные времени T_h , $h = \overline{\theta+1, \rho}$ могут принимать значения из следующих доверительных интервалов

$$\left| \hat{T}_h - T_h \right| \leq \Delta T_h; \quad h = \overline{\theta+1, \rho}, \quad (8.3.45)$$

где

$$\hat{T}_h = \hat{\tau} / \rho; \quad \Delta T_h = \Delta \tau / \rho. \quad (8.3.46)$$

Принимая во внимание равенства (8.3.38) и (8.3.41) получим

$$W_{об}(s) = \frac{K_0}{\prod_{h=1}^n (1 + T_h s)}, \quad (8.3.47)$$

где $n = \theta + \rho$.

Для определенности предположим, что управление объектом с передаточной функцией (8.3.47) осуществляется с помощью ПИД-регулятора. Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы принимает вид

$$\Delta(s) = \sum_{k=0}^n \alpha_k s^k = s \prod_{h=1}^n (1 + T_h s) + K_p T_D s^2 + K_p s + K_0 \frac{K_p}{T_I} = 0. \quad (8.3.48)$$

Уравнение (8.3.48) имеет четыре доминирующих корня

$$s_{1,3} = -\eta \left(1 + i \frac{1}{m} \right); \quad s_{2,4} = -\eta \left(1 - i \frac{1}{m} \right), \quad (8.3.49)$$

а также $n - 3$ недоминирующих корней s_k , $k = \overline{5, n+1}$.

С учетом равенств (8.3.48) и (8.3.49) получим

$$\frac{K_p}{T_{II}} = \frac{\prod_{h=1}^n T_h}{K_0} \eta^4 \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)^2 \prod_{k=5}^{n+1} |s_k|. \quad (8.3.50)$$

С учетом ограничения (3.3.4) и выражения (8.3.50) получим

$$\left(\frac{K_p}{T_{II}}\right)_{\max} = \frac{\prod_{h=1}^n T_h}{K_0} \eta^4 \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2}\right)^2 \prod_{k=5}^{n+1} |s_k|. \quad (8.3.51)$$

Полагая, что система устойчива, т.е.

$$\eta > 0; \quad -\operatorname{Re} s_k > 0, \quad k = \overline{5, n+1}, \quad (8.3.52)$$

введем обозначения

$$|s_k| = \gamma_k (-\operatorname{Re} s_k), \quad k = \overline{5, n+1}. \quad (8.3.53)$$

На основании соотношений (8.3.52) и (8.3.53) установим, что

$$\gamma_k \geq 1, \quad k = \overline{5, n+1}.$$

Воспользовавшись обозначениями (8.3.53), выражение (8.3.51) запишем следующим образом:

$$\left(\frac{K_p}{T_{II}}\right)_{\max} = \frac{\prod_{h=1}^n T_h}{K_0} \prod_{k=5}^{n+1} (-\operatorname{Re} s_k) \eta^4 \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2}\right)^2 \prod_{k=5}^{n+1} \gamma_k. \quad (8.3.54)$$

Поскольку для коэффициентов уравнения (8.3.48) выполняются равенства

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = 4\eta + \sum_{k=5}^{n+1} (-\operatorname{Re} s_k) = \sum_{h=1}^n \frac{1}{T_h}, \quad (8.3.55)$$

то на основании неравенств (8.3.52) и равенства (8.3.55) можно заключить, о существовании вещественных положительных чисел $\vartheta < 1$ и $\beta_k < 1$, $k = \overline{5, n+1}$, таких, что

$$\eta = \mathcal{G} \sum_{h=1}^n \frac{1}{T_h}; \quad (-\operatorname{Re} s_k) = \beta_k \sum_{h=1}^n \frac{1}{T_h}, \quad k = \overline{5, n+1}. \quad (8.3.56)$$

С учетом равенств (8.3.56) выражение (8.3.53) принимает вид

$$\left(\frac{K_p}{T_{II}} \right)_{\max} = \frac{\prod_{h=1}^n T_h}{K_0} \left(\sum_{h=1}^n \frac{1}{T_h} \right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2} \right)^2 \mathcal{G}^4 \prod_{k=5}^{n+1} \beta_k \gamma_k. \quad (8.3.57)$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим имеем

$$\left(\sum_{h=1}^n \frac{1}{T_h} \right)^{n+1} \geq \frac{n^{n+1}}{\prod_{h=1}^n T_h \sqrt[n]{\prod_{h=1}^n T_h}}. \quad (8.3.58)$$

Принимая во внимание неравенства (8.3.39), (8.3.45) и (8.3.58), а также выражение (8.3.57), установим, что

$$\min \left(\frac{K_p}{T_{II}} \right)_{\max} \geq \frac{\mathcal{G}^4 \prod_{k=5}^{n+1} \beta_k \gamma_k}{(\hat{K}_0 + \Delta K_0) \sqrt[n]{\prod_{h=1}^n (\hat{T}_h + \Delta T_h)}} \left(1 + \frac{1}{m_{II}^2} \right)^2. \quad (8.3.59)$$

Согласно неравенству (8.3.59) при расчетах параметров настройки астатических регуляторов с учетом возможных изменений параметров объекта в доверительных интервалах (8.3.39) и (8.3.45) гарантируется выполнение ограничения (3.3.4), если вместо передаточной функции объекта (8.3.47) использовать следующую передаточную функцию:

$$W_{об}^*(s) = \frac{\hat{K}_0 + \Delta K_0}{\prod_{h=1}^n [1 + (\hat{T}_h + \Delta T_h)s]}. \quad (8.3.60)$$

Воспользовавшись равенствами (8.3.43), (8.3.44) и (8.3.46) имеем

$$\frac{1}{\prod_{h=\theta+1}^{\rho} [1 + (\hat{T}_h + \Delta T_h)s]} = e^{-(\hat{\tau} + \Delta \tau)s}.$$

В результате выражение (8.3.60) принимает вид

$$W_{об}^*(s) = \frac{(\hat{K}_0 + \Delta K_0) e^{-(\hat{\tau} + \Delta\tau)s}}{\theta \prod_{h=1} [1 + (\hat{T}_h + \Delta T_h)s]} . \quad (8.3.61)$$

Таким образом, применение при расчетах параметров настройки типовых астатических регуляторов передаточной функции (8.3.61) позволяет в условиях информационной неопределенности относительно значений параметров объекта гарантировать выполнение ограничения (3.3.4) и резко сократить объем вычислений, благодаря исключению выбора тех, или иных значений параметров объекта в соответствующих им доверительных интервалах.

Для иллюстрации эффективности описанного метода рассмотрим пример.

Пример 8.5. Предположим, что передаточная функция канала управления объекта задана выражением

$$W_{об}(s) = \frac{K_{об}}{(1 + Ts)^5}, \quad (8.3.62)$$

причем

$$|3 - K_{об}| \leq 0,3; |20c - T| \leq 2c. \quad (8.3.63)$$

Пусть для управления объектом (8.3.62), (8.3.63) используется ПИД-регулятор и $m_{П} = 0,366$.

Определим параметры настройки данного регулятора, полагая, что параметры передаточной функции объекта (8.3.62) принимают следующие значения:

$$K_{об} = 3; T = 20c. \quad (8.3.64)$$

Принимая во внимание равенства (8.3.62) и (8.3.64) установим, что расположение доминирующих полюсов системы в соответствии с требованиями (7.1.28) обеспечивается, если

$$K_p = 0,73774; T_{И} = 38,551c; T_{Д} = 26,977c. \quad (8.3.65)$$

Сопоставив передаточные функции (8.3.61) и (8.3.62) установим, что для выполнения ограничения (3.3.4) расчет параметров регулятора следует осуществлять, выбрав из доверительных интервалов (8.3.63) следующие значения параметров передаточной функции объекта:

$$K_{об} = 3,3; T = 22 \text{ с}. \quad (8.3.66)$$

В таком случае, исходя из равенств (8.3.62) и (8.3.66) для параметров настройки регулятора, при которых выполняются требования (7.1.28), получим следующие значения:

$$K_p = 0,67067; T_I = 42,406 \text{ с}; T_D = 29,675 \text{ с}. \quad (8.3.67)$$

Для сравнения достигающегося качества управления при альтернативных значениях параметров настройки ПИД-регулятора (8.3.65) и (8.3.67) выберем значения параметров объекта из интервалов (8.3.63), заданные равенствами (8.3.66).

На рисунке 8.8 представлены графики АЧХ замкнутой системы, позволяющие судить о ее колебательности в обоих из рассматриваемых случаев.

Согласно этому рисунку выбор значений параметров объекта в соответствии с требованиями (8.3.61) обеспечивает значительно меньшую колебательность системы по сравнению с традиционным методом, когда используются лишь оценки значений параметров объекта и не учитывается ширина, соответствующих им доверительных интервалов.

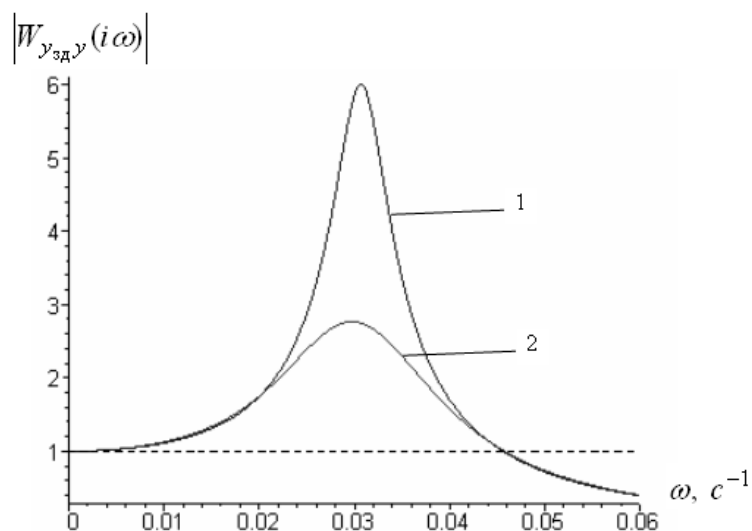


Рисунок 8.8 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$, при параметрах настройки ПИД-регулятора, заданных равенствами: 1 – (8.3.65); 2 – (8.3.67)

На рисунке 8.9 приводятся графики переходных процессов в рассматриваемых случаях.

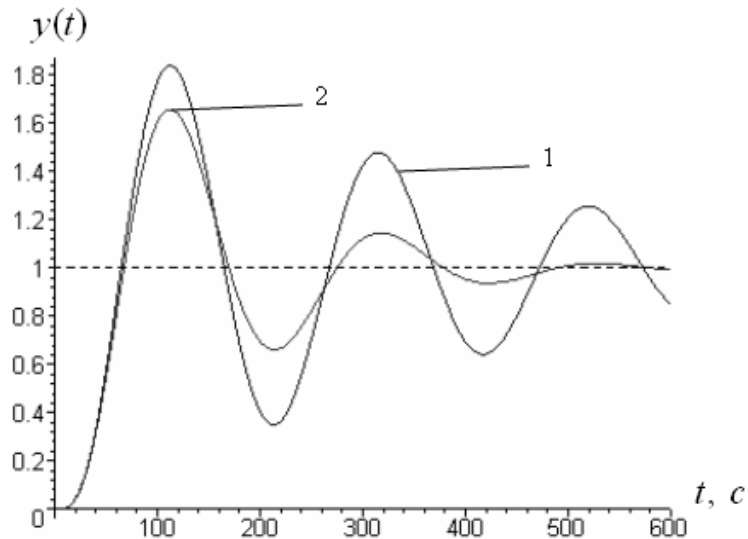


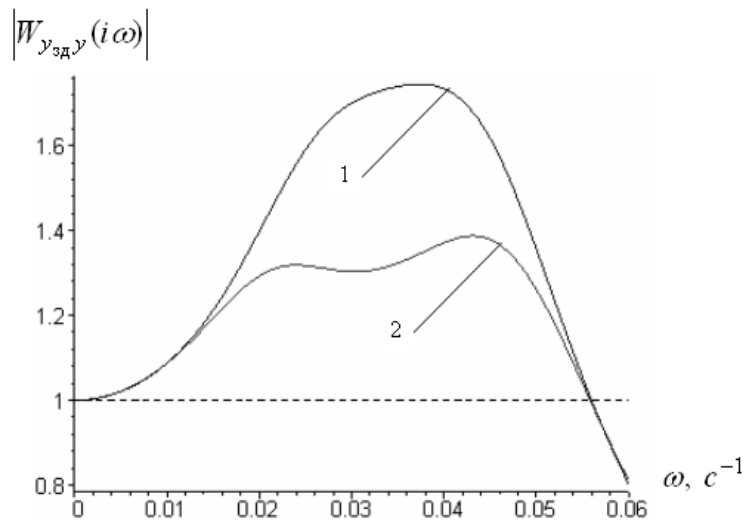
Рисунок 8.9 – Переходные процессы при действии единичного ступенчатого возмущения по каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ и параметрах настройки ПИД-регулятора, заданных равенствами:
1 – (8.3.65); 2 – (8.3.67)

Как видно из рис. 8.8, при значениях параметров настройки ПИД-регулятора, заданных равенствами (8.3.67), качество переходных процессов в системе значительно выше, чем в том случае, когда значения этих параметров заданы равенствами (8.3.65).

Однако для более убедительного подтверждения эффективности используемого метода расчета параметров настройки регуляторов в системах с неточно заданными параметрами объектов дополнительно рассмотрим случай, когда выполняются следующие равенства:

$$K_{об} = 2,7; T = 18 \text{ с}. \quad (8.3.68)$$

Графики АЧХ замкнутой системы, характеризующие ее колебательность при выполнении равенств (8.3.68), представлены на рисунке 8.10.



Рисунка 8.10 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$, при параметрах настройки ПИД-регулятора, заданных равенствами: 1 – (8.3.65); 2 – (8.3.67)

На основании рисунка 7.46 можно сделать вывод, что изменение значений параметров объекта в пределах доверительных интервалов (8.3.63) не приводит к возрастанию колебательности системы, если значения параметров настройки ПИД-регулятора заданы равенствами (8.3.67).

Поэтому при указанных изменениях параметров объекта качество переходных процессов в системе не должно снижаться, что подтверждают их графики, представленные на рисунке 8.11.

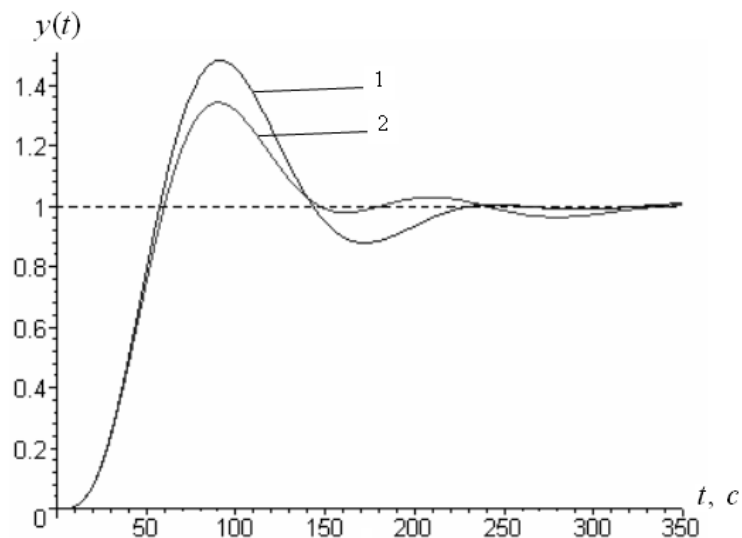


Рисунок 8.11 – Переходные процессы при действии единичного ступенчатого возмущения по каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(t)$ и параметрах настройки ПИД-регулятора, заданных равенствами: 1 – (8.3.65); 2 – (8.3.67)

Сравнив переходные процессы, графики которых изображены на рис. 8.9 и 8.11, приходим к выводу, что при изменении параметров объекта от значений заданных равенствами (8.3.64), до значений заданных равенствами (8.3.66), качество этих процессов не снижается, если параметры настройки ПИД-регулятора заданы равенствами (8.3.67).

Таким образом, рассмотренный пример 8.5 подтвердил целесообразность использования передаточных функций вида (8.3.61) при расчетах параметров настройки регуляторов, применяемых для управления объектами (8.3.38), параметры которых принадлежат заданным доверительным интервалам (8.3.39), (8.3.40).

8.4. Особенности управления объектами с распределенными параметрами

Для объектов с пространственно распределенными параметрами характерно наличие зависимости их выходных сигналов не только от времени, но и от пространственных координат.

Поэтому для замкнутых систем управления с указанными объектами возникает задача выбора такого расположения датчиков, измеряющих выходные сигналы, при котором заданные требования к качеству управления выполнялись бы не только в местах расположения этих датчиков, но и для любой точки объекта, характеризуемой вектором \mathbf{r} .

Предположим, что используется единственный датчик, расположение которого задано вектором \mathbf{r}_d . Тогда для оценки качества управления в точке с координатой \mathbf{r} получим выражение для передаточной функции односвязной системы $W_{y_{зд}y}(\mathbf{r}, s)$, отвечающей каналу передачи сигналов $y_{зд}(t) \rightarrow y(\mathbf{r}, t)$.

Для рассматриваемых систем имеет место равенство

$$\tilde{u}(s) = \frac{W_{pez}(s)\tilde{y}_{зд}(s)}{1 + W_{y_{зд}y}(\mathbf{r}_d, s)W_{pez}(s)},$$

с учетом которого получим

$$\tilde{y}(\mathbf{r}, s) = W_{uy}(\mathbf{r}, s)\tilde{u}(s) = \frac{W_{uy}(\mathbf{r}, s)W_{pez}(s)\tilde{y}_{зд}(s)}{1 + W_{uy}(\mathbf{r}_d, s)W_{pez}(s)}, \quad (8.4.1)$$

где $W_{uy}(\mathbf{r}_d, s)$ и $W_{uy}(\mathbf{r}, s)$ – передаточные функции объекта, отвечающие соответственно каналам передачи сигналов $u(t) \rightarrow y(\mathbf{r}_d, t)$ и $u(t) \rightarrow y(\mathbf{r}, t)$.

Поскольку

$$W_{y_{зд}y}(\mathbf{r}, s) = \frac{\tilde{y}(\mathbf{r}, s)}{\tilde{y}_{зд}(s)},$$

то с учетом выражения (8.4.1) имеем

$$W_{y_{зд}y}(\mathbf{r}, s) = \frac{W_{uy}(\mathbf{r}, s)W_{pez}(s)}{1 + W_{uy}(\mathbf{r}_d, s)W_{pez}(s)}. \quad (8.4.2)$$

Воспользуемся выражением (8.4.2) для оценки качества управления объектами с распределенными параметрами с использованием робастных методов.

Пример 8.6. Проанализируем односвязную систему (рис. 6.1) с тепловым объектом, рассмотренным в примере 7.11.

Предположим, что датчик температуры расположен в точке с безразмерной пространственной координатой $\chi_d = x_d / l = 1/2$.

Тогда при использовании ПИД-регулятора для управления полем температур $y(\chi, \tau)$ данного объекта, значения его параметров настройки определяются равенствами (7.2.60).

Построим графики АЧХ системы $|W_{y_{зд}y}(\chi, i\Omega)|$ при различных значениях переменной χ .

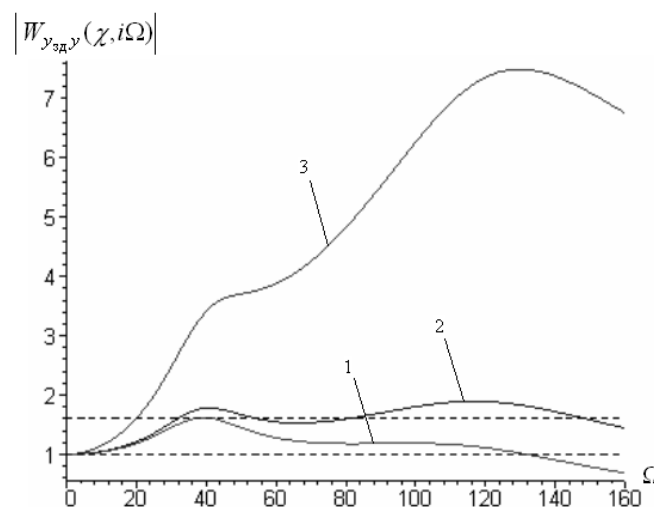


Рисунок 8.12 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(\tau) \rightarrow y(\chi, \tau)$ при значениях пространственной координаты χ , заданных равенствами:

$$1 - \chi = 1/2; \quad 2 - \chi = 2/3; \quad 3 - \chi = 5/6$$

Согласно рис. 8.12 по мере удаления от точки с пространственной координатой $\chi = 1/2$ показатель колебательности системы $M = M(\chi)$ резко возрастает.

Поэтому переходным процессам при $\chi \neq 1/2$ будут присущи высокочастотные колебательные составляющие и большая величина перерегулирования, что крайне нежелательно.

Не спасает положения и предельный переход $m_{II} \rightarrow \infty$ в требованиях (7.1.28), которые в этом случае принимают вид

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = -\eta, \quad (8.4.3)$$

причем в рассматриваемом случае η – безразмерная положительная вещественная величина, а $\nu_k, k = \overline{1,4}$ – безразмерные доминирующие полюсы системы.

Значения параметров настройки ПИД-регулятора, при которых обеспечивается выполнение требований (8.4.3), т.е. замкнутая система управления имеет четыре кратных доминирующих вещественных отрицательных полюса, задаются следующими равенствами:

$$K_p = 4,2427; \tau_{II} = 0,064180; \tau_D = 0,0094150. \quad (8.4.4)$$

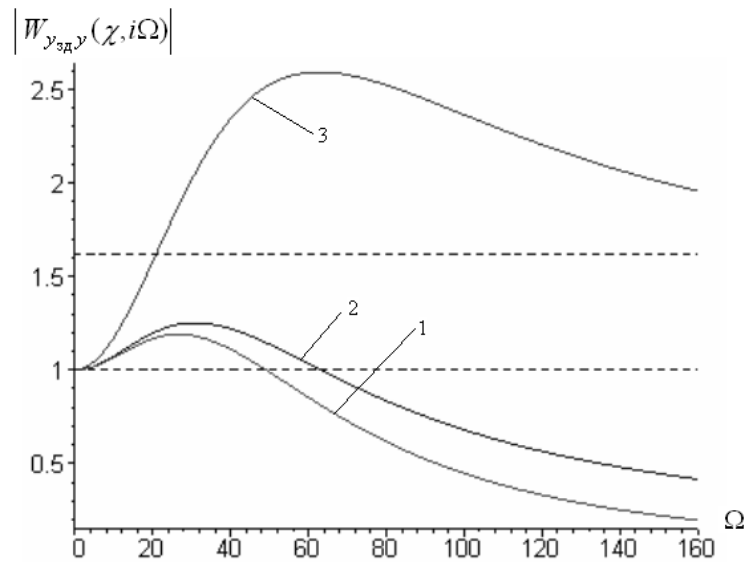


Рисунок 8.13 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(\tau) \rightarrow y(\chi, \tau)$

в случае выполнения равенств (8.4.4), причем:

$$1 - \chi = 1/2; 2 - \chi = 2/3; 3 - \chi = 5/6$$

Как видно из рисунка 8.13 по мере приближения безразмерной пространственной координаты χ к расположению исполнительного

органа системы ($\chi = 1$), значение показателя колебательности $M(\chi)$ начинает заметно возрастать, со всеми вытекающими из этого нежелательными последствиями.

Для устранения указанных недостатков воспользуемся И-регулятором, передаточную функцию которого представим в виде

$$W_{II}(\nu) = \frac{K_{II}}{\nu},$$

где K_{II} – коэффициент передачи И-регулятора; ν – безразмерная комплексная переменная.

В рассматриваемом случае требования (8.4.3) к расположению безразмерных доминирующих полюсов системы принимают вид

$$\nu_1 = \nu_2 = -\eta. \quad (8.4.5)$$

Для рассматриваемой системы обеспечивается выполнение требований (8.4.5), если имеет место следующее равенство:

$$K_{II} = 3,9907. \quad (8.4.6)$$

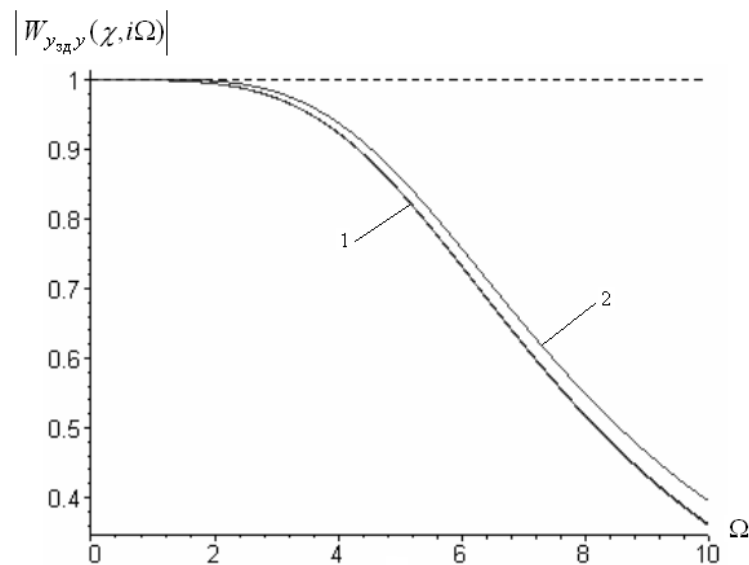


Рисунок 8.14 – АЧХ канала передачи сигналов $y_{зд}(\tau) \rightarrow y(\chi, \tau)$

в случае выполнения равенства (8.4.6), причем:

$$1 - \chi = 1/2 \text{ и } \chi = 2/3; \quad 2 - \chi = 5/6$$

На основании графиков АЧХ, представленных на рисунке 8.14, приходим к выводу, что применение И-регулятора, настроенного в соответствии с требованиями (8.4.5), обеспечивает выполнение тождества $M(\chi) \equiv 1$ при изменении безразмерной пространственной

координаты χ в интервале $0 \dots 1$.

Это позволяет избежать появления высокочастотных составляющих и перерегулирования в переходных процессах при любых значениях χ из данного интервала.

Таким образом, рассмотренный пример показал, что для систем с пространственно распределенными параметрами недостаточно обеспечить приемлемое качество управления в местах расположения датчиков, измеряющих выходные сигналы объекта $y(\mathbf{r}_d, t)$, необходимо также анализировать качество управления полем величин $y(\mathbf{r}, t)$ вдали от мест расположения датчиков $\mathbf{r} = \mathbf{r}_d$.

8.5. Зависимость перемещений регулирующего органа системы управления от значения показателя колебательности

При настройке систем управления с обратной связью важно не только минимизировать ошибку управления, но и обеспечить достаточно длительный срок службы регулирующего органа, что достигается в тех случаях, когда амплитуда его колебаний в процессе работы сравнительно невелика.

Для оценки амплитуды колебаний регулирующего органа при действии на систему случайных стационарных возмущений $\lambda(t)$, приведенных к ее выходу, воспользуемся дисперсией $D[u(t)]$ сигнала управления $u(t)$.

Сигнал $u(t)$ и его Фурье-преобразование $\tilde{u}(i\omega)$ связаны известным соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(i\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt. \quad (8.5.1)$$

В односвязной замкнутой системе величина $\tilde{u}(i\omega)$ определяется выражением

$$\tilde{u}(i\omega) = \frac{W_{pez}(i\omega)\tilde{\lambda}(i\omega)}{1 + W_{об}(i\omega)W_{pez}(i\omega)}, \quad (8.5.2)$$

где $W_{pez}(i\omega)$ и $W_{об}(i\omega)$ – комплексные частотные характеристики (КЧХ)

регулятора и объекта соответственно; $\tilde{\lambda}(i\omega)$ – Фурье-преобразование возмущения $\lambda(t)$.

Поскольку реальные возмущения имеют ограниченный спектр, то всегда существует частота среза Ω , такая, что

$$\left| \tilde{\lambda}(i\omega) \right|^2 \equiv 0, \quad \omega > \Omega > 0. \quad (8.5.3)$$

С учетом соотношений (8.5.2) и (8.5.3) равенство (8.5.1) принимает вид

$$\int_{-\Omega}^{+\Omega} \left| \frac{W_{pez}(i\omega)W_{об}(i\omega)}{1 + W_{об}(i\omega)W_{pez}(i\omega)} \right|^2 g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt, \quad (8.5.4)$$

где

$$g(\omega) = \left| \tilde{\lambda}(i\omega) / W_{об}(i\omega) \right|^2.$$

Учтем также, что реальный сигнал управления $u(t)$ действует на объект лишь в течение ограниченного промежутка времени. Тогда существует такое значение $t = T$, для которого выполняется условие

$$u^2(t) \equiv 0, \quad t > T > 0. \quad (8.5.5)$$

Воспользовавшись условием (8.5.5), равенство (8.5.4) представим в следующем виде:

$$\frac{1}{T} \int_{-\Omega}^{+\Omega} \left| \frac{W_{pez}(i\omega)W_{об}(i\omega)}{1 + W_{об}(i\omega)W_{pez}(i\omega)} \right|^2 g(\omega) d\omega = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} u^2(t) dt. \quad (8.5.6)$$

Предположим теперь, что случайный процесс $u(t)$ является эргодическим, тогда

$$M[u^2(t)] = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} u^2(t) dt, \quad (8.5.7)$$

где $M[u^2(t)]$ – математическое ожидание величины $u^2(t)$.

Поскольку

$$M[u^2(t)] = M^2[u(t)] + D[u(t)],$$

и выполняется неравенство

$$\left| \frac{W_{pez}(i\omega)W_{об}(i\omega)}{1 + W_{об}(i\omega)W_{pez}(i\omega)} \right|^2 \leq M^2,$$

то с учетом равенств (8.5.6) и (8.5.7) имеем

$$D[u(t)] \leq \frac{M^2 + \Omega}{T} \int_{-\Omega}^{+\Omega} g(\omega) d\omega - M^2[u(t)], \quad (8.5.8)$$

где M – показатель колебательности системы управления с обратной связью.

Величина $M^2[u(t)]$ не зависит от выбранных значений параметров настройки регулятора, т.к.

$$M^2[u(t)] = \{y_{зд} - M[\lambda(t)]\}^2 / |W_{об}(i0)|^2, \quad (8.5.9)$$

где $y_{зд}$ – заданное значение управляемой величины $y(t)$.

В таком случае неравенство (8.5.8) можно представить в виде

$$\sqrt{D[u(t)]} \leq \sqrt{M^2\alpha - \beta}, \quad (8.5.10)$$

где постоянные положительные величины α и β задаются следующими выражениями:

$$\alpha = \frac{1}{T} \int_{-\Omega}^{+\Omega} g(\omega) d\omega; \quad \beta = \{y_{зд} - M[\lambda(t)]\}^2 / |W_{об}(i0)|^2.$$

Поскольку величина $\sqrt{D[u(t)]}$ характеризует среднюю амплитуду колебаний регулирующего органа при действии на систему случайных возмущений $\lambda(t)$, то на основании полученного неравенства (8.5.10) приходим к выводу, что, ограничив величину показателя колебательности M , можно обеспечить желаемое значение средней амплитуды перемещений регулирующего органа.

8.6. Тест 8

1. Коррекция сигнала задания осуществляется с целью ...
 - а) повысить качество управления при его резких изменениях;
 - б) его оптимизации;
 - в) взаимного сокращения нулей и доминирующих полюсов передаточной функции замкнутой системы.

2. Устройство для коррекции сигнала задания пропускает практически без искажений

- а) низкочастотные сигналы;
- б) высокочастотные сигналы;
- в) низкочастотные и высокочастотные сигналы.

3. Применение для сигнала задания корректирующего устройства позволяет полностью устранить негативные последствия слияния доминирующих полюсов при настройке системы, выражающиеся в возрастании ее резонансных пиков, сохранив, однако, достигнутое при упомянутом слиянии

- а) качество управления;
- б) высокое быстродействие;
- в) низкое быстродействие.

4. Применение коррекции управления по отношению к контролируемому возмущению позволяет полностью исключить влияние этого возмущения на управляемую величину, если инерционность канала передачи возмущения

- а) меньше, чем канала передачи управляющих воздействий;
- б) такая же, как у канала передачи управляющих воздействий;
- в) выше, чем канала передачи управляющих воздействий.

5. Если канал объекта, по которому действует возмущение, является менее инерционным, чем канал передачи управляющих воздействий, то при синтезе корректирующего устройства целесообразно использовать метод, основанный на

а) устранении доминирующих полюсов знаменателя передаточной функции канала действия возмущения на управляемую величину;

б) устранении нулей числителя передаточной функции канала действия возмущения на управляемую величину

в) взаимном сокращении нулей числителя и доминирующих полюсов знаменателя передаточной функции канала действия возмущения на управляемую величину.

6. Расчет параметров настройки регуляторов для систем с не точно заданными параметрами объектов следует выполнять, ориентируясь на случай, когда

- а) инерционность объекта минимальна;
- б) инерционность объекта максимальна;
- в) инерционность объекта средняя.

7. При настройке систем управления с обратной связью важно не только минимизировать ошибку управления, но и обеспечить

- а) достаточно длительный срок службы регулирующего органа;
- б) своевременную замену износившегося регулирующего органа;
- в) своевременный ремонт регулирующего органа.

8. Для оценки средней амплитуды колебаний регулирующего органа при действии на систему случайных стационарных возмущений, приведенных к ее выходу, целесообразно использовать

- а) дисперсию сигнала управления;
- б) математическое ожидание сигнала управления;
- в) квадратный корень из дисперсии сигнала управления.

9. Ограничив величину показателя колебательности замкнутой системы, можно обеспечить

- а) желаемое значение максимальной амплитуды перемещений регулирующего органа;
- б) желаемое значение средней амплитуды перемещений регулирующего органа;
- в) желаемое значение минимальной амплитуды перемещений регулирующего органа.

10. Выбор значений параметров объекта в соответствии с требованиями его максимальной инерционности обеспечивает ... по сравнению с традиционным методом, когда используются лишь оценки значений параметров объекта и не учитывается ширина, соответствующих им доверительных интервалов

- а) значительно меньшую колебательность системы;
- б) значительно большую колебательность системы;
- в) значительно большее быстродействие системы.

ГЛАВА IX

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

9.1. Разностные уравнения дискретных систем

Применение цифровых контроллеров для целей управления вносит свою специфику в исследование систем управления, обусловленную тем, что вычислительные устройства таких контроллеров являются дискретными системами, оперирующими с дискретными сигналами (последовательностями чисел), т. е. сигналами, принимающими определенные значения только в дискретные, обычно равноотстоящие моменты времени через интервал времени T , который называют *интервалом повторения* или *квантования*.

Схема подключения цифрового контроллера к каналу преобразования непрерывного сигнала приведена на рисунке 9.1.

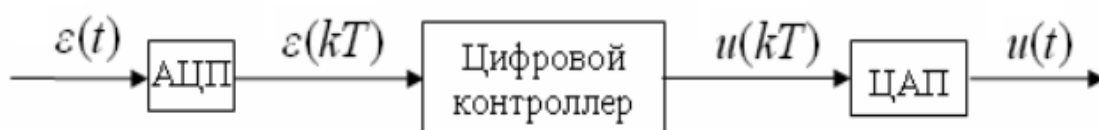


Рисунок 9.1 – Схема подключения цифрового контроллера к каналу преобразования непрерывного сигнала

Входной непрерывный сигнал $\varepsilon(t)$ в аналого-цифровом преобразователе (АЦП) преобразуется в дискретную последовательность чисел $\varepsilon(kT)$, которая подается на вход цифрового контроллера. Здесь она преобразуется в соответствии с используемым контроллером алгоритмом в синхронную последовательность чисел

$u(kT)$, которая затем в цифро-аналоговом преобразователе (ЦАП) преобразуется в непрерывный сигнал $u(t)$.

Очередное дискретное значение выходного сигнала $u(kT)$ в момент времени $t = kT$ контроллер может формировать, основываясь на значениях входного сигнала $\varepsilon(kT)$ в тот же момент времени, а также на значениях любого числа предыдущих значений входа $\varepsilon[(k-1)T], \dots, \varepsilon[(k-l)T]$ и выхода $u[(k-1)T], \dots, u[(k-h)T]$ – которые могут храниться в ее памяти.

Если система линейна и стационарна, то указанные вычисления проводятся по формуле

$$u(kT) = d_0 \varepsilon(kT) + d_1 \varepsilon[(k-1)T] + \dots + d_j \varepsilon[(k-j)T] - c_1 u[(k-1)T] - c_2 u[(k-2)T] - \dots - c_r u[(k-r)T], \quad (9.1.1)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_r; d_0, d_1, \dots, d_j$ – постоянные коэффициенты; r и j – число хранящихся в памяти контроллера предыдущих значений входного и выходного сигналов.

Сгруппировав последовательность значений выхода слева, формулу (9.1.1) можно записать по-иному:

$$u(kT) + c_1 u[(k-1)T] + \dots + c_r u[(k-r)T] = d_0 \varepsilon(kT) + d_1 \varepsilon[(k-1)T] + \dots + d_j \varepsilon[(k-j)T]. \quad (9.1.2)$$

Это так называемое **разностное уравнение** дискретной системы; разностные уравнения играют такую же роль при исследовании дискретных систем, как дифференциальные уравнения при исследовании непрерывных систем.

Очевидно, что (9.1.2) описывает динамическую дискретную систему; уравнение линейной статической дискретной системы получается из этого уравнения, когда коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_r; d_1, d_2, \dots, d_j$; обращаются в нуль.

При заданном входном воздействии $\varepsilon(kT)$, а также при заданных начальных условиях $u(-T), u(-2T), \dots, u(-rT)$ решение (8.2) может осуществляться последовательно для каждого очередного момента времени $t = 0, t = T, t = 2T, \dots$ с помощью равенства (9.1.1).

То обстоятельство, что дискретные сигналы представляют собой последовательности чисел, не позволяет применить к ним мате-

матический аппарат интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Однако это затруднение может быть достаточно просто преодолено переходом к соответствующей модели этих сигналов.

Поскольку дискретная последовательность чисел определяет мгновенные значения непрерывного сигнала в дискретные моменты времени, в качестве модели такой последовательности можно выбрать последовательность бесконечно коротких импульсов, так, чтобы величина каждого импульса («площадь» под его графиком) была равна заменяемому числу. В дальнейшем такую последовательность импульсов будем называть *последовательностью модулированных дельта-импульсов* и отмечать звездочкой сверху. Например, символ $\varepsilon^*(t)$ обозначает модулированную последовательность дельта-импульсов с периодом повторения T , величина каждого импульса в которой, равна значению непрерывного сигнала $\varepsilon(t)$ в моменты посылок.

Модулированная последовательность дельта-импульсов $\varepsilon^*(t)$ имеет изображение по Лапласу и Фурье, которые также будут отмечаться звездочкой $E^*(s)$ и $E^*(i\omega)$.

Последовательность чисел $\varepsilon(kT)$, определяющих дискретные значения непрерывного сигнала $x(t)$, графически изображаются точками (рисунок 9.2а).

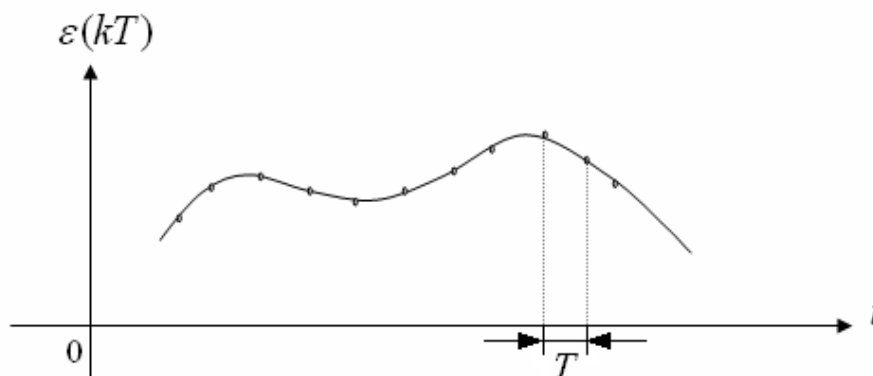


Рисунок 9.2а – Последовательность чисел $\varepsilon(kT)$, определяющих дискретные значения непрерывного сигнала $x(t)$

Условимся изображать модель этой последовательности в виде модулированной последовательности дельта-импульсов $\varepsilon^*(t)$ последовательностью стрелок соответствующей высоты (рисунок 9.2б).

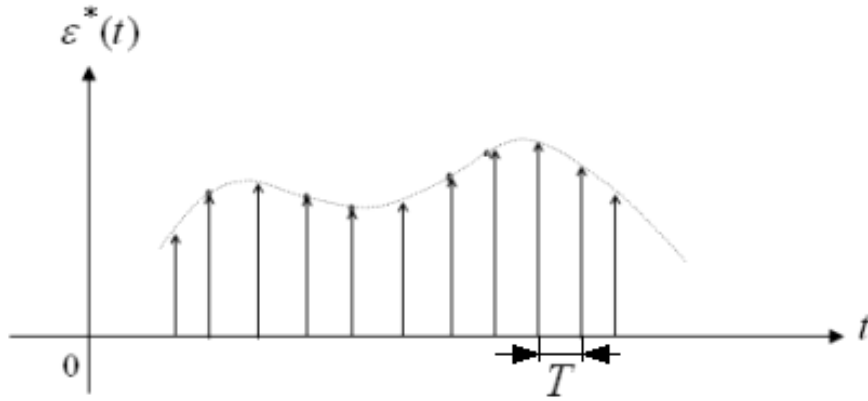


Рисунок 9.2б – Последовательности в виде модулированной последовательности дельта-импульсов $\varepsilon^*(t)$ последовательностью стрелок соответствующей высоты

После выполнения рассмотренной замены сигналов уравнение (9.1.2) приобретает следующий вид:

$$u^*(t) + c_1 u^*(t - T) + \dots + c_r u^*(t - rT) = d_0 \varepsilon^*(t) + d_1 \varepsilon^*(t - T) + \dots + d_j \varepsilon^*(t - jT). \quad (9.1.3)$$

Преобразование дельта-импульсной последовательности $\varepsilon^*(t)$ в $u^*(t)$, определяемое уравнением (9.1.3), может быть осуществлено в схеме с отрицательной обратной связью, состоящей из усилительных (с коэффициентами усиления c_h , d_h) и запаздывающих (со временем запаздывания; равным периоду квантования T) звеньев.

Такая система, очевидно, может осуществлять преобразование любых (а не только последовательностей дельта-импульсов) сигналов, причем в общем случае для произвольного входного $\varepsilon(t)$ и выходного $u(t)$ сигналов ее уравнение записывается следующим образом:

$$u(t) + c_1 u(t - T) + \dots + c_r u(t - rT) = d_0 \varepsilon(t) + d_1 \varepsilon(t - T) + \dots + d_j \varepsilon(t - jT). \quad (9.1.4)$$

Однако от систем с другим типом непрерывных звеньев (интегрирующих, дифференцирующих и т. п.) она отличается тем, что при подаче на ее вход последовательности дельта-импульсов на ее выходе возникает также последовательность дельта-импульсов, но только модулированных по другому закону, определяемому конкретным видом (9.1.4).

Таким образом, получена непрерывная модель (9.1.4) дискретной системы (9.1.1), выполненная на усилительных и запаздывающих звеньях, для описания которой может быть применен обычный аппарат передаточных функций и динамических характеристик; в дальнейшем передаточные функции и динамические характеристики такой модели будут отмечаться звездочкой, например, передаточная функция $W^*(s)$, переходная характеристика $h^*(t)$ и т. д.

Переход от дискретных сигналов $\varepsilon(kT)$ и $u(kT)$ к их моделям $\varepsilon^*(t)$ и $u^*(t)$ в схеме рисунка 9.1 требует и соответствующей замены АЦП и ЦАП их моделями.

АЦП на входе в цифровой контроллер должен быть заменен **дельта-импульсным модулятором**, преобразующим непрерывный сигнал $\varepsilon(t)$ в модулированную последовательность дельта-импульсов $\varepsilon^*(t)$; на схемах такой модулятор будет изображаться так, как показано на рисунке 9.3.



Рисунок 9.3 – Дельта-импульсным модулятор

ЦАП на выходе цифрового контроллера должен быть заменен **демодулятором импульсов**, преобразующим дельта-импульсную последовательность $u^*(t)$ в непрерывное (точнее, в кусочно-непрерывное) изменение $u(t)$. Очевидно, что реакция такого демодулятора на одиночный дельта-импульс должна совпадать с реакцией на отдельное число, равное единице.

В простейшем и наиболее распространенном на практике случае ЦАП на выходе цифрового контроллера перемещает управляющий орган в положение, соответствующее очередному пришедшему числу, и затем удерживает его в этом положении вплоть до появления следующего числа. Характер работы подобного преобразователя, который обычно называют **фиксатором нулевого порядка**, иллюстрируют его входной (рисунок 9.4а) и выходной величинами (рисунок 9.4б).

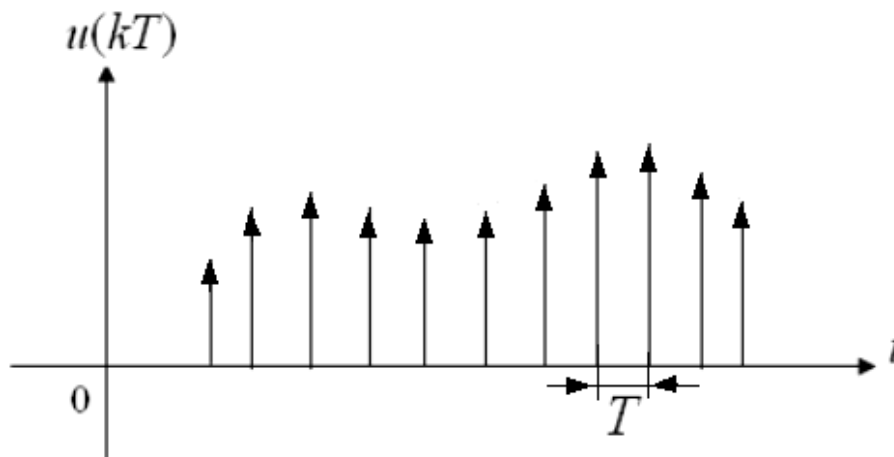


Рисунок 9.4а – Фиксатор нулевого порядка входной величины

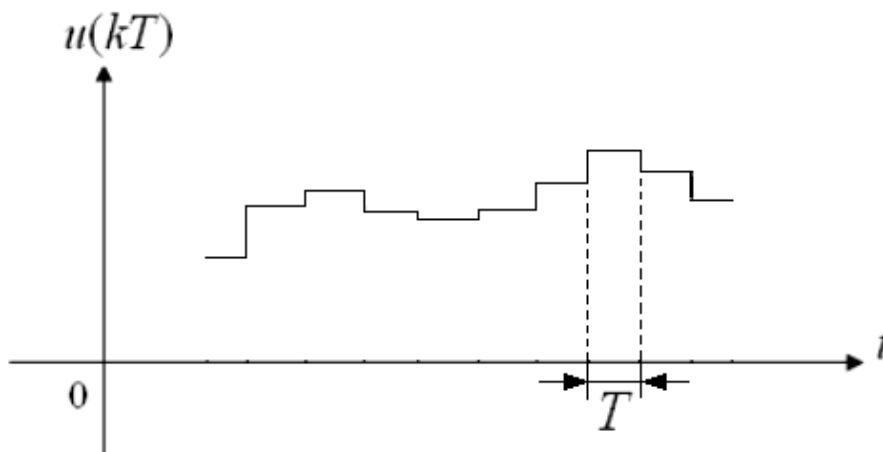


Рисунок 9.4б – Фиксатор нулевого порядка выходной величины

Если на его вход в момент $t = 0$ подать единственное число, равное единице, то перемещение управляющего органа будет происходить согласно графику, приведенному на рисунке 9.5.

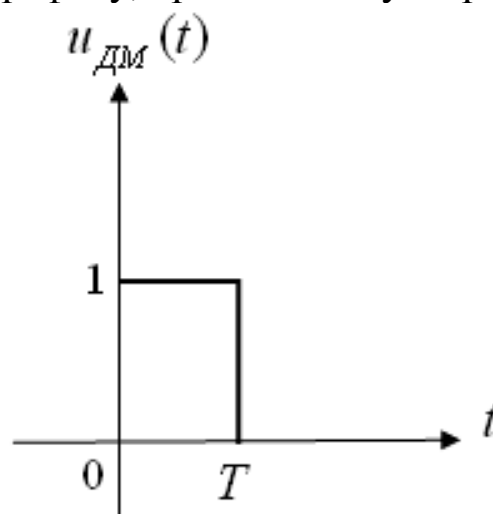


Рисунок 9.5 – График перемещения управляющего органа

Отсюда можно получить и передаточную функцию демодулятора, моделирующего фиксатор нулевого порядка:

$$W_{\text{ДМ}}(s) = \int_0^T e^{-st} dt = (1 - e^{-Ts}) / s. \quad (9.1.5)$$

В результате всех рассмотренных преобразований модель канала дискретного преобразования сигналов (см. рисунок 8.1) приобретает вид, показанный на рисунке 9.6.

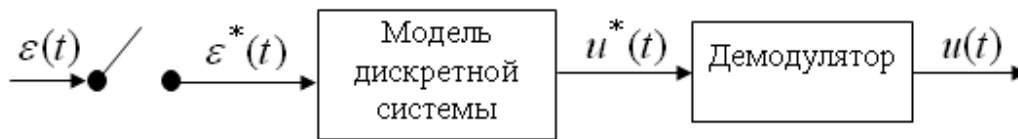


Рисунок 9.6 – Модель канала дискретного преобразования сигналов

Здесь входной непрерывный сигнал $\varepsilon(t)$ преобразуется дельта-импульсным модулятором в модулированную этим сигналом последовательность дельта-импульсов $\varepsilon^*(t)$, которые затем в непрерывной модели дискретной системы (МДС) в соответствии с требуемым алгоритмом преобразуются в выходную последовательность $u^*(t)$. В демодуляторе (ДМ) из последовательности дельта-импульсов $u^*(t)$ формируется непрерывный сигнал выхода $u(t)$.

Условимся в дальнейшем с целью сокращения записи называть непрерывную модель дискретной цифровой системы и ее звеньев просто дискретной системой и дискретными звеньями.

Перейдем теперь к рассмотрению структурной схемы системы с цифровым регулятором, которая показана на рисунке 9.7.

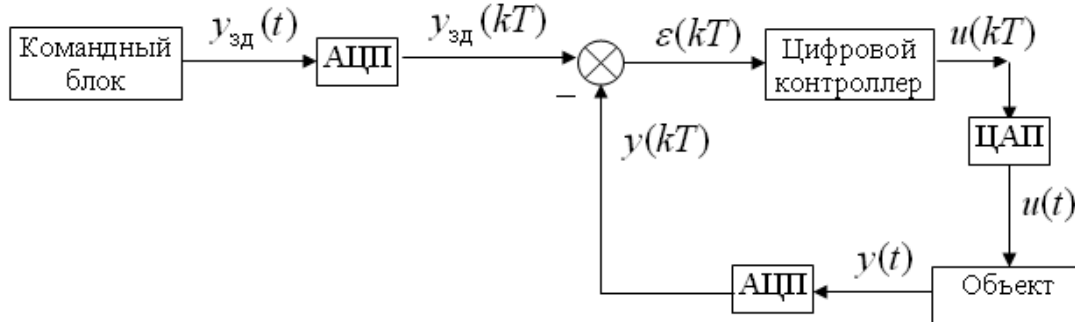


Рисунок 9.7 – Структурная схема системы с цифровым регулятором

Здесь в АЦП осуществляется (квантование) непрерывных сигналов изменения регулируемой величины $y(t)$ и командного воздействия $y_{зд}(t)$ в дискретные последовательности чисел $y(kT)$ и $y_{зд}(kT)$; в измерительном устройстве контроллера выявляется последовательность дискретных значений отклонения $\varepsilon(kT) = y_{зд}(kT) - y(kT)$, которые передаются на вход цифрового контроллера, вырабатывающего дискретное регулирующее воздействие $u(kT)$, которое с помощью ЦАП преобразуется в непрерывное перемещение регулирующего органа $u(t)$.

В соответствии с проведенной заменой сигналов и отдельных элементов системы их моделями, общая модель системы с цифровым регулятором может быть представлена схемой, приведенной на рисунке 9.8.

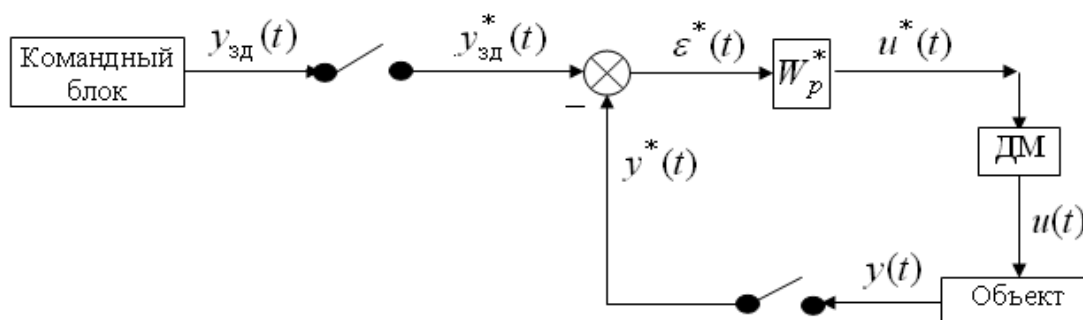


Рисунок 9.8 – Общая модель системы с цифровым регулятором

В этой схеме управляемая величина, т. е. выходной сигнал объекта $y(t)$, в дельта-импульсном модуляторе преобразуется в последовательность модулированных дельта-импульсов $y^*(t)$, которая затем подается на элемент сравнения. На этот же элемент подается другая последовательность импульсов $y_{зд}^*(t)$, определяющая заданное значение регулируемой величины $y(t)$ в дискретные моменты времени. Последовательности импульсов $y^*(t)$ и $y_{зд}^*(t)$ синхронны.

В элементе сравнения образуется последовательность импульсов рассогласования $\varepsilon^*(t) = y_{зд}^*(t) - y^*(t)$. Эта последовательность подается в дискретный регулятор W_p^* , состоящий из запаздывающих и усилительных звеньев, на выходе которого образуется последовательность регулирующих импульсов $u^*(t)$. Далее, в демодуляторе

эта последовательность импульсов преобразуется в непрерывное регулирующее воздействие $u(t)$, подаваемое на вход объекта.

Отметим, что один из элементов рассматриваемой модели системы, а именно, дельта-импульсный модулятор, не имеет математического описания в обычном смысле (например, для него не может быть определена передаточная функция). Будем поэтому дельта-модулятор и объект, а также импульсный модулятор рассматривать совместно, как это показано на рисунке 9.9.

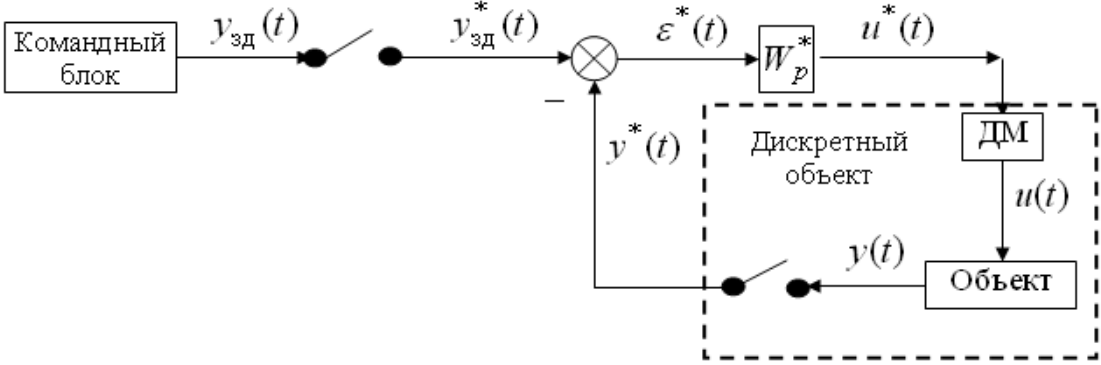


Рисунок 9.10 – Схема модели системы с дельта-импульсным модулятором

Входной $u^*(t)$ и выходной $y^*(t)$ сигналы этой совокупности элементов представляют собой синхронные последовательности модулированных дельта-импульсов, что позволяет рассматривать эту совокупность как отдельный дискретный элемент системы, который в дальнейшем будет называться *дискретным объектом*.

В результате окончательно приходим к расчетной схеме системы, которая показана на рисунок 9.10.

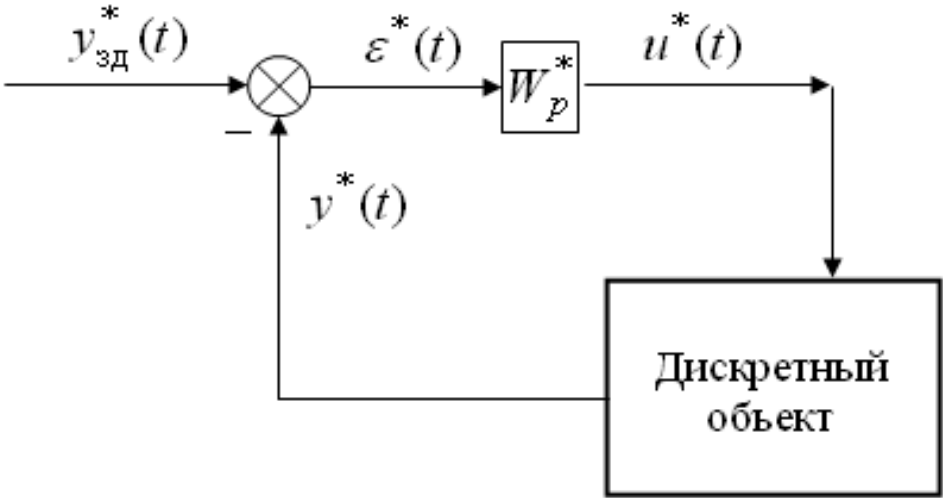


Рисунок 9.10 – Расчетная схема системы

Она состоит из дискретного регулятора и дискретного объекта, а все сигналы представляют собой синхронные последовательности модулированных дельта-импульсов. Оба элемента системы имеют обычное математическое описание, т. е. имеют обычные передаточные функции и динамические характеристики, а все сигналы могут быть преобразованы по Лапласу и Фурье.

Обратим внимание на то, что в процессе получения рассматриваемой модели дискретной системы нам пришлось встретиться с двумя способами реализации таких моделей: модель дискретного регулятора реализуется с помощью запаздывающих и усилительных звеньев, а модель дискретного объекта, с помощью непрерывной части с дельта-импульсным модулятором на ее выходе. Важно, однако, то, что дискретная система с непрерывной частью может быть приведена к системе, реализованной на *усилительных* и *запаздывающих* звеньях.

В результате приходим к выводу, что системы управления с цифровыми контроллерами можно рассматривать как непрерывные системы управления, отличающимися лишь двумя особенностями:

1. Из всего многообразия используемых в непрерывных системах звеньев здесь применяются лишь два вида их – усилительное и запаздывающее.

2. Эти системы оперируют с сигналами в виде последовательности модулированных дельта-импульсов.

Практически это означает, что для исследования систем с цифровыми контроллерами пригодны обычные методы исследования непрерывных систем. Достаточно лишь рассмотреть особенности, присущие изображениям импульсных сигналов, а также передаточным функциям и динамическим характеристикам систем, состоящих из запаздывающих и усилительных звеньев.

В реальных аналого-цифровых преобразователях производится квантование сигнала не только по времени, но и по уровню (шаг квантования по уровню определяется количеством разрядов в числах, которыми оперирует вычислительное устройство контроллера). Эффект такого квантования проявляется в том, что система становится нелинейной со всеми вытекающими из этого осложнениями математического описания. Практически, однако, шаг квантования по уровню в цифровых управляющих контроллерах настолько мал, что влиянием вносимой нелинейности на динамические свойства системы обычно можно пренебречь.

9.2. Передаточные функции и частотные характеристики дискретных систем

Импульсный модулятор осуществляет преобразование непрерывного сигнала на входе $x(t)$ в импульсную последовательность $x^*(t)$ в соответствии со следующей формулой:

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT), \quad (9.2.1)$$

где $x(kT)$ – значение входного сигнала в момент времени kT , когда посылается k -й импульс; $\delta(t-kT)$ – смещенная на время kT дельта-функция, площадь которой равна единице.

Можно также считать, что входной сигнал модулирует несущую последовательность единичных дельта-функций $\delta^*(t)$, имеющих период следования, равный периоду квантования T , т. е.

$$x^*(t) = \delta^*(t) x(t); \quad \delta^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT). \quad (9.2.2)$$

Поскольку $\delta^*(t)$ – периодическая функция, она может быть представлена рядом Фурье:

$$\delta^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\omega t}, \quad (9.2.3)$$

где $\omega = 2\pi/T$ – частота квантования.

Коэффициенты ряда (9.2.3) вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta^*(t) e^{-ik\omega t} dt.$$

Подставив это выражение в (9.2.3), получим

$$\delta^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega t}. \quad (9.2.4)$$

Это выражение может быть записано и в вещественном виде, если учесть, что $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$ и проводить суммирование лишь по положительным значениям k :

$$\delta^*(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\omega t). \quad (9.2.5)$$

Таким образом, несущая последовательность импульсов $\delta^*(t)$ может быть представлена в виде суммы постоянной составляющей, равной $1/T$ и гармоник с частотами $\omega, 2\omega, \dots$, причем амплитуды всех гармоник одинаковы и равны $2/T$. Подставив теперь (9.2.3) в (9.2.2), получим:

$$x^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{ik\omega t}, \quad (9.2.6)$$

или, учитывая (9.2.5)

$$x^*(t) = \frac{1}{T} x(t) + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} x(t) \cos(k\omega t). \quad (9.2.7)$$

Из (9.2.7) видно, что модулированная последовательность импульсов на выходе импульсного модулятора может быть представлена в виде пропорциональной входному сигналу компоненты $x(t)/T$, на которую наложена бесконечная сумма модулированных той же функцией $x(t)$ гармоник с частотами $\omega, 2\omega, \dots$.

Изображение односторонней модулированной последовательности дельта-импульсов, т. е. последовательности, удовлетворяющей условию $x^*(t) = 0$ при $t < 0$, определяется формулой одностороннего преобразования Лапласа:

$$\tilde{x}^*(s) = \int_{-0}^{\infty} x^*(t) e^{-st} dt. \quad (9.2.8)$$

Подставив сюда (9.2.2) и учтя, что изображение дельта-импульсов с площадью $x(kT)$, сдвинутого на время kT относительно начала отсчета времени, равно $x(kT) e^{-kTs}$, получим

$$\tilde{x}^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}. \quad (9.2.9)$$

Как видим, изображение модулированной последовательности дельта-импульсов является трансцендентной функцией s . Заменой переменной

$$z = e^{Ts}, \quad (9.2.10)$$

выражение (9.2.9) может быть приведено к следующему, более удобному для использования, виду:

$$Z[x^*(t)] = \tilde{x}^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}. \quad (9.2.11)$$

Полученная формула может рассматриваться как формула преобразования вещественной дискретной последовательности чисел $x(kT)$ в комплексную область: она называется формулой прямого z -преобразования, а получаемая с ее помощью функция комплексного переменного – z -изображением.

Отметим, что с учетом обозначения (9.2.10) передаточная функция фиксатора нулевого порядка (9.1.5) принимает вид

$$W_{\text{дм}}(z, s) = (1 - z^{-1}) / s. \quad (9.2.12)$$

Пример 9.1. Найдем z -изображение последовательности дельта-импульсов, модулированной функцией $x(t) = e^{-\alpha t} 1(t)$. Подстановка этого выражения в формулу z -преобразования (9.2.11) дает:

$$\tilde{x}^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha T k} z^{-k}.$$

Воспользовавшись известной формулой для суммы геометрической прогрессии с первым членом, равным единице, и знаменателем $e^{-\alpha} z^{-1}$, получим:

$$\tilde{x}^*(z) = 1 / (1 - e^{-\alpha T} z^{-1}) = z / (z - e^{-\alpha T}).$$

Для дискретных систем, т.е. систем описываемых разностными уравнениями, по аналогии с непрерывными системами можно ввести передаточные функции и частотные характеристики. Пусть на вход дискретной системы поступает сигнал $x(kT)$, а на ее выходе регистрируется сигнал $y(kT)$, тогда, выполнив для них z -преобразования согласно выражению (9.2.11), получим z -изображения этих сигналов $\tilde{x}(z)$ и $\tilde{y}(z)$. Дискретная передаточная функция $W_{xy}(z)$ данной системы определяется выражением

$$W_{xy}(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{x}(z)}. \quad (9.2.13)$$

Для нахождения дискретных передаточных функций систем, динамика которых описывается разностными уравнениями, весьма полезным оказывается следующее свойство z – преобразования:

$$Z[f(t - nT)] = z^{-n} Z[f(t)] = z^{-n} \tilde{f}(z), \quad (9.2.14)$$

где n – целое положительное число; $\tilde{f}(z)$ – z –изображение функции $f(t)$.

Пример 9.2. Найдем выражение для дискретной передаточной функции (9.2.13) системы, входной $x(kT)$ и выходной $y(kT)$ сигналы которой, связаны уравнением

$$y(kT) = \alpha y[(k-1)T] + \beta x(kT) + \gamma x[(k-1)T], \quad (9.2.15)$$

где α , β и γ – постоянные вещественные коэффициенты.

Применив к уравнению (9.2.15) z – преобразование (9.2.11), с учетом свойства (9.2.14), получим

$$\tilde{y}(z) = \alpha \tilde{y}(z)z^{-1} + \beta \tilde{x}(z) + \gamma \tilde{x}(z)z^{-1}. \quad (9.2.15)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} y[(k-1)T]z^{-k} &= z^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} y[(k-1)T]z^{-(k-1)} = \\ &= z^{-1} \sum_{h=0}^{\infty} y(hT)z^{-h} = \tilde{y}(z)z^{-1}, \end{aligned}$$

то, принимая во внимание равенства (9.2.13) и (9.2.15) имеем

$$W_{xy}(z) = \frac{\beta + \gamma z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{\beta z + \gamma}{z - \alpha}. \quad (9.2.16)$$

Чтобы получить выражение для комплексной частотной характеристики дискретной системы, в выражении для ее передаточной функции $W_{xy}(z)$ необходимо в выражении (9.2.16) выполнить замену (9.2.10), т. е. $W_{xy}(z) \rightarrow W_{xy}(e^{Ts})$. Затем, полагая $s = i\omega$, окончательно получим $W_{xy}(e^{iT\omega})$, где ω – частота.

На практике системы управления обычно состоят из совокупности дискретных и непрерывных звеньев, описываемых соответственно разностными и дифференциальными уравнениями, что создает определенные неудобства. Поэтому в целях применения еди-

нообразного математического описания таких систем, их непрерывную часть с дельта-импульсным модулятором на выходе целесообразно заменить дискретной моделью, описываемой разностными уравнениями. Значения входных и выходных сигналов данной модели, состоящей из совокупности усиливающих и запаздывающих звеньев, и моделируемой непрерывной подсистемы совпадают в дискретные моменты времени $t = 0, T, \dots, kT$, где k – произвольное целое положительное число.

В таблице 9.1. приводятся передаточные функции ряда непрерывных звеньев и их дискретных моделей.

Таблица 9.1 – Передаточные функции ряда непрерывных звеньев и их дискретных моделей

№	$W(s)$	$W(z)$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
3	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{T e^{\alpha T} z}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
4	$\frac{2}{(s+\alpha)^3}$	$\frac{T^2 e^{-\alpha T} z (z+e^{-\alpha T})}{(z-e^{-\alpha T})^3}$

С помощью таблицы 9.1 можно выполнить преобразование $W(s) \rightarrow W(z)$, разлагая передаточную функцию непрерывной части $W(s)$ на простые дроби, т. е., например, если

$$W(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b}. \quad (9.2.17)$$

Чтобы определить значения неизвестных постоянных A и B в правой части равенства (9.2.17), представим ее в виде

$$\frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} = \frac{(A+B)s + Ab + Ba}{(s+a)(s+b)}. \quad (9.2.18)$$

Сопоставив равенства (9.2.17) и (9.2.18), приходим к системе уравнений:

$$A + B = 0; \quad Ab + Ba = K,$$

решив которую, установим, что

$$A = \frac{K}{b-a}; B = \frac{K}{a-b}. \quad (9.2.19)$$

Подставив выражения (9.2.19) в равенство (9.2.17) имеем

$$W(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)} = \frac{K}{(b-a)} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right). \quad (9.2.20)$$

Воспользовавшись теперь таблицей 8.1, с учетом выражения (9.2.20) установим, что

$$W(z) = \frac{K}{(b-a)} \left(\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}} \right) = \frac{Kz(e^{-aT} - e^{-bT})}{(b-a)(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}.$$

Отметим, что фиксатор нулевого порядка с передаточной функцией (9.2.12) целесообразно включить в непрерывную часть управляемого объекта, которой отвечает передаточная функция $W_{об}(s)$.

В таком случае выполняется равенство

$$W_{об}^{эКВ}(z, s) = W_{ДМ}(z, s)W_{об}(s) = \left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{W_{об}(s)}{s}. \quad (9.2.21)$$

Чтобы заменить эквивалентную передаточную функцию $W_{об}^{эКВ}(z, s)$ ее дискретной моделью $W_{об}^{эКВ}(z)$, необходимо, согласно выражению (9.2.21), создать дискретную модель непрерывного звена, описываемого передаточной функцией $W_{об}(s)/s$.

Пусть, например, имеют место равенства

$$\frac{W_{об}(s)}{s} = \frac{K_{об}}{s(s+a)} = \frac{K_{об}}{a} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right),$$

тогда с помощью таблицы 8.1 установим соответствие $W_{об}(s)/s \rightarrow W(z)$, где

$$W(z) = \frac{K_{об}}{a} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \right).$$

Следовательно, дискретная модель эквивалентного объекта $W_{об}^{эКВ}(z)$ принимает вид

$$W_{об}^{экс}(z) = \frac{K_{об}}{a} \left(1 - \frac{z-1}{z-e^{-aT}} \right).$$

Отметим, что дискретные модели объектов, содержащих звенья транспортного запаздывания, можно получить, воспользовавшись выражением (9.2.10).

Тогда достаточно передаточную функцию объекта без запаздывания $W_1(s)$ представить дискретной моделью $W_1(z)$ и умножить ее на $z^{-\tau/T}$.

Например, пусть

$$W_{об}(s) = \frac{K_{об} e^{-\tau s}}{1 + T_{об} s} = \frac{K_{об}}{T_{об}} \frac{e^{-\tau s}}{s + \frac{1}{T_{об}}} = e^{-\tau s} W_1(s),$$

тогда

$$W_1(z) = \frac{K_{об}}{T_{об}} \frac{z}{z - e^{-T/T_{об}}},$$

$$W_{об}(z) = W_1(z) z^{-\tau/T} = \frac{K_{об}}{T_{об}} \frac{z^{1-\tau/T}}{z - e^{-T/T_{об}}}. \quad (9.2.22)$$

В тех случаях, когда запаздывание τ является кратным периоду квантования T , т. е. $T/\tau = n$, где n – целое число, выражение (9.2.22) принимает вид

$$W_{об}(z) = W_1(z) z^{-n} = \frac{K_{об}}{T_{об}} \frac{z^{1-n}}{z - e^{-T/T_{об}}}.$$

Выражения для передаточных функций замкнутых систем, полученные для непрерывного случая, сохраняют свою силу и для дискретных систем, при замене в них непрерывных передаточных функций их дискретными аналогами.

9.3. Дискретные законы управления

В общем случае закон управления, реализуемый дискретным регулятором можно представить в виде

$$u(kT) = \sum_{h=1}^{\sigma} \beta_h u[(k-h)T] + \sum_{h=0}^{\theta} \rho_h \varepsilon[(k-h)T], \quad (9.3.1)$$

где σ и θ , а также k и h – положительные целые числа; β_h и ρ_h – параметры настройки дискретного регулятора.

Чтобы определить передаточную функцию дискретного регулятора, описываемого разностным уравнением (9.3.1) необходимо применить к этому уравнению z -преобразование, т.е.

$$\tilde{u}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k}; \quad \tilde{\varepsilon}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon(kT)z^{-k}.$$

В результате для передаточной функции $W_{рег}(z)$ регулятора (9.3.1) получим выражение

$$W_{рег}(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{\tilde{\varepsilon}(z)} = \frac{\sum_{h=0}^{\theta} \rho_h z^{-h}}{1 - \sum_{h=1}^{\sigma} \beta_h z^{-h}}. \quad (9.3.2)$$

Дискретный регулятор (9.3.3) технически реализуем, если порядок полинома знаменателя σ передаточной функции (9.3.2) больше или равен порядку полинома числителя θ , т.е. $\sigma \geq \theta$.

Поскольку ПИ и ПИД-законы управления хорошо зарекомендовали себя на практике, то желательно установить взаимосвязь между передаточной функцией (9.3.2) и передаточными функциями (2.3.3) и (2.3.4). Для этого воспользуемся соотношением (9.2.10), устанавливающим взаимосвязь между комплексными числами s и z , используемыми в выражениях (2.3.3), (2.3.4) и (9.3.2).

Исходя из равенства (9.2.10) получим

$$s = \frac{1}{T} \ln z. \quad (9.3.3)$$

Подставив выражение (9.3.3) в равенства (2.3.3) и (2.3.4), дискретные передаточные функции идеальных ПИ и ПИД-регуляторов представим в виде

$$W_{ПИ}(z) = K_p + K_p \frac{T}{T_I} \frac{1}{\ln z}; \quad (9.3.4)$$

$$W_{\text{ПИД}}(z) = K_p \frac{T_D}{T} \ln z + K_p + K_p \frac{T}{T_I} \frac{1}{\ln z}. \quad (9.3.5)$$

Выражения (9.3.4) и (9.3.5) задают передаточные функции для дискретных регуляторов, реализующих идеальные ПИ и ПИД-законы управления. Однако для написания программ для цифровых контроллеров, которые управляли бы технологическими процессами в соответствии с этими законами, необходимо от равенств (9.3.4) и (9.3.5) перейти к дискретным уравнениям, подобным (9.3.1).

Для этого функцию $\ln z$ раскладывают в бесконечные ряды. Это разложение можно осуществить различными способами:

$$\ln z = \frac{z-1}{z} + \frac{(z-1)^2}{2z^2} + \frac{(z-1)^3}{3z^3} + \dots (|z| > 1/2); \quad (9.3.6)$$

$$\ln z = 2 \frac{z-1}{z+1} + \frac{2}{3} \frac{(z-1)^3}{(z+1)^3} + \frac{2}{5} \frac{(z-1)^5}{(z+1)^5} + \dots (|z| > 0). \quad (9.3.7)$$

Полагая, что период квантования T выбран весьма малым, на основании равенства (9.3.3) установим, что $\ln z \rightarrow 0$. В таком случае $|z| \rightarrow 1$ и в разложениях (9.3.6) и (9.3.7) можно ограничиться лишь одним членом, т. е.

$$\ln z \approx \frac{z-1}{z}; \quad (9.3.8)$$

$$\ln z \approx 2 \frac{z-1}{z+1}. \quad (9.3.9)$$

Подставляя приближенные равенства (9.3.8) и (9.3.9) в выражения (9.3.4) и (9.3.5) передаточные функции для дискретных ПИ и ПИД-регуляторов представим в виде

$$W_{\text{ПИ}}(z) = K_p + K_p \frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1}; \quad (9.3.10)$$

$$W_{\text{ПИ}}(z) = K_p + K_p \frac{T}{2T_I} \frac{z+1}{z-1}; \quad (9.3.11)$$

$$W_{\text{ПИД}}(z) = K_p \frac{T_D}{T} \frac{z-1}{z} + K_p + K_p \frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1}; \quad (9.3.12)$$

$$W_{\text{ПИД}}(z) = K_p \frac{2T_D}{T} \frac{z-1}{z+1} + K_p + K_p \frac{T}{2T_I} \frac{z+1}{z-1}. \quad (9.3.13)$$

Согласно выражениям (9.3.10) – (9.3.13) передаточные функции дискретных ПИ и ПИД-регуляторов можно приближенно задать двумя различными способами. Поэтому при разработке дискретных систем управления важно не только правильно выбрать сам закон управления, но и определить его наилучшую реализацию.

Отметим, что при малых значениях T все рассмотренные реализации типовых законов управления обеспечивают практически равноценное качество управления и выбор среди них осуществляется по соображениям удобства использования той или иной реализации в каждом конкретном случае.

Исходя из полученных выражений для дискретных передаточных функций типовых регуляторов, определим соответствующие им разностные уравнения.

Рассмотрим, например, выражение (9.3.12) для дискретной передаточной функции ПИД-регулятора $W_{\text{ПИД}}(z)$. Выполнив простые преобразования, представим его в виде отношения следующих двух полиномов от z :

$$\begin{aligned} W_{\text{ПИД}}(z) &= K_p \frac{\left(\frac{T_D}{T} + \frac{T}{T_I}\right)z^2 - \left(2\frac{T_D}{T} + 1\right)z + \frac{T_D}{T}}{z^2 - z} = \\ &= K_p \frac{\left(\frac{T_D}{T} + \frac{T}{T_I}\right) - \left(2\frac{T_D}{T} + 1\right)z^{-1} + \frac{T_D}{T}z^{-2}}{1 - z^{-1}}. \end{aligned} \quad (9.3.14)$$

Примем также во внимание выражение

$$W_{\text{ПИД}}(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{\tilde{\varepsilon}(z)}. \quad (9.3.15)$$

Приравнивая левые части выражений (9.3.14) и (9.3.15), получим

$$\tilde{u}(z) - z^{-1}\tilde{u}(z) = K_p \left(\frac{T_D}{T} + \frac{T}{T_I}\right)\tilde{\varepsilon}(z) - \left(2\frac{T_D}{T} + 1\right)z^{-1}\tilde{\varepsilon}(z) +$$

$$+ \frac{T_D}{T} z^{-2} \tilde{\varepsilon}(z). \quad (9.3.16)$$

Чтобы на основании равенства (9.3.16) получить разностное уравнение для дискретных входных $\varepsilon(kT)$ и выходных $u(kT)$ сигналов ПИД-регулятора, воспользуемся обратным z -преобразованием, выражающемся следующим соотношением:

$$Z^{-1}[z^{-n} \tilde{f}(z)] = f[(k-n)T], \quad (9.3.17)$$

где kT – текущий дискретный момент времени, причем k и n – целые положительные числа.

Применив обратное z -преобразование $Z^{-1}[\dots]$ к равенству (9.3.16), с учетом выражения (9.3.17), получим искомое разностное уравнение для ПИД-регулятора

$$\begin{aligned} u(kT) = & u[(k-1)T] + K_p \left(\frac{T_D}{T} + \frac{T}{T_I} \right) \varepsilon(kT) - \\ & - K_p \left(2 \frac{T_D}{T} + 1 \right) \varepsilon[(k-1)T] + K_p \frac{T_D}{T} \varepsilon[(k-2)T]. \end{aligned} \quad (9.3.18)$$

Использование разностного уравнения (9.3.18) позволяет, сохранив в памяти управляющего компьютера настоящие $\varepsilon(kT)$ и предшествующие значения сигналов $u[(k-1)T]$, $\varepsilon[(k-1)T]$, $\varepsilon[(k-2)T]$, а также выбранные значения параметров настройки K_p , T_D и T_I , определить в каждый текущий дискретный момент времени kT значение сигнала управления $u(kT)$. При этом полагается, что

$$\begin{aligned} u(-T) &= 0, \quad k = 0; \\ \varepsilon(-T) &= \varepsilon(-2T) = 0, \quad 0 \leq k \leq 1. \end{aligned}$$

Используя аналогичные рассуждения, установим, что передаточной функции дискретного ПИД-регулятора (9.3.13) соответствует следующее разностное уравнение:

$$\begin{aligned}
u(kT) = & u[(k-2)T] + K_p \left(\frac{2T_d}{T} + \frac{T}{2T_H} + 1 \right) \varepsilon(kT) - \\
& - K_p \left(\frac{T}{T_H} - \frac{4T_d}{T} \right) \times \varepsilon[(k-1)T] + K_p \left(\frac{2T_d}{T} + \frac{T}{2T_H} - 1 \right) \times \\
& \times \varepsilon[(k-2)T].
\end{aligned} \quad (9.3.19)$$

Разностные уравнения, отвечающие передаточным функциям ПИ-регулятора (9.3.10) и (9.3.11), задаются следующими соотношениями:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + K_p \left(\frac{T}{T_H} + 1 \right) \varepsilon(kT) - K_p \varepsilon[(k-1)T]. \quad (9.3.20)$$

$$\begin{aligned}
u(kT) = & u[(k-1)T] + K_p \left(\frac{T}{2T_H} + 1 \right) \varepsilon(kT) + \\
& + K_p \left(\frac{T}{2T_H} - 1 \right) \varepsilon[(k-1)T].
\end{aligned} \quad (9.3.21)$$

При использовании разностных уравнений (9.3.20) и (9.3.21) необходимо учитывать равенства

$$u(-T) = 0, \quad \varepsilon(-T) = 0, \quad k = 0.$$

Таким образом, применяя выражения для передаточных функций дискретных звеньев и обратное z -преобразование, можно получить разностные уравнения, устанавливающие зависимость между входными и выходными сигналами этих звеньев.

На основании равенств (7.1.68) и (9.3.3) определим выражение для дискретной передаточной функции идеального многопараметрического регулятора

$$\begin{aligned}
W_{pez}(z) = & K_p \frac{T_d}{T} \ln z - K_p \sqrt[3]{\frac{T_{2/3}^2}{T^2}} \ln^2 z + K_p \sqrt[3]{\frac{T_{1/3}}{T}} \ln z - \\
& - K_p + K_p \frac{T}{T_H \ln z}.
\end{aligned} \quad (9.3.22)$$

Метод получения конечного разностного уравнения для идеального многопараметрического регулятора с дискретной передаточной функцией (9.3.22) основан на использовании эквивалентных

регуляторов с непрерывной передаточной функцией (7.1.85), которая при подстановке, получаемого из выражений (9.3.3) и (9.3.8) равенства

$$s = \frac{(z-1)}{Tz},$$

принимает вид

$$W_{\text{экв}}(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}, \quad (9.3.23)$$

где

$$\begin{aligned} X(z) = & K_D(z-1)^5 + K_6(z-1)^4 Tz + K_5(z-1)^3 T^2 z^2 + \\ & + K_4(z-1)^2 T^3 z^3 + K_3(z-1) T^4 z^4 + K_{II} T^5 z^5; \end{aligned} \quad (9.3.24)$$

$$\begin{aligned} Y(z) = & Tz(z-1) \times \\ & \times \left[(z-1)^3 + K_2(z-1)^2 Tz + K_1(z-1) T^2 z^2 + T^3 z^3 \right]. \end{aligned} \quad (9.3.25)$$

На основании выражений (9.3.22) и (9.3.23) – (9.3.25) установим, что равенства

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} W_{\text{рег}}(z) = \lim_{|z| \rightarrow 1} W_{\text{экв}}(z); \quad \lim_{|z| \rightarrow 0} W_{\text{рег}}(z) = \lim_{|z| \rightarrow 0} W_{\text{экв}}(z), \quad (9.3.26)$$

выполняются, если

$$K_D = -K_p \frac{T_D}{T}; \quad K_{II} = K_p \frac{T}{T_{II}}. \quad (9.3.27)$$

Следовательно, определив значения параметров настройки идеального многопараметрического регулятора с передаточной функцией (9.3.22) при которых обеспечивается заданное расположение доминирующих полюсов z_h , $h = \overline{1,6}$, обеспечим выполнение равенств (9.3.26), выбрав значения параметров настройки эквивалентного регулятора K_D и K_{II} согласно выражениям (9.3.27).

Значения остальных параметров настройки эквивалентного регулятора K_h , $h = \overline{1,6}$ выбираются так, чтобы обеспечить совпадение расположений доминирующих полюсов передаточных функций замкнутой системы с идеальным многопараметрическим регулятором (9.3.22) и эквивалентным регулятором (9.3.23) – (9.3.25).

Для дискретных односвязных систем требуемое совпадение обеспечивается в случае выполнения следующих равенств:

$$(z_h - 1)W_{экр}(z_h) = -\frac{z_h - 1}{W_{об}(z_h)}; \quad h = \overline{1,6}, \quad (9.3.28)$$

где $W_{об}(z)$ – дискретная передаточная функция объекта.

После того, как на основании равенств (9.3.28) будут определены значения параметров настройки эквивалентного регулятора K_h , $h = \overline{1,6}$, его передаточную функцию представим в виде

$$W_{экр}(z) = \frac{V_0 + V_1z^{-1} + V_2z^{-2} + V_3z^{-3} + V_4z^{-4} + V_5z^{-5}}{R_0 + R_1z^{-1} + R_2z^{-2} + R_3z^{-3} + R_4z^{-4}}, \quad (9.3.29)$$

где

$$V_0 = \frac{1}{T^4} \left(K_6 + K_5T + K_4T^2 + K_3T^3 + \frac{K_D}{T^5} \right) + K_I;$$

$$V_1 = -\frac{1}{T^4} \left(4K_6 + 3K_5T + 2K_4T^2 + K_3T^3 + \frac{5K_D}{T} \right);$$

$$V_2 = \frac{1}{T^4} \left(6K_6 + 3K_5T + K_4T^2 + \frac{10K_D}{T} \right);$$

$$V_3 = -\frac{1}{T^4} \left(4K_6 + K_5T + \frac{10K_D}{T} \right); \quad V_4 = \frac{1}{T^4} \left(K_6 + \frac{5K_D}{T} \right);$$

$$V_5 = -\frac{K_D}{T^5};$$

$$R_0 = \frac{1}{T^4} (K_2T + K_1T^2 + T^3 + 1);$$

$$R_1 = -\frac{1}{T^4} (3K_2T + 2K_1T^2 + T^3 + 4);$$

$$R_2 = \frac{1}{T^4} (3K_2T + K_1T^2 + 6); \quad R_3 = -\frac{1}{T^4} (K_2T + 4); \quad R_4 = \frac{1}{T^4}.$$

Воспользовавшись дискретной передаточной функцией (9.3.29), определим с помощью обратного z – преобразования разностное уравнение эквивалентного регулятора

$$u(kT) = -\frac{1}{R_0} \sum_{h=1}^4 R_h u[(k-h)T] + \frac{1}{R_0} \sum_{j=0}^5 V_j \varepsilon[(k-j)T]. \quad (9.3.30)$$

При вычислении значений дискретных управляющих сигналов $u(kT)$ с помощью разностного уравнения (9.3.30) необходимо использовать равенства

$$\begin{aligned} u(-T) = u(-2T) = u(-3T) = u(-4T) = 0, \quad 0 \leq k \leq 3; \\ \varepsilon(-T) = \varepsilon(-2T) = \varepsilon(-3T) = \varepsilon(-4T) = \varepsilon(-5T) = 0, \quad 0 \leq k \leq 4. \end{aligned}$$

Таким образом, в результате выполненного анализа для идеальных дискретных законов управления, выражающихся передаточными функциями (9.3.4), (9.3.5) и (9.3.22), были получены конечные, приближенно их реализующие, разностные уравнения (9.3.18) – (9.3.21) и (9.3.30).

Необходимо также отметить, что в отличие от достаточно универсальных разностных уравнений (9.3.18) – (9.3.21), применимых для управления разнообразными объектами, для постоянных времени которых $T_{об}$ выполняется неравенство $T_{об} \gg T$, уравнение (9.3.30) предназначено для управления конкретным объектом, для которого в результате решения системы уравнений (9.3.28) определены значения параметров K_D , K_I и K_h , $h = \overline{1,6}$.

9.4. Устойчивость и запас устойчивости линейных дискретных систем

Наряду со сравнительно низким быстродействием, существенным недостатком замкнутых систем является возможность потери устойчивости, что может случиться не только при неправильном выборе параметров настройки регулятора, как в случае непрерывных систем, но и при слишком больших периодах квантования сигналов

Поэтому анализ замкнутых дискретных систем на устойчивость является одной из важнейших задач теории управления, без решения которой невозможно гарантировать их работоспособность.

При использовании для описания систем управления дискретных моделей, состоящих из усиливающих и запаздывающих звеньев, можно применять критерии устойчивости непрерывных систем.

Поскольку непрерывная линейная стационарная система устойчива, если все корни s_k , $k = \overline{1, n}$ ее характеристического уравнения (3.1.23) имеют отрицательные вещественные части, то на основании выражения (9.2.10) приходим к выводу, что корни z_k , $k = \overline{1, n}$ характеристического уравнения $\Delta(z) = 0$ устойчивой дискретной системы должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$|z_k| < 1, \quad k = \overline{1, n}. \quad (9.4.1)$$

Геометрически неравенства (9.4.1) можно интерпретировать, как требование, чтобы все корни характеристического уравнения устойчивой дискретной системы z_k , $k = \overline{1, n}$ находились внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат, расположенного на комплексной плоскости z .

Для того, чтобы при исследовании устойчивости дискретных систем можно было пользоваться алгебраическим **критерием устойчивости Рауса-Гурвица**, необходимо подстановкой

$$z = \frac{w+1}{w-1}, \quad (9.4.2)$$

преобразовать уравнение $\Delta(z) = 0$ в новое уравнение $\Omega(w) = 0$, относительно переменной w .

Тогда корням уравнения $\Delta(z) = 0$, для которых выполняются неравенства (9.4.1), отвечают корни w_k , $k = \overline{1, n}$ преобразованного уравнения $\Omega(w) = 0$, расположенные на комплексной плоскости w слева от мнимой оси.

Для иллюстрации применения критерия Рауса-Гурвица к дискретным системам рассмотрим пример.

Пример 9.3. Пусть характеристическое уравнение дискретной системы имеет вид

$$\Delta(z) = \sum_{h=0}^4 a_h z^h = 0, \quad (9.4.3)$$

где a_h , $h = \overline{0, 4}$ – постоянные коэффициенты.

Тогда, выполнив в уравнении (9.4.3) подстановку (9.4.2) получим

$$\Omega(w) = \sum_{k=0}^4 b_k w^k = 0, \quad (9.4.4)$$

где

$$b_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4; \quad b_1 = -4a_0 + 2a_1 - 2a_3 + 4a_4; \quad (9.4.5)$$

$$b_2 = 6a_0 - 2a_2 + 6a_4; \quad b_3 = -4a_0 - 2a_1 + 2a_3 + 4a_4; \quad (9.4.6)$$

$$b_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4. \quad (9.4.7)$$

Для того, чтобы дискретная система с характеристическим уравнением (9.4.3) была устойчивой, для коэффициентов уравнения (9.4.4) должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} b_0 > 0; \quad b_1 > 0; \quad b_2 > 0; \quad b_3 > 0; \quad b_4 > 0; \\ b_1(b_2b_3 - b_4b_1) - b_3^2b_0 > 0. \end{cases} \quad (9.4.8)$$

Полагая

$$a_4 = 1; \quad a_3 = -3; \quad a_2 = 3,35; \quad a_1 = -1,65; \quad a_0 = 0,3024,$$

после подстановки этих равенств в выражения (9.4.5) – (9.4.7) имеем

$$b_0 = 9,3024; \quad b_1 = 5,4904; \quad b_2 = 1,1144; \quad b_3 = 0,0904; \quad b_4 = 0,0024.$$

Поскольку все коэффициенты уравнения (9.4.4) положительны и

$$b_1(b_2b_3 - b_4b_1) - b_3^2b_0 = 0,4047450767 > 0,$$

то ввиду выполнения требований (9.4.8) рассматриваемая дискретная система устойчива.

Рассмотрим теперь *критерий устойчивости Михайлова*. Для использования этого критерия необходимо в характеристическом полиноме

$$\Delta(z) = \sum_{h=0}^n a_h z^h,$$

замкнутой системы выполнить замену $z = e^{i\omega T}$ и проанализировать годограф характеристического вектора $\Delta(e^{i\omega T})$, описываемый им при изменении ω от 0 до π/T .

Если годограф начинается на вещественной положительной полуоси и совершает при этом поворот против часовой стрелки на

угол $n\pi/2$, проходя последовательно n квадрантов комплексной плоскости, то система устойчива.

Пример 9.4. Проанализируем на устойчивость с помощью критерия Михайлова систему, рассмотренную в примере 9.3.

Подставив в характеристический полином данной системы выражение $z = e^{i\omega T}$, получим

$$\begin{aligned} \Delta(e^{i\omega T}) &= \sum_{h=0}^n a_h e^{ih\omega T} = \sum_{h=0}^n a_h [\cos(h\omega T) + i \sin(h\omega T)] = \\ &= \sum_{h=0}^n a_h \cos(h\omega T) + i \sum_{h=0}^n a_h \sin(h\omega T) = U(\omega) + iV(\omega), \end{aligned}$$

где

$$U(\omega) = \sum_{h=0}^4 a_h \cos(h\omega T); \quad V(\omega) = \sum_{h=0}^4 a_h \sin(h\omega T).$$

Годограф комплексного вектора $U(\omega) + iV(\omega)$ представлен на рисунке 9.11.

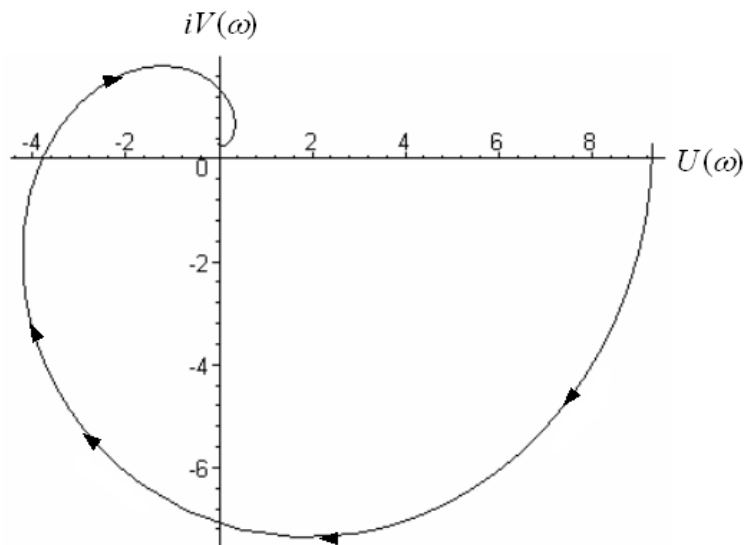


Рисунок 9.11 – Годограф характеристического вектора при $T = 0,1$ с

Поскольку в рассматриваемом случае $n = 4$ и, как видно из рисунок 9.11, годограф характеристического вектора проходит против часовой стрелки последовательно четыре квадранта, то согласно критерию Михайлова система устойчива.

Сформулируем теперь *критерий Найквиста*, применительно к дискретным системам: устойчивая в разомкнутом состоянии дискретная система, сохранит устойчивость и после замыкания ее обратной связью, если КЧХ разомкнутого контура при изменении частоты ω от $-\pi/T$ до π/T не охватывает на комплексной плоскости точку с координатами $(-1, i0)$.

Если система в разомкнутом состоянии неустойчива, то для того, чтобы после замыкания ее обратной связью она стала устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы КЧХ разомкнутого контура при изменении ω от $-\pi/T$ до π/T охватывала k раз точку $(-1, i0)$, где k – число корней характеристического уравнения разомкнутого контура, расположенных вне окружности единичного радиуса, с центром в начале координат.

Когда z – характеристическое уравнение разомкнутого контура имеет один корень, равный единице, то КЧХ разомкнутого контура при $\omega = 0$ следует дополнить дугой бесконечно большого радиуса.

Пример 9.5. Предположим, что непрерывному объекту отвечает следующая передаточная функция:

$$W_{об}(s) = \frac{K_{об}}{(1 + T_{об}s)^2}, \quad (9.4.9)$$

где

$$K_{об} = 2; T_{об} = 28 \text{ с}. \quad (9.4.10)$$

Пусть в качестве ЦАП используется фиксатор нулевого порядка с передаточной функцией (9.2.12).

Тогда эквивалентный объект, включающий в себя последовательно соединенные звенья фиксатора и объекта, имеет передаточную функцию вида (9.2.21).

С учетом выражений (9.4.9) и (9.2.21) получим

$$W_{об}^{экс}(z, s) = \frac{K_{об}}{T_{об}^2} \left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{1}{s \left(\frac{1}{T_{об}} + s \right)^2}. \quad (9.4.11)$$

Воспользуемся разложением произведения на сумму дробных слагаемых

$$\frac{1}{s} \frac{1}{\left(\frac{1}{T_{об}} + s\right)^2} = \frac{a}{s} + \frac{b + cs}{\left(\frac{1}{T_{об}} + s\right)^2}, \quad (9.4.12)$$

где a , b и c – неизвестные вещественные коэффициенты.

Для определения значений коэффициентов в равенстве (9.4.12) получим систему уравнений

$$c = -a; \quad b = -2a/T_{об}; \quad a/T_{об}^2 = 1. \quad (9.4.13)$$

Решив систему уравнений (9.4.13), установим, что

$$a = T_{об}^2; \quad b = -2T_{об}; \quad c = -T_{об}^2. \quad (9.4.14)$$

С учетом соотношений (9.4.12) – (9.4.14) выражение (9.4.11) принимает вид

$$\begin{aligned} W_{об}^{экв}(z, s) &= \frac{K_{об}}{T_{об}} \left(\frac{z-1}{z} \right) \left[\frac{T_{об}}{s} - \frac{2 + T_{об}s}{\left(\frac{1}{T_{об}} + s\right)^2} \right] = \\ &= K_{об} \left(\frac{z-1}{z} \right) \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{\left(\frac{1}{T_{об}} + s\right)} - \frac{1}{T_{об} \left(\frac{1}{T_{об}} + s\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (9.4.15)$$

Воспользовавшись таблицей 8.1 для дискретной передаточной функции эквивалентного объекта (9.4.15) получим выражение

$$W_{об}^{экв}(z) = K_{об} \left[1 - \frac{z-1}{z - e^{-T/T_{об}}} - \frac{T e^{-T/T_{об}} (z-1)}{T_{об} (z - e^{-T/T_{об}})^2} \right]. \quad (9.4.16)$$

Для управления эквивалентным объектом с дискретной передаточной функцией (9.4.16) воспользуемся дискретным ПИ-регулятором с передаточной функцией (9.3.10). В таком случае дискретная передаточная функция разомкнутой системы принимает вид

$$W_{рс}(z) = W_{ПИ}(z) W_{об}^{экв}(z) = K_p K_{об} \left(1 + \frac{T}{T_H} \frac{z}{z-1} \right) \times$$

$$\times \left[1 - \frac{z-1}{z - e^{-T/T_{об}}} - \frac{T e^{-T/T_{об}} (z-1)}{T_{об} (z - e^{-T/T_{об}})^2} \right]. \quad (9.4.17)$$

Поскольку характеристическое уравнение разомкнутого контура получается в результате приравнивания числителя дробного выражения (9.4.17) к нулю, то, выполнив указанную операцию, получим

$$\Delta_{pc}(z) = K_p K_{об} [(T_{И} + T)z - T_{И}] \left\{ \left[1 - \left(1 + \frac{T}{T_{об}} \right) e^{-T/T_{об}} \right] z + \left(\frac{T}{T_{об}} + e^{-T/T_{об}} - 1 \right) e^{-T/T_{об}} \right\} = 0. \quad (9.4.18)$$

Значения параметров настройки дискретного ПИ-регулятора и периода квантования сигналов зададим равенствами

$$K_p = 1,8256; T_{И} = 40,760 \text{ с}; T = 0,1 \text{ с}. \quad (9.4.19)$$

С учетом соотношений (9.4.10) и (9.4.19) установим, что уравнение (9.4.18)

имеет следующие корни:

$$z_1 = 0,99755; z_2 = -0,99762,$$

а это означает, что разомкнутая система устойчива.

График КЧХ разомкнутой системы $W_{pc}(e^{i\omega T})$ приводится на рисунке 9.12.

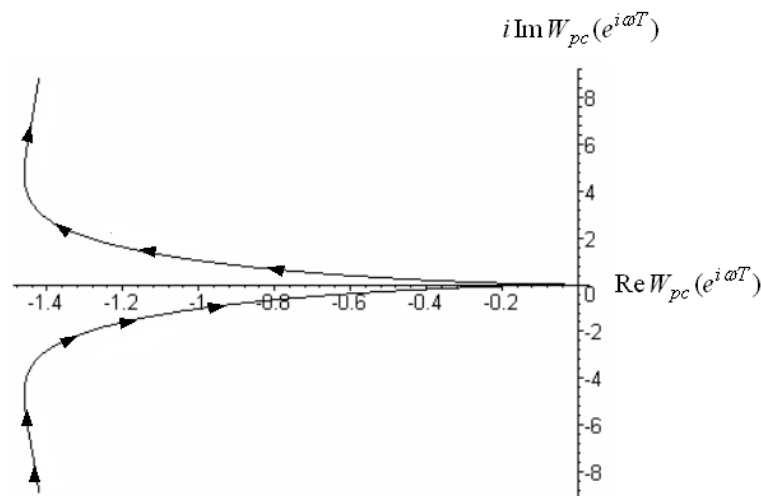


Рисунок 9.12 – Годограф КЧХ разомкнутой дискретной системы

Поскольку в рассматриваемом случае дискретная разомкнутая система устойчива и годограф ее КЧХ, как видно из рисунка 9.12, не охватывает точку с координатами $(-1, i0)$, то согласно критерию Найквиста замкнутая дискретная система также будет устойчивой.

Чтобы повысить надежность и качество работы дискретной системы в условиях, когда на нее действуют разнообразные возмущения и возможен дрейф параметров управляемого объекта, необходимо обеспечить для системы некоторый запас устойчивости.

Для оценки величины запаса устойчивости замкнутых дискретных систем будем использовать показатели абсолютного η и относительного m демпфирования, для определения значений которых в случае непрерывных систем применялись выражения (3.3.1) и (3.3.2).

По аналогии с непрерывными системами, в дискретном случае для задания необходимого запаса устойчивости с помощью указанных показателей, будем использовать следующие ограничения:

$$\eta = \min_{k = \overline{1, n}} -\frac{\ln |z_k|}{T} \geq \eta_{\Pi} > 0; \quad (9.4.20)$$

$$m = \min_{k = \overline{1, n}} \left| \frac{\ln |z_k|}{\arg z_k} \right| \geq m_{\Pi}, \quad (9.4.21)$$

где z_k , $k = \overline{1, n}$ – корни характеристического уравнения замкнутой системы; n – порядок этого уравнения.

Определим вид области $Q_{\eta m}$ на комплексной z – плоскости, задаваемой ограничениями (9.4.20) и (9.4.21).

Пусть Q_{η} и Q_m – области на z – плоскости, для любой точки которых соответственно выполняются ограничения (9.4.20) и (9.4.21), тогда искомая область $Q_{\eta m}$ представляет собой пересечение этих областей, т. е. $Q_{\eta m} = Q_{\eta} \cap Q_m$.

Границы областей Q_{η} и Q_m устанавливаются соответственно выражениями $z = e^{-\eta_{\Pi} T} e^{i\omega T}$ и $z = e^{-m_{\Pi} |\omega| T} e^{i\omega T}$, где частота ω изменяется от $-\pi/T$ до π/T .

Для иллюстрации вида областей $Q_{\eta m}$, Q_η и Q_m рассмотрим пример.

Пример 9.6. Пусть $m_\Pi = 0,366$ и $\eta_\Pi = 2,381 \text{ с}^{-1}$, а $T = 0,1 \text{ с}$, тогда искомые области представлены на рисунке 9.13.

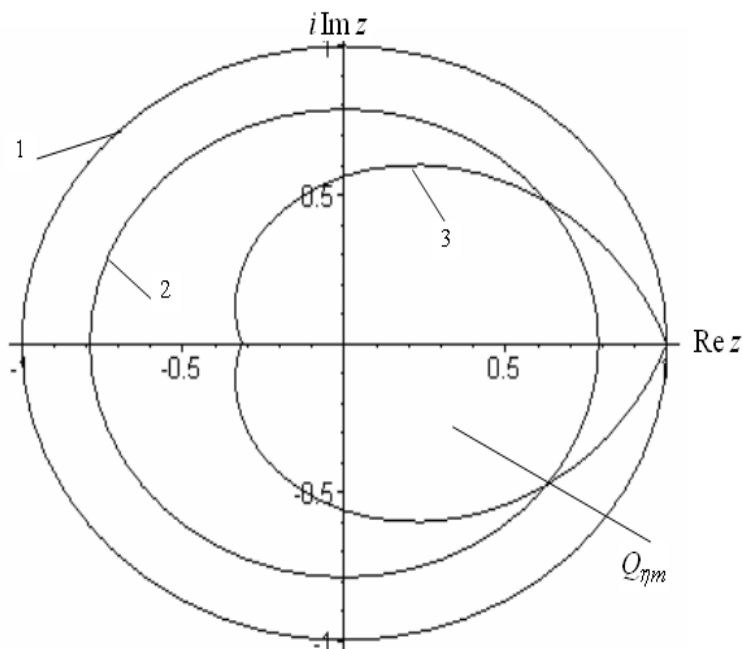


Рисунок 9.13 – Графическая интерпретация ограничений (9.4.20) и (9.4.21): 1 – граница единичного круга; 2 – граница области Q_η ; 3 – граница области Q_m

Отметим, что в отличие от заштрихованной области на рис. 3.10, определяющей допустимые расположения корней характеристического уравнения для непрерывных систем, аналогичная область $Q_{\eta m}$ для дискретных систем конечна.

Наряду с показателями η и m для оценки имеющегося запаса устойчивости дискретной системы нередко используется показатель колебательности M , значение которого в этом случае определяется выражением

$$M = \max \Phi(\omega) = \max \left| \frac{W_{y_{зд}y}(e^{i\omega T})}{W_{y_{зд}y}(1)} \right| \leq M_\Pi. \quad (9.4.22)$$

$$0 \leq \omega < \pi/T \quad 0 \leq \omega < \pi/T$$

Для рассмотренной в примере 9.5 дискретной системы, график функции $\Phi(\omega)$, заданной выражением (9.4.22), представлен на рисунке 9.15.

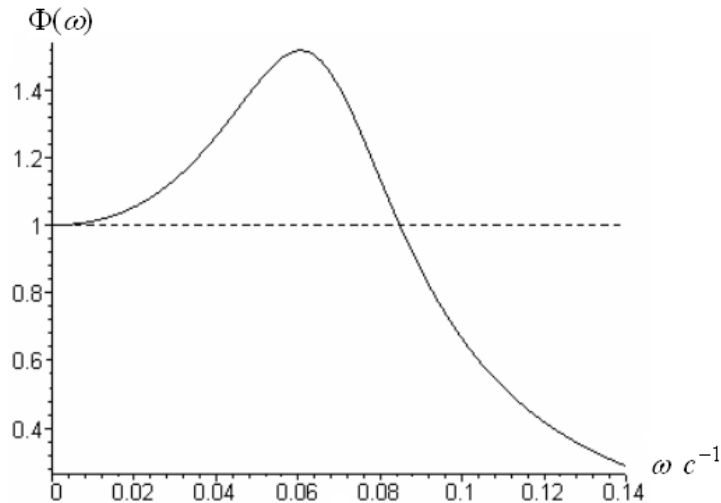


Рисунок 9.15 – АЧХ замкнутой дискретной системы

Как видно из рис. 9.15, АЧХ дискретной системы в выбранном интервале частот $0 \dots \pi/T$ весьма похожа на аналогичные АЧХ непрерывных систем. Однако необходимо помнить о периодичности АЧХ дискретных систем.

В заключение установим требования аналогичные требованиям (6.2.25) для непрерывных систем, выполнение которых обеспечивало бы возможность технической реализации дискретной системы. Для этого требования (6.2.25) с учетом равенства (6.2.21) представим в виде

$$\exp\left(T \sum_{k=1}^n s_k\right) \geq \exp(-TC_s), \quad (9.4.23)$$

где s_k , $k = \overline{1, n}$ – корни характеристического уравнения непрерывной системы.

Поскольку

$$\exp\left(T \sum_{k=1}^n s_k\right) = \prod_{k=1}^n \exp(Ts_k) = \prod_{k=1}^n z_k, \quad (9.4.24)$$

где

$$z_k = \exp(Ts_k); \quad k = \overline{1, n},$$

то на основании соотношений (9.4.23) и (9.4.24) приходим к неравенству

$$\prod_{k=1}^n z_k \geq \exp(-C_s T) = C_z. \quad (9.4.25)$$

Выполнение неравенства (9.4.25) обеспечивает техническую реализуемость дискретных систем при попытке наделить их робастными свойствами.

9.5. Условия робастности линейных дискретных систем

Поскольку дискретные системы управления обладают значительно большей гибкостью при реализации алгоритмов управления по сравнению с традиционными аналоговыми средствами автоматики и эта реализация является более точной, то их применение обычно оказывается предпочтительным. Поэтому актуальна задача обобщения условий робастности управления (6.3.1), полученных для непрерывных систем, на случай дискретных систем.

Воспользуемся выражением (9.2.10), с помощью которого можно установить соответствие между полюсами непрерывных и дискретных систем. В результате, воспользовавшись выражением (6.3.1), приходим к выводу, что расположение доминирующих полюсов передаточных функций дискретной робастной системы должно удовлетворять следующим требованиям:

$$z_k = e^{-\eta T} e^{i\eta T \chi_k(m_{\Pi})}; \quad k = \overline{1, n}, \quad (9.5.1)$$

$$\chi_k(m_{\Pi}) = \begin{cases} (-1)^{k+1} / m_{\Pi}, & \text{если } k \leq 2N; \\ 0, & \text{если } k > 2N, \end{cases}$$

причем N – целая часть от $n/2$ (n – порядок характеристического уравнения замкнутой дискретной системы).

Поскольку при расположении полюсов дискретной системы в соответствии с требованиями (9.5.1) выполняются равенства

$$\ln z_k = -\eta T; \quad \arg z_k = -\eta T \chi_k(m_{\Pi}),$$

то можем сделать вывод о выполнении в этом случае ограничений (9.4.20) и (9.4.21), если значение η выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $\eta \geq \eta_{\Pi}$.

Кроме того, с учетом требований (9.5.1) приходим к следующему равенству:

$$\prod_{k=1}^n z_k = \exp(-n\eta T).$$

В таком случае неравенство (9.4.25) выполняется, если

$$\eta \leq \frac{C_s}{n}.$$

Таким образом, выбрав в выражениях (9.5.1) значение η так, чтобы выполнялись неравенства

$$\eta_{\Pi} \leq \eta \leq \frac{C_s}{n},$$

обеспечим выполнение ограничений (9.4.20), (9.4.21) и (9.4.25).

Для придания дискретной системе управления робастных свойств расчет параметров настройки дискретных регуляторов следует осуществлять, руководствуясь требованиями (9.5.1).

Оценим эффективность этих требований. Воспользуемся тем обстоятельством, что дискретная передаточная функция замкнутой системы $W_{\lambda\varepsilon}(z)$ по каналу передачи действия возмущения $\lambda(hT)$ на ошибку управления $\varepsilon(kT)$ представима в виде

$$W_{\lambda\varepsilon}(z) = \frac{\tilde{\varepsilon}(z)}{\tilde{\lambda}(z)}, \quad (9.5.2)$$

где $\tilde{\varepsilon}(z)$ и $\tilde{\lambda}(z)$ – z -преобразования дискретных величин $\varepsilon(kT)$ и $\lambda(hT)$ соответственно.

Из (9.5.2) находим, что

$$\tilde{\varepsilon}(z) = W_{\lambda\varepsilon}(z)\tilde{\lambda}(z). \quad (9.5.3)$$

Применяя к равенству (9.5.3) обратное z -преобразование имеем

$$\varepsilon(kT) = Z^{-1}[W_{\lambda\varepsilon}(z)\lambda(z)] \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} W_{\lambda\varepsilon}(z)\tilde{\lambda}(z)z^{k-1}dz, \quad (9.5.4)$$

где Γ – замкнутый контур (обычно окружность) на z -плоскости, включающий все особые точки подынтегрального выражения в равенстве (9.5.4). Поскольку для устойчивых дискретных систем все особые точки находятся внутри окружности единичного радиуса, то

$$z = e^{iT\omega}, \quad (9.5.5)$$

и после замены переменной согласно выражению (9.5.5) равенство (9.5.4) принимает вид

$$\varepsilon(kT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} W_{\lambda\varepsilon}(e^{iT\omega}) \tilde{\lambda}(e^{iT\omega}) e^{ikT\omega} d\omega. \quad (9.5.6)$$

Используя равенство (9.5.6), для статистических моментов ошибки управления порядка q получим следующее выражение:

$$M[\varepsilon^q(kT)] = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^q \underbrace{\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \dots \int_{-\pi/T}^{\pi/T}}_q \prod_{h=1}^q W_{\lambda\varepsilon}(e^{iT\omega_h}) \times \\ \times \prod_{h=1}^q e^{iT\omega_h} M \left[\prod_{h=1}^q \tilde{\lambda}(e^{iT\omega_h}) \right] d\omega_1 \dots d\omega_q. \quad (9.5.7)$$

С учетом выражения (9.5.7) для критериев качества управления дискретными односвязными системами получим мажорирующие оценки

$$\left| M[\varepsilon^q(kT)] \right| \leq \left(\frac{T}{2\pi}\right)^q \underbrace{\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \dots \int_{-\pi/T}^{\pi/T}}_q \prod_{h=1}^q \left| W_{\lambda\varepsilon}(e^{iT\omega_h}) \right| \times \\ \times \left| M \left[\prod_{h=1}^q \tilde{\lambda}(e^{iT\omega_h}) \right] \right| d\omega_1 \dots d\omega_q. \quad (9.5.8)$$

Как видно из неравенства (9.5.8), полученные мажорирующие оценки минимизируются при выполнении условия

$$\left| W_{\lambda\varepsilon}(e^{iT\omega}) \right| = \min; \quad |\omega| \leq \omega_{zp}, \quad (9.5.9)$$

если значения статистических характеристик возмущающих воздействий пренебрежимо малы за пределами диапазона частот $|\omega| < \omega_{zp}$, где ω_{zp} – граничная частота, значение которой определяет ширину полосы частот, в которой минимизируется модуль КЧХ дискретной односвязной системы.

Покажем, что выполнение условия (9.5.9) обеспечивается при расположении полюсов передаточных функций односвязной систе-

мы согласно требованиям (9.5.1).

Выше, в § 6.1 было установлено, что возмущающее воздействие $\lambda(t)$ можно заменить эквивалентным $\lambda_3(t)$, действующим на систему по каналу сигнала задания $y_{3д}(t)$.

Поскольку для дискретной односвязной системы передаточная функция канала передачи сигналов $y_{3д}(kT) \rightarrow \varepsilon(kT)$ имеет вид

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(z) = \frac{1}{1 + W_{об}(z)W_{пез}(z)},$$

то, полагая

$$W_{об}(z) = \frac{\sum_{h=0}^{\rho} b_h z^h}{\sum_{k=0}^{\sigma} a_k z^k}; \quad W_{пез}(z) = \frac{\sum_{h=0}^{\mu} r_h z^h}{\sum_{k=0}^{\nu} q_k z^k},$$

получим

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\nu} q_k z^k \sum_{k=0}^{\sigma} a_k z^k}{\sum_{k=0}^{\nu} q_k z^k \sum_{k=0}^{\sigma} a_k z^k + \sum_{h=0}^{\rho} b_h z^h \sum_{h=0}^{\mu} r_h z^h}, \quad (9.5.10)$$

где b_h , r_h , q_k и a_k – вещественные коэффициенты, а ρ , μ , σ и ν – положительные целые числа.

Отметим, что в передаточной функции объекта коэффициенты b_h , a_k и степени полиномов ρ , σ являются заданными, т. е. их значения фиксированы и поэтому не могут изменяться.

В передаточной функции регулятора заданы коэффициенты q_k и показатели степени полиномов ν и μ , а коэффициенты r_h являются варьируемыми, т.е. могут произвольно изменяться, как, например, в выражениях для дискретных передаточных функций типовых регуляторов (9.3.10) – (9.3.13).

Следовательно, в выражении (9.5.10) могут изменяться лишь значения коэффициентов полинома знаменателя

$$\Delta(z) = \sum_{k=0}^{\nu} q_k z^k \sum_{k=0}^{\sigma} a_k z^k + \sum_{h=0}^{\rho} b_h z^h \sum_{h=0}^{\mu} r_h z^h,$$

называемым характеристическим полиномом замкнутой си-

стемы.

Поскольку с учетом сделанных замечаний передаточную функцию $W_{\lambda\varepsilon}(z)$ можно представить в виде

$$W_{\lambda\varepsilon}(z) = \frac{\beta(z)}{\Delta(z)}, \quad (9.5.11)$$

где

$$\beta(z) = \sum_{k=0}^{\nu} q_k z^k \sum_{k=0}^{\sigma} a_k z^k,$$

то приходим к выводу, что в выражении (9.5.11) может изменяться лишь расположение нулей характеристического полинома $\Delta(z)$, т. е. полюсов передаточной функции $W_{\lambda\varepsilon}(z)$.

Таким образом, с учетом выражения (9.5.11) условие (9.5.9) заменим эквивалентным

$$\left| \Delta(e^{iT\omega}) \right| = \max; \quad |\omega| \leq \omega_{zp}, \quad (9.5.12)$$

Значение величины ω_{zp} и расположение полюсов передаточных функций замкнутых дискретных систем, при котором обеспечивается выполнение условия (9.5.12), устанавливает следующее математическое утверждение:

Теорема 9.1. При ограничениях (9.4.20), (9.4.21) и (9.4.25) условие (9.5.12) выполняется, если расположение полюсов z_k , $k = \overline{1, n}$ передаточных функций замкнутой дискретной линейной системы удовлетворяет требованиям (9.5.1), причем значение величины ω_{zp} определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - 2e^{-\eta T} \cos \left[\left(\omega - \frac{\eta}{m_n} \right) T \right] + e^{-2\eta T} \right\}^N \times \\ & \times \left\{ 1 - 2e^{-\eta T} \cos \left[\left(\omega + \frac{\eta}{m_n} \right) T \right] + e^{-2\eta T} \cos \right\}^N = \\ & 2^{2N-1} [1 - \cos(\omega T)]^{2N-1} [1 - 2\cos(\omega T)e^{-2N\eta} + e^{-4N\eta}], \end{aligned} \quad (9.5.13)$$

где N – целая часть от $n/2$ (n – показатель степени характеристического полинома замкнутой системы).

Теорема 9.1 доказывается аналогично теореме 6.2.

В целях иллюстрации полученных результатов рассмотрим пример.

Пример 9.7. Предположим, что в односвязной дискретной системе зависимость ошибки управления ε от возмущающего воздействия λ описывается следующим линейным уравнением в конечных разностях:

$$\begin{aligned} \varepsilon(kT) = a_1\varepsilon[T(k-1)] + a_2\varepsilon[T(k-2)] + \\ + \lambda(kT) - \lambda[(k-1)T], \end{aligned} \quad (9.5.14)$$

где a_1 и a_2 – постоянные коэффициенты.

Согласно (9.5.14) передаточная функция рассматриваемой системы $W_{\lambda\varepsilon}(z)$ по каналу действия возмущения на ошибку управления имеет вид

$$W_{\lambda\varepsilon}(z) = \frac{z(z-1)}{z^2 - a_1z - a_2}. \quad (9.5.15)$$

На основании (9.5.15) для характеристического полинома $\Delta(z)$ получим следующее выражение:

$$\Delta(z) = z^2 - a_1z - a_2.$$

Характеристическое уравнение данной системы

$$\Delta(z) = z^2 - a_1z - a_2 = 0,$$

имеет два корня z_1 и z_2 , расположение которых на z -плоскости в соответствии с требованиями (9.5.1) устанавливается выражением

$$z_{1,2} = e^{-\eta T} e^{\pm iT\eta/m_{\Pi}}. \quad (9.5.16)$$

Поскольку

$$a_1 = z_1 + z_2; \quad a_2 = -z_1z_2,$$

то с учетом выражения (9.5.16) приходим к следующим равенствам:

$$a_1 = 2e^{-\eta T} \cos(T\eta/m_{\Pi}); \quad a_2 = -e^{-2\eta T},$$

используя которые можно определить значения коэффициен-

тов a_1 и a_2 , обеспечивающие расположение полюсов системы в соответствии с требованиями (9.5.16).

Поскольку $n = 2$, то $N = 1$ и уравнение (9.5.13) принимает вид

$$\left\{1 - 2e^{-\eta T} \cos\left[\left(\omega - \frac{\eta}{m_{II}}\right)T\right] + e^{-2\eta T}\right\} \left\{1 - 2e^{-\eta T} \cos\left[\left(\omega + \frac{\eta}{m_{II}}\right)T\right] + e^{-2\eta T}\right\} = 2[1 - \cos(\omega T)][1 - 2\cos(\omega T)e^{-2\eta T} + e^{-4\eta T}]. \quad (9.5.17)$$

Полагая для определенности, что

$$m_{II} = 0,366; T = 0,1 \text{ с}; \eta = 2 \text{ с}^{-1},$$

и численно решая уравнение (9.5.17), установим, что $\omega_{zp} = 4,058 \text{ с}^{-1}$.

Определим также диапазон частот фильтрации $0 \dots \omega_{\phi}$, в котором рассматриваемая система способна подавлять действующие на нее возмущения. В указанном диапазоне должно выполняться неравенство

$$|W_{\lambda\varepsilon}(e^{i\omega T})| < 1.$$

Расчет показал, что $\omega_{\phi} = 2,379 \text{ с}^{-1}$, причем $\omega_{zp} / \omega_{\phi} = 1,7$.

Следовательно, при расположении полюсов рассматриваемой системы в соответствии с требованиями (9.5.16), ее АЧХ минимизируется даже за пределами диапазона фильтрации.

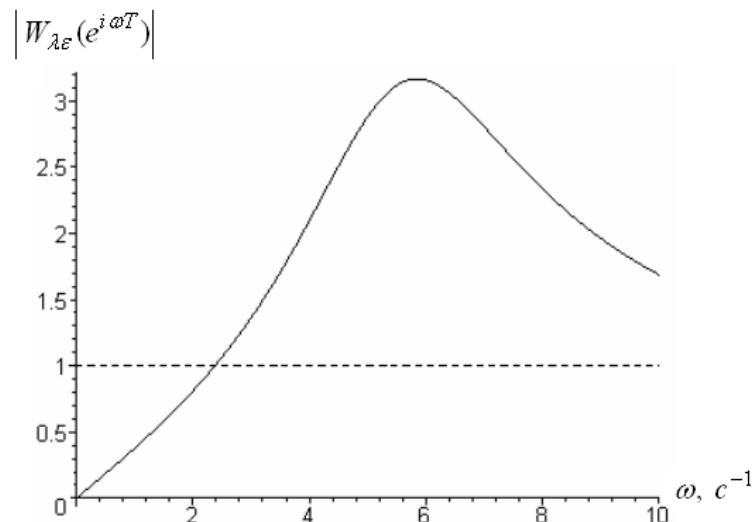


Рисунок 9.16 – АЧХ канала передачи сигналов $\lambda \rightarrow \varepsilon$ дискретной системы

На основании рисунка 8.16 можно судить об эффективности фильтрации возмущений рассматриваемой дискретной системой в различных интервалах частот.

Отметим также, что представленная на рисунка 8.16 дискретная АЧХ по внешнему виду совершенно не отличается от АЧХ непрерывной системы. Однако в более широком интервале частот уже проявляется ее периодичность, что видно из рисунка 9.17.

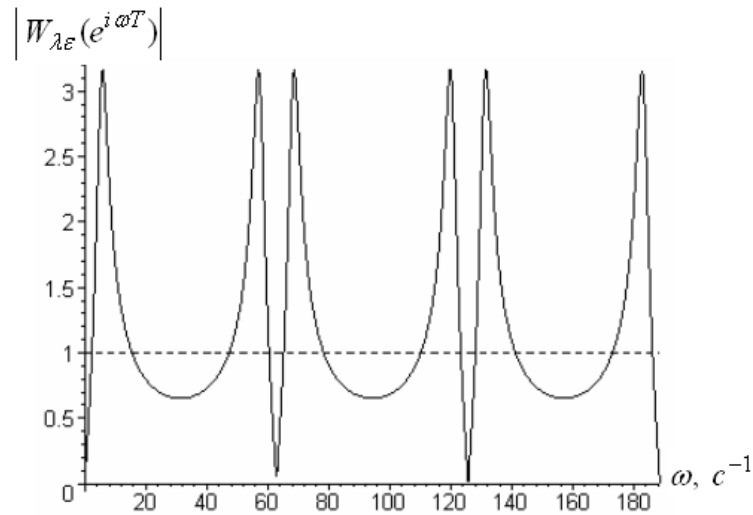


Рисунок 9.17 – АЧХ канала передачи сигналов $\lambda \rightarrow \varepsilon$ дискретной системы

Но, поскольку действующие на систему возмущения оказывают на нее заметное влияние лишь в области низких частот, то при малых периодах квантования сигналов T указанное различие между непрерывными и дискретными системами практически не влияет на качество управления.

Пример 9.7 наглядно показал, что при расположении полюсов дискретных систем в соответствии с требованиями (9.5.1) условие (9.5.12) выполняется в достаточно широком интервале частот. Благодаря этому робастное управление дискретными системами оказывается весьма эффективным даже в тех случаях, когда управляемые объекты подвергаются действию самых разнообразных возмущений, статистические характеристики которых могут изменяться в широких пределах.

Перейдем к рассмотрению многосвязных дискретных систем. Покажем, что выполнение условия (9.5.12) и в этом случае способствует минимизации критериев качества управления. Для этого воспользуемся выражениями

$$\tilde{\varepsilon}_l(z) = \sum_{h=1}^n W_{lh}(z) \tilde{\lambda}_h(z); \quad l = \overline{1, n}, \quad (9.5.18)$$

где $W_{lh}(z)$ – передаточная функция замкнутой дискретной многосвязной системы, соответствующая каналу передачи сигналов от входа h к выходу l ; $\tilde{\varepsilon}_l(z)$ и $\tilde{\lambda}_h(z)$ – z -изображения координат $\varepsilon_l(kT)$ и $\lambda_h(kT)$ векторов ошибки управления $\varepsilon(kT)$ и возмущающих воздействий $\lambda(kT)$.

Применяя к выражениям (9.5.18) обратное z -преобразование получим

$$\varepsilon_l(kT) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \sum_{h=1}^n W_{lh}(z) \tilde{\lambda}_h(z) z^{k-1} dz, \quad l = \overline{1, n}. \quad (9.5.19)$$

Выполнив в выражениях (9.5.19) замену переменной в соответствии с (9.5.5) представим их в следующем виде:

$$\varepsilon_l(kT) = \frac{T}{2\pi} \sum_{h=1}^n \int_{-\pi/T}^{\pi/T} W_{lh}(e^{iT\omega}) \tilde{\lambda}_h(e^{iT\omega}) e^{ikT\omega} d\omega, \quad l = \overline{1, n}.$$

Используя эти соотношения, выразим статистические моменты вектора ошибки управления порядка q через КЧХ многосвязной дискретной системы

$$M[\prod_{l=1}^n \varepsilon_l^{\xi_l}(kT)] = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\rho} \prod_{l=1}^n X_l(kT), \quad (9.5.20)$$

где

$$X_l(kT) = \sum_{h=1}^n \underbrace{\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \dots \int_{-\pi/T}^{\pi/T}}_{\xi_l} \exp(iT \sum_{j=1}^{\xi_l} \omega_j) \times \\ \times \prod_{j=1}^{\xi_l} W_{lh}(e^{iT\omega_j}) M[\prod_{j=1}^{\xi_l} \tilde{\lambda}_h(e^{iT\omega_j})] d\omega_1 \dots d\omega_{\xi_l},$$

а значение величины ρ определяется выражением (5.2.8).

Принимая во внимание, что

$$W_{lh}(e^{iT\omega_j}) = \frac{D_{lh}(e^{iT\omega_j})}{\Delta(e^{iT\omega_j})},$$

на основании выражения (9.5.20) для критериев управления многосвязными дискретными системами получим мажорирующие оценки

$$|M[\prod_{l=1}^n \varepsilon_l^{\xi_l}(kT)]| \leq \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\rho} \prod_{l=1}^n Y_l, \quad (9.5.21)$$

где

$$Y_l = \sum_{h=1}^n \underbrace{\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \dots \int_{-\pi/T}^{\pi/T}}_{\xi_l} \prod_{j=1}^{\xi_l} \frac{|D_{lh}(e^{iT\omega_j})|}{|\Delta(e^{iT\omega_j})|} |M[\prod_{j=1}^{\xi_l} \tilde{\lambda}_h(e^{iT\omega_j})]| d\omega_1 \dots d\omega_{\xi_l}$$

На основании оценок (9.5.21) можно сделать вывод, что критерии управления для многосвязных дискретных систем минимизируются при выполнении условия (9.5.12), если значения статистических характеристик возмущающих воздействий пренебрежимо малы за пределами диапазона частот $|\omega| < \omega_{cp}$.

Следовательно, расположение полюсов в соответствии с требованиями (9.5.1) обеспечивает робастность управления как в случае односвязных, так и многосвязных дискретных систем.

9.6. Методы расчета параметров настройки линейных дискретных систем на основе условий робастности

Рассмотрим особенности расчета параметров настройки односвязных дискретных систем с использованием характеристического уравнения замкнутой системы $\Delta(z) = 0$.

Для практических расчетов удобно использовать данное уравнение в несколько измененном виде

$$\Theta(z) = \frac{\Delta(z) \ln z}{TW_{o\delta}(z)} = \frac{\ln z}{TW_{o\delta}(z)} + \frac{W_{pez}(z) \ln z}{T} = 0. \quad (9.6.1)$$

Сопоставив уравнения (7.1.1) и (9.6.1) с учетом равенства (9.3.3) убедимся в их эквивалентности.

Если использовать приближенное равенство (9.3.8), то уравнение (9.6.1) принимает вид

$$\Theta(z) = \frac{z-1}{TzW_{o\delta}(z)} + \frac{(z-1)W_{pez}(z)}{Tz} = 0. \quad (9.6.2)$$

В случае применения **дискретных ПИ-регуляторов** характеристическое уравнение замкнутой системы имеет три доминирующих корня z_k , $k = \overline{1,3}$, определяемых согласно (9.5.1) следующими выражениями:

$$z_{1,2} = e^{-\eta T(1 \mp i/m_{II})}; z_3 = e^{-\eta T}, \quad (9.6.3)$$

где значения T и m_{II} задаются априори, а значение показателя η необходимо определить.

После подстановки в уравнение (9.6.2) выражения для передаточной функции ПИ регулятора (9.3.10) получим следующее уравнение:

$$K_p \frac{1-z^{-1}}{T} + \frac{K_p}{T_{II}} = \frac{z^{-1}-1}{TW_{o\delta}(z)}. \quad (9.6.4)$$

Поскольку равенство (9.6.4) должно выполняться при подстановке в него корней характеристического уравнения, то после подстановки в него выражений для z_1 и z_3 , приходим к системе из двух уравнений

$$K_p \frac{1-e^{\eta T(1-i/m_{II})}}{T} + \frac{K_p}{T_{II}} = \frac{e^{\eta T(1-i/m_{II})}-1}{TW_{o\delta}[e^{-\eta T(1-i/m_{II})}]}; \quad (9.6.5)$$

$$K_p \frac{1-e^{\eta T}}{T} + \frac{K_p}{T_{II}} = \frac{e^{\eta T}-1}{TW_{o\delta}(e^{-\eta T})}. \quad (9.6.6)$$

После разделения в уравнении (9.6.5) вещественных и мнимых частей имеем

$$K_p \frac{\operatorname{Re}[1-e^{\eta T(1-i/m_{II})}]}{T} + \frac{K_p}{T_{II}} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{\eta T(1-i/m_{II})}-1}{TW_{o\delta}[e^{-\eta T(1-i/m_{II})}]} \right\}; \quad (9.6.7)$$

$$K_p \frac{\operatorname{Im}[1-e^{\eta T(1-i/m_{II})}]}{T} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{\eta T(1-i/m_{II})}-1}{TW_{o\delta}[e^{-\eta T(1-i/m_{II})}]} \right\}. \quad (9.6.8)$$

Из уравнения (9.6.8) находим

$$K_p = \frac{Y_1(\eta)}{Y_2(\eta)}, \quad (9.6.9)$$

где

$$Y_1(\eta) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{\eta T(1-i/m_{II})} - 1}{W_{об}[e^{-\eta T(1-i/m_{II})}]} \right\}; \quad Y_2(\eta) = \operatorname{Im} [1 - e^{\eta T(1-i/m_{II})}].$$

Из уравнений (9.6.7) и (9.6.8) установим также, что

$$\frac{K_p}{T_{II}} = \frac{X_1(\eta)}{X_2(\eta)}, \quad (9.6.10)$$

где

$$\begin{aligned} X_1(\eta) &= \operatorname{Im} [1 - e^{\eta T(1-i/m_{II})}] \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{\eta T(1-i/m_{II})} - 1}{TW_{об}[e^{-\eta T(1-i/m_{II})}]} \right\} - \\ &- \operatorname{Re} [1 - e^{\eta T(1-i/m_{II})}] \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{\eta T(1-i/m_{II})} - 1}{TW_{об}[e^{-\eta T(1-i/m_{II})}]} \right\}; \\ X_2(\eta) &= \operatorname{Im} [1 - e^{\eta T(1-i/m_{II})}]. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (9.6.9) и (9.6.10) в уравнение (9.6.6) получим для определения значения показателя η следующее уравнение:

$$\frac{Y_1(\eta)}{Y_2(\eta)} \left(\frac{1 - e^{\eta T}}{T} \right) + \frac{X_1(\eta)}{X_2(\eta)} = \frac{e^{\eta T} - 1}{TW_{об}(e^{-\eta T})}. \quad (9.6.11)$$

Определив минимальное положительное значение η , удовлетворяющее уравнению (9.6.11), на основании равенства (9.6.9) установим значение K_p . Затем, исходя из равенства (9.6.10), определим значение постоянной времени T_{II} .

Если в односвязной системе используется **дискретный ПИД-регулятор**, то характеристическое уравнение замкнутой системы имеет четыре доминирующих корня, определяемых согласно (9.5.1) следующими выражениями:

$$z_{1,3} = e^{-\eta T(1 - i/m_{II})}; \quad z_{2,4} = e^{-\eta T(1 + i/m_{II})}. \quad (9.6.12)$$

После подстановки в уравнение (9.6.2) выражения для передаточной функции ПИД-регулятора (9.3.12) получим следующее уравнение:

$$K_p \frac{T_D}{T^2} (1 - z^{-1})^2 + K_p \frac{(1 - z^{-1})}{T} + \frac{K_p}{T_H} = \frac{z^{-1} - 1}{TW_{об}(z)}. \quad (9.6.13)$$

После подстановки в уравнение (9.6.13) корня z_1 имеем

$$\begin{aligned} K_p \frac{T_D}{T^2} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_H)}]^2 + \frac{K_p}{T} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_H)}] + \frac{K_p}{T_H} = \\ = \frac{e^{\eta T(1 - i/m_H)} - 1}{TW_{об}[e^{-\eta T(1 - i/m_H)}]}. \end{aligned} \quad (9.6.14)$$

Поскольку доминирующие корни (9.6.12) имеют вторую кратность, то производные по z от правой и левой частей уравнения (9.6.13) должны быть равны друг другу при $z = z_1$, т. е.

$$\begin{aligned} 2K_p \frac{T_D}{T} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_H)}] + K_p = \\ = e^{-2\eta T(1 - i/m_H)} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^{-1} - 1}{W_{об}(z)} \right]_{z=e^{-\eta T(1 - i/m_H)}}. \end{aligned} \quad (9.6.15)$$

Разделив в уравнении (9.6.15) вещественные и мнимые части получим следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} 2K_p \frac{T_D}{T} \operatorname{Re} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_H)}] + K_p = \\ = \operatorname{Re} \left\{ e^{-2\eta T(1 - i/m_H)} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^{-1} - 1}{W_{об}(z)} \right]_{z=e^{-\eta T(1 - i/m_H)}} \right\}; \end{aligned} \quad (9.6.16)$$

$$\begin{aligned} 2K_p \frac{T_D}{T} \operatorname{Im} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_H)}] = \\ = \operatorname{Im} \left\{ e^{-2\eta T(1 - i/m_H)} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^{-1} - 1}{W_{об}(z)} \right]_{z=e^{-\eta T(1 - i/m_H)}} \right\}. \end{aligned} \quad (9.6.17)$$

Из уравнения (9.6.17) находим

$$K_p T_D = \frac{G_1(\eta)}{G_2(\eta)}, \quad (9.6.18)$$

где

$$G_1(\eta) = T \operatorname{Im} \left\{ e^{-2\eta T(1 - i/m_{II})} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^{-1} - 1}{W_{об}(z)} \right]_{z=e^{-\eta T(1 - i/m_{II})}} \right\};$$

$$G_2(\eta) = 2 \operatorname{Im} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}].$$

Воспользовавшись уравнением (9.6.16) и выражением (9.6.18) получим

$$K_p = G_3(\eta) \equiv \operatorname{Re} \left\{ e^{-2\eta T(1 - i/m_{II})} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^{-1} - 1}{W_{об}(z)} \right]_{z=e^{-\eta T(1 - i/m_{II})}} \right\} - \frac{2G_1(\eta)}{TG_2(\eta)} \operatorname{Re} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}]. \quad (9.6.19)$$

Разделив в уравнении (9.6.14) вещественные и мнимые части получим следующие два уравнения:

$$K_p \frac{T_D}{T^2} \operatorname{Re} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}]^2 + \frac{K_p}{T} \operatorname{Re} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}] + \frac{K_p}{T_{II}} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{\eta T(1 - i/m_{II})} - 1}{TW_{об}[e^{-\eta T(1 - i/m_{II})}]} \right\}; \quad (9.6.20)$$

$$K_p \frac{T_D}{T^2} \operatorname{Im} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}]^2 + \frac{K_p}{T} \operatorname{Im} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}] = \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{\eta T(1 - i/m_{II})} - 1}{TW_{об}[e^{-\eta T(1 - i/m_{II})}]} \right\}. \quad (9.6.21)$$

На основании уравнения (9.6.20) приходим к равенству

$$\frac{K_p}{T_{II}} = -K_p \frac{T_D}{T^2} \operatorname{Re} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}]^2 - \frac{K_p}{T} \operatorname{Re} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}] + \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{\eta T(1 - i/m_{II})} - 1}{TW_{об}[e^{-\eta T(1 - i/m_{II})}]} \right\}.$$

После подстановки в него выражений (9.6.18) и (9.6.19) оно принимает вид

$$\frac{K_p}{T_{II}} = G_4(\eta) \equiv -\frac{G_1(\eta)}{T^2 G_2(\eta)} \operatorname{Re} [1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}]^2 -$$

$$-\frac{G_3(\eta)}{T} \operatorname{Re}[1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}] + \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{\eta T(1 - i/m_{II})} - 1}{TW_{об}[e^{-\eta T(1 - i/m_{II})}]} \right\}. \quad (9.6.22)$$

Подставив в уравнение (9.6.21) выражения (9.6.18) и (9.6.19) приходим к следующему уравнению относительно показателя η :

$$\begin{aligned} & \frac{G_1(\eta)}{TG_2(\eta)} \operatorname{Im}[1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}]^2 + G_3(\eta) \operatorname{Im}[1 - e^{\eta T(1 - i/m_{II})}] = \\ & = \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{\eta T(1 - i/m_{II})} - 1}{W_{об}[e^{-\eta T(1 - i/m_{II})}]} \right\}. \end{aligned} \quad (9.6.23)$$

Определив минимальное положительное значение η , удовлетворяющее уравнению (9.6.23), на основании равенства (9.6.19) установим значение K_p . Затем, исходя из равенств (9.6.18) и (9.6.22), определим значения постоянных времени T_d и T_{II} .

Рассмотрим теперь особенности расчета параметров настройки дискретных систем методом *вспомогательной функции*.

Предположим, что используется дискретный ПИ-регулятор. В таком случае удобно использовать регулятор с дискретной передаточной функцией (9.3.11).

При данных обстоятельствах КЧХ дискретного ПИ-регулятора принимает вид

$$\begin{aligned} W_{ПИ}(e^{i\omega T}) &= K_p + K_p \frac{T}{2T_{II}} \frac{e^{i\omega T} + 1}{e^{i\omega T} - 1} = K_p + K_p \frac{T}{2T_{II}} \frac{e^{i\omega T/2} + e^{-i\omega T/2}}{e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}} = \\ &= K_p - iK_p \frac{T}{2T_{II}} \frac{\cos(T\omega/2)}{\sin(T\omega/2)} = K_p - i \frac{K_p}{T_{II}} \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{T\omega}{2} \right). \end{aligned} \quad (9.6.24)$$

Обозначив

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{T\omega}{2} \right), \quad (9.6.25)$$

выражение (9.6.24) представим в виде

$$W_{ПИ}(e^{i\omega T}) = K_p - i \frac{K_p}{T_{II} \Omega}. \quad (9.6.26)$$

Согласно выражению (9.6.26) КЧХ дискретного ПИ-регулятора совершенно аналогична КЧХ непрерывного ПИ-регулятора

$$W_{ПИ}(i\omega) = K_p - i \frac{K_p}{T_I \omega}, \quad (9.6.27)$$

причем, чтобы от выражения (9.6.27) перейти к выражению (9.6.26) достаточно выполнить в нем простую замену $\omega \rightarrow \Omega$.

При данных обстоятельствах чтобы от вспомогательной функции для непрерывного ПИ-регулятора перейти к вспомогательной функции дискретного ПИ-регулятора достаточно в формуле (7.2.15) выполнить замену $\omega \rightarrow \Omega$.

В результате получим

$$F_{ПИ}^{ec}(\Omega) = \frac{K_p}{T_I} = \frac{M \Omega}{(M^2 - 1) A} (M \cos \gamma - 1). \quad (9.6.28)$$

Подставив теперь в равенство (9.6.28) выражение (9.6.25) имеем

$$F_{ПИ}^{ec}(\omega) = \frac{K_p}{T_I} = \frac{2M \operatorname{tg}\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{T(M^2 - 1) A} (M \cos \gamma - 1), \quad (9.6.29)$$

где

$$A = A(\omega) = |W_{об}(e^{i\omega T})|; \quad \gamma = \gamma(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arg W_{об}(e^{i\omega T}).$$

Значение коэффициента передачи дискретного ПИ-регулятора определяется по формуле

$$K_p = \frac{M^2}{(M^2 - 1) A} \sin \gamma, \quad (9.6.30)$$

аналогичной формуле (7.2.16) для непрерывных ПИ-регуляторов.

Таким образом, при настройке системы с дискретным ПИ-регулятором методом вспомогательной функции вначале необходимо определить значение $\omega = \omega_p$, при котором достигается максимум вспомогательной функции (9.6.29). Далее, согласно выражению (9.6.30) при $\omega = \omega_p$ определяется значение коэффициента передачи

K_p , что позволяет затем установить значение параметра T_H , воспользовавшись для этого уже найденным максимальным значением выражения (9.6.29).

Рассмотрим теперь случай применения дискретного ПИД-регулятора с передаточной функцией (9.3.13). Выполнив преобразования, аналогичные использованным при анализе КЧХ дискретного ПИ-регулятора, установим, что

$$W_{\text{ПИД}}(e^{i\omega T}) = K_p + iK_p \left(T_D \Omega - \frac{1}{T_H \Omega} \right), \quad (9.6.31)$$

где Ω задается выражением (9.6.25).

Поскольку КЧХ непрерывного ПИД-регулятора представимо в виде

$$W_{\text{ПИД}}(i\omega) = K_p + iK_p \left(T_D \omega - \frac{1}{T_H \omega} \right), \quad (9.6.32)$$

то, сопоставив выражения (9.6.31) и (9.6.32) убедимся, что выражение (9.6.32) преобразуется в выражение (9.3.31) при выполнении замены $\omega \rightarrow \Omega$.

Следовательно, вспомогательную функцию (7.2.13) для непрерывного ПИД-регулятора можно преобразовать к дискретному виду, выполнив указанную замену переменной. В результате получим

$$F_{\text{ПИД}}^{\text{вс}}(\Omega) = \frac{K_p}{T_H} = \frac{M \Omega}{(M^2 - 1) A} (M \cos \gamma + T_D \Omega M \sin \gamma - \sqrt{1 - T_D^2 \Omega^2}). \quad (9.6.33)$$

После подстановки в равенство (9.6.33) выражения (9.6.25) имеем

$$F_{\text{ПИД}}^{\text{вс}}(\Omega) = \frac{K_p}{T_H} = \frac{2M \operatorname{tg} \left(\frac{T\omega}{2} \right)}{T(M^2 - 1) A} \left[M \cos \gamma + 2 \frac{T_D}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{T\omega}{2} \right) M \sin \gamma - \sqrt{1 - 4 \frac{T_D^2}{T^2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{T\omega}{2} \right)} \right]. \quad (9.6.34)$$

Выражение (7.2.14), используемое для определения значения K_p на резонансной частоте ω_p , также преобразуем к дискретному виду

$$K_p = \frac{M^2 \sin \gamma}{A(M^2 - 1)} \left(1 - \frac{T_D \Omega}{M \sin \gamma \sqrt{1 + T_D^2 \Omega^2}} \right). \quad (9.3.35)$$

Выполнив в выражении (9.3.35) замену (9.6.25) имеем

$$K_p = \frac{M^2 \sin \gamma}{A(M^2 - 1)} \left[1 - \frac{2T_D \operatorname{tg} \left(\frac{T\omega}{2} \right)}{TM \sin \gamma \sqrt{1 + 4 \frac{T_D^2}{T^2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{T\omega}{2} \right)}} \right]. \quad (9.3.36)$$

Таким образом, используя полученные формулы (9.6.34) и (9.3.36), можно при заданном значении T_D определить методом вспомогательной функции значения параметров настройки K_p и T_{II} для дискретных ПИД-регуляторов с передаточной функцией (9.3.13).

9.7. Тест 9

1. Входной непрерывный сигнал в аналого-цифровом преобразователе преобразуется в

- а) амплитудно-модулированный непрерывный сигнал;
- б) широтно-импульсный сигнал;
- в) дискретную последовательность чисел.

2. Разностные уравнения играют такую же роль при исследовании дискретных систем, как ... уравнения при исследовании непрерывных систем.

- а) дифференциальные;
- б) алгебраические;
- в) интегральные.

3. В качестве модели дискретной последовательности чисел можно выбрать последовательность бесконечно коротких импульсов, так, чтобы величина каждого импульса была равна

- а) корню квадратному из заменяемого числа;
- б) заменяемому числу;
- в) квадрату от заменяемого числа.

4. Дельта-импульсный модулятор преобразует непрерывный сигнал в модулированную последовательность

- а) дельта-импульсов;
- б) коротких импульсов;
- в) мощных импульсов.

5. Фиксатор нулевого порядка на выходе цифрового контроллера перемещает управляющий орган в положение, соответствующее очередному пришедшему числу, и удерживает его в этом положении вплоть до появления

- а) сигнала тревоги;
- б) следующего числа;
- в) большего числа.

6. Входной и выходной сигналы дискретного объекта представляют собой

- а) последовательности дельта-импульсов;
- б) последовательности модулированных дельта-импульсов;
- в) синхронные последовательности модулированных дельта-импульсов.

7. Дискретная система с непрерывной частью может быть приведена к системе, реализованной на усилительных и ... звеньях.

- а) запаздывающих;
- б) колебательных;
- в) апериодических.

8. В реальных аналого-цифровых преобразователях производится квантование сигнала не только по времени, но и по уровню, причем шаг квантования по уровню определяется

- а) памятью вычислительного устройства контроллера;
- б) быстродействием вычислительного устройства контроллера;
- в) количеством разрядов в числах, которыми оперирует вычислительное устройство контроллера.

9. Эффект квантования по уровню сигнала проявляется в том, что система становится

- а) менее точной;
- б) нелинейной;
- в) более быстродействующей.

10. Для преобразования вещественных дискретных последовательностей чисел в комплексную область используется

- а) преобразование Лапласа;
- б) преобразование Фурье;
- в) z-преобразование.

ГЛАВА X

МЕТОДЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

10.1. Проблемы адаптивного управления

Наряду с аддитивными возмущениями, влияющими лишь на состояние системы, нередко присутствуют мультипликативные возмущения, под действием которых изменяются параметры объекта. Например, при обогреве теплиц на динамику теплообмена влияет рост объема зеленой массы, засоление трубных систем обогрева и др.

Для эффективного парирования мультипликативных возмущающих воздействий наиболее подходящими являются системы *адаптивного* управления, обладающие способностью приспособливаться к изменяющимся условиям работы. Это достигается с помощью периодической перенастройки адаптивной системы, выполняемой автоматически и позволяющей своевременно учесть изменения ее параметров, а значит избежать снижения качества управления.

В процессе создания адаптивных систем приходится сталкиваться со следующими проблемами:

- управляемым технологическим процессам присущи сложные динамические закономерности, что весьма затрудняет выбор адекватных математических моделей для их описания;
- системам управления приходится функционировать в сложных условиях, подвергаясь воздействию разнообразных факторов (шумов в измерительных преобразователях, наводок в линиях связи, изменению температуры, влажности и др.), влияющих на достоверность получаемой информации о реальном ходе управляемых технологических процессов;

- информацию об изменении динамических характеристик системы желательно получать, не размыкая контура управления, т.к. это привело бы к нарушению ее работоспособности;

- информация о статистических характеристиках возмущающих воздействий полностью или частично отсутствует.

Для успешного решения указанных проблем целесообразно:

- при разработке адаптивных систем использовать методы робастного управления;

- отказаться от параметрических математических моделей, т. е. моделей, заданных в виде аналитических зависимостей и уравнений, при описании динамики управляемых процессов;

- использовать помехозащищенные методы идентификации объекта, применимые при замкнутом контуре управления.

Адаптивные системы делятся на два больших класса: параметрически-адаптивные и функционально-адаптивные.

Функционально-адаптивные системы не используют процедуру идентификации управляемого объекта и ищут оптимальные параметры регулятора исходя непосредственно из цели управления.

Основной недостаток таких систем заключается в низкой скорости сходимости к оптимуму итерационного процесса поиска подходящих настроек регулятора. Это обуславливает их непригодность, например, для управления биологическими объектами, т. к. в этом случае система управления длительное время может функционировать в неблагоприятных для этого вида объектов условиях, что приводит в итоге к невосполнимым потерям.

Адаптивные системы, использующие алгоритмы идентификации принято называть параметрически-адаптивными. Следует, однако, отметить, что это название далеко не всегда правильно отражает суть вещей, т. к. предполагает использование при идентификации параметрических моделей для тех или иных динамических характеристик объекта, в то время как методам адаптивного управления ориентированным на непараметрические модели присуща несравненно большая широта и универсальность.

Обычно при синтезе систем адаптивного управления используют гипотезу *квазистационарности*, в соответствии с которой процессы, протекающие в объекте управления, разделяются на быстрые (изменение параметров состояния) и медленные (измене-

ние динамических характеристик объекта).

В тех случаях, когда данная гипотеза применима, перенастройку системы приходится осуществлять сравнительно редко и в промежутках времени между процессами адаптации ее можно рассматривать как линейную, а значит допустимо использовать робастные методы управления развитые для линейных стационарных систем.

Одна из главных проблем, с которыми приходится сталкиваться при синтезе параметрических адаптивных систем, заключается в определении косвенных условий оптимальности, обеспечивающих достижение оптимума основного критерия качества или близость к нему.

В тех случаях, когда адаптивные системы синтезируются на основе робастных методов управления в качестве косвенных условий оптимальности целесообразно выбрать требование (6.3.1), дополнив его ограничениями на расположение полюсов системы (3.3.3) и (3.3.4).

10.2. Активная идентификация объектов в односвязных непрерывных системах управления

Правильный выбор типа регулятора и определение значений его параметров настройки требует знания динамических свойств объекта управления. Эти свойства управляемого объекта в случае односвязных систем и использовании робастных методов управления определяются передаточной функцией $W_{o\delta}(s)$, соответствующей каналу управления, на вход которого подается управляющий сигнал $u(t)$, а на выходе регистрируется управляемая величина $y(t)$.

Информацию о значениях $W_{o\delta}(s)$ при заданных значениях s обычно получают экспериментально, причем этот эксперимент может быть как активным, так и пассивным. В процессе активного эксперимента на вход замкнутой системы управления (рисунок 10.1.) наряду с сигналом задания $y_{зд}(t)$ подаются также специальные пробные воздействия $\beta(t)$, а при проведении пассивного эксперимента такие воздействия отсутствуют.

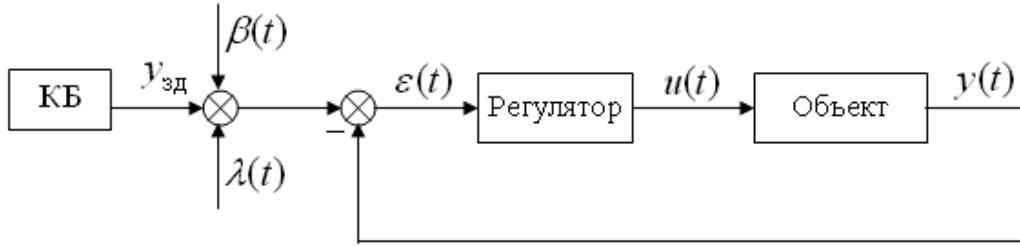


Рисунок 10.1 – Активная идентификация объекта в замкнутой односвязной системе управления

В пассивном случае ведется наблюдение за изменением величины $y(t)$ при «естественном» изменении сигнала задания $y_{зд}(t)$. Разумеется, пассивный эксперимент более предпочтителен, чем активный, т. к. при его проведении отсутствует какое-либо постороннее вмешательство в процесс управления. Однако далеко не всегда при проведении пассивного эксперимента можно определить значения $W_{об}(s)$ объекта для требуемых значений s . Поэтому на практике часто приходится использовать активный эксперимент.

Процесс определения динамических свойств объекта называется его **идентификацией**. Соответственно при использовании активных или пассивных методов изучения динамики объекта идентификация также называется **активной** или **пассивной**.

Рассмотрим односвязные замкнутые системы управления. Для выполнения предъявленных требований будем использовать метод активной идентификации объекта. В таком случае имеет место равенство

$$W_{y_{зд}\varepsilon}(p)[y_{зд}(t) + \lambda(t) + \beta(t)] = \varepsilon(t), \quad (10.2.1)$$

где $W_{y_{зд}\varepsilon}(p)$ – оператор замкнутой системы, отвечающий каналу от входа $y_{зд}(t)$ до ошибки $\varepsilon(t)$; $\lambda(t)$ – эквивалентное возмущающее воздействие, приведенное ко входу системы; $\beta(t)$ – пробный сигнал, используемый для активной идентификации объекта в замкнутом контуре управления и поступающий на вход системы (рисунок 10.1).

Перепишем теперь равенство (10.2.1) следующим образом:

$$W_{y_{зд}\varepsilon}(p)[y_{зд}(t + \tau) + \lambda(t + \tau) + \beta(t + \tau)] = \varepsilon(t + \tau), \quad (10.2.2)$$

где τ – постоянная времени.

Умножим обе части равенства (10.2.2) на величину $\beta(\tau)$, а затем применим оператор математического ожидания $M[\dots]$. В результате получим

$$W_{y_{з\text{д}}\varepsilon}(p)\{M[y_{з\text{д}}(t+\tau)\beta(\tau)] + M[\lambda(t+\tau)\beta(\tau)] + M[\beta(t+\tau)\beta(\tau)]\} = M[\varepsilon(t+\tau)\beta(\tau)]. \quad (10.2.3)$$

Выберем пробный сигнал $\beta(t)$ так, чтобы он удовлетворял условию

$$M[\beta(\tau)] = 0. \quad (10.2.4)$$

Поскольку сигналы $y_{з\text{д}}(t)$ и $\lambda(t)$ статистически не связаны с сигналом $\beta(t)$, то с учетом (10.2.4) имеем

$$M[y_{з\text{д}}(t+\tau)\beta(\tau)] = M[y_{з\text{д}}(t+\tau)]M[\beta(\tau)] = 0; \quad (10.2.5)$$

$$M[\lambda(t+\tau)\beta(\tau)] = M[\lambda(t+\tau)]M[\beta(\tau)] = 0. \quad (10.2.6)$$

Принимая во внимание равенства (10.2.5) и (10.2.6) выражение (10.2.2) представим в виде

$$W_{y_{з\text{д}}\varepsilon}(p)\{M[\beta(t+\tau)\beta(\tau)]\} = M[\varepsilon(t+\tau)\beta(\tau)] \quad (10.2.7)$$

Исходя из (10.2.7) и используя обозначения

$$K_{\beta\beta}(t) = M[\beta(t+\tau)\beta(\tau)]; \quad (10.2.8)$$

$$K_{\varepsilon\beta}(t) = M[\varepsilon(t+\tau)\beta(\tau)], \quad (10.2.9)$$

получим

$$W_{y_{з\text{д}}\varepsilon}(p)K_{\beta\beta}(t) = K_{\varepsilon\beta}(t), \quad (10.2.10)$$

где $K_{\beta\beta}(t)$ – автокорреляционная функция пробного сигнала $\beta(t)$, а $K_{\varepsilon\beta}(t)$ – функция взаимной корреляции величин $\varepsilon(t)$ и $\beta(t)$.

Применив к равенству (10.2.10) одностороннее преобразование Лапласа по времени для передаточной функции замкнутой системы $W_{y_{з\text{д}}\varepsilon}(s)$ получим выражение

$$W_{y_{з\text{д}}\varepsilon}(s) = \frac{\tilde{K}_{\varepsilon\beta}(s)}{\tilde{K}_{\beta\beta}(s)}, \quad (10.2.11)$$

где

$$\tilde{K}_{\varepsilon\beta}(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} K_{\varepsilon\beta}(t) dt; \quad (10.2.12)$$

$$\tilde{K}_{\beta\beta}(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} K_{\beta\beta}(t) dt. \quad (10.2.13)$$

Поскольку в односвязной системе

$$W_{y_{зд}\varepsilon}(s) = \frac{1}{1+W_{об}(s)W_{рег}(s)},$$

то передаточная функция управляемого объекта $W_{об}(s)$ определяется выражением

$$W_{об}(s) = \frac{1}{W_{рег}(s)} \left[\frac{1}{W_{y_{зд}\varepsilon}(s)} - 1 \right]. \quad (10.2.14)$$

Следовательно, определив значение передаточной функции замкнутой системы согласно выражению (10.2.11), можно, исходя из (10.2.14), при наличии возмущений $\lambda(t)$ и не размыкая обратной связи, установить значение передаточной функции объекта, поскольку передаточная функция используемого регулятора $W_{рег}(s)$ заранее известна.

При отсутствии информации о статистических характеристиках случайного процесса $\varepsilon(t)$ значения корреляционных функций $K_{\varepsilon\beta}(t)$ и $K_{\beta\beta}(t)$ можно определить, воспользовавшись выражением

$$K_{\varepsilon\beta}(t) = \frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \varepsilon(t+\tau) \beta(\tau) d\tau; \quad (10.2.15)$$

$$K_{\beta\beta}(t) = \frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \beta(t+\tau) \beta(\tau) d\tau, \quad (10.2.16)$$

где $T_{наб}$ – время наблюдения сигналов $\varepsilon(t+\tau)$ и $\beta(\tau)$.

Однако для практических применений выражение (10.2.11) не совсем удобно, т.к. при расчете параметров настройки регуляторов приходится использовать значения комплексной переменной s с

отрицательной вещественной частью, а в таких случаях интегралы в равенствах (10.2.12) и (10.2.13) расходятся.

Чтобы устранить это затруднение, применим преобразование Лапласа по времени к выражениям (10.2.15) и (10.2.16). В результате получим

$$\tilde{K}_{\varepsilon\beta}(s) = \frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\infty} e^{-t\tau} \varepsilon(t+\tau) dt d\tau; \quad (10.2.17)$$

$$\tilde{K}_{\beta\beta}(s) = \frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\infty} e^{-t\tau} \beta(t+\tau) dt d\tau. \quad (10.2.18)$$

Внутренние интегралы в (10.2.17) и (10.2.18) представим в виде

$$\int_0^{\infty} e^{-t\tau} \varepsilon(t+\tau) dt = e^{\tau s} \left[\tilde{\varepsilon}(s) - \int_0^{\tau} e^{-\xi s} \varepsilon(\xi) d\xi \right]; \quad (10.2.19)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t\tau} \beta(t+\tau) dt = e^{\tau s} \left[\tilde{\beta}(s) - \int_0^{\tau} e^{-\xi s} \beta(\xi) d\xi \right], \quad (10.2.20)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \varepsilon(t) dt;$$

$$\tilde{\beta}(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \beta(t) dt.$$

Подставив выражения (10.2.19) и (10.2.20) соответственно в (10.2.17) и (10.2.18) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\varepsilon\beta}(s) &= \frac{\tilde{\varepsilon}(s)}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} e^{\tau s} \beta(\tau) d\tau - \\ &- \frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \varepsilon(\xi) d\xi d\tau; \end{aligned} \quad (10.2.21)$$

$$\tilde{K}_{\beta\beta}(s) = \frac{\tilde{\beta}(s)}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} e^{\tau s} \beta(\tau) d\tau -$$

$$-\frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \beta(\xi) d\xi d\tau. \quad (10.2.22)$$

Исходя из (10.2.21) и (10.2.22) для изображений $\tilde{\varepsilon}(s)$ и $\tilde{\beta}(s)$ получим следующие выражения:

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \frac{\tilde{K}_{\varepsilon\beta}(s) + \frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \varepsilon(\xi) d\xi d\tau}{\frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} e^{\tau s} \beta(\tau) d\tau}; \quad (10.2.23)$$

$$\tilde{\beta}(s) = \frac{\tilde{K}_{\beta\beta}(s) + \frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \beta(\xi) d\xi d\tau}{\frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} e^{\tau s} \beta(\tau) d\tau}. \quad (10.2.24)$$

Поскольку

$$\frac{\tilde{\varepsilon}(s)}{\tilde{\beta}(s)} = W_{y_{зд}\varepsilon}(s),$$

то с учетом выражений (10.2.23) и (10.2.24) имеем

$$W_{y_{зд}\varepsilon}(s) = \frac{\tilde{K}_{\varepsilon\beta}(s) + \frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \varepsilon(\xi) d\xi d\tau}{\tilde{K}_{\beta\beta}(s) + \frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \beta(\xi) d\xi d\tau}. \quad (10.2.25)$$

Принимая во внимание (10.2.25) приходим к равенству

$$\tilde{K}_{\varepsilon\beta}(s) = W_{y_{зд}\varepsilon}(s) \tilde{K}_{\beta\beta}(s). \quad (10.2.26)$$

Подставив выражение (10.2.26) в равенство (10.2.25) для передаточной функции $W_{y_{зд}\varepsilon}(s)$ получим уравнение

$$W_{y_{зд}\varepsilon}(s) = \frac{W_{y_{зд}\varepsilon}(s)\tilde{K}_{\beta\beta}(s) + \frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \varepsilon(\xi) d\xi d\tau}{\tilde{K}_{\beta\beta}(s) + \frac{1}{T_{наб}} \int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \beta(\xi) d\xi d\tau}.$$

Решив данное уравнение, для искомой передаточной функции получим следующее выражение:

$$W_{y_{зд}\varepsilon}(s) = \frac{\int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \varepsilon(\xi) d\xi d\tau}{\int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \beta(\xi) d\xi d\tau}. \quad (10.2.27)$$

Поскольку для переменных τ и ξ в формуле (10.2.27) выполняется неравенство $\tau > \xi$, то интегралы в числителе и знаменателе сходятся при $\operatorname{Re} s < 0$.

Следовательно, при наличии возмущающих воздействий $\lambda(t)$, не размыкая контура управления односвязной системы, можно при любом наперед заданном значении s ($\operatorname{Re} s < 0$) с желаемой точностью (она возрастает при увеличении времени $T_{наб}$) определить соответствующее значение $W_{об}(s)$, используя выражения (10.2.27) и (10.2.14).

Поскольку передаточная функция регулятора $W_{рег}(s)$ известна, то согласно выражению (4.6.1) можно установить значение величины $\Delta_{\varepsilon}(s)$, используемой при численном решении уравнений (4.6.6), (4.6.7) для определения параметров настройки регулятора.

Таким образом, осуществляя периодически перенастройку регулятора, можно избежать заметного снижения качества управления вследствие непредсказуемого заранее дрейфа параметров объекта.

Отметим также, что данный метод адаптивной настройки систем управления не требует построения математических моделей объекта в виде аналитических зависимостей для передаточных функций, частотных характеристик или дифференциальных уравнений, описывающих изменение состояния системы. На практике ввиду сложности динамики управляемых процессов построение таких моделей часто оказывается весьма затруднительным.

10.3. Оптимизация пробных сигналов при активной идентификации замкнутых систем управления

Установим теперь оптимальный вид пробного сигнала $\beta(t)$. На практике в качестве таких сигналов нередко применяют ступенчатое или гармоническое воздействие на идентифицируемый объект. Однако выбор пробных сигналов зачастую недостаточно обоснован в плане *достижения желаемой точности идентификации при минимальных затратах времени на ее проведение*. Поэтому актуальна задача оптимального выбора пробных сигналов, обеспечивающего выполнение данного требования.

Чтобы пробный сигнал $\beta(t)$ не оказывал существенного влияния на качество управления при идентификации объекта без размыкания системы, потребуем выполнения условия

$$\max |\beta(t)| \leq \theta; \quad 0 \leq t \leq T_{наб}, \quad (10.3.1)$$

где θ – предельно допустимое значение сигнала $\beta(t)$.

Для уменьшения влияния на результаты идентификации возмущающих воздействий, необходимо выполнить, вытекающее из условия (10.2.4), требование

$$\frac{1}{T_{наб}} \left| \int_0^{T_{наб}} \beta(t) dt \right| \rightarrow 0, \quad (T_{наб} \rightarrow \infty). \quad (10.3.2)$$

Исходя из выражения (10.2.27) условие оптимальности сигнала $\beta(t)$ представим в виде

$$\frac{1}{T_{наб}} \left| \int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \beta(\xi) d\xi d\tau \right| = \max, \quad (10.3.3)$$

т. е. среди всего множества сигналов $\beta(t)$, удовлетворяющих условию (10.3.1) и требованию (10.3.2), необходимо выбрать такой, для которого выполняется критерий оптимальности (10.3.3).

Ясно, что для ступенчатого воздействия

$$\beta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0; \\ \theta, & \text{если } t > 0, \end{cases}$$

выполняется условие (10.3.1), но этот вид пробных сигналов не удовлетворяет требованию (10.3.2) и поэтому применим для активной идентификации объектов лишь в тех случаях, когда возмущения $\lambda(t)$ незначительны по сравнению с амплитудой θ пробного сигнала $\beta(t)$. Ступенчатым воздействием можно пользоваться на этапах проектирования и пуско-наладочных работ.

В отличие от ступенчатого, гармоническое воздействие вполне отвечает условию (10.3.1) и требованию (10.3.2). Поэтому его можно с успехом использовать при значительном влиянии возмущений $\lambda(t)$ на идентифицируемый объект. Однако для гармонического воздействия необходимо проверить выполнение критерия оптимальности (10.3.3).

Оказывается, что проблему поиска оптимальных пробных воздействий легче решить, если перейти от временного представления сигналов к частотному. Для этого применим одностороннее преобразование Лапласа по времени к выражению

$$\mu(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)s} \beta(\tau) d\tau. \quad (10.3.4)$$

В результате получим

$$\int_0^{\infty} e^{-gt} \mu(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-gt} \left[\int_0^t e^{(t-\tau)s} \beta(\tau) d\tau \right] dt, \quad (10.3.5)$$

где g – комплексное число. Обозначив

$$\tilde{\mu}(g) = \int_0^{\infty} e^{-gt} \mu(t) dt,$$

равенство (10.3.5) представим в виде

$$\tilde{\mu}(g) = \frac{1}{s-g} \int_0^{\infty} \left(\int_0^t e^{-s\tau} \beta(\tau) d\tau \right) de^{(s-g)t}. \quad (10.3.6)$$

Интегрируя правую часть выражения (10.3.6) по частям получим

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(g) &= \frac{1}{(s-g)} \left[e^{(s-g)t} \int_0^t e^{-s\tau} \beta(\tau) d\tau \right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-gt} \beta(t) dt = \\ &= -\frac{1}{(s-g)} \int_0^\infty e^{-gt} \beta(t) dt = \frac{1}{(g-s)} \tilde{\beta}(g).\end{aligned}\quad (10.3.7)$$

Установим оптимальный вид пробных сигналов при определении КЧХ объекта $W_{o\bar{o}}(i\omega)$. Тогда, полагая в выражении (10.3.7) $s = i\omega$, а $g = i\Omega$ представим его в виде

$$\tilde{\mu}(i\Omega) = \frac{\tilde{\beta}(i\Omega)}{i(\Omega - \omega)}, \quad (10.3.8)$$

где Ω и ω – различные частоты. Применив к равенству (10.3.8) обратное преобразование Фурье получим следующее выражение:

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} \frac{\tilde{\beta}(i\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega. \quad (10.3.9)$$

С учетом (10.3.9) имеем

$$\int_0^{T_{наб}} \beta(t) \mu(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{T_{наб}} \beta(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} \frac{\tilde{\beta}(i\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega dt. \quad (10.3.10)$$

Изменив в правой части равенства (10.3.10) порядок интегрирования представим его в виде

$$\int_0^{T_{наб}} \beta(t) \mu(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\beta}(i\Omega)}{\Omega - \omega} \int_0^{T_{наб}} e^{i\Omega t} \beta(t) dt d\Omega. \quad (10.3.11)$$

Поскольку

$$\beta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 0, & \text{если } t > T_{наб}, \end{cases} \quad (10.3.12)$$

то значение интеграла

$$\int_0^{T_{наб}} e^{i\Omega t} \beta(t) dt$$

не измениться при замене конечных пределов интегрирования бесконечными, т. е.

$$\int_0^{T_{наб}} e^{i\Omega t} \beta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} \beta(t) dt. \quad (10.3.13)$$

Примем также во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} \beta(t) dt = \tilde{\beta}(-i\Omega). \quad (10.3.14)$$

С учетом равенств (10.3.13) и (10.3.14) выражение (10.3.10) принимает вид

$$\int_0^{T_{наб}} \beta(t) \mu(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\beta}(i\Omega) \tilde{\beta}(-i\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega. \quad (10.3.15)$$

Подставив выражение (10.3.15) в критерий оптимальности (10.3.3) пробного сигнала $\beta(t)$, с учетом равенства

$$|\tilde{\beta}(i\Omega)|^2 = \tilde{\beta}(i\Omega) \tilde{\beta}(-i\Omega),$$

представим его в виде

$$\frac{1}{2\pi T_{наб}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\beta}(i\Omega)|^2}{\Omega - \omega} d\Omega \right| = \max. \quad (10.3.16)$$

Замена критерия оптимальности (10.3.3) на эквивалентный критерий (10.3.16) позволяет сделать вывод, что

$$|\tilde{\beta}(i\omega)|^2 = \max, \quad (10.3.17)$$

т. е. квадрат амплитуды гармонической составляющей $\tilde{\beta}(i\omega)e^{i\omega t}$ оптимального сигнала $\beta(t)$ должен быть максимален.

Для доказательства того, что из требования (10.3.16) следует (10.3.17), разложим функцию $|\tilde{\beta}(i\Omega)|^2$ в ряд Тейлора в окрестности $\Omega = \omega$, т. е.

$$|\tilde{\beta}(i\Omega)|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(\omega)(\Omega - \omega)^k, \quad (10.3.18)$$

где $c_k(\omega)$ – коэффициенты разложения, причем

$$c_k(\omega) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k |\tilde{\beta}(i\Omega)|^2}{d\Omega^k} \right]_{\Omega=\omega}. \quad (10.3.19)$$

Подставив разложение (10.3.18) в левую часть требования (10.3.17) получим

$$\frac{1}{2\pi T_{наб}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\beta}(i\Omega)|^2}{\Omega - \omega} d\Omega \right| = \frac{1}{2\pi T_{наб}} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} (\Omega - \omega)^{k-1} d\Omega \right|. \quad (10.3.20)$$

Поскольку имеют место равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Omega - \omega)^{k-1} d\Omega = \begin{cases} 0, & k > 0; \\ \pi i, & k = 0, \end{cases}$$

то выражение (10.3.20) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi T_{наб}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\beta}(i\Omega)|^2}{\Omega - \omega} d\Omega \right| = \frac{|c_0(\omega)|}{2 T_{наб}} = \max. \quad (10.3.21)$$

Кроме того, согласно выражению (10.3.19) имеем

$$c_0(\omega) = |\tilde{\beta}(i\omega)|^2. \quad (10.3.22)$$

Исходя из требования (10.3.21) и принимая при этом во внимание равенство (10.3.22) приходим к критерию оптимальности (10.3.17).

Воспользуемся данным критерием для определения вида оптимального пробного сигнала $\beta(t)$. Подставив в (10.3.17) выражения

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(i\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \beta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t) \beta(t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega t) \beta(t) dt; \\ \tilde{\beta}(-i\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \beta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t) \beta(t) dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega t) \beta(t) dt \end{aligned}$$

получим

$$|\tilde{\beta}(i\omega)|^2 = \tilde{\beta}(i\omega) \tilde{\beta}(-i\omega) = I(\omega) + J(\omega), \quad (10.3.23)$$

где

$$I(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t) \beta(t) dt \right]^2; \quad J(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega t) \beta(t) dt \right]^2.$$

(10.3.24)

Согласно условию (10.3.13) значения интегралов в выражениях (10.3.24) не изменятся при следующей замене пределов интегрирования:

$$I(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t) \beta(t) dt \right]^2 = \left[\int_0^{T_{наб}} \cos(\omega t) \beta(t) dt \right]^2; \quad (10.3.25)$$

$$J(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega t) \beta(t) dt \right]^2 = \left[\int_0^{T_{наб}} \sin(\omega t) \beta(t) dt \right]^2. \quad (10.3.26)$$

Выберем значение величины $T_{наб}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$T_{наб} = \frac{\pi n}{\omega}, \quad (10.3.27)$$

где n – произвольное целое положительное число. С учетом равенства (10.3.27) представим выражения (10.3.25) и (10.3.26) в виде

$$I(\omega) = \left[\int_0^{\pi n/\omega} \cos(\omega t) \beta(t) dt \right]^2; \quad J(\omega) = \left[\int_0^{\pi n/\omega} \sin(\omega t) \beta(t) dt \right]^2. \quad (10.3.28)$$

Разбив интервал $(0, \pi n/\omega)$, на котором производится интегрирование в выражениях (10.3.28), на ряд подинтервалов длиной π/ω и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \sin[\omega t + (k-1)\pi] &= (-1)^{k-1} \sin(\omega t); \\ \cos[\omega t + (k-1)\pi] &= (-1)^{k-1} \cos(\omega t), \end{aligned}$$

получим

$$I(\omega) = \left[\sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi/\omega}^{k\pi/\omega} \cos(\omega t) \beta(t) dt \right]^2 =$$

$$= \left\{ \int_0^{\pi/\omega} \cos(\omega t) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \beta \left[t + (k-1) \frac{\pi}{\omega} \right] dt \right\}^2; \quad (10.3.29)$$

$$J(\omega) = \left[\sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi/\omega}^{k\pi/\omega} \sin(\omega t) \beta(t) dt \right]^2 =$$

$$= \left\{ \int_0^{\pi/\omega} \sin(\omega t) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \beta \left[t + (k-1) \frac{\pi}{\omega} \right] dt \right\}^2. \quad (10.3.30)$$

Выберем в соответствии с требованием (10.3.2) функцию $\beta(t)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\beta \left[t + (k-1) \frac{\pi}{\omega} \right] = (-1)^{k-1} \beta(t), \quad k = \overline{1, n}. \quad (10.3.31)$$

Подставив равенства (10.3.31) в выражения (10.3.29) и (10.3.30) представим их в виде

$$I(\omega) = \left[n \int_0^{\pi/\omega} \cos(\omega t) \beta(t) dt \right]^2; \quad (10.3.32)$$

$$J(\omega) = \left[n \int_0^{\pi/\omega} \sin(\omega t) \beta(t) dt \right]^2. \quad (10.3.33)$$

Поскольку на интервале $(0, \pi/2)$ функции $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$ принимают положительные значения, то для выполнения требования (10.3.17) на данном интервале должно быть $\beta(t) > 0$, причем в соответствии с условием (10.3.1) имеет место равенство

$$\beta(t) = \theta, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2\omega}. \quad (10.3.34)$$

Однако на интервале $(\pi/2, \pi)$ требование положительности для функции $\beta(t)$ уже не выглядит столь очевидным. Поэтому предположим, что в момент $t = \tau$, где $\frac{\pi}{2\omega} < \tau < \frac{\pi}{\omega}$ функция $\beta(t)$ скачком изменяет свое значение, т. е.

$$\beta(t) = -\theta, \quad \frac{\pi}{2\omega} < \tau < t < \frac{\pi}{\omega}. \quad (10.3.35)$$

Согласно равенствам (10.3.34) и (10.3.35) на рассматриваемом интервале функцию $\beta(t)$ можно записать в следующем виде:

$$\beta(t) = \begin{cases} \theta, & \text{если } 0 < t < \tau; \\ -\theta, & \text{если } \tau < t < \pi/\omega. \end{cases} \quad (10.3.36)$$

Подставив выражение (10.3.36) в интегралы (10.3.32) и (10.3.33) получим

$$I(\omega) = (n\theta)^2 \sin^2(\omega\tau); \quad J(\omega) = (n\theta)^2 \cos^2(\omega\tau). \quad (10.3.37)$$

После подстановки выражений (10.3.37) в равенство (10.3.23) имеем

$$|\tilde{\beta}(i\omega)|^2 = (n\theta)^2 [\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau)] = (n\theta)^2. \quad (10.3.38)$$

Как видно из выражения (10.3.38) значение величины $|\tilde{\beta}(i\omega)|^2$ не зависит от τ . Поэтому можно считать, что функция $\beta(t)$ на интервале $(0, \pi/\omega)$ остается положительной, т.е.

$$\beta(t) = \theta, \quad 0 < t < \frac{\pi}{\omega}. \quad (10.3.39)$$

Однако, согласно равенству (10.3.31) при переходе к интервалу $(\pi/\omega, 2\pi/\omega)$ она скачком изменяет положительное значение на отрицательное, так что

$$\beta(t) = -\theta, \quad \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10.3.40)$$

С учетом равенств (10.3.39) и (10.3.40) на интервале $(0, 2\pi/\omega)$ оптимальный пробный сигнал $\beta(t)$ задается выражением

$$\beta(t) = \begin{cases} \theta, & \text{если } 0 < t < \pi/\omega; \\ -\theta, & \text{если } \pi/\omega < t < 2\pi/\omega. \end{cases} \quad (10.3.41)$$

Кроме того, пробный сигнал $\beta(t)$ является периодическим, т.е.

$$\beta(t) = \beta(t + T_\beta), \quad (10.3.42)$$

где

$$T_{\beta} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10.3.43)$$

Оптимальный пробный сигнал, заданный выражениями (10.3.41) – (10.3.42) удовлетворяет требованиям (10.3.1) – (10.3.3) и весьма просто реализуется на практике.

Таким образом, в результате проведенного анализа удалось установить требования к оптимальному пробному сигналу, используемому при активной идентификации объекта в замкнутой системе управления, а также определить его вид.

10.4. Активная идентификация каскадных и многосвязных непрерывных систем управления

Так же, как и для односвязных систем, значения передаточных функций каскадной системы $W_{y_{зд}y}(s)$ и $W_{y_{зд}\nu}(s)$ определяются согласно аналогичным (10.2.27) выражениям

$$W_{y_{зд}y}(s) = \frac{\int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} y(\xi) d\xi d\tau}{\int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \beta(\xi) d\xi d\tau}; \quad (10.4.1)$$

$$W_{y_{зд}\mu}(s) = \frac{\int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \mu(\xi) d\xi d\tau}{\int_0^{T_{наб}} \beta(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \beta(\xi) d\xi d\tau}, \quad (10.4.2)$$

где $\beta(\tau)$ – пробный сигнал, поступающий на вход замкнутой каскадной системы по каналу задания при использовании активной идентификации; $y(\xi)$ – основная управляемая величина; $y_{зд}(\xi)$ – заданное значение величины $y(\xi)$; $\mu(\xi)$ – вспомогательная управляемая величина.

Согласно выражениям (3.1.34) и (3.1.36) установим, что взаимосвязь между передаточными функциями каскадной системы

$W_{y_{зд}y}(s)$ и $W_{y_{зд}\mu}(s)$ выражается следующим равенством:

$$W_{y_{зд}\mu}(s) = \frac{W_{об}^{bc}(s)W_{рег}^{bc}(s)W_{рег}^{zl}(s)[1 - W_{y_{зд}y}(s)]}{1 + W_{об}^{bc}(s)W_{рег}^{bc}(s)}. \quad (10.4.3)$$

Тогда, воспользовавшись выражениями (10.4.3) и (2.1.33) получим

$$W_{об}^{bc}(s) = \frac{W_{y_{зд}\mu}(s)}{W_{рег}^{bc}(s)\{W_{рег}^{zl}(s)[1 - W_{y_{зд}y}(s)] - 1\}}; \quad (10.4.4)$$

$$W_{об}^{очн}(s) = \frac{[1 + W_{об}^{bc}(s)W_{рег}^{bc}(s)]W_{y_{зд}y}(s)}{W_{рег}^{bc}(s)W_{рег}^{zl}(s)[1 - W_{y_{зд}y}(s)]}. \quad (10.4.5)$$

Таким образом, определив в результате активного эксперимента значения передаточных функций $W_{y_{зд}y}(s)$ и $W_{y_{зд}\mu}(s)$ согласно выражениям (10.4.1) и (10.4.2), установим при заданном значении комплексной переменной s на основании выражений (10.4.4) и (10.4.5) значения передаточных функций управляемого объекта.

Поскольку передаточные функции регуляторов $W_{рег}^{zl}(s)$ и $W_{рег}^{bc}(s)$ заданы, то, определив согласно выражениям (10.4.4) и (10.4.5) передаточные функции объекта $W_{об}^{bc}(s)$ и $W_{об}^{очн}(s)$, на основании равенства ((3.1.35) установим значение величины $\Delta_3(s)$, используемой при расчете параметров настройки главного и вспомогательного регуляторов в результате численного решения уравнения (7.1.98).

В случае адаптивной настройки многосвязных систем управления на вход системы подается r -мерный векторный пробный сигнал $\mathbf{b}(t)$, а на выходе при этом регистрируется r -мерный векторный сигнал $\mathbf{y}(t)$. Выражение для матричной передаточной функции замкнутой системы $\mathbf{W}_{y_{зд}y}(s)$ размерности $(r \times r)$, отвечающей каналу передачи векторного сигнала задания $\mathbf{y}_{зд}(t)$ на выход системы $\mathbf{y}(t)$, принимает вид

$$\mathbf{W}_{y_{зд}y}(s) = \frac{\int_0^{T_{наб}} \boldsymbol{\beta}(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \mathbf{y}'(\xi) d\xi d\tau}{\int_0^{T_{наб}} \boldsymbol{\beta}(\tau) \int_0^{\tau} e^{(\tau-\xi)s} \boldsymbol{\beta}'(\xi) d\xi d\tau}. \quad (10.4.6)$$

где $\mathbf{y}'(\xi)$ и $\boldsymbol{\beta}'(\xi)$ – транспонированные векторы $\mathbf{y}(\xi)$ и $\boldsymbol{\beta}(\xi)$ соответственно.

Определив матричную передаточную функцию замкнутой системы $\mathbf{W}_{y_{зд}y}(s)$ согласно равенству (10.4.6), матричную передаточную функцию объекта $\mathbf{W}^{об}(s)$ размерности $(q \times r)$ определим, используя следующее выражение:

$$\mathbf{W}^{об}(s) = [\mathbf{W}_{y_{зд}y}(s) - \mathbf{E}] \overline{\mathbf{W}}^{pez}(s), \quad (10.4.7)$$

где

$$\overline{\mathbf{W}}^{pez}(s) = \mathbf{W}_T^{pez}(s) \left[\mathbf{W}^{pez}(s) \mathbf{W}_T^{pez}(s) \right]^{-1}, \quad (10.4.8)$$

причем матрица $\mathbf{W}_T^{pez}(s)$ размерности $(q \times r)$ является транспонированной по отношению к матрице $\mathbf{W}^{pez}(s)$ размерности $(r \times q)$, а \mathbf{E} – единичная матрица размерности $(r \times r)$.

Подставив в равенство (3.1.45) заданную матричную передаточную функцию регулятора $\mathbf{W}^{pez}(s)$ и матричную передаточную функцию объекта $\mathbf{W}^{об}(s)$, полученную согласно равенствам (10.4.7) и (10.4.8), определим значение величины $\Delta_g(s)$, используемой при расчете параметров настройки регуляторов в результате численного решения уравнения (7.1.119).

Таким образом, метод адаптивной настройки замкнутых систем управления позволяет не только избежать построения математических моделей объекта в аналитическом виде, но и обладает универсальностью, т.к. применим к односвязным, каскадным и многосвязным системам.

10.5. Активная идентификация объектов в дискретных системах управления

Вначале рассмотрим особенности активной идентификации односвязных дискретных систем с непрерывным объектом. Одна из таких систем представлена на рисунке 10.2.

В этом случае для непрерывного объекта в процессе его идентификации необходимо определить значение передаточной функции канала управления $W_{об}(z)$ при любом заданном значении z и наличии разнообразных возмущающих воздействий.

При данных обстоятельствах наиболее надежные результаты можно получить, применяя методы активной идентификации, основанные на использовании дискретных пробных сигналов $\beta(kT)$, где T – период квантования сигналов по времени, а k – целое число.

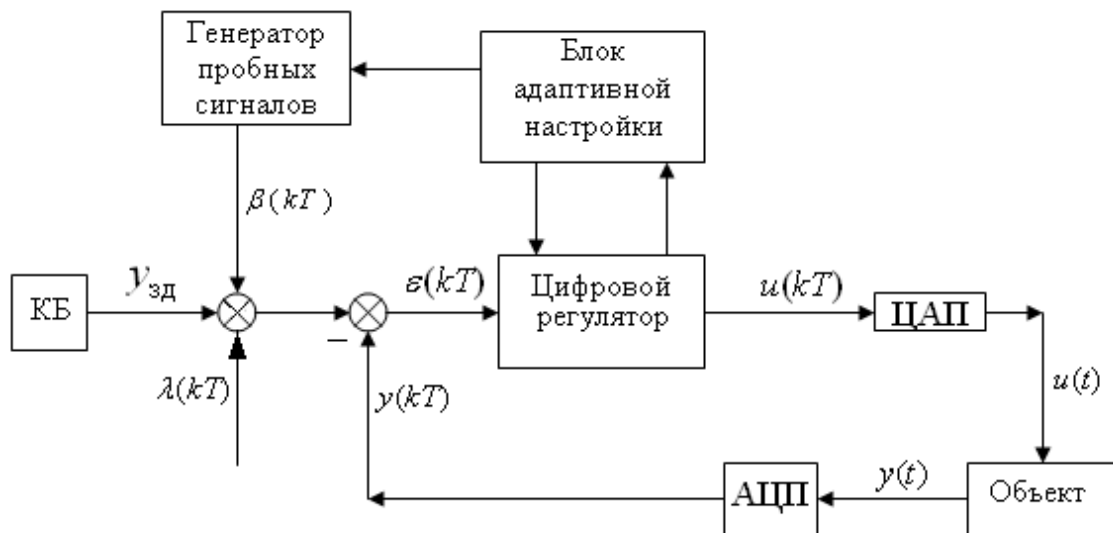


Рисунок 10.2 – Функциональная схема адаптивной односвязной цифровой системы с активной идентификацией объекта

Поскольку на рисунке 10.2 рассматривается случай дискретной системы с непрерывным объектом, то для управления такими объектами целесообразно использовать непрерывный сигнал управления $u(t)$. Для преобразования дискретного сигнала управления $u(kT)$ в непрерывный $u(t)$ используется цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП). Напротив, сигнал датчика, установленного на выходе объекта обычно является непрерывным. Поэтому, чтобы сформировать дискретный сигнал ошибки управления $\varepsilon(kT)$ необ-

ходимо выходной сигнал объекта $y(t)$ преобразовать к дискретному виду $y(kT)$. С этой целью применяется аналого-цифровой преобразователь (АЦП).

Уравнение рассматриваемой замкнутой цифровой системы представим в виде

$$W_{y_{з\delta}\varepsilon}(\ell)[x_{з\delta}(kT) + \beta(kT) + \lambda(kT)] = \varepsilon(kT), \quad (10.5.1)$$

где $W_{y_{з\delta}\varepsilon}(\ell)$ – разностный оператор замкнутой цифровой системы; $y_{з\delta}(kT)$ – сигнал задания; $\lambda(kT)$ – возмущающее воздействие; $\varepsilon(kT)$ – ошибка управления.

Пробный сигнал $\beta(kT)$ должен удовлетворять следующему требованию:

$$M[\beta(kT)] = 0, \quad (10.5.2)$$

где $M[\dots]$ – оператор математического ожидания.

Представим равенство (10.5.1) в виде

$$W_{y_{з\delta}\varepsilon}(\ell)\{y_{з\delta}[(k+m)T] + \beta[(k+m)T] + \lambda[(k+m)T]\} = \varepsilon[(k+m)T], \quad (10.5.3)$$

где m – целое положительное число.

Умножив равенство (10.5.3) на $\beta(mT)$ получим

$$W_{y_{з\delta}\varepsilon}(\ell)\{y_{з\delta}[(k+m)T]\beta(mT) + \beta[(k+m)T]\beta(mT) + \lambda[(k+m)T]\beta(mT)\} = \varepsilon[(k+m)T]\beta(mT). \quad (10.5.4)$$

Применив к (10.5.4) оператор математического ожидания $M[\dots]$ с учетом вытекающих из (10.5.2) равенств

$$M\{y_{з\delta}[(k+m)T]\beta(mT)\} = M\{y_{з\delta}[(k+m)T]\}M[\beta(mT)] = 0;$$

$$M\{\lambda[(k+m)T]\beta(mT)\} = M\{\lambda[(k+m)T]\}M[\beta(mT)] = 0,$$

получим

$$W_{y_{з\delta}\varepsilon}(\ell)K_{\beta\beta}(kT) = K_{\varepsilon\beta}(kT), \quad (10.5.5)$$

где

$$K_{\beta\beta}(kT) = M\{\beta[(k+m)T]\beta(mT)\};$$

$$K_{\varepsilon\beta}(kT) = M\{\varepsilon[(k+m)T]\beta(mT)\}.$$

Применив z -преобразование к равенству (10.5.5.), имеем

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(\ell)K_{\beta\beta}(z) = K_{\varepsilon\beta}(z), \quad (10.5.6)$$

где

$$\begin{aligned} K_{\beta\beta}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} K_{\beta\beta}(kT) z^{-k}; \\ K_{\varepsilon\beta}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} K_{\varepsilon\beta}(kT) z^{-k}, \end{aligned} \quad (10.5.7)$$

а $W_{y_{3д}\varepsilon}(z)$ – передаточная функция дискретной замкнутой системы от входа $y_{3д}(kT)$ до ошибки $\varepsilon(kT)$.

Воспользовавшись равенством (10.5.6), получим

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(z) = K_{\varepsilon\beta}(z)/K_{\beta\beta}(z). \quad (10.5.8)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} K_{\beta\beta}(kT) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^N \varepsilon[(k+m)T]\beta(mT); \\ K_{\varepsilon\beta}(kT) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^N \beta[(k+m)T]\beta(mT), \end{aligned}$$

то с учетом равенств (10.5.7) выражение (10.5.8) принимает вид

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \sum_{m=0}^N \varepsilon[(k+m)T]\beta(mT)}{\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \sum_{m=0}^N \beta[(k+m)T]\beta(mT)}. \quad (10.5.9)$$

Обозначим $h = k + m$, тогда

$$k = h - m. \quad (10.5.10)$$

Подставив (10.5.10) в выражение (10.5.9), получим

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(z) = \frac{\sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=m}^{\infty} z^{-(h-m)} \varepsilon(hT)}{\sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=m}^{\infty} z^{-(h-m)} \beta(hT)}. \quad (10.5.11)$$

Принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned}\sum_{h=m}^{\infty} z^{-(h-m)} \varepsilon(hT) &= \sum_{h=0}^{\infty} z^{-(h-m)} \varepsilon(hT) - \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \varepsilon(hT); \\ \sum_{h=m}^{\infty} z^{-(h-m)} \beta(hT) &= \sum_{h=0}^{\infty} z^{-(h-m)} \beta(hT) - \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \beta(hT); \\ \sum_{h=0}^{\infty} z^{-(h-m)} \varepsilon(hT) &= z^m \sum_{h=0}^{\infty} z^{-h} \varepsilon(hT) = z^m \tilde{\varepsilon}(z); \\ \sum_{h=0}^{\infty} z^{-(h-m)} \beta(hT) &= z^m \sum_{h=0}^{\infty} z^{-h} \beta(hT) = z^m \tilde{\beta}(z),\end{aligned}$$

выражение (10.5.11) представим в виде

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(z) = \frac{\tilde{\varepsilon}(z) \sum_{m=0}^N \beta(mT) z^m - \sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \varepsilon(hT)}{\tilde{\beta}(z) \sum_{m=0}^N \beta(mT) z^m - \sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \beta(hT)}$$

Умножив обе части полученного выражения на знаменатель его правой части, имеем

$$\begin{aligned}& \tilde{\beta}(z) W_{x_{3д}\varepsilon}(z) \sum_{m=0}^N \beta(mT) z^m - W_{x_{3д}\varepsilon}(z) \sum_{m=0}^N \beta(mT) \times \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \beta(hT) = \\ &= \tilde{\varepsilon}(z) \sum_{m=0}^N \beta(mT) z^m - \sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \varepsilon(hT).\end{aligned}\quad (10.5.12)$$

Поскольку

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(z) = \tilde{\varepsilon}(z) / \tilde{\beta}(z),$$

то

$$\tilde{\beta}(z) W_{y_{3д}\varepsilon}(z) = \tilde{\varepsilon}(z),\quad (10.5.13)$$

где $\tilde{\varepsilon}(z)$ и $\tilde{\beta}(z)$ – z -преобразования дискретных сигналов $\varepsilon(kT)$ и $\beta(kT)$ соответственно.

Подставляя (10.5.13) в равенство (10.5.12) получим для передаточной функции замкнутой дискретной системы следующее выражение:

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(z) = \frac{\sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \varepsilon(hT)}{\sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \beta(hT)}. \quad (10.5.14)$$

На основании формулы (10.5.14) можно оценить значение $W_{y_{3д}\varepsilon}(z)$ по наблюдениям сигнала ошибки $\varepsilon(kT)$ при подаче на вход системы произвольного пробного сигнала $\beta(kT)$.

Имеет место равенство

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(z) = \tilde{\varepsilon}(z) / \tilde{y}_{вх}(z) \quad (10.5.15)$$

где $\tilde{y}_{вх}(z)$ – z -преобразование дискретного входного сигнала $y_{вх}(kT)$.

Кроме того

$$\tilde{\varepsilon}(z) = \tilde{y}_{вх}(z) - \tilde{y}_{вых}(z) = \tilde{y}_{вх}(z) - W_{об}(z)W_{рег}(z)\tilde{\varepsilon}(z). \quad (10.5.16)$$

где $\tilde{y}_{вых}(z)$ – z -преобразование дискретного выходного сигнала $y_{вых}(kT)$, а $W_{об}(z)$ и $W_{рег}(z)$ – передаточные функции объекта и регулятора соответственно.

На основании равенств (10.5.15) и (10.5.16) приходим к выражению

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(z) = \frac{1}{1+W_{об}(z)W_{рег}(z)},$$

откуда имеем

$$W_{об}(z) = \frac{1-W_{y_{3д}\varepsilon}(z)}{W_{рег}(z)W_{y_{3д}\varepsilon}(z)}. \quad (10.5.17)$$

Таким образом, используя выражения (10.5.14) и (10.5.17) можем определить значения дискретной передаточной функции объекта $W_{об}(z)$.

В тех случаях, когда необходимо определить значения комплексной частотной характеристики (КЧХ) объекта полагаем, что $z = e^{i\omega T}$.

Перейдем к рассмотрению каскадных дискретных систем. В этом случае выражения (9.4.1) и (9.4.2), полученные для непрерывных систем, принимают вид

$$W_{y_{зд}y}(z) = \frac{\sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} y(hT)}{\sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \beta(hT)}; \quad (10.5.18)$$

$$W_{y_{зд}\mu}(z) = \frac{\sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \mu(hT)}{\sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \beta(hT)}. \quad (10.5.19)$$

Дискретные передаточные функции объекта по каналам управления основной $y(kT)$ и вспомогательной $\mu(kT)$ величинами определяются аналогичными (9.4.4) и (9.4.5) выражениями

$$W_{об}^{bc}(z) = \frac{W_{y_{зд}\mu}(z)}{W_{рег}^{bc}(z) \{ W_{рег}^{zl}(z) [1 - W_{y_{зд}y}(z)] - 1 \}}; \quad (10.5.20)$$

$$W_{об}^{осн}(z) = \frac{[1 + W_{об}^{bc}(z) W_{рег}^{bc}(z)] W_{y_{зд}y}(z)}{W_{рег}^{bc}(z) W_{рег}^{zl}(z) [1 - W_{y_{зд}y}(z)]}. \quad (10.5.21)$$

Отметим, что при активной идентификации многосвязных систем выражение (9.4.6) принимает вид

$$\mathbf{W}_{y_{зд}y}(z) = \frac{\sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \mathbf{y}'(hT)}{\sum_{m=0}^N \beta(mT) \sum_{h=0}^{m-1} z^{-(h-m)} \beta'(hT)}, \quad (10.5.22)$$

причем для нахождения дискретной матричной передаточной функции объекта $\mathbf{W}^{об}(z)$ используются аналогичные (9.4.7) и (9.4.8) выражения с дискретными передаточными функциями

$$\mathbf{W}^{об}(z) = [\mathbf{W}_{y_{зд}y}(z) - \mathbf{E}] \overline{\mathbf{W}}^{рег}(z); \quad (10.5.23)$$

$$\overline{\mathbf{W}}^{рег}(z) = \mathbf{W}_T^{рег}(z) \left[\mathbf{W}^{рег}(z) \mathbf{W}_T^{рег}(z) \right]^{-1}. \quad (10.5.24)$$

Таким образом, для систем различной структуры, т.е. односвязных, каскадных и многосвязных получены выражения, позволяющие

осуществлять экспериментальную оценку дискретных передаточных функций объектов, не размыкая при этом контуров управления, а значит, не нарушая условий нормального функционирования идентифицируемых систем. При этом благодаря использованию корреляционного метода удастся уменьшить влияние на точность идентификации различных возмущений, действующих на систему.

10.6. Методы адаптивной настройки регуляторов

Рассмотрим односвязные системы, для которых в непрерывном случае получены выражения (10.2.27), (10.2.14), а в дискретном (10.5.14), (10.5.17), позволяющие экспериментально оценить значения непрерывной $W_{об}(s)$ и дискретной $W_{об}(z)$ передаточных функций объекта по каналу управления.

Поскольку при ограничениях на расположение доминирующих корней характеристического уравнения замкнутой системы (3.3.3), (3.3.4) или (9.4.20), (9.4.21) при расчетах параметров настройки используются расширенные по η КЧХ объекта $W_{об}(-\eta + i\eta/m_{\Pi})$ или $W_{об}(e^{-\eta T + i\eta T/m_{\Pi}})$, то для выполнения расчетов по определению оптимальных параметров настройки регуляторов в непрерывных и дискретных односвязных системах необходимо в равенствах (10.2.27), (10.2.14) или (10.5.14), (10.5.17) соответственно выполнить замены переменных $s = -\eta + i\eta/m_{\Pi}$ или $z = e^{-\eta T + i\eta T/m_{\Pi}}$.

Затем следует экспериментально получить две или три оценки расширенной КЧХ объекта при заданных начальных значениях η_1, η_2, η_3 переменной η . Причем желательно выбирать эти начальные значения так, чтобы соответствующие векторы расширенной КЧХ объекта $W_{об}(-\eta_k + i\eta_k/m_{\Pi})$ или $W_{об}(e^{-\eta_k T + i\eta_k T/m_{\Pi}})$, $k = \overline{1,3}$ располагались в третьем квадранте комплексной плоскости.

Интерполируя вещественную и мнимую части расширенной КЧХ объекта с помощью кубических сплайнов, можно расчетным путем определить значение $\eta = \eta_{pc}$, при котором доминирующие корни характеристического уравнения замкнутой системы располагаются согласно требованиям (6.3.1) или (8.5.1).

Экспериментально оценив расширенную КЧХ объекта при $\eta = \eta_{pc}$, пополним число заданных значений $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ переменной η при которых осуществляется интерполяция расширенной КЧХ объекта кубическими сплайнами ($\eta_4 = \eta_{pc}$).

Расчетным путем определяется новое значение $\eta = \eta_{pc}$ и на основании показателя $|\eta_{pc} - \eta_4|/\eta_4$ оценивается сходимость итерационной процедуры адаптации. Если величина этого показателя окажется достаточно малой, то устанавливаются полученные в результате последнего расчета значения параметров настройки регулятора, в противном же случае процесс адаптации продолжается до тех пор, пока вычисленное значение η_{pc} не окажется в желаемой близости к истинному.

При ограничении на величину колебательности замкнутой системы при выполнении расчетов параметров настройки регуляторов методом вспомогательной функции применяются обычные КЧХ объекта $W_{об}(i\omega)$ или $W_{об}(e^{i\omega T})$. Поэтому для получения экспериментальных оценок этих КЧХ необходимо в выражениях (10.2.27), (10.2.14) или (10.5.14), (10.5.17) положить соответственно $s = i\omega$ или $z = e^{i\omega T}$.

Затем следует экспериментально получить две или три оценки КЧХ объекта при заданных начальных значениях $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ частоты ω . Причем желательно выбирать эти начальные значения так, чтобы соответствующие векторы КЧХ объекта $W_{об}(i\omega_k)$ или $W_{об}(e^{i\omega_k T})$, $k = \overline{1,3}$ располагались в третьем квадранте комплексной плоскости.

Интерполируя вещественную и мнимую части КЧХ объекта с помощью кубических сплайнов, можно расчетным путем определить значение резонансной частоты ω_p , при котором вспомогательная функция, а значит и отношение K_p/T_H , достигают максимумов и при этом выполняется заданное ограничение на величину показателя колебательности замкнутой системы.

Экспериментально оценив КЧХ объекта при $\omega = \omega_p$, пополним число заданных значений $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ переменной ω при ко-

торых осуществляется интерполяция КЧХ объекта кубическими сплайнами ($\omega_4 = \omega_p$).

Расчетным путем определяется новое значение ω_p и на основании показателя $|\omega_p - \omega_4|/\omega_4$ оценивается сходимость итерационной процедуры адаптации. Если величина этого показателя окажется достаточно малой, то устанавливаются полученные в результате последнего расчета значения параметров настройки регулятора, в противном же случае процесс адаптации продолжается до тех пор, пока установленное расчетным путем значение ω_p не окажется в желаемой близости к истинному.

Таким образом, процесс адаптивной настройки регуляторов является итерационным, т.е. представляет собой последовательность шагов, на каждом из которых вначале получается дополнительная информация о значениях частотных характеристик объекта управления (процедура идентификации), а затем определяются оптимальные значения параметров настройки регуляторов (процедура оптимизации).

10.7. Тест 10

1. Под действием мультипликативных возмущений изменяются параметры ... :

- а) объекта;
- б) регулятора;
- в) окружающей среды.

2. Для эффективного парирования мультипликативных возмущающих воздействий наиболее подходящими являются системы ... управления:

- а) цифрового;
- б) адаптивного;
- в) комбинированного.

3. При разработке адаптивных систем целесообразно использовать методы ... управления:

- а) робастного;
- б) эффективного;
- в) нелинейного.

4. При разработке адаптивных систем целесообразно отказаться от ... математических моделей объектов:
- а) непрерывных;
 - б) дискретных;
 - в) параметрических.
5. Адаптивные системы делятся на ... :
- а) параметрические и функциональные;
 - б) параметрически-адаптивные и функционально-адаптивные;
 - в) параметрические и комбинированные.
6. Системы, которые ищут оптимальные параметры регулятора исходя непосредственно из цели управления называются ... :
- а) функционально-адаптивными;
 - б) параметрически-адаптивными;
 - в) адаптивными.
7. Основным недостатком функционально-адаптивных систем заключается в ... :
- а) отсутствии сходимости к оптимуму итерационного процесса поиска подходящих настроек регулятора;
 - б) низкой скорости сходимости к оптимуму итерационного процесса поиска подходящих настроек регулятора;
 - в) недостаточно обоснованном выборе подходящих настроек регулятора.
8. Адаптивные системы, использующие алгоритмы идентификации принято называть ... :
- а) функционально-адаптивными;
 - б) идентификационными;
 - в) параметрически-адаптивными.
9. При синтезе систем адаптивного управления обычно используют предположение о ... изменении параметров объекта:
- а) квазистационарном;
 - б) быстром;
 - в) непредсказуемом заранее.
10. В процессе активного эксперимента на вход замкнутой системы управления наряду с сигналом задания подаются также ... воздействия:
- а) гармонические;
 - б) пробные;
 - в) ступенчатые.

ГЛАВА 11

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

11.1. Необходимость в нелинейных моделях объектов

Хотя в дифференциальных уравнениях, описывающих технологические объекты управления, всегда присутствуют нелинейные члены, в большей или меньшей степени, влияющие на состояние данных объектов, тем не менее, исследование систем управления зачастую проводится методами линейной теории, путем перехода к приближенным линейным моделям. Это в значительной степени предопределяет и выбор алгоритмов функционирования управляющих устройств (регуляторов, блоков компенсации и командных блоков) в классе линейных алгоритмов.

Главное достоинство линейных методов состоит в общности получаемых с их помощью результатов; при переходе же к нелинейным моделям, исследования зачастую приходится проводить на основе численных методов. Однако при разработке систем управления встречаются такие нелинейные задачи, решение которых в линейном приближении принципиально невозможно. Рассмотрим некоторые из таких примеров.

Множественность положений равновесия. Линейная система имеет единственное положение равновесия. Например, выходная переменная системы $y(t)$, описываемой уравнением с постоянными коэффициентами

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

при постоянном входном воздействии $u(t) = u_0 \equiv \text{const}$ принимает единственное значение, равное $y = b_0 u_0 / a_0$.

Если система находится не на границе устойчивости, то при ненулевых начальных условиях ее движения асимптотически затухают к положению равновесия (система устойчива) или расходятся (система неустойчива).

Реальные динамические системы могут иметь несколько положений равновесия. Одним из таких примеров является маятник (см. рис. 11.1), имеющий два положения равновесия: неустойчивое верхнее и устойчивое нижнее.

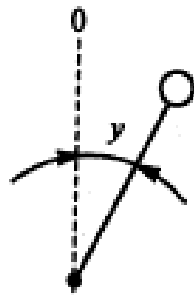


Рисунок 11.1 – Маятник

В качестве другого примера представим себе следящую систему управления, датчик рассогласования и электродвигатель привода которой имеют зоны нечувствительности. Если рассогласование мало, то напряжение на входе двигателя по модулю меньше напряжения трогания и двигатель не вращается. Положения равновесия системы относительно переменной входа двигателя образуют отрезок, представляющий собой множество точек мощности континуума.

Конечная длительность процессов. Если линейная система устойчива, то ее решения полностью затухают лишь по прошествии бесконечного времени. Реально же длительность процессов управления конечна, чему способствуют зоны нечувствительности элементов, сухое трение и люфты (зазоры) кинематических сочленений.

Ограниченность уровней переменных. Если линейная система неустойчива, то значения переменных неограниченно растут.

Реально уровни переменных всегда ограничены энергетическими, материальными и прочностными ресурсами.

Автоколебания – периодические движения за счет внутренних свойств системы при отсутствии внешних колебательных воздействий. В линейных системах периодические движения гармонической формы соответствуют колебательной границе устойчивости. Амплитуды этих колебаний зависят от начальных условий. При самом незначительном изменении параметров системы колебания превращаются в затухающие или расходящиеся.

Автоколебания имеют относительно стабильные амплитуду и частоту, которые восстанавливаются после снятия возмущений.

Зависимость характера движений от начальных условий и уровней воздействий. В реальных системах не выполняется принцип суперпозиции – при сложении воздействий реакция не равна сумме реакций на отдельные воздействия.

Примеры явлений, не объясняемых теорией линейных систем, можно продолжить, но в принципе они присущи любой системе и с ними неизбежно приходится сталкиваться при попытках математического описания движений системы с возможно большей точностью.

Нелинейные математические модели, используемые для анализа систем управления, появляются вследствие учета естественных (сопутствующих) эффектов, присущих объекту или элементам системы управления и обусловленных нелинейным характером законов природы, которым подчиняются исследуемые явления. Нелинейности могут вводиться и специально с целью компенсации нежелательных эффектов от естественных нелинейностей или для придания системе управления особых свойств, которые принципиально недостижимы линейными средствами. Так, именно нелинейные алгоритмы управления могут обеспечить максимальное быстрое действие процессов при наличии естественных ограничений на уровни управляющих воздействий; нелинейности обязательно вводятся при создании генераторов колебаний и т. д. В ряде систем управления техническими объектами нелинейные, в частности, релейные регулирующие устройства оказываются наиболее простыми, дешевыми и надежными.

В практике автоматизации определенное распространение получили *нелинейные позиционные алгоритмы регулирования*.

Особенность работы *позиционных регуляторов* состоит в том, что формируемое ими управляющее воздействие или его скорость может принимать лишь ограниченное число фиксированных значений. Хорошо известными примерами *двухпозиционных* регуляторов являются регуляторы температуры бытовых электрических приборов (холодильников, утюгов и т. п.). Однако такие регуляторы можно использовать и для регулирования достаточно мощных промышленных объектов, конструкция которых допускает работу в режиме периодических включений и отключений источника энергии (например, рефрижераторов в пищевой промышленности и на транспорте). Управляющее воздействие двухпозиционных регуляторов может принимать только два значения – максимальное и минимальное в зависимости от того, выше или ниже заданного значения находится регулируемая величина. Соответственно алгоритм функционирования двухпозиционного регулятора имеет следующий вид:

$$u(t) = \begin{cases} -C, & \varepsilon(t) < 0; \\ C, & \varepsilon(t) > 0, \end{cases}$$

где C – положительная постоянная величина; $\varepsilon(t)$ – ошибка управления.

В системах управления с позиционными регуляторами могут возникать *автоколебания*. Естественно, что в число задач, решаемых при разработке систем управления, в этом случае необходимо включить и задачу исследования возможности возникновения автоколебаний.

Так, например, хорошая переходная составляющая реакции нелинейной системы на возмущающее воздействие может сопровождаться автоколебаниями в установившемся режиме, что может быть недопустимым для объекта по технологическим соображениям (как это имеет место, например, для энергоблоков электростанций). Именно такая ситуация встречается в системах с двухпозиционными регуляторами – эти регуляторы очень быстро ликвидируют отклонения регулируемой величины, вызванные ступенчатым возмущением (вследствие быстрого перемещения регулирующего органа на предельно возможное расстояние), и если не обратить внимание на последующую генерацию автоколебаний, может создаться неверное представление о действительной их эффективности.

При формировании задающих (командных) воздействий приходится учитывать существующие ограничения на мощность управляющих воздействий и предельно допустимые значения их производных по времени, что также приводит к нелинейным задачам.

11.2. Элементы систем со статическими и динамическими нелинейными характеристиками

В теории и практике управления элементы и системы рассматривают как преобразователи сигналов – носителей информации о цели, состоянии объекта и воздействиях среды (рисунок 11.2).

Линейный безынерционный элемент полностью задается значением его коэффициента усиления.

Нелинейные зависимости между постоянными значениями входных и выходных сигналов

$$y = F(x),$$

могут задаваться аналитически, графически или таблично.

В том случае, когда нелинейный элемент (НЭ) имеет один вход и один выход особенно наглядны графики статических характеристик (СХ) (рисунок 11.3).

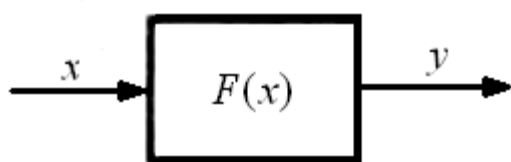


Рисунок 11.2 – Элемент системы как преобразователь сигнала

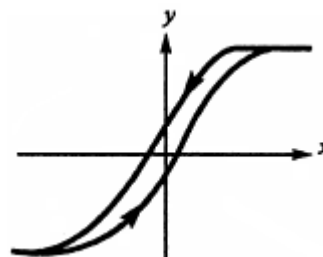


Рисунок 11.3 – Пример статической характеристики НЭ

Условия преобразования сигналов безынерционными НЭ зависят от уровней сигналов и не зависят от их частоты.

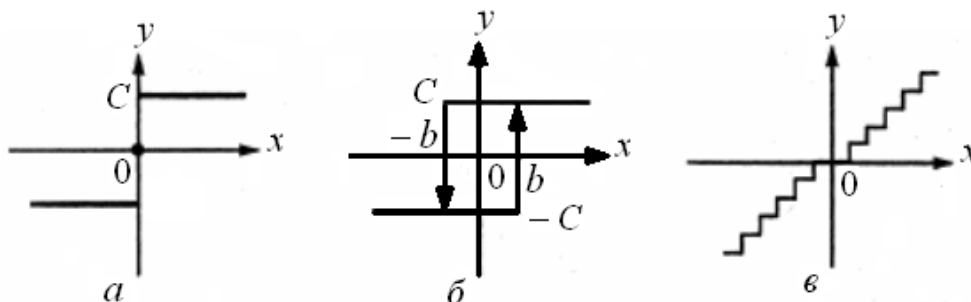


Рисунок 11.4 – Кусочно-постоянные (релейные) НЭ

Приведем некоторые примеры безынерционных НЭ и их СХ.

Пример 11.1. Нелинейные элементы с кусочно-постоянными СХ. Простейшим представителем нелинейностей этой группы является так называемое идеальное реле (рисунок 11.4, а):

$$y = C \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} C, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -C, & x < 0. \end{cases}$$

Более тонкое изучение может показать, что релейное устройство имеет гистерезис (рисунок 11.4, б). Выражение для *двузначной* СХ с разрывами первого рода можно записать так:

$$y = \begin{cases} C, & x > b; \\ -C, & x < -b; \\ C, & |x| < -b, y_0 = C; \\ -C, & |x| < b, y_0 = -C, \end{cases}$$

где b – половина зоны неоднозначности СХ; y_0 – состояние реле, равное значению y до входа в зону неоднозначности. Таким образом, этот безынерционный НЭ обладает памятью – значение его выхода определяется не только значением входа в тот же момент, но также и предысторией (состоянием) НЭ по уровню сигнала.

Другим примером НЭ с кусочно-постоянной однозначной СХ является квантование сигналов по уровню в преобразователях аналог-код, предназначенных для ввода информации о состоянии непрерывных процессов в цифровые управляющие устройства (рисунок 11.4, в). Малая разрядность ЭВМ может оказаться существенным препятствием к достижению высокой точности и хорошего качества процессов в окрестности положений равновесия.

Пример 11.2. Нелинейные элементы с кусочно-линейными СХ. На рисунок 11.5, а показан график СХ НЭ типа «насыщение»:

$$y = \begin{cases} C, & x \geq b; \\ -C, & x \leq -b; \\ (C/b)x, & |x| < b. \end{cases}$$

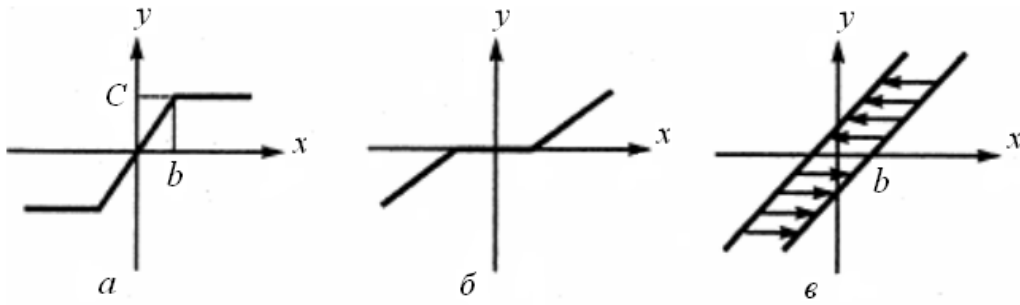


Рисунок 11.5 – Кусочно-линейные СХ

Как правило, эта нелинейность вводится в модели для учета ограничений уровней переменных при исследовании поведения систем управления в режимах больших отклонений от положения равновесия (рисунок 11.5, а).

Нелинейный элемент типа «зона нечувствительности» (рис. 11.5, б) учитывает реальные свойства датчиков, исполнительных механизмов и других устройств при малых входных сигналах.

Нелинейность типа «люфт» (рисунок 11.5, в) является многозначной – одному значению входа соответствует бесчисленное множество (континуум) значений выхода. Этот НЭ моделирует кинематические сочленения механических приборов и устройств (например, редукторов).

Приведенные выше примеры кусочно-линейных СХ непрерывны, но имеют разрыв производной dy/dx . Могут быть и кусочно-линейные СХ с разрывами первого рода.

Пример 10.3. Нелинейные элементы с гладкими СХ. Гладкие СХ имеют непрерывные производные. Примерами являются характеристики термопары (рисунок 11.6, а), устройства возведения входного сигнала в квадрат (рисунок 11.6, б), в куб (рисунок 11.6, в), индукционных электромеханических преобразователей угла, электромагнитных явлений с гистерезисом и др.

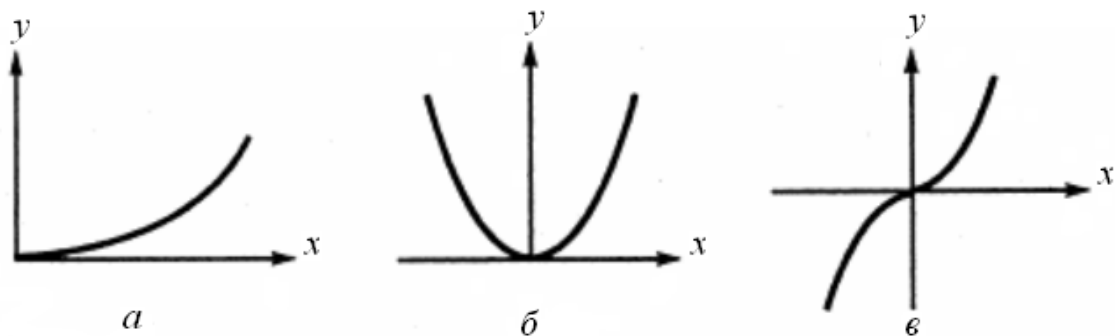


Рисунок 11.6 – Гладкие СХ

Нелинейные зависимости между значениями входа и выхода одномерных НЭ можно задавать параметрически – парой функций $[x(t), y(t)]$; исключая параметр t , получим непосредственную связь между переменными входа и выхода. В случае однозначных СХ в качестве входа $x(t)$ особенно удобен периодический сигнал треугольной формы с достаточной амплитудой – выход НЭ будет периодически повторять форму СХ. Для сложных НЭ с неоднозначными СХ выбор функции $x(t)$ из условия исчерпывающего задания НЭ парой вход-выход является нетривиальной задачей. По существу, речь идет об экспериментальном исследовании НЭ, успех которого зависит от априорной информации.

Пример 11.4. Нейронные сети как многомерные нелинейные элементы. Элементы (объекты, системы) называют *многомерными*, если переменные входа и/или выхода являются векторами. Линеинные безынерционные многомерные элементы задаются матрицами коэффициентов усилений. В нелинейном случае необходимы другие способы описания.

В последние годы для аппроксимации нелинейных зависимостей часто применяют искусственные нейронные сети – многомерные; настраиваемые безынерционные преобразователи.

На рисунке 11.7 изображена модель нейрона.

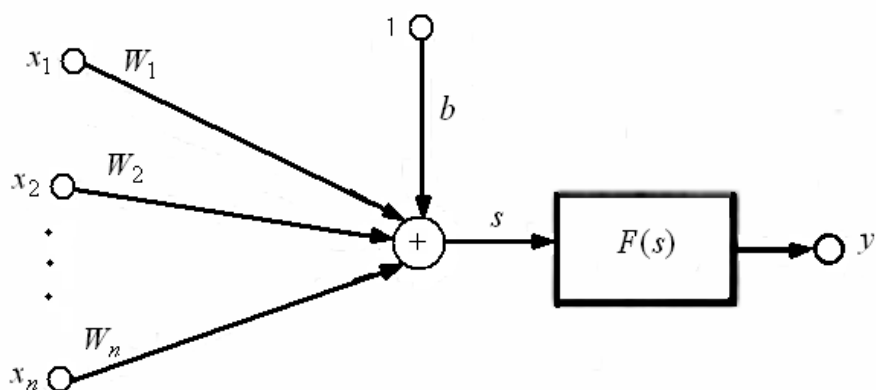


Рисунок 11.7 – Модель нейрона

Выходная переменная y является нелинейной функцией F взвешенной суммы входных переменных

$$y = F\left(b + \sum_{k=1}^n w_k x_k\right).$$

Параметры нейрона – смещение b и весовые коэффициенты

w_k , $k = \overline{1, n}$ можно настраивать, добиваясь требуемой зависимости выхода от входов.

Широкие аппроксимирующие возможности достигаются, если нейроны образуют сети определенной архитектуры. На рисунке 11.8 изображена однонаправленная двухслойная нейронная сеть с тремя входами, двумя выходами и тремя нейронами в первом (скрытом) слое.

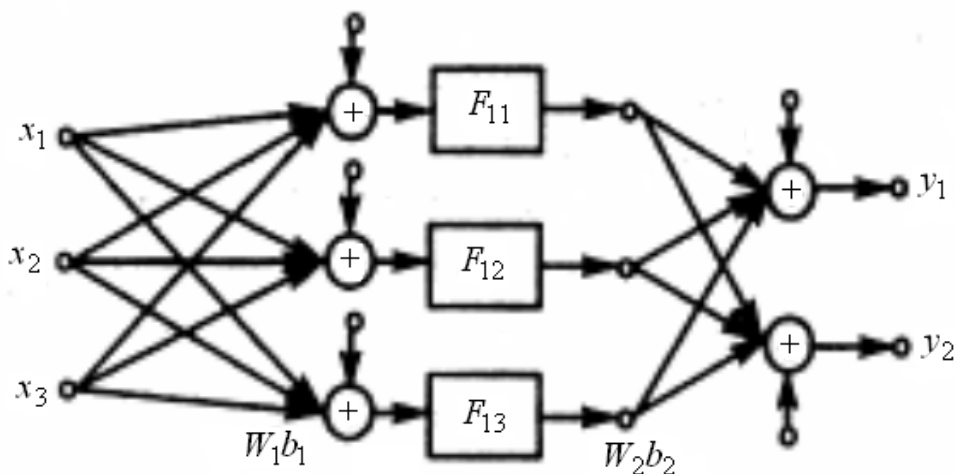


Рисунок 11.8 – Двухслойная нейронная сеть

Весовые коэффициенты и смещения первого слоя упорядочены в матрицы $\mathbf{W}_1\mathbf{b}_1$, а второго – в матрицы $\mathbf{W}_2\mathbf{b}_2$.

Разработан ряд алгоритмов обучения многослойных сетей – настройки весов и смещений из условия минимизации функционала, оценивающего сумму квадратов отклонений выхода сети от выхода моделируемого объекта.

Для аппроксимации многомерных нелинейностей также применяют элементы, реализующие нечеткую логику [16].

Рассмотрим теперь элементы с *нелинейными динамическими характеристиками*. Эти элементы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями вида

$$F \left[y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n y(t)}{dt^n}; x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, \frac{d^m x(t)}{dt^m} \right] = 0. \quad (11.2.1)$$

Иногда они разрешаются относительно старшей производной переменной выхода

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \Psi \left[\begin{array}{l} y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}; x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots \\ \dots, \frac{d^m x(t)}{dt^m} \end{array} \right]. \quad (11.2.2)$$

Примерами служат дифференциальные уравнения математического маятника

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \sin [y(t)] = 0 \quad (11.2.3)$$

и уравнение Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \mu[1 - y^2(t)] \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0. \quad (11.2.4)$$

Часто дифференциальные уравнения представляются в форме Коши:

$$\frac{d \mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{x}); \mathbf{y}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{x}), \quad (11.2.5)$$

где $\mathbf{r}(t)$ – вектор переменных состояния, $\mathbf{y}(t)$ – вектор выходных переменных, $\mathbf{x}(t)$ – вектор входных переменных; \mathbf{g} и \mathbf{q} – вектор-функции, причем \mathbf{q} – функция выхода. В уравнениях (11.2.1), (11.2.2) и (11.2.5) предполагается, что нелинейные функции заданы аналитически.

11.3. Устойчивость состояния равновесия нелинейных систем

Напомним, что об устойчивости линейной динамической системы судят по ее поведению при отсутствии внешних воздействий – если система устойчива, ее свободное движение с течением времени прекращается, и система приходит в состояние покоя. В нелинейных системах установившимся состоянием может быть как состояние покоя, так и состояние автоколебаний. Более того, в одной и той же системе в зависимости от обстоятельств могут существовать различные состояния покоя и автоколебаний. В свою очередь, найденные в результате расчета установившиеся режимы могут реально и не существовать, так как они могут оказаться неустойчивыми.

Таким образом, при исследовании устойчивости работы нелинейной системы речь должна идти не об устойчивости собственно системы, а об устойчивости возможных в этой системе установившихся режимов (движений). Естественно, что исследованию устойчивости в этом случае должно предшествовать определение всех возможных в системе установившихся режимов. В дальнейшем ограничимся рассмотрением устойчивости состояния равновесия.

Допустим, что изучаемая система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями состояния

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = F_k[x_1(t), \dots, x_n(t); \lambda_1(t), \dots, \lambda_h(t)], \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.3.1)$$

где $x_1(t), \dots, x_n(t)$ – переменные состояния системы, характеризующие содержание вещества или энергии в каждой емкости в момент времени t ; $\lambda_1(t), \dots, \lambda_h(t)$ – возмущающие воздействия на систему, приводящие к изменению ее состояния.

Пусть при некоторых постоянных значениях возмущающих воздействий $\lambda_1^0, \dots, \lambda_h^0$ найдено решение x_1^0, \dots, x_n^0 , которое и определяет возможное установившееся состояние системы. Прежде всего, уточним, что следует понимать под устойчивостью найденного решения.

Заменив переменные $x_k(t) = x_k^0 + \Delta x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, систему уравнений состояния можно привести к следующему виду:

$$\frac{d\Delta x_k(t)}{dt} = F_k^0[\Delta x_1(t), \dots, \Delta x_n(t)], \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.3.2)$$

Решением системы (11.3.2) для установившегося режима будет $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_n = 0$. В геометрической интерпретации состояние системы в произвольный момент времени t может быть представлено точкой в n -мерном пространстве состояния (это пространство также называется **фазовым**) с координатами $x_1(t), \dots, x_n(t)$ (символ Δ здесь и в дальнейшем для сокращения записи опускаем), которая с течением времени описывает в этом пространстве некоторую кривую, называемую **фазовой траекторией**. Каждой совокупности начальных условий $x_1(0), \dots, x_n(0)$ будет соответствовать своя фазовая траектория, однако, если функции в правой части (11.3.2) одно-

значны, через каждую точку фазового пространства (исключая точку равновесия) может проходить только одна траектория.

Выделим в пространстве состояния системы сферическую область $H(R)$ радиусом R и центром в начале координат (на рисунке 11.9 эта область показана для двумерного случая, когда пространство вырождается в плоскость, в виде круга радиусом R). Состояние равновесия (начало координат) считается **устойчивым**, если для любого R можно подобрать такую область $S(r)$ радиусом $r < R$, что траектория, начинающаяся в произвольной точке $x_1(0), \dots, x_n(0)$ сферической области $S(r)$, никогда не достигнет границы области $H(R)$ (на рисунке 11.9 это – траектория 1).

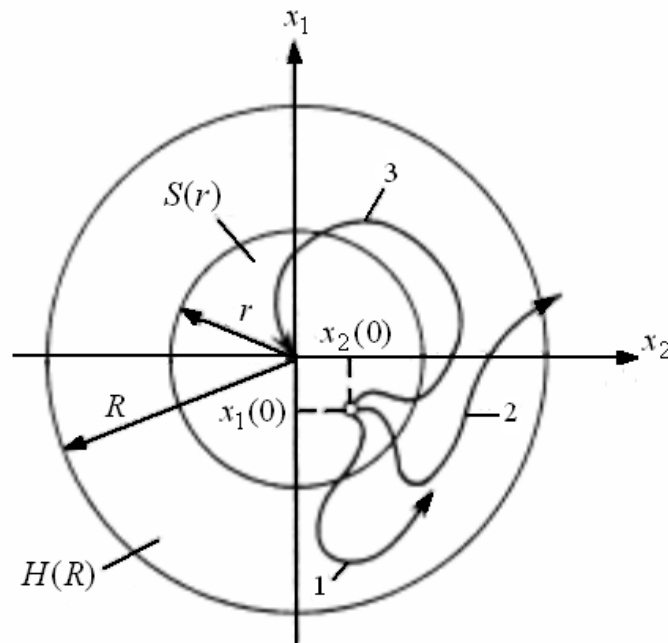


Рисунок 11.9 – Сферическая область

Состояние равновесия **неустойчиво**, если для любого (в том числе и для сколь угодно малого) значения r в области $S(r)$ найдется такая точка, что выходящая из нее траектория за конечное время достигнет границы сферы $H(R)$ (траектория 2 на рисунке 11.9).

Состояние покоя является **асимптотически устойчивым**, если каждая траектория, начинающаяся в области $S(r)$, стремится к началу координат, когда время t неограниченно возрастает (траектория 3 на рисунке 11.9).

Если асимптотическую устойчивость удалось доказать только для области $S(r)$ со сколь угодно малым радиусом r , состояние рав-

новесия считается асимптотически устойчивым «в малом»; если ее удалось доказать для области $S(r)$ с некоторым конечным значением радиуса r – состояние равновесия устойчиво «в большом»; наконец, если асимптотическая устойчивость сохраняется для области с любым значением r – состояние равновесия устойчиво «в целом».

Как видим, для суждения об устойчивости состояния равновесия достаточно выявить лишь качественную картину фазовых траекторий, для чего могут быть использованы относительно простые и наглядные (особенно, если порядок системы $n \leq 2$) графические методы решения систем дифференциальных уравнений.

Уравнение фазовых траекторий для системы второго порядка может быть получено из уравнений состояния

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = F_1^0[x_1(t), x_2(t)]; \quad (11.3.3)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = F_2^0[x_1(t), x_2(t)], \quad (11.3.4)$$

исключением времени t , для чего следует разделить эти уравнения друг на друга:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{F_1^0(x_1, x_2)}{F_2^0(x_1, x_2)}. \quad (11.3.5)$$

Полученное дифференциальное уравнение ставит в соответствие каждой точке фазовой плоскости (x_1, x_2) определенное значение производной dx_1 / dx_2 , т. е. определенное значение углового коэффициента наклона к оси x_2 касательной, проведенной к фазовой траектории в точке (x_1, x_2) . Иначе говоря, дифференциальное уравнение (11.3.5) определяет в каждой точке (x_1, x_2) направление движения изображающей точки по фазовой траектории, которое можно показать с помощью стрелки. Заполнив фазовую плоскость достаточно плотно такими стрелками, можно получить ясную картину расположения всего семейства фазовых траекторий (подобно тому, как намагниченные стрелки или железные опилки, расположенные в магнитном поле, формируют картину расположения магнитных силовых линий).

Обычно для этой цели в фазовой плоскости строят линии – **изоклины**, т. е. геометрические места точек, для которых угловой коэффициент наклона касательных постоянен; уравнение изоклины получается из (11.3.5) приравниванием производной постоянной величине $c = \text{const}$:

$$F_1^0(x_1, x_2) - cF_2^0(x_1, x_2) = 0.$$

Направление стрелок на изоклинах легко определяется по знаку производных $dx_1(t)/dt$ и $dx_2(t)/dt$ в произвольной точке изоклины, для чего следует подставить координаты этой точки в уравнения (11.3.3) и (11.3.4).

11.4. Применение методов Ляпунова для исследования устойчивости состояний равновесия

Изложенное в §11.3 понятие устойчивости было сформулировано русским математиком А. М. Ляпуновым; в 1892 году им был опубликован метод исследования устойчивости движения (в частности, состояния равновесия) нелинейных систем, не требующий решения их дифференциальных уравнений состояния. Сущность метода состоит в построении специального вида функции переменных состояния $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получившей название **функции Ляпунова**. Эта функция является положительно определенной, т. е. обладает следующими свойствами: **она непрерывна вместе со всеми своими первыми производными в некоторой области, содержащей начало координат; ее значение в начале координат равно нулю; всюду в указанной области, кроме начала координат, она положительна.**

Положительно определенная функция становится функцией Ляпунова, когда полная производная этой функции по времени всюду в указанной области удовлетворяет условию

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1(t)}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n(t)}{dt} \leq 0, \quad (11.4.1)$$

или с учетом (11.3.2)

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} F_1^0(x_1, \dots, x_n) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} F_n^0(x_1, \dots, x_n). \quad (11.4.2)$$

Если для исследуемой системы удалось построить функцию Ляпунова, *состояние равновесия устойчиво*; если, кроме того, производная (11.4.2) обращается в нуль только в начале координат, *положение равновесия асимптотически устойчиво*. При этом в области устойчивости $H(R)$ (см. рисунок 11.9) должны выполняться сформулированные выше требования к функции Ляпунова.

Пример 11.5. Проанализируем на устойчивость нелинейную систему со следующими уравнениями состояния:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= [1,5 - x_2(t)]\sqrt{4 - x_1(t)} - \sqrt{1 + x_1(t) - x_2(t)}; \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \sqrt{1 + x_1(t) - x_2(t)} - \sqrt{1 + x_2(t)}. \end{aligned}$$

В качестве функции $V(x_1, x_2)$, удовлетворяющей первым трем сформулированным выше требованиям, попытаемся выбрать функцию $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Полная производная этой функции (11.4.2) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= 2x_1(t) [1,5 - x_2(t)]\sqrt{4 - x_1(t)} - \sqrt{1 + x_1(t) - x_2(t)} + \\ &+ 2x_2(t)\sqrt{1 + x_1(t) - x_2(t)} - \sqrt{1 + x_2(t)}. \end{aligned}$$

Выборочный расчет в точках, принадлежащих области существования $4 \geq x_1 \geq -2$; $x_2 \geq -1$, показывает, что эта производная отрицательна везде в указанной области; поскольку она обращается в нуль только в начале координат, состояние равновесия системы асимптотически устойчиво в целом.

Этот пример дает наглядную геометрическую интерпретацию, рассмотренного метода исследования устойчивости состояния равновесия. Приравняв использованную в нем функцию Ляпунова $V(x_1, x_2)$ к некоторому постоянному числу r^2 , получим уравнение окружности $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = r^2$ радиуса r , которая в фазовой плоскости связана с точкой Q некоторой траектории в момент времени t . С течением времени изображающая точка Q перемещается

по траектории, увлекая за собой и окружность, которая при этом деформируется, меняя радиус. Если состояние равновесия систем устойчиво, изображающая точка Q приближается к началу координат, а радиус окружности уменьшается и, следовательно, уменьшается и значение функции $V(x_1, x_2)$. Таким образом, при устойчивом состоянии равновесия эта функция имеет отрицательную производную по времени, что и требует условие метода Ляпунова.

Однако, сформулированный признак устойчивости является достаточным, но не необходимым – если функция Ляпунова найдена, состояние равновесия безусловно устойчиво, однако, если такую функцию получить не удалось, то об устойчивости ничего определенного сказать нельзя. Тем не менее, рассмотренный метод исследования устойчивости, получивший название **прямого**, или **второго метода Ляпунова**, успешно применяется для решения целого ряда практически важных задач, а главное, он оказался фундаментальным для разработки инженерных методов исследования устойчивости движения отдельных классов нелинейных систем.

Следствием второго (прямого) метода Ляпунова является **первый метод Ляпунова**, с помощью которого исследуется устойчивость состояния равновесия нелинейной системы в малом, по предварительно построенной линейной модели.

Возвратимся к системе уравнений состояния нелинейной динамической системы (11.3.1) и произведем разложение правых частей функций в ряд Тейлора (предполагая, что такое разложение возможно) в окрестности точки равновесного режима, ограничившись только линейными членами; результат запишем в матричном виде

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t),$$

где \mathbf{A} – матрица коэффициентов линейных членов разложения; $\mathbf{g}(t)$ – вектор-столбец остаточных нелинейных членов.

Пусть собственные значения матрицы \mathbf{A} (корни характеристического уравнения модели линейного приближения) вещественны, отрицательны и различны: $s_1 = -\alpha_1, \dots, s_n = -\alpha_n$. Тогда, представив матрицу \mathbf{A} в диагональном виде, придем к следующей системе уравнений состояния относительно преобразованных переменных:

$$\frac{d \hat{x}_k(t)}{dt} = -\alpha_k \hat{x}_k(t) + \hat{g}_k(t), \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.4.3)$$

Выберем положительно определенную функцию переменных состояния в виде

$$V(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = \hat{x}_1^2 + \dots + \hat{x}_n^2.$$

Полная производная этой функции с учетом предыдущей формулы может быть записана следующим образом:

$$\frac{dV}{dt} = 2 \left[-\sum_{k=1}^n \alpha_k \hat{x}_k^2 + \sum_{k=1}^n \hat{g}_k \hat{x}_k \right]. \quad (11.4.4)$$

При беспредельном уменьшении $\hat{x}_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ вторая сумма в полученном выражении оказывается бесконечно малой высшего порядка по отношению к первой сумме, Это значит, что всегда найдется такая область в пространстве состояния $S(r)$ (см. рисунок 11.9) радиусом r , что при достаточно малых принадлежащих этой области значениях $\hat{x}_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ вторая сумма становится меньше первой. Но в этом случае производная $dV(t)/dt$ становится отрицательной, а положительно определенная функция $V(t)$ – функцией Ляпунова. Поскольку в указанной области производная $dV(t)/dt$ обращается в нуль только в начале координат, то тем самым доказана асимптотическая устойчивость состояния равновесия нелинейной системы «в малом».

Если среди корней характеристического уравнения линейной модели найдется хотя бы один положительный корень $s_j = \alpha_j$, то правая часть (11.4.4) при $\hat{z}_k = 0$ ($k \neq j$) и достаточно малом \hat{z}_j будет всегда положительной, что свидетельствует о неустойчивости состояния равновесия.

Подобным же образом проводится доказательство асимптотической устойчивости или неустойчивости состояния равновесия «в малом» и для сопряженно-комплексных корней характеристического уравнения линейного приближения.

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение, лежащее в основе первого метода Ляпунова: для того чтобы состояние равновесия нелинейной системы (11.3.2) было асимптоти-

чески устойчивым «в малом», достаточно, чтобы все вещественные корни характеристического уравнения линейной модели, построенной по методу малых отклонений, были отрицательными, а комплексные корни имели отрицательные вещественные части. Если среди корней характеристического уравнения линейной модели имеется хотя бы один вещественный положительный или пара комплексно-сопряженных корней с положительной вещественной частью, состояние равновесия неустойчиво.

В заключение отметим, что проблема устойчивости движения нелинейных систем не ограничивается исследованием устойчивости состояния равновесия при отсутствии внешних воздействий – может возникнуть необходимость в исследовании устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях.

11.5. Частотный критерий устойчивости замкнутых нелинейных систем

Проблема устойчивости движения нелинейных систем возникает из-за наличия в их структурах замкнутых на себя контуров передачи воздействий, причем обычно структуру нелинейного контура удается представить так, как это указано на рисунке 11.10, где **НЭ** – нелинейный элемент, **ЛЧ** – линейная часть системы. Причем характеристики нелинейного звена в этой структуре могут быть самыми разнообразными.

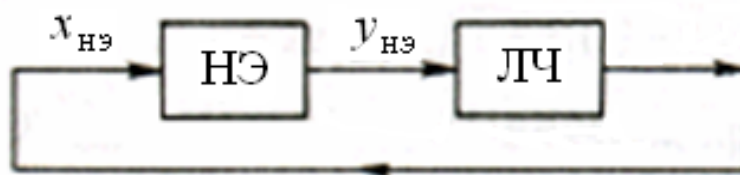


Рисунок 11.10 – Структура нелинейного контура

В отношении возможности линеаризации по методу малых отклонений их принято делить на *линеаризуемые* и *нелинеаризуемые* или на *несущественно* и *существенно нелинейные*.

Примеры распространенных (типовых) однозначных нелинеаризуемых нелинейных характеристик безынерционных элементов приведены на рисунках 11.4. и 11.5.

Устойчивость состояния равновесия системы, имеющей структуру, изображенную на рисунке 11.10, считают *абсолютной*, если она сохраняется для определенного класса характеристик нелинейного элемента.

Ограничимся однозначными нелинейностями, причем будем считать все такие характеристики принадлежащими к одному классу, если их графики располагаются между прямой AB с угловым коэффициентом K_0 (рисунок 11.11) и осью абсцисс; если нелинейную характеристику обозначим $\psi(x)$, то это условие запишем следующим образом:

$$0 \leq \psi(x) \leq K_0 x. \quad (11.5.1)$$

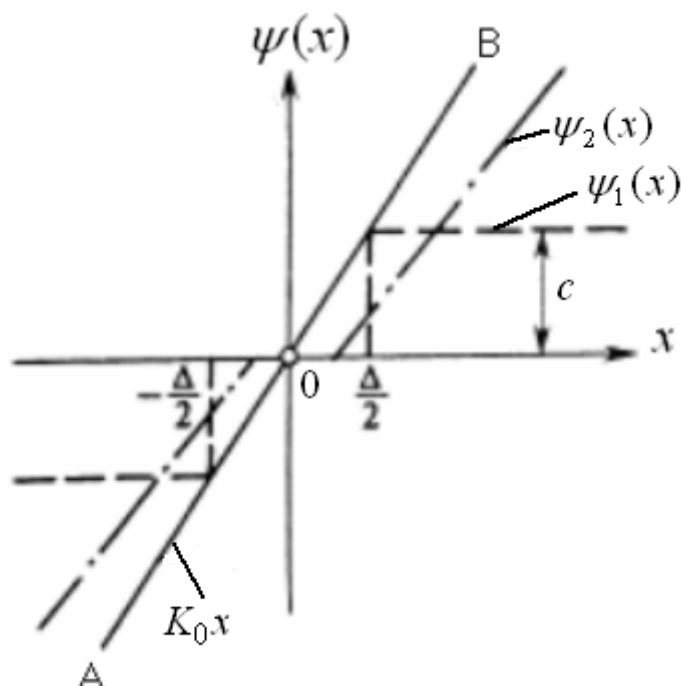


Рисунок 11.11 – График однозначных нелинейностей

На рисунке 11.11 в качестве примера показана штриховой линией характеристика $\psi_1(x)$ трехпозиционного реле без зоны возврата, а штрих-пунктиром – характеристика $\psi_2(x)$ зоны нечувствительности; обе они удовлетворяют условию (11.5.1) и поэтому принадлежат к одному классу.

Применительно к рассматриваемой структуре с помощью второго метода А. М. Ляпунова румынским ученым В. М. Поповым в 1959 году был сформулирован удобный критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейных систем. В этом

критерии используется так называемая **модифицированная комплексная частотная характеристика** $W_{\text{лчм}}(i\omega)$ линейной части системы, которая получается из обычной КЧХ

$$W_{\text{лч}}(i\omega) = P_{\text{лч}}(\omega) + iQ_{\text{лч}}(\omega),$$

умножением мнимой части на ω :

$$W_{\text{лчм}}(i\omega) = P_{\text{лч}}(\omega) + i\omega Q_{\text{лч}}(\omega). \quad (11.5.2)$$

Критерий **абсолютной устойчивости** В. М. Попова формулируется следующим образом: *состояние равновесия системы* (см. рисунок 11.10) *с однозначной нелинейной характеристикой* $\psi(x)$, *удовлетворяющей условию* (11.5.1), *и устойчивой линейной частью будет абсолютно устойчивым, если через точку комплексной плоскости с координатами* $(-1/K_0, i0)$ *можно провести хотя бы одну прямую, пересекающую вещественную полуось так, что годограф отрицательной модифицированной КЧХ линейной части* $W_{\text{лчм}}(i\omega)$ *располагается справа от этой прямой.*

Этот критерий дает достаточные (гарантированные), но не необходимые условия устойчивости состояния равновесия.

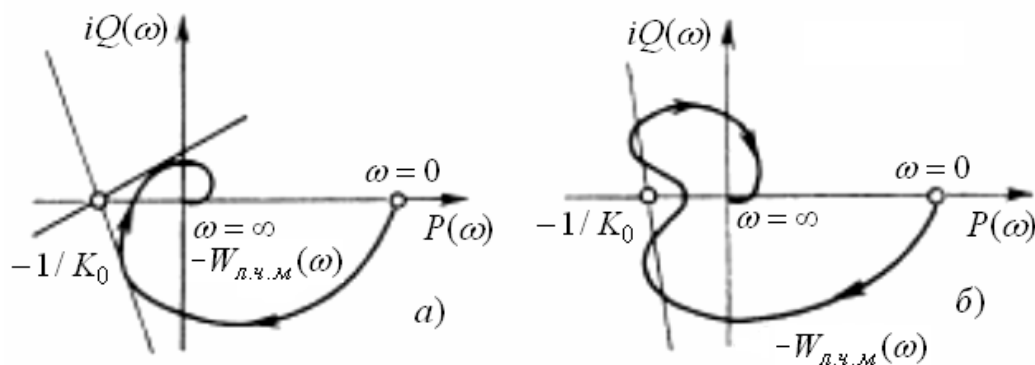


Рисунок 11.12 – Модифицированные КЧХ линейной части системы

На рис. 11.12 показаны две модифицированные КЧХ линейной части системы. В случае, показанном на рис. 11.12, а, через заданную точку $(-1/K_0, i0)$ можно провести прямую Попова, и, следовательно, состояние равновесия будет гарантированно устойчивым, если только характеристика нелинейного звена не пересекает луча AB на рисунке 11.11. В случае, показанном на рисунке 11.12, б, это сделать не удастся и об устойчивости состояния равновесия ничего определенного утверждать нельзя.

Пример 11.6. Рассмотрим систему управления, структура которой имеет вид, показанный на рисунке 11.13.

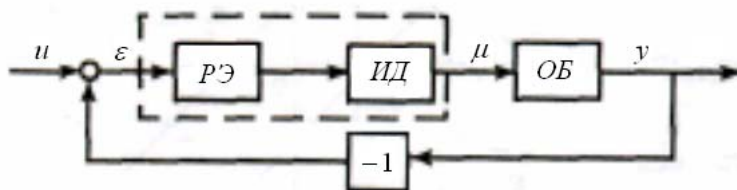


Рисунок 11.13 – Система управления

Регулятор состоит из двух звеньев – трехпозиционного реле *PЭ* с характеристикой, приведенной на рисунке 11.14 и исполнительного двигателя *ИД*.

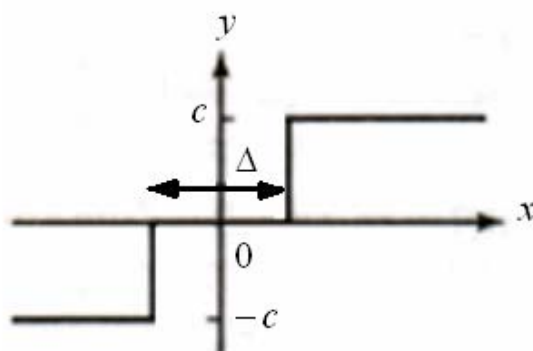


Рисунок 11.14 – Схема регулятора и исполнительного двигателя

В структуре системы, изображенной на рисунке. 11.13, исполнительный двигатель будем считать линейным интегрирующим звеном с коэффициентом передачи $k_{ид}$, а объект также является линейным и имеет передаточную функцию

$$W_{об}(s) = \frac{1}{s^2 + 1,625s + 0,375} \dots$$

С учетом сделанных замечаний передаточная функция линейной части разомкнутого контура на рисунке 11.10 примет вид:

$$W_{лч}(s) = \frac{k_{ид}}{s(s^2 + 1,625s + 0,375)},$$

а КЧХ:

$$W_{лч}(i\omega) = \frac{k_{ид}}{u(\omega) + iv(\omega)},$$

где

$$u(\omega) = 1,625\omega^2; \nu(\omega) = \omega(\omega^2 - 0,375)..$$

Вещественная и мнимая составляющие этой характеристики для

$$k_{ид} = 1 \text{ мин}^{-1}$$

определяются формулами:

$$P_{лч}(\omega) = \frac{u(\omega)}{u^2(\omega) + \nu^2(\omega)}; Q_{лч}(\omega) = -\frac{\nu(\omega)}{u^2(\omega) + \nu^2(\omega)},$$

а соответствующие составляющие модифицированной характеристики

$$P_{лчм}(\omega) = P_{лч}(\omega); Q_{лчм}(\omega) = \omega Q_{лч}(\omega).$$

Модифицированная $W_{лчм}(i\omega)$ и обычная $W_{лч}(i\omega)$ КЧХ показаны на рисунке 11.15, где они пересекают отрицательную вещественную ось в одной точке с координатами $(-1,641, i0)$.

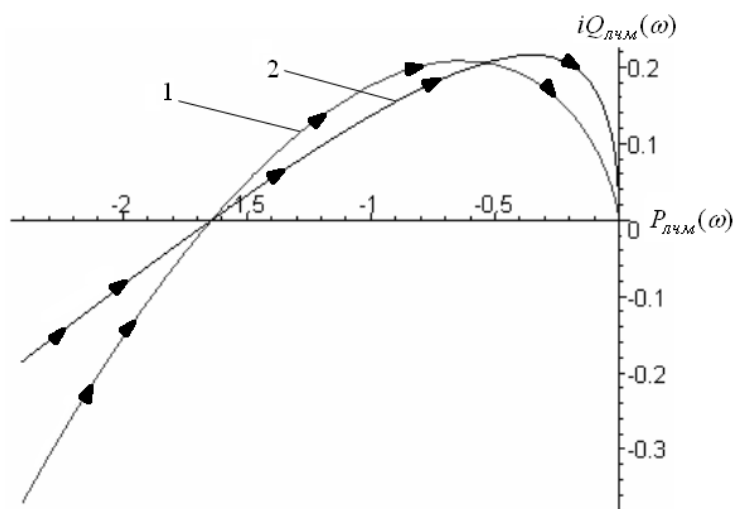


Рисунок 11.15 – КЧХ линейной части:

1 – обычная; 2 – модифицированная

Прямую Попова в данном случае провести можно, и, следовательно, состояние равновесия будет гарантированно устойчивым, если характеристика реле не выйдет за пределы зоны, ограниченной лучом с угловым коэффициентом $K_0 = 0,6094$. Из характеристики реле на рисунке 11.14 следует, что для этого должно выполняться условие

$$K_0 = 2 \frac{c}{\Delta} \leq 0,6094.$$

Обратим внимание на то, что обычная характеристика $W_{\text{лч}}(i\omega)$, также построенная на рисунке 11.15, есть характеристика разомкнутого контура линейной системы регулирования с И-регулятором, коэффициент передачи которого равен единице. Отрезок, отсекаемый этой характеристикой на отрицательной вещественной полуоси, в соответствии с критерием устойчивости Найквиста для линейных систем равен обратному коэффициенту передачи регулятора, при котором замкнутый контур будет находиться на границе устойчивости.

Это означает, что если бы в структурной схеме, изображенной на рисунке 11.13, вместо релейного элемента РЭ было установлено линейное безынерционное звено, то при его коэффициенте передачи $K = 0,609$ полученная таким образом линейная система находилась бы на границе устойчивости. При этом статическая характеристика указанного безынерционного звена совпадала бы с лучом AB на рисунке 11.11.

Из сказанного следует, что при исследовании абсолютной устойчивости состояния равновесия замкнутого контура с нелинейным безынерционным звеном можно мысленно заменить это звено линейным безынерционным звеном и исследовать обычным порядком устойчивость полученной таким образом линейной системы. Коэффициент передачи линейного безынерционного звена, при котором система находится на границе устойчивости, определит угловой коэффициент наклона прямой AB (см. рисунок 11.11) и значение K_0 в условии (11.5.1). Конечно, это утверждение справедливо только тогда, когда есть уверенность, что модифицированная характеристика линейной части $W_{\text{лчм}}(i\omega)$ выпукла в левой полуплоскости (т. е. она имеет вид, указанный на рисунке 11.12, *a*).

11.6. Метод гармонического баланса

Механизм образования автоколебаний в нелинейных системах в принципе аналогичен механизму образования незатухающих колебаний в линейных системах, когда они находятся на границе устойчивости, – он обусловлен наличием замкнутого контура циркуляции сигналов. Однако между незатухающими колебаниями в находящейся на границе устойчивости линейной системе и автоко-

лебаниями в нелинейных системах имеются и существенные различия. Они в основном сводятся к следующему:

1. Незатухающие колебания в линейных системах представляют собой граничный случай переходного процесса, который в реальных условиях не может существовать длительное время, поскольку невозможно абсолютно точное нахождение линейной системы на границе устойчивости. Реально эти колебания либо медленно затухают, либо расходятся. Напротив, автоколебания в нелинейных системах – это установившееся движение системы, по отношению к которому, в частности, может понадобиться решать задачу его устойчивости.

2. Амплитуда незатухающих колебаний в линейных системах может иметь любое значение, зависящее от интенсивности начального воздействия; амплитуда автоколебаний в нелинейных системах всегда имеет определенное фиксированное значение, определяемое свойствами системы.

3. В нелинейных системах возможно существование автоколебаний с несколькими периодами (в том числе наряду с возможностью существования автоколебаний может существовать возможность состояния покоя). В этом случае достаточно большие воздействия могут перебросить систему из одного автоколебательного режима в другой или из состояния покоя – в режим автоколебаний и наоборот.

Автоколебания в системах управления могут быть нежелательными, и в этом случае задача анализа автоколебаний состоит в выяснении возможности их появления, определении их амплитуды и периода и выяснении возможных путей их устранения. Так, в электронных регуляторах и некоторых микропроцессорных контроллерах применяется трехпозиционное реле, охваченное упругой обратной связью. В образованном таким образом замкнутом контуре могут возникнуть автоколебательные режимы, появление которых полностью выводит регулятор из нормального режима работы. Анализ автоколебаний в этом случае преследует цель выяснить допустимую (из условий отсутствия автоколебаний) область установки параметров настройки.

В системах регулирования с нелинейными, в частности позиционными, регуляторами автоколебательный режим может быть нормальным режимом их работы, и анализ автоколебаний необхо-

дим для определения качества функционирования системы.

Для исследования автоколебаний в системах управления технологическими процессами наибольшее применение получил приближенный метод, получивший название *метода гармонического баланса*. Основные идеи этого метода были сформулированы в 1934 году Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым; удобную для практического применения реализацию метода при исследовании систем регулирования, имеющих структуру, изображенную на рисунке 11.10, предложил в 1946 году Л. С. Гольдфарб.

Предположим, что в замкнутом контуре (см. рисунок 11.10) существуют установившиеся периодические колебания, и необходимо определить их форму и числовые параметры, в частности период и максимальное отклонение регулируемой величины в каждом полупериоде. Решение такой задачи можно было бы осуществлять подбором: задавшись предполагаемым видом этих колебаний на входе линейной части $x_{\text{лч}}(t)$, по известной КЧХ $W_{\text{лч}}(i\omega)$ определяют колебания на ее выходе $y_{\text{лч}}(t)$, которые одновременно являются колебаниями на входе нелинейного элемента $x_{\text{нэ}}(t)$. По известной характеристике нелинейного элемента $\psi_{\text{нэ}}(x)$ можно вычислить вызванные колебаниями $x_{\text{нэ}}(t)$ колебания на выходе этого элемента $y_{\text{нэ}}(t)$ и сравнить их с принятыми в начале расчета колебаниями на входе линейной части $x_{\text{лч}}(t)$. Если эти колебания совпадут, выбранные вначале автоколебания возможны, в противном случае следует изменить форму $x_{\text{лч}}(t)$ и все расчеты повторить.

Подобные расчеты следовало бы повторять до тех пор, пока либо было бы достигнуто равенство $y_{\text{нэ}}(t) = x_{\text{лч}}(t)$, либо возникло убеждение о невозможности достижения этого равенства, что свидетельствовало бы о невозможности возникновения автоколебаний в анализируемой системе.

Для поиска решения указанным путем периодические колебания удобно представлять, используя ряд Фурье, в виде суммы гармоник.

На практике очень часто возникает ситуация, когда линейная часть системы обладает ярко выраженными фильтрующими свойствами по отношению к высокочастотным колебаниям на входе. В этом случае значение модуля КЧХ линейной части уже при частоте второй гармоники разложения $\omega_2 = 2\omega_1$, оказывается намного

меньше значения при частоте первой гармоники ω_1 , и, следовательно, периодические колебания произвольной формы на входе линейной части $y_{нэ}(t)$ вызывают установившиеся колебания на ее выходе, очень близкие к синусоидальным с периодом T , равным периоду периодических колебаний на входе: $x_{нэ}(t) = A \sin(\omega_1 t)$, где $\omega_1 = 2\pi / T$ – частота первой гармоники разложения.

Соответственно определение установившихся колебаний на выходе нелинейного элемента допустимо в этом случае производить, считая, что на его вход поданы синусоидальные колебания, т.е. производить расчет по формуле $y_{нэ}(t) = \psi[A \sin(\omega_1 t)]$, причем интерес представляет только первая гармоника разложения $y_{нэ}(t)$ в ряд Фурье (поскольку все высшие гармоники будут подавлены линейной частью системы).

Именно для этого частного, но широко распространенного на практике случая и разработан метод гармонического баланса. Точность этого метода возрастает, когда модуль КЧХ линейной части системы имеет резонансный пик и автоколебания происходят на частоте резонанса.

В соответствии со сказанным для исследования автоколебаний методом гармонического баланса достаточно располагать характеристикой нелинейного элемента, позволяющей определять первую гармонику колебаний на его выходе, т. е. ее амплитуду A_y^1 начальную фазу φ_y^1 , когда на вход подается синусоидальное колебание произвольной амплитуды A и частоты ω . Такая характеристика может быть построена по аналогии с КЧХ, применяемой для описания линейных систем, – это должна быть комплексная функция частоты, модуль которой будет равен отношению амплитуд, а аргумент – разности фаз первой гармоники выходных колебаний и синусоидальных колебаний на входе. Оказывается, однако, что эти величины зависят не только от частоты ω , но и от амплитуды синусоидальных колебаний на входе нелинейного элемента A . Указанную характеристику, поэтому будем называть *эквивалентной комплексной амплитудно-частотной характеристикой (КАЧХ) нелинейного элемента* и обозначать так:

$$W_{нэ}(\omega, A) = A_{нэ}(\omega, A) e^{i\varphi_{нэ}(\omega, A)},$$

где $A_{нэ}(\omega, A)$ и $\varphi_{нэ}(\omega, A)$ – модуль и аргумент этой характеристики, являющиеся аналогами АЧХ и ФЧХ линейных систем.

Для частных случаев нелинейных зависимостей возможны некоторые упрощения. Так, эквивалентные КАЧХ безынерционных нелинейных звеньев с однозначными статическими характеристиками, типа приведенных на рисунках 11.4 а, 11.5 а и 11.5 б, не зависят от частоты (зависят только от амплитуды), а их аргумент равен нулю (отсутствует фазовый сдвиг). Эквивалентные КАЧХ нелинейных звеньев с двузначными характеристиками типа характеристик, показанных на рисунке 11.4 б, также не зависят от частоты, но их аргумент отличается от нуля (так как из-за наличия зоны возврата возникает отставание по фазе выходных колебаний от входных).

Допустим теперь, что в системе, представленной на рисунке 11.10, возникли автоколебания, причем на входе нелинейного элемента они (вследствие фильтрующих свойств линейной части) близки к синусоидальным: $x(t) = A \sin(\omega t)$, тогда первая гармоника колебаний на выходе нелинейного элемента может быть выражена через модуль и аргумент ее эквивалентной КАЧХ, т. е. можно записать следующим образом:

$$AA_{нэ}(\omega, A) \sin[\omega t + \varphi_{нэ}(\omega, A)].$$

В свою очередь, эта гармоника, пройдя через линейную часть, вызовет на ее выходе синусоидальное колебание:

$$AA_{нэ}(\omega, A)A_{лч}(\omega) \sin[\omega t + \varphi_{нэ}(\omega, A) + \varphi_{лч}(\omega)],$$

причем для существования автоколебаний необходимо, чтобы эти колебания совпадали с колебаниями на входе нелинейного элемента по амплитуде и не отличались от них по фазе, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$A \sin(\omega t) = AA_{нэ}(\omega, A)A_{лч}(\omega) \sin[\omega t + \varphi_{нэ}(\omega, A) + \varphi_{лч}(\omega)],$$

т. е.

$$\begin{cases} A_{нэ}(\omega, A)A_{лч}(\omega) = 1; \\ \varphi_{нэ}(\omega, A) + \varphi_{лч}(\omega) = 0. \end{cases} \quad (11.6.1)$$

Два уравнения (11.6.1) можно заменить одним:

$$W_{нэ}(\omega, A)W_{лч}(i\omega) = 1. \quad (11.6.2)$$

Уравнение (11.6.1) называют *уравнением гармонического баланса*; соответственно первое уравнение является *уравнением баланса амплитуд*, а второе – *уравнением баланса фаз*.

Если уравнение (11.6.2) имеет решение, т. е. можно подобрать такие значения ω и A , при которых оно обращается в тождество, то это значит, что в системе возможны автоколебания, имеющие на входе в нелинейный элемент форму синусоиды с частотой ω и амплитудой A (конечно, при условии применимости метода гармонического баланса).

Если эквивалентная комплексная характеристика нелинейного элемента не зависит от частоты, т. е. если $W_{н\bar{н}}(\omega, A) = W_{н\bar{н}}(A)$, уравнение (11.6.2) удобно решать графически, строя отдельно характеристики, зависящие только от частоты и только от амплитуды. Для этого (11.6.2) можно переписать следующим образом:

$$W_{лч}(i\omega) = \frac{1}{W_{н\bar{н}}(A)}. \quad (11.6.3)$$

Пересечение годографов левой и правой частей этих уравнений свидетельствует о возможности возникновения в системе автоколебаний.

В заключение подчеркнем, что выполнение условия гармонического баланса (11.6.3) свидетельствует только о возможности возникновения в системе автоколебаний, в действительности они могут и не существовать, поскольку найденное установившееся колебательное движение может оказаться неустойчивым. Таким образом, остается еще провести анализ устойчивости автоколебаний. Практически эта задача может быть решена с помощью следующих простых рассуждений.

Если зафиксировать амплитуду A в уравнении гармонического баланса на некотором постоянном уровне, то характеристику $W_{н\bar{н}}(\omega, A)$ можно рассматривать как комплексную частотную характеристику линейного звена, а произведение $W_{н\bar{н}}(\omega, A)W_{лч}(i\omega)$ – как характеристику разомкнутого контура линейной системы, получаемого из контура, представленного на рисунке 11.10, после замены нелинейного элемента линейным с характеристикой $W_{н\bar{н}}(\omega, A)$. Но в этом случае для исследования устойчивости контура может быть использован критерий устойчивости Найквиста.

Пусть методом гармонического баланса получена предполагаемая амплитуда автоколебаний A дадим этому значению некоторое небольшое приращение ΔA и построим новую КЧХ системы $W_{\text{нз}}(\omega, A)W_{\text{лч}}(i\omega)$. Если этот годограф охватит точку с координатами $(-1, i0)$, то в соответствии с критерием Найквиста рассматриваемая линейная система в замкнутом состоянии будет неустойчивой, т. е. амплитуда колебаний в ней после замыкания контура будет нарастать. Но так как амплитуда A получена увеличением ожидаемой амплитуды автоколебаний, то можно сделать вывод, что найденные автоколебания в нелинейной системе неустойчивы. Если же при увеличении A годограф $W_{\text{нз}}(\omega, A)W_{\text{лч}}(i\omega)$ не охватывает точку $(-1, i0)$, то линейная система устойчива, и, следовательно, начальное отклонение амплитуды автоколебаний исчезнет, т. е. автоколебания следует считать устойчивыми.

Если возможность существования автоколебаний определялась графическим решением уравнения (11.6.3) посредством построения годографов $W_{\text{лч}}(i\omega)$ и $W_{\text{нз}}^{-1}(A)$, то сформулированный критерий устойчивости автоколебаний может быть трансформирован следующим образом: автоколебания неустойчивы, если при движении вдоль $W_{\text{нз}}^{-1}(A)$ в сторону возрастания амплитуды A изображающая точка после пересечения характеристики $W_{\text{лч}}(i\omega)$ попадает внутрь области, ограниченной этой характеристикой; если же она выходит за пределы данной области, автоколебания устойчивы.

Этот критерий не является строгим, как, впрочем, и сам метод гармонического баланса, корректность применения которого в каждом конкретном случае нуждается в проверке, но практический опыт свидетельствует о возможности его использования.

Во многих случаях суждение об устойчивости автоколебаний может быть сделано из физических соображений.

11.7. Условия робастности для систем с нелинейными статическими характеристиками

Выше были получены условия робастности для линейных стационарных систем, заключающиеся в выполнении определенных требований к расположению полюсов их передаточных функций.

Поскольку применение указанных условий при настройке регуляторов позволяет добиться высокого качества управления технологическими процессами и существенно облегчить эту сложную процедуру, благодаря отказу от труднодоступной и добываемой дорогой ценной информации о статистических характеристиках возмущающих воздействий, то весьма желательно было бы получить условия робастности и для систем с нелинейными объектами.

В промышленном и сельскохозяйственном производствах нередко применяются исполнительные органы с нелинейными статическими характеристиками. К их числу относятся различные клапаны, вентили, заслонки и др.

Рассмотрим пример объекта управления с одним из таких исполнительных органов.

Пример 11.7. Предположим, что в системе отопления помещения поступление горячего воздуха, используемого для обогрева, регулируется с помощью заслонки, расположенной в воздуховоде.

Пусть θ – угол поворота заслонки, причем при $\theta = 0$ заслонка закрыта и воздух не поступает, а в случае $\theta = 0,5\pi$ она полностью открыта (рисунок 11.16).

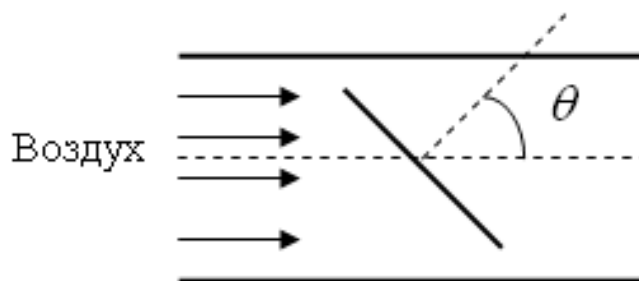


Рисунок 11.16 – Система отопления помещения

Составим для рассматриваемого объекта уравнение теплового баланса

$$\gamma [T_{\Pi}(t) - T_{\text{н}}(t)] dt + C_{\Pi} dT_{\Pi}(t) = \chi T_{\text{в}} S_{\text{в}} (1 - \cos \theta(t)) dt, \quad (11.7.1)$$

где γ и χ – постоянные коэффициенты размерности Дж/град/с и Дж/град/м/с соответственно; C_{Π} – теплоемкость помещения; $T_{\text{в}}$, $T_{\Pi}(t)$ и $T_{\text{н}}(t)$ – соответственно температуры воздуха, используемого для обогрева помещения, в самом помещении и снаружи; $S_{\text{в}}$ – площадь поперечного сечения воздуховода.

Выполнив преобразования, представим уравнение (11.7.1) в виде

$$\frac{dT_{\Pi}(t)}{dt} + \frac{\gamma}{C_{\Pi}} T_{\Pi}(t) = F(\theta) + \frac{\gamma}{C_{\Pi}} T_{\text{H}}(t), \quad (11.7.2)$$

где

$$F(\theta) = \frac{\chi T_{\text{B}} S_{\text{B}}}{C_{\Pi}} [1 - \cos \theta(t)]. \quad (11.7.3)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае угол поворота заслонки θ играет роль управляющего воздействия на объект, температура $T_{\Pi}(t)$ является управляемой величиной, а член $\frac{\gamma}{C_{\Pi}} T_{\text{H}}(t)$ – возмущающим воздействием.

Полагая

$$p = \frac{d}{dt}(\dots); V_{\text{об}}(p) = p + \frac{\gamma}{C_{\Pi}}; \lambda(t) = \frac{\gamma}{C_{\Pi}} T_{\text{H}}(t), \quad (11.7.4)$$

запишем уравнение (11.7.2) в операторной форме

$$V_{\text{об}}(p)T_{\Pi}(t) = F(\theta) + \lambda(t). \quad (11.7.5)$$

Поскольку функция $F(\theta)$ согласно выражению (11.7.3) нелинейная, то операторное уравнение (11.7.4) относится к классу нелинейных дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения вида (11.7.4), (11.7.5) называются **уравнениями со статическими нелинейностями**, т. к. они линейно зависят от производных по времени (в дифференциальный оператор $V_{\text{об}}(p)$ эти производные входят линейным образом, а нелинейная функция $F(\theta)$ их не содержит).

Покажем, что задачу управления объектами со статическими нелинейностями можно привести к линейному виду.

Пусть в односвязной системе управления (рисунок 6.1) на вход объекта со статической нелинейной характеристикой исполнительного органа поступает управляющее воздействие $u(t)$, а на выходе регистрируется сигнал $y(t)$. Тогда их взаимосвязь можно представить в следующем операторном виде

$$V_{\text{об}}(p)y(t) = F_{\text{об}}(u) + \lambda(t), \quad (11.7.6)$$

где $V_{\text{об}}(p)$ – линейный дифференциальный оператор; $F_{\text{об}}(u)$ – нелинейная функция; $\lambda(t)$ – возмущающее воздействие.

Задача управления нелинейным объектом (11.7.6) заключается в таком выборе линейного дифференциального оператора $R_{\text{рег}}(p)$ и нелинейной функции $V_{\text{рег}}(u)$ в описывающем регулятор соотношении

$$p^\mu V_{\text{рег}}(u) = R_{\text{рег}}(p)\varepsilon(t), \quad (11.7.7)$$

который обеспечивает робастность системы управления.

Отметим также, что показатель степени μ в (11.7.7) принимает значения 0 или 1 и определяет наличие астатизма в законе управления (11.7.7) при $\mu = 1$ или его отсутствие в тех случаях, когда $\mu = 0$.

Ошибка управления $\varepsilon(t)$ определяется следующим выражением:

$$\varepsilon(t) = y_{\text{зд}} - y(t), \quad (11.7.8)$$

где $y_{\text{зд}}$ – заданное в соответствии с технологическими требованиями значение величины $y(t)$.

Таким образом, рассматриваемая система управления полностью описывается соотношениями (11.7.6) – (11.7.8).

Выберем функцию $V_{\text{рег}}(u)$ так, чтобы выполнялось тождество

$$V_{\text{рег}}(u) \equiv F_{\text{об}}(u). \quad (11.7.9)$$

Воспользовавшись соотношениями (11.7.6) – (11.7.9) для ошибки управления $\varepsilon(t)$ получим следующее уравнение

$$[p^\mu V_{\text{об}}(p) + R_{\text{рег}}(p)] \varepsilon(t) = \Phi(t), \quad (11.7.10)$$

где

$$\Phi(t) = p^\mu [V_{\text{об}}(p)y_{\text{зд}} - \lambda(t)]. \quad (11.7.11)$$

Как видно из (11.7.10) и (11.7.11) взаимосвязь величин $\varepsilon(t)$ и $\lambda(t)$ является линейной в силу линейности операторов $V_{\text{об}}(p)$ и $R_{\text{рег}}(p)$.

Поскольку передаточная функция замкнутой системы $W_{\lambda\varepsilon}(s)$ по каналу действия возмущения $\lambda(t)$ на ошибку $\varepsilon(t)$ существует и имеет вид

$$W_{\lambda\varepsilon}(s) = -\frac{s^\mu}{s^\mu V_{\text{об}}(s) + R_{\text{рег}}(s)}, \quad (11.7.12)$$

то ее характеристический полином $\Delta(s)$ определяется выражением

$$\Delta(s) = s^\mu V_{об}(s) + R_{рег}(s). \quad (11.7.13)$$

Линейный дифференциальный оператор $R_{рег}(p)$ выбирается так, чтобы обеспечить расположение полюсов передаточной функции (11.7.12), т. е. корней характеристического уравнения $\Delta(s) = 0$, в соответствии с требованиями (6.3.1). В таком случае, как это было установлено выше, выполняются условия (5.2.6).

Следовательно, робастность управления рассматриваемыми системами обеспечивается при синтезе регулятора на основе требований (11.7.7), (11.7.9) и последующем выборе линейного дифференциального оператора $R_{рег}(p)$ таким образом, чтобы расположение доминирующих полюсов передаточной функции (11.7.12) отвечало требованиям (6.3.1).

Для иллюстрации метода робастного управления системами со статическими нелинейностями рассмотрим пример.

Пример 11.8. Рассмотрим объект, проанализированный в примере 11.7. В этом случае на основании выражения (11.7.3) и тождества (11.7.9) получим

$$V_{рег}(\theta) = \frac{\chi T_B S_B}{C_\Pi} [1 - \cos \theta(t)]. \quad (11.7.14)$$

С целью исключения статической ошибки будем полагать, что $\mu = 1$.

Перейдем теперь к выбору оператора $R_{рег}(p)$. На основании выражений (11.7.4) и (11.7.13) установим, что

$$\Delta(s) = s \left(s + \frac{\gamma}{C_\Pi} \right) + R_{рег}(s). \quad (11.7.16)$$

Чтобы не увеличивать влияния помех минимизируем порядок используемых в операторе $R_{рег}(p)$ производных по времени. Принимая во внимание выражение (11.7.16) приходим к выводу, что в рассматриваемом случае для достижения полной управляемости полюсами передаточной функции $W_{\lambda\varepsilon}(s)$ вполне достаточным является следующий выбор:

$$R_{\text{рег}}(p) = k_1 p + k_0, \quad (11.7.17)$$

где k_1 и k_0 – параметры настройки регулятора.

Действительно, с учетом (11.7.17) выражение (11.7.16) принимает вид

$$\Delta(s) = s^2 + \left(\frac{\gamma}{C_{\Pi}} + k_1 \right) s + k_0. \quad (11.7.18)$$

Из (11.7.18) вытекает, что характеристическое уравнение $\Delta(s) = 0$ имеет два корня s_1 и s_2 , которые могут быть размещены в любом наперед заданном положении при соответствующем выборе параметров настройки регулятора k_1 и k_0 .

В соответствии с требованиями (6.3.1) желаемое расположение полюсов системы управления температурой в помещении определяется выражением

$$s_{1,2} = -\eta \left(1 \mp i \frac{1}{m_{\Pi}} \right). \quad (11.7.19)$$

Согласно выражению (11.7.18) расположение полюсов (11.7.19) обеспечивается при выполнении равенств

$$k_1 = 2\eta - \frac{\gamma}{C_{\Pi}}; \quad k_0 = \eta^2 \left(1 + \frac{1}{m_{\Pi}^2} \right). \quad (11.7.20)$$

Принимая во внимание равенства (11.7.20) выражение (11.7.17) перепишем следующим образом:

$$R_{\text{рег}}(p) = \left(2\eta - \frac{\gamma}{C_{\Pi}} \right) p + \eta^2 \left(1 + \frac{1}{m_{\Pi}^2} \right). \quad (11.7.21)$$

Исходя из равенств (11.7.14), (11.7.15) и (11.7.21) уравнение регулятора (11.7.7) для рассматриваемой системы представим в виде

$$\frac{\chi T_{\text{В}} S_{\text{В}}}{C_{\Pi}} \frac{d \cos \theta(t)}{dt} = \left(\frac{\gamma}{C_{\Pi}} - 2\eta \right) \frac{d\varepsilon(t)}{dt} - \eta^2 \left(1 + \frac{1}{m_{\Pi}^2} \right) \varepsilon(t). \quad (11.7.22)$$

Из уравнения (11.7.22) получим выражение для оптимального закона изменения угла $\theta(t)$ в зависимости от ошибки управления $\varepsilon(t)$.

Пусть

$$\Psi(t) = \cos \theta(t), \quad (11.7.23)$$

тогда интегрируя с учетом (11.7.23) уравнение (11.7.22) по времени имеем

$$\Psi(t) = \Psi(t_0) + \frac{C_{\Pi}}{\chi T_B S_B} \left(\frac{\gamma}{C_{\Pi}} - 2\eta \right) [\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0)] - \frac{C_{\Pi} \eta^2 (m_{\Pi}^2 + 1)}{\chi T_B S_B m_{\Pi}^2} \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (11.7.24)$$

где t_0 – некоторый начальный момент времени.

С учетом ограничения

$$0 \leq \theta(t) \leq \frac{\pi}{2}$$

и выражения (11.7.24) закон управления положением заслонки окончательно представим в виде

$$\cos \theta(t) = \begin{cases} \Psi(t), & \text{если } |\Psi(t)| \leq 1; \\ 1, & \text{если } |\Psi(t)| > 1, \end{cases}$$

или

$$\theta(t) = \begin{cases} \arccos \Psi(t), & \text{если } |\Psi(t)| \leq 1; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } |\Psi(t)| > 1. \end{cases}$$

В тех случаях, когда $\Psi(t)$ слишком часто принимает значения по модулю больше единицы, значение величины абсолютного демпфирования η относительно имеющейся мощности устройств обогрева выбрано неоправданно завышенным и его желательно уменьшить.

Рассмотренный пример 11.8 свидетельствует о простоте и в то же время высокой эффективности метода синтеза робастных нелинейных систем управления, включающих объекты со статическими нелинейными характеристиками исполнительных органов.

11.8. Условия робастности для систем с динамическими нелинейностями

Перейдем к рассмотрению объектов управления с динамическими нелинейностями, т. е. объектов, дифференциальные уравнения которых нелинейным образом зависят от производных по времени. Эти уравнения удобно представлять в операторном виде:

$$V_{об}(y, p)y(t) = R_{об}(u, p)u(t) + \lambda(t), \quad (11.8.1)$$

где $V_{об}(x, p)$ и $R_{об}(u, p)$ – нелинейные дифференциальные операторы объекта, $\lambda(t)$ – возмущающее воздействие.

Предположим также, что старшая производная по времени в дифференциальном операторе $V_{об}(x, p)$ имеет порядок n , где n – целое положительное число.

Для иллюстрации операторной формы записи дифференциальных уравнений с динамическими нелинейностями рассмотрим пример.

Пример 11.9. Предположим, что управляемый объект описывается уравнением *Ван-дер-Поля*

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \zeta [y^2(t) - 1] \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) + \lambda(t), \quad (11.8.2)$$

где ζ – постоянный коэффициент.

При отсутствии управляющего $u(t)$ и возмущающего $\lambda(t)$ воздействий, т. е. в случае, когда $u(t) \equiv \lambda(t) \equiv 0$ сигнал $y(t)$ на выходе объекта имеет колебательный характер, но эти колебания не являются гармоническими.

После замены производных по времени операторами дифференцирования p уравнение (11.8.2) принимает вид

$$p^2 y(t) + \zeta [y^2(t) - 1] p y(t) + y(t) = u(t) + \lambda(t). \quad (11.8.3)$$

Если $y(t)$ в левой части уравнения (11.8.3) вынести за скобки, то получим

$$\{p^2 + \zeta [y^2(t) - 1]p + 1\}y(t) = u(t) + \lambda(t). \quad (11.8.4)$$

Обозначив

$$V_{об}(y, p) = p^2 + \zeta [y^2(t) - 1]p + 1; R_{об}(u, p) = 1,$$

представим уравнение (11.8.4) в аналогичном (11.8.1) виде.

Таким образом, при рассмотрении примера 11.9 было показано, что операторной форме записи нелинейных дифференциальных уравнений, отличающихся большим разнообразием типов, присущи такие достоинства, как универсальность и компактность.

Регулятор в замкнутом контуре управления величиной $y(t)$ описывается следующим операторным уравнением:

$$p^\mu V_{рег}(u, p)u(t) = R_{рег}(\varepsilon, p)\varepsilon(t). \quad (11.8.5)$$

Задача управления состоит в таком выборе нелинейных дифференциальных операторов регулятора $V_{рег}(u, p)$ и $R_{рег}(\varepsilon, p)$, который обеспечивал бы робастность системы управления.

Главная идея метода робастного управления объектами вида (11.8.1) состоит в том, чтобы соответствующим выбором операторов регулятора $V_{рег}(u, p)$ и $R_{рег}(\varepsilon, p)$ получить дифференциальное уравнение следующего вида:

$$Z_{зс}(p)f(\varepsilon) = \Theta(t), \quad (11.8.6)$$

где

$$Z_{зс}(p) = \sum_{h=0}^n z_h p^h, \quad (11.8.7)$$

т. е. $Z_{зс}(p)$ – линейный дифференциальный оператор замкнутой системы, z_h – постоянные коэффициенты, n – порядок оператора $Z_{зс}(p)$; $f(\varepsilon)$ – нелинейная функция от ошибки управления $\varepsilon(t)$, причем

$$\Theta(t) = p^\mu [V_{об}(y_{зд}, p)y_{зд} - \lambda(t)]. \quad (11.8.8)$$

Важным достоинством формулировки цели управления системой (11.8.1), (11.8.5) и (7.2.8) как представления взаимосвязи величин $\varepsilon(t)$ и $\lambda(t)$ в виде соотношений (11.8.6) – (11.8.8) является возможность достижения высокого качества управления величиной $y(t)$ и выполнения при этом условий робастности.

Чтобы получить уравнение (11.8.6) применим оператор $V_{об}(y, p)$ к равенству (11.7.8). В результате имеем

$$V_{об}(y, p)y(t) = V_{об}(y, p)[y_{зд} - \varepsilon(t)]. \quad (11.8.9)$$

С учетом (11.8.1) и (11.7.8) уравнение (11.8.9) представим в виде

$$\lambda(t) + R_{об}(u, p)u(t) = V_{об}[y_{зд} - \varepsilon(t), p][y_{зд} - \varepsilon(t)]. \quad (11.8.10)$$

Умножив на оператор $p^\mu(1+Tp)^\mu$ обе части уравнения (11.8.10), получим

$$\begin{aligned} p^\mu \lambda(t) + p^\mu R_{об}(u, p)u(t) &= \\ &= p^\mu V_{об}[y_{зд} - \varepsilon(t), p][y_{зд} - \varepsilon(t)]. \end{aligned} \quad (11.8.11)$$

Оператор регулятора $V_{рег}(u, p)$ выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$V_{рег}(u, p) = R_{об}(u, p). \quad (11.8.12)$$

Принимая во внимание равенство (11.8.12) и уравнения (11.8.5), (11.8.11) получим

$$p^\mu \lambda(t) + R_{рег}(\varepsilon, p)\varepsilon(t) = p^\mu V_{об}[y_{зд} - \varepsilon(t), p] \times [y_{зд} - \varepsilon(t)]. \quad (11.8.13)$$

Вычитая из обеих частей равенства (11.8.13) величину $p^\mu V_{об}(y_{зд}, p)y_{зд}$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} R_{рег}(\varepsilon, p)\varepsilon(t) &= p^\mu \{V_{об}[y_{зд} - \varepsilon(t), p] \times [y_{зд} - \varepsilon(t)] - \\ &- V_{об}(y_{зд}, p)y_{зд}\} + \Theta(t), \end{aligned} \quad (11.8.14)$$

где функция $\Theta(t)$ определяется выражением (11.8.8).

Оператор регулятора $R_{рег}(\varepsilon, p)$ выберем таким образом, чтобы обеспечить выполнение равенства

$$\begin{aligned} R_{рег}(\varepsilon, p)\varepsilon(t) - p^\mu \{V_{об}[y_{зд} - \varepsilon(t), p] \times \\ \times [y_{зд} - \varepsilon(t)] - V_{об}(y_{зд}, p)y_{зд}\} &= Z_{зс}(p)f(\varepsilon). \end{aligned} \quad (11.8.15)$$

Равенство (11.8.15) можно использовать для определения оператора регулятора $R_{рег}(\varepsilon, p)$, если задать оператор $Z_{зс}(p)$ и функцию $f(\varepsilon)$.

Сопоставив равенства (11.8.14) и (11.8.15) приходим к уравнению (11.8.6).

Отметим также, что нередко функция $f(\varepsilon)$ является полиномом степени q , т. е.

$$f(\varepsilon) = \sum_{k=1}^q f_k \varepsilon^k, \quad (11.8.16)$$

где $f_k, k=\overline{1, q}$ – коэффициенты полинома $f(\varepsilon)$.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим пример.

Пример 11.10. Пусть управляемый объект описывается уравнением (11.8.2). Тогда, как было установлено ранее в примере 11.9, взаимосвязь его входной $u(t)$ и выходной $y(t)$ величин определяется нелинейным операторным уравнением вида (11.8.1), причем

$$\{p^2 + \zeta [y^2(t) - 1]p + 1\}y(t) = u(t) + \lambda(t). \quad (11.8.17)$$

Допустим, что сигнал $y(t)$ желательно стабилизировать, т.е. для ошибки управления $\varepsilon(t)$, заданной выражением (11.7.8), необходимо обеспечить выполнение условий (4.2.6) при наличии случайного возмущающего воздействия $\lambda(t)$. С этой целью используем регулятор в цепи обратной связи, взаимосвязь входного $\varepsilon(t)$ и выходного $u(t)$, сигналов которого устанавливается уравнением (11.8.5).

Сопоставив уравнения (11.8.11) и (11.8.17) приходим к выражению

$$R_{об}(u, p) = 1.$$

В таком случае на основании требования (11.8.12) имеем

$$V_{рег}(u, p) = 1. \quad (11.8.18)$$

Кроме того, из уравнения (11.8.17) установим, что

$$\begin{aligned} V_{об}(y_{зд} - \varepsilon(t), p)[y_{зд} - \varepsilon(t)] &= p^2[y_{зд} - \varepsilon(t)] + \\ &+ \zeta[y_{зд}^2 - 2y_{зд}\varepsilon(t) + \varepsilon^2(t) - 1]p[y_{зд} - \varepsilon(t)] + y_{зд} - \varepsilon(t) = \\ &= -p^2\varepsilon(t) - \zeta[y_{зд}^2 - 2x_{зд}\varepsilon(t) + \varepsilon^2(t) - 1]p\varepsilon(t) + y_{зд} - \varepsilon(t); \end{aligned} \quad (11.8.19)$$

$$V_{об}(y_{зд}, p)y_{зд} = y_{зд}, \quad (11.8.20)$$

поскольку

$$p^2 y_{зд} = p y_{зд} = 0,$$

т. к. сигнал задания $y_{зд}$ не изменяется со временем.

Принимая во внимание уравнение (11.8.17) и равенство (11.8.18) уравнение (11.8.13) представим в виде

$$R_{пер}(\varepsilon, p)\varepsilon(t) + p^u \{p^2\varepsilon(t) + \zeta [y_{зд}^2 - 2y_{зд}\varepsilon(t) + \varepsilon^2(t) - 1] \times (11.8.21) \\ \times p\varepsilon(t) + \varepsilon(t)\} = Z_{зс}(p)f(\varepsilon).$$

Полагая, что выполняется равенство (11.7.15) запишем уравнение (11.8.21) следующим образом:

$$R_{пер}(\varepsilon, p)\varepsilon(t) + p^3\varepsilon(t) + 2\zeta[\varepsilon(t) - y_{зд}] [p\varepsilon(t)]^2 + (11.8.22) \\ + \zeta[y_{зд}^2 - 2y_{зд}\varepsilon(t) + \varepsilon^2(t) - 1]p^2\varepsilon(t) + p\varepsilon(t) = Z_{зс}(p)f(\varepsilon).$$

Воспользовавшись формулами для дифференцирования произведений, установим, что

$$[p\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2}p^2\varepsilon^2(t) - \varepsilon(t)p^2\varepsilon(t); (11.8.23)$$

$$\varepsilon(t)[p\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{6}p^2\varepsilon^3(t) - \frac{1}{2}\varepsilon^2(t)p^2\varepsilon(t). (11.8.24)$$

С учетом выражений (11.8.23) и (11.8.24) уравнение (11.8.22) принимает вид

$$R_{пер}(\varepsilon, p)\varepsilon(t) + p^3\varepsilon(t) + p^2 \left[\begin{array}{l} \frac{\zeta}{3}\varepsilon^3(t) - \zeta y_{зд}\varepsilon^2(t) + \\ + \zeta(y_{зд} - 1)\varepsilon(t) \end{array} \right] + (11.8.25) \\ + p\varepsilon(t) = Z_{зс}(p)f(\varepsilon).$$

Поскольку в уравнении (11.8.25) присутствуют степени оператора дифференцирования по времени p и ошибки управления $\varepsilon(t)$ вплоть до третьей включительно, то зададим функцию $f(\varepsilon)$ и линейный дифференциальный оператор $Z_{зс}(p)$ в равенстве (11.8.25) следующими выражениями:

$$f(\varepsilon) = \sum_{r=1}^3 f_r \varepsilon^r(t); (11.8.26)$$

$$Z_{3C}(p) = \sum_{h=0}^3 z_h p^h, \quad (11.8.27)$$

где f_r и z_h – заданные постоянные коэффициенты.

В таком случае, воспользовавшись уравнением (11.8.25) имеем

$$R_{\text{рег}}(\varepsilon, p)\varepsilon(t) = -p^3\varepsilon(t) - p^2 \left[\begin{array}{l} \frac{\zeta}{3}\varepsilon^3(t) - \zeta y_{3д}\varepsilon^2(t) + \\ + \zeta(y_{3д} - 1)\varepsilon(t) \end{array} \right] - \quad (11.8.28)$$

$$-p\varepsilon(t) + Z_{3C}(p)f(\varepsilon).$$

Следовательно, задав функцию $f(\varepsilon)$ и линейный дифференциальный оператор $Z_{3C}(p)$ выражениями (11.8.26) и (11.8.27), получим нелинейное дифференциальное уравнение регулятора (11.8.5), воспользовавшись при этом равенствами (11.8.18) и (11.8.28).

Рассмотренный пример 11.10 свидетельствует, что, выбирая определенным образом, дифференциальные операторы регулятора, можно привести нелинейное дифференциальное уравнение замкнутой системы к *каноническому виду* (11.8.6).

Установим теперь, при каких значениях коэффициентов полинома (11.8.16) и линейного дифференциального оператора (11.8.7) обеспечивается выполнение условий робастности управления замкнутой нелинейной системой (11.8.1), (11.8.5) и (11.7.8).

С этой целью к уравнению (11.8.6) применим интегральный оператор

$$Z_{3C}^{-1}(p) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau) [\dots] d\tau,$$

где $g(t-\tau)$ – импульсная переходная характеристика оператора $Z_{3C}(p)$. Поскольку оператор $Z_{3C}^{-1}(p)$ является обратным к оператору $Z_{3C}(p)$, то в результате его применения к уравнению (11.8.6) получим

$$f(\varepsilon) = \sum_{k=1}^q f_k \varepsilon^k(t) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau)\Theta(\tau)d\tau. \quad (11.8.29)$$

Исходя из равенства (11.8.29), приходим к выражению

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{f_1} \frac{\int_{-\infty}^t g(t-\tau)\Theta(\tau)d\tau}{1 + \frac{1}{f_1} \sum_{k=2}^q f_k \varepsilon^{k-1}(t)}. \quad (11.8.30)$$

Воспользовавшись выражением (7.3.65), сравним эффективность управления в случаях выбора линейной и нелинейной функции $f(\varepsilon)$.

Предположив, что данная функция линейна, т. е. $f_r=0$, $q \geq r > 1$, выражение (11.8.30) представим в виде

$$\varepsilon_{\text{л}}(t) = \frac{1}{f_1} \int_{-\infty}^t g(t-\tau)\Theta(\tau)d\tau, \quad (11.8.31)$$

где $\varepsilon_{\text{л}}(t)$ – ошибка управления при выборе линейной функции $f(\varepsilon)$.

Сопоставив выражения (11.8.31) и (5.3.3), а также принимая во внимание неравенства (5.3.1), получим

$$\left| M[\varepsilon_{\text{л}}^k] \right| \leq \frac{C_k}{f_1^k \alpha_0^k}, \quad k = \overline{1, \theta}, \quad (11.8.31)$$

где C_k – постоянные величины, а $\alpha_0 = z_0/z_q$ – свободный член характеристического уравнения

$$\sum_{h=0}^q z_h s^h = 0, \quad (11.8.32)$$

отвечающего линейному дифференциальному оператору $Z_{3C}(p)$ с постоянными коэффициентами z_h , $h = \overline{1, q}$.

Из неравенств (11.8.31) следует, что

$$\left| M[\varepsilon_{\text{л}}^k] \right| \rightarrow \min, \quad k = \overline{1, \theta}, \quad (11.8.33)$$

если выполняются следующие требования:

$$\alpha_0 \rightarrow \max; \quad (11.8.34)$$

$$f_1 \rightarrow \max. \quad (11.8.35)$$

В тех случаях, когда функция $f(\varepsilon)$ является нелинейной, выберем коэффициенты f_k , $k = \overline{1, q}$ и степень q полинома (11.8.16) согласно требованиям

$$f_{2h} = 0; f_{2h+1} > 0; h = \overline{0, (q-1)/2}, \quad (11.8.36)$$

где $q > 1$ – нечетное целое число.

С учетом требований (11.8.36) выражение (11.8.30) принимает вид

$$\varepsilon_{\text{нл}}(t) = \frac{1}{f_1} \frac{\int_{-\infty}^t g(t-\tau)\Theta(\tau)d\tau}{1 + \frac{1}{f_1} \sum_{h=1}^{\gamma} f_{2h+1} \varepsilon_{\text{нл}}^{2h}(t)}, \quad (11.8.37)$$

где $\gamma = (q-1)/2$; $\varepsilon_{\text{нл}}(t)$ – ошибка управления при выборе нелинейной функции $f(\varepsilon)$.

Поскольку при выполнении требований (11.8.36) имеет место неравенство

$$\sum_{h=1}^{\gamma} f_{2h+1} \varepsilon_{\text{нл}}^{2h}(t) \geq 0,$$

то с учетом выражений (11.8.31) и (11.8.37) приходим к выводу, что

$$\left| M[\varepsilon_{\text{нл}}^k] \right| \leq \left| M[\varepsilon_{\text{л}}^k] \right|, \quad k = \overline{1, \theta}. \quad (11.8.38)$$

Таким образом, на основании неравенств (11.8.38) можем заключить, что выполнение условий (11.8.33) способствует минимизации критериев качества управления нелинейной системой, т. е. выполнению условий

$$\left| M[\varepsilon_{\text{нл}}^k] \right| \rightarrow \min, \quad k = \overline{1, \theta}. \quad (11.8.39)$$

Принимая во внимание выражение (11.8.37) установим, что наряду с требованиями (11.8.34) и (11.8.35), выполнению условий (11.8.39) способствуют также следующие требования:

$$f_{2h+1} \rightarrow \max, \quad h = \overline{1, \gamma}. \quad (11.8.40)$$

Следовательно, при выборе коэффициентов z_h , $h = \overline{1, q}$ оператора $Z_{\text{зс}}(p)$ необходимо корни s_k , $k = \overline{1, q}$ характеристического уравнения (11.8.32) расположить в соответствии с требованиями (6.3.1), т. к. только в этом случае обеспечивается выполнение требования (11.8.34).

Например, оператор $Z_{3c}(p)$, заданный равенством (11.8.27), принимает вид

$$Z_{3c}(p) = \sum_{h=0}^3 z_h p^h = \left[p + \left(\eta + i \frac{\eta}{m_{\Pi}} \right) \right] \times \left[p + \left(\eta - i \frac{\eta}{m_{\Pi}} \right) \right] (p + \eta). \quad (11.8.41)$$

Что касается коэффициентов f_k $k = \overline{1, q}$ полинома (11.8.32), то они выбираются исходя из требований (11.8.35), (11.8.36) и (11.8.40).

В таком случае полином (11.8.26) можно записать следующим образом:

$$f(\varepsilon) = \sum_{r=1}^3 f_r \varepsilon^r(t) = f_1^* \varepsilon(t) + f_3^* \varepsilon^3(t), \quad (11.8.42)$$

где f_1^* и f_3^* – максимальные значения коэффициентов f_1 и f_2 .

Отметим, что максимальные значения величин f_1 , f_2 и η ограничены сверху, например, имеющейся мощностью управляющих воздействий.

Однако при практической реализации метода робастного управления системами с динамическими нелинейностями возникают проблемы, связанные с возможностью технической реализации синтезированного на основании требований (11.8.12) и (11.8.15) нелинейного регулятора, т.к. при выполнении требования (11.8.12) порядок старшей производной у оператора $V_{\text{рег}}(u, p)$ может оказаться меньше, чем у оператора $R_{\text{рег}}(\varepsilon, p)$.

Чтобы исключить такую ситуацию оператор $V_{\text{рег}}(u, p)$, после того как будет определен оператор $R_{\text{рег}}(\varepsilon, p)$, необходимо заменить оператором $(1 + Tp)^{n-\mu-\gamma} V_{\text{рег}}(u, p)$, где T – заданная постоянная времени, значение которой выбирается настолько малым, чтобы выполненная замена не оказывала сколь-нибудь существенного влияния на качество управления; γ – порядок старшей производной по времени в операторе $V_{\text{рег}}(u, p)$, выбранном на основании требования (11.8.12).

11.9. Тест 11

1. Нелинейные динамические системы могут иметь ... равновесия.

- а) единственное положение;
- б) несколько положений;
- в) только два положения.

2. Периодические движения за счет внутренних свойств системы при отсутствии внешних колебательных воздействий называются

- а) автоколебаниями;
- б) гармоническими колебаниями;
- в) самовозбуждающимися колебаниями.

3. В нелинейных системах при сложении воздействий реакция . . . на отдельные воздействия.

- а) равна произведению реакций;
- б) равна сумме реакций;
- в) не равна сумме реакций.

4. Особенность работы позиционных регуляторов состоит в том, что формируемое ими управляющее воздействие может принимать

- а) континуум значений;
- б) ограниченное число фиксированных значений;
- в) единственное фиксированное значение.

5. Нелинейная система в установившемся состоянии может пребывать в состоянии покоя, или совершать

- а) автоколебания;
- б) колебания с возрастающей амплитудой;
- в) затухающие колебания.

6. Через каждую точку фазового пространства нелинейной системы (исключая точку равновесия) может проходить

- а) бесконечное количество траекторий;
- б) не более трех траекторий;
- в) только одна траектория.

7. Возникновение автоколебаний в нелинейных системах обусловлено наличием

- а) точки равновесия системы;
- б) замкнутого контура циркуляции сигналов;
- в) безынерционных нелинейных элементов.

8. Для исследования автоколебаний в системах управления технологическими процессами наибольшее применение получил

- а) метод гармонического баланса;

б) критерий устойчивости А. М. Ляпунова;

в) критерий устойчивости В. М. Попова.

9. Амплитуда автоколебаний в нелинейных системах

а) может иметь любое значение, зависящее от интенсивности начального воздействия;

б) имеет определенное фиксированное значение, определяемое координатами точки равновесия системы;

в) имеет определенное фиксированное значение, определяемое свойствами системы.

10. Нелинейный элемент типа «зона нечувствительности» учитывает реальные свойства технических устройств при

а) отсутствии входных сигналов;

б) малых входных сигналах;

в) больших входных сигналах.

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

1. П-регуляторы наилучшим образом приспособлены для управления быстропеременными процессами, между значениями которых, даже близкими по времени появления

- а) существует слабая взаимосвязь;
- б) существует тесная взаимосвязь;
- в) отсутствует тесная взаимосвязь.

2. Реакцию объекта на воздействие произвольного вида можно определить с помощью

- а) передаточной функции;
- б) интеграла Дюамеля;
- в) амплитудно-частотной характеристики.

3. При разбиении объекта на звенья направленного действия математическое описание каждого такого звена может быть составлено ... его связей с другими звеньями.

- а) без учета;
- б) с учетом;
- в) на основании анализа.

4. Критерий Найквиста применим для систем с распределенными параметрами и транспортным запаздыванием, передаточные функции которых

- а) несложно определить;
- б) известны;
- в) трансцендентны.

5. Для определения спектральной плотности сигнала необходимо найти его

- а) амплитуду;
- б) корреляционную функцию;
- в) статистические характеристики.

6. Критерий среднего квадрата ошибки получил распространение благодаря тому, что он прост в математическом отношении и во многих практических задачах управления является ... мерой успешности их решения.

- а) удовлетворительной;
- б) обоснованной;
- в) единственной.

7. Для линейных стационарных систем условия робастности выполняются, если ... полюсы их передаточных функций удовлетворяют требованиям (6.3.1).

- а) все;
- б) доминирующие;
- в) некоторые.

8. Линейные стационарные системы с многопараметрическими регуляторами при выполнении для них условий робастности имеют ... доминирующих полюсов.

- а) семь;
- б) четыре;
- в) шесть.

9. Коррекция сигнала задания наиболее эффективна в ... режимах работы объекта управления.

- а) пусковых;
- б) установившихся;
- в) аварийных.

10. Частотные характеристики дискретных систем являются ... функциями.

- а) вещественными;
- б) комплексными;
- в) периодическими.

11. Применение методов адаптивного управления позволяет успешно парировать действующие на систему ... возмущения.

- а) случайные;
- б) мультипликативные;
- в) детерминированные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ротач В. Я.** Теория автоматического управления: Учебник для вузов. М. : Изд-во МЭИ, 2004.
2. **Ротач В. Я.** Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами: Учебник для вузов. М. : Энергоатомиздат, 1985.
3. **Попов Е. П.** Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие для втузов. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
4. **Попов Е. П.** Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988.
5. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. / Под ред. Н. Д. Егупова. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.
6. Теория автоматического управления / С. Е. Душин, Н. С. Зотов, Д. Х. Имаев и др.; под ред. В. Б. Яковлева. М. : Высшая школа, 2003.
7. **Шавров А. В., Коломиец А. П.** Автоматика: Учебник для вузов. М. : Колос, 1999.
8. **Шавров А. В., Солдатов В. В.** Многокритериальное управление в условиях статистической неопределенности. М. : Машиностроение, 1990.
9. **Бородин И. Ф., Судник Ю. А.** Автоматизация технологических процессов: Учебник для вузов. М. : КолосС, 2003.
10. **Бесекерский В. А., Небылов А. В.** Робастные системы автоматического управления. М. : Наука, 1983.
11. Теория автоматического управления: Учеб. для машиностроит. спец. вузов / В. Н. Брюханов, М. Г. Косов, С. П. Протопопов, Ю. М. Соломенцев, Н. М. Султан-Заде, А. Г. Схиртладзе; Под ред. Ю. М. Соломенцева. М. : Высшая школа, 2000.
12. **Куо Б.** Теория и проектирование цифровых систем управления. М. : Машиностроение, 1984.
13. **Леоненков А. В.** Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб. : БХВ-Петербург, 2003.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ УТВЕРЖДЕНИЙ

П1.1. Доказательство теоремы 1.1. Передаточную функцию линейного стационарного объекта $W_{об}(s)$ можно представить в виде

$$W_{об}(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{h=0}^n a_h s^h}, \quad (\text{П1.1.1})$$

где m и n – целые числа, причем $n > m \geq 0$; b_k и a_h – вещественные коэффициенты.

Для объектов с сосредоточенными параметрами величины m и n принимают конечные значения, а в случае объектов с пространственно распределенными параметрами их значения стремятся к бесконечности.

Пусть

$$\sum_{k=0}^m b_k s^k = R_b(s) + I_b(s); \quad \sum_{h=0}^n a_h s^h = R_a(s) + I_a(s), \quad (\text{П1.1.2})$$

где функции $R_a(s)$ и $R_b(s)$ содержат лишь нулевую и четные степени переменной s , а в функции $I_a(s)$ и $I_b(s)$ эта переменная входит в нечетных степенях.

Выполним в выражении (П1.1.1) замену $s = i\omega$, где i – мнимая единица, а ω – частота. Тогда функции $R_a(i\omega)$ и $R_b(i\omega)$ принимают вещественные значения, а значения функций $I_a(i\omega)$ и $I_b(i\omega)$ являются чисто мнимыми.

Функции

$$f_b(\omega) = \text{Re} \sum_{k=0}^m b_k (i\omega)^k = R_b(i\omega); \quad (\text{П1.1.3})$$

$$f_a(\omega) = \text{Re} \sum_{h=0}^n a_h (i\omega)^h = R_a(i\omega), \quad (\text{П1.1.4})$$

являются четными, т. е. $f_b(-\omega) = f_b(\omega)$ и $f_a(-\omega) = f_a(\omega)$, т. к. они содержат лишь четные степени переменной ω , а функции

$$g_b(\omega) = \text{Im} \sum_{k=0}^m b_k (i\omega)^k = I_b(i\omega) / i; \quad (\text{П1.1.5})$$

$$g_a(\omega) = \text{Im} \sum_{h=0}^n a_h (i\omega)^h = I_a(i\omega) / i, \quad (\text{П1.1.6})$$

нечетные, т. е. $g_b(-\omega) = -g_b(\omega)$ и $g_a(-\omega) = -g_a(\omega)$, т. к. они содержат лишь нечетные степени переменной ω .

С учетом обозначений (П1.1.1) – (П1.1.6) имеем

$$W_{o\sigma}(i\omega) = \frac{f_b(\omega) + ig_b(\omega)}{f_a(\omega) + ig_a(\omega)}. \quad (\text{П1.1.7})$$

На основании выражения (П1.1.7) приходим к равенству

$$R_{o\sigma}(\omega) = \text{Re} W_{o\sigma}(i\omega) = \frac{f_a(\omega)f_b(\omega) + g_a(\omega)g_b(\omega)}{f_a^2(\omega) + g_a^2(\omega)},$$

из которого следует четность функции $R_{o\sigma}(\omega)$.

Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} R_{o\sigma}(-\omega) &= \frac{f_a(-\omega)f_b(-\omega) + g_a(-\omega)g_b(-\omega)}{f_a^2(-\omega) + g_a^2(-\omega)} = \\ &= \frac{f_a(\omega)f_b(\omega) + [-g_a(\omega)][-g_b(\omega)]}{f_a^2(\omega) + [-g_a(\omega)][-g_a(\omega)]} = \\ &= \frac{f_a(\omega)f_b(\omega) + g_a(\omega)g_b(\omega)}{f_a^2(\omega) + g_a^2(\omega)} = R_{o\sigma}(\omega). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается нечетность функции

$$I_{o\sigma}(\omega) = \text{Im} W_{o\sigma}(i\omega) = \frac{f_a(\omega)g_b(\omega) - g_a(\omega)f_b(\omega)}{f_a^2(\omega) + g_a^2(\omega)}.$$

Поскольку

$$A(\omega) = \sqrt{R_{o\sigma}^2(\omega) + I_{o\sigma}^2(\omega)},$$

то

$$\begin{aligned} A(-\omega) &= \sqrt{R_{o\sigma}(-\omega)R_{o\sigma}(-\omega) + I_{o\sigma}(-\omega)I_{o\sigma}(-\omega)} = \\ &= \sqrt{R_{o\sigma}(\omega)R_{o\sigma}(\omega) + [-I_{o\sigma}(\omega)][-I_{o\sigma}(\omega)]} = A(\omega), \end{aligned}$$

т. е. АЧХ объекта $A(\omega)$ является четной функцией переменной ω .
Ввиду того, что

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left[\frac{I_{o\sigma}(\omega)}{R_{o\sigma}(\omega)} \right],$$

то

$$\begin{aligned} \varphi(-\omega) &= \operatorname{arctg} \left[\frac{I_{o\sigma}(-\omega)}{R_{o\sigma}(-\omega)} \right] = \operatorname{arctg} \left[\frac{-I_{o\sigma}(\omega)}{R_{o\sigma}(\omega)} \right] = \\ &= -\operatorname{arctg} \left[\frac{I_{o\sigma}(\omega)}{R_{o\sigma}(\omega)} \right] = -\varphi(\omega), \end{aligned}$$

т. е. ФЧХ объекта $\varphi(\omega)$ является нечетной функцией переменной ω .

На этом теорема 1.1 доказана.

П1.2. Доказательство теоремы 1.2. Воспользуемся выражением (1.4.5), в котором с учетом устойчивости объекта можно положить $\gamma = 0$. Сделаем также замену переменной интегрирования $s = i\omega$. В результате получим

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega + \frac{1}{2} W_{o\sigma}(0). \quad (\text{П1.2.1})$$

С учетом выражений

$$W_{o\sigma}(i\omega) = \operatorname{Re} W_{o\sigma}(i\omega) + i \operatorname{Im} W_{o\sigma}(i\omega);$$

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t),$$

равенство (П1.2.1) представим в виде

$$h(t) = \sum_{k=1}^4 I_k(t) + \frac{1}{2} W_{o\sigma}(0), \quad (\text{П1.2.2})$$

где

$$I_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \operatorname{Re} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega; \quad (\text{П1.2.3})$$

$$I_2(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \operatorname{Im} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega; \quad (\text{П1.2.4})$$

$$I_3(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \operatorname{Re} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega; \quad (\text{П1.2.5})$$

$$I_4(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \operatorname{Im} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega. \quad (\text{П1.2.6})$$

Покажем, что выполняется равенство

$$I_3(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \operatorname{Re} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega. \quad (\text{П1.2.7})$$

Примем во внимание, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \operatorname{Re} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^0 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \operatorname{Re} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega + \\ &+ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \operatorname{Re} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (\text{П1.2.8})$$

Выполним также ряд преобразований

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \operatorname{Re} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega &= - \int_0^{-\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \operatorname{Re} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \operatorname{Re} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (\text{П1.2.9})$$

На основании равенств (П1.2.8) и (П1.2.9) заключаем о справедливости равенства (П1.2.7).

Аналогично устанавливается выполнение равенства

$$I_4(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \operatorname{Im} W_{o\sigma}(i\omega) d\omega. \quad (\text{П1.2.10})$$

Ввиду нечетности подынтегральных функций в выражениях (П1.2.3) (П1.2.4) имеем

$$I_1(t) = I_2(t) = 0. \quad (\text{П1.2.11})$$

С учетом равенств (П1.2.7), (П1.2.10) и (П1.2.11) выражение (П1.2.2) представим в виде

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \operatorname{Re} W_{o6}(i\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \operatorname{Im} W_{o6}(i\omega) d\omega + \frac{1}{2} W_{o6}(0). \quad (\text{П1.2.12})$$

Поскольку $h(t) = 0$, при $t \leq 0$, то из (П1.2.12) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \operatorname{Im} W_{o6}(i\omega) d\omega + \frac{1}{2} W_{o6}(i\omega) = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \operatorname{Re} W_{o6}(i\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (\text{П1.2.13})$$

Исходя из равенств (П1.2.12) и (П1.2.13) убеждаемся в справедливости равенства (1.3.6).

На этом теорема 1.2. доказана.

П1.3. Доказательство теоремы 3.1. Покажем, что выполняется равенство

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \ln W_{y_{3д}\varepsilon}(s) ds = 0. \quad (\text{П1.3.1})$$

С этой целью для передаточной функции $W_{y_{3д}\varepsilon}(s)$ воспользуемся выражением (3.1.19), принимая при этом во внимание равенства (3.5.1) и (3.5.3). В результате получим

$$W_{y_{3д}\varepsilon}(s) = \frac{s^\mu Q_{o6}(s)}{s^\mu Q_{o6}(s) + R_{o6}(s)R_{пер}(s)}. \quad (\text{П1.3.2})$$

Полиномы в числителе и знаменателе выражения (П1.3.2) представим в виде

$$s^\mu Q_{o6}(s) = \sum_{k=0}^{\sigma} a_k s^{k+\mu};$$

$$s^\mu Q_{o6}(s) + R_{o6}(s)R_{пер}(s) = \sum_{k=0}^n \alpha_k s^k,$$

причем согласно (2.5.4) выполняются равенства

$$\alpha_n = a_\sigma; \alpha_{n-1} = a_{\sigma-1}. \quad (\text{П1.3.3})$$

Рассмотрим интеграл

$$\oint_{\Gamma} \ln W_{y_{\text{зд}}\varepsilon}(s) ds, \quad (\text{П1.3.4})$$

где Γ – замкнутый контур интегрирования, лежащий в правой полуплоскости и выбираемый так, чтобы подынтегральная функция в выражении (П1.3.4) не имела внутри него особенностей, которым соответствуют нули полиномов числителя и знаменателя функции $W_{y_{\text{зд}}\varepsilon}(s)$, т. е. значения s при которых выполняются равенства

$$Q_{\text{об}}(s) = 0; \quad (\text{П1.3.5})$$

$$\Delta(s) = s^\mu Q_{\text{об}}(s) + R_{\text{об}}(s)R_{\text{пер}}(s) = 0, \quad (\text{П1.3.6})$$

а также $s = 0$, если $\mu = 1$.

В силу требований (3.5.2) и (3.5.5) равенства (П1.3.5) и (П1.3.6) не могут выполняться в тех случаях, когда комплексная переменная s имеет положительную вещественную часть.

Рассмотрим случай, когда $\mu = 1$ и подынтегральная функция в выражении (П1.3.4) имеет особенность при $s = 0$.

При данных обстоятельствах контур интегрирования Γ выберем так, как показано на рисунке П1.1, т. е. состоящим из двух полуокружностей C_R и C_r , радиусов R и r соответственно, а также двух отрезков прямых длины $R - r$, расположенных на мнимой оси.

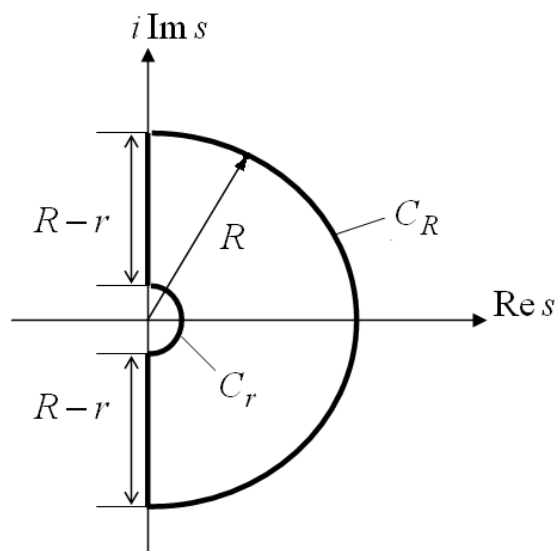


Рисунок П1.1 – Контур интегрирования Γ

Поскольку функция $\ln W_{y_{зд}\varepsilon}(s)$ внутри этого контура не имеет особенностей, то для интеграла (П1.3.4) выполняется равенство

$$\oint_{\Gamma} \ln W_{y_{зд}\varepsilon}(s) ds = 0. \quad (\text{П1.3.7})$$

Покажем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \ln W_{y_{зд}\varepsilon}(s) ds = 0. \quad (\text{П1.3.8})$$

Поскольку

$$Q_{об}(0) \neq 0; \Delta(0) = R_{об}(0)R_{пер}(0) \neq 0,$$

то с учетом выражения (П1.3.2) приходим к выводу, что соотношение (П1.3.8) выполняется, если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{C_r} \ln s ds = 0. \quad (\text{П1.3.9})$$

Поскольку при интегрировании по контуру C_r имеет место равенство

$$s = re^{i\varphi},$$

то соотношение (П1.3.9) принимает вид

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} ir \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\varphi} (\ln r + i\varphi) d\varphi = \\ & = \lim_{r \rightarrow 0} ir \ln r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\varphi} d\varphi - \lim_{r \rightarrow 0} r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\varphi} \varphi d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (\text{П1.3.10})$$

На основании (П1.3.10) приходим к выводу о выполнении равенства (П1.3.9).

Покажем также, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_R} \ln W_{y_{зд}\varepsilon}(s) ds = 0. \quad (\text{П1.3.11})$$

Пусть $s = e^{i\varphi}R$ и $R \rightarrow \infty$, тогда

$$\ln W_{y_{зд}\varepsilon}(s) = \ln \frac{s^\mu Q_{об}(s)}{s^\mu Q_{об}(s) + R_{об}(s)R_{пер}(s)} =$$

$$= \ln \frac{\sum_{k=0}^{\sigma} a_k s^{k+\mu}}{\sum_{k=0}^n \alpha_k s^k} = \ln \frac{1 + \frac{a_{\sigma-1}}{Ra_{\sigma}} e^{-i\varphi} + o\left(\frac{1}{R}\right)}{1 + \frac{\alpha_{n-1}}{R\alpha_n} e^{-i\varphi} + o\left(\frac{1}{R}\right)}. \quad (\text{П1.3.12})$$

С учетом равенств (П1.3.3) выражение (П1.3.12) представим в виде

$$\begin{aligned} \ln W_{y_{3d}\varepsilon}(s) &= \ln \frac{1 + \frac{a_{\sigma-1}}{Ra_{\sigma}} e^{-i\varphi} + O\left(\frac{1}{R^2}\right)}{1 + \frac{a_{\sigma-1}}{Ra_{\sigma}} e^{-i\varphi} + O\left(\frac{1}{R^2}\right)} = \\ &= \ln \left\{ \left[1 + \frac{a_{\sigma-1}}{Ra_{\sigma}} e^{-i\varphi} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right] \left[1 - \frac{a_{\sigma-1}}{Ra_{\sigma}} e^{-i\varphi} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right] \right\} = \\ &= \ln \left[1 - R^{-2} \left(\frac{a_{\sigma-1}}{a_{\sigma}} \right)^2 e^{-i2\varphi} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right] = \\ &= -\frac{1}{R^2} \left(\frac{a_{\sigma-1}}{a_{\sigma}} \right)^2 e^{-i2\varphi} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \end{aligned} \quad (\text{П1.3.13})$$

причем величина $O(1/R^2)$ удовлетворяет условию

$$R^2 O\left(\frac{1}{R^2}\right) < C,$$

где C – некоторая постоянная положительная величина.

Принимая во внимание (П1.3.13) можем заключить о выполнении равенства (П1.3.11).

Поскольку

$$\oint_{\Gamma} \ln W_{y_{3d}\varepsilon}(s) ds = \int_{C_R} \ln W_{y_{3d}\varepsilon}(s) ds + \int_{C_r} \ln W_{y_{3d}\varepsilon}(s) ds + \\ + \int_{+i\infty}^{-i\infty} \ln W_{y_{3d}\varepsilon}(s) ds,$$

то с учетом (П1.3.7), (П1.3.9) и (П1.3.11) установим выполнение равенства (П1.3.1).

Ввиду того, что

$$\begin{aligned} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \ln W_{y_{3д}\varepsilon}(s) ds &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \ln W_{y_{3д}\varepsilon}(i\omega) d\omega = \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |W_{y_{3д}\varepsilon}(i\omega)| d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} \arg W_{y_{3д}\varepsilon}(i\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (\text{П1.3.14})$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \arg W_{y_{3д}\varepsilon}(i\omega) d\omega = 0,$$

то, поскольку

$$\arg W_{y_{3д}\varepsilon}(-i\omega) = -\arg W_{y_{3д}\varepsilon}(i\omega),$$

в результате получим

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \ln W_{y_{3д}\varepsilon}(s) ds = i \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |W_{y_{3д}\varepsilon}(i\omega)| d\omega. \quad (\text{П1.3.15})$$

На основании установленных равенств (П1.3.1) и (П1.3.15) можно заключить о выполнении равенства (3.5.6) в условии доказываемой теоремы.

На этом теорема 3.1 доказана.

П1.4. Доказательство теоремы 3.2. Поскольку объект управления с передаточной функцией (3.5.6) предполагается устойчивым, то для нулей s_g $g = \overline{1, \sigma}$ полинома $Q_{об}(s)$ выполняются требования (3.5.2).

Примем также во внимание требования (3.5.5) к корням характеристического уравнения $\Delta(s) = 0$.

В результате установим, что функция $\ln W_{y_{3д}\varepsilon}(s)$ не имеет особенностей внутри контура Γ , представленного на рисунке П1.1.

В таком случае выполняется равенство (П1.3.7), откуда следует, что

$$\int_{+i\infty}^{-i\infty} \ln W_{y_{3д}\varepsilon}(s) ds = 0, \quad (\text{П1.4.1})$$

Т. К.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \ln W_{y_{зд}\varepsilon}(s) ds = 0. \quad (\text{П1.4.2})$$

Действительно, поскольку имеет место равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \ln W_{y_{зд}\varepsilon}(R \cos \varphi + iR \sin \varphi) = \ln 1 = 0,$$

где φ – угол между вещественной осью и комплексным вектором s , то можем заключить о выполнении равенства (П1.4.2).

Далее, действуя так же, как и при доказательстве теоремы 3.1, установим выполнение равенства (3.5.6).

П1.5. Доказательство достаточности теоремы 6.1. Поскольку характеристическое уравнение

$$\Delta(s) = 0, \quad (\text{П1.5.1})$$

замкнутой линейной стационарной системы имеет вещественные коэффициенты, то все его корни вещественные, либо комплексно-сопряженные.

Рассмотрим вначале случай, когда все корни s_k , $k=\overline{1, n}$ уравнения (П1.5.1) являются вещественными. Тогда в силу ограничения (3.3.3) система устойчива и поэтому выполняются неравенства

$$s_k < 0, \quad k=\overline{1, n}. \quad (\text{П1.5.2})$$

Воспользуемся известным неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n |s_k|} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |s_k|. \quad (\text{П1.5.3})$$

Принимая во внимание (6.2.23) и (П1.5.3) получим

$$\alpha_0 \leq \alpha_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |s_k| \right)^n. \quad (\text{П1.5.4})$$

С учетом неравенств (П1.5.2) неравенство (П1.5.4) принимает вид

$$\alpha_0 \leq \alpha_n \left(-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k \right)^n. \quad (\text{П1.5.5})$$

Подставив в неравенство (П1.5.5) выражение (6.2.21) получим

$$\alpha_0 \leq \alpha_n \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n n} \right)^n. \quad (\text{П1.5.6})$$

Исходя из (П1.5.6) и принимая во внимание неравенство (6.2.25) имеем

$$\alpha_0 \leq \alpha_n \left(\frac{C_s}{n} \right)^n. \quad (\text{П1.5.7})$$

Таким образом, как это видно из неравенства (П1.5.7), величина α_0 ограничена сверху, причем неравенство (П1.5.7) превращается в равенство лишь в том случае, если

$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = -\frac{C_s}{n}. \quad (\text{П1.5.8})$$

Следовательно, лишь в случае кратных вещественных корней достигается максимум величины α_0 .

Но кратные вещественные корни – это частный случай комплексно-сопряженных корней. Поэтому при четных значениях n в силу требований (П1.5.8) каждый из корней s_k , $k=\overline{1, n}$ без ущерба для общности рассмотрения можно представить в виде

$$s_k = \beta_k + i\omega_k, \quad k=\overline{1, n}.$$

Согласно выражению (П1.5.9) имеем

$$|s_k| = |\beta_k| \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_k}{\beta_k} \right)^2}, \quad k=\overline{1, n}. \quad (\text{П1.5.10})$$

С учетом (6.2.23) и (П1.5.10) получим

$$\alpha_0 = \alpha_n \prod_{k=1}^n |\beta_k| \prod_{k=1}^n \left| \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_k}{\beta_k} \right)^2} \right|. \quad (\text{П1.5.11})$$

Ввиду ограничения (3.3.4) выполняются неравенства

$$\sqrt{1+\left(\frac{\omega_k}{\beta_k}\right)^2} \leq \sqrt{1+\frac{1}{m_{\Pi}^2}}, \quad k=\overline{1,n}. \quad (\text{П1.5.12})$$

В таком случае с учетом (П1.5.12) имеем

$$\prod_{k=1}^n \sqrt{1+\left(\frac{\omega_k}{\beta_k}\right)^2} \leq \left(1+\frac{1}{m_{\Pi}^2}\right)^{\frac{n}{2}}. \quad (\text{П1.5.13})$$

Кроме того, как уже было установлено выше

$$\prod_{k=1}^n |\beta_k| \leq \left(\frac{C_s}{n}\right)^n. \quad (\text{П1.5.14})$$

С учетом соотношений (П1.5.13) и (П1.5.14) неравенство (П1.5.11) можно представить в виде

$$\alpha_0 \leq \alpha_n \left(\frac{C_s}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{m_{\Pi}^2}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad (\text{П1.5.15})$$

причем знак равенства в (П1.5.15) имеет место лишь при выполнении требований (6.3.1).

В случае нечетных значений n неравенство (П1.5.15) принимает вид

$$\alpha_0 \leq \alpha_n \left(\frac{C_s}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{m_{\Pi}^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (\text{П1.5.16})$$

причем (П1.5.16) превращается в строгое равенство лишь при выполнении требований (6.3.1).

Таким образом, доказано, что при выполнении требований (6.3.1) свободный член характеристического уравнения замкнутой системы α_0 достигает максимума.

Доказательство необходимости теоремы 6.1. Пусть величина α_0 принимает максимальное значение. Но в таком случае необходимо обеспечить обращение в равенства неравенств (П1.5.14) и соответственно для четных и нечетных значений n неравенств (П1.5.15) и (П1.5.16). А поскольку эти неравенства обращаются в равенства лишь при выполнении требований (6.3.1), то необходимость теоремы 6.1 доказана.

П1.6. Доказательство теоремы 6.2. Рассмотрим вначале случай, когда все корни s_k , $k=1, n$ характеристического уравнения (П1.5.1) являются вещественными.

При данных обстоятельствах величина $|\Delta(i\omega)|^2$ определяется выражением

$$|\Delta(i\omega)|^2 = \alpha_n^2 \prod_{k=1}^n (s_k^2 + \omega^2). \quad (\text{П1.6.1})$$

Поскольку местонахождение локальных экстремумов функций $|\Delta(i\omega)|$, $|\Delta(i\omega)|^2$ и $\ln|\Delta(i\omega)|^2$ совпадает, то более удобно исследовать функцию

$$\ln|\Delta(i\omega)|^2 = \ln \alpha_n^2 + \sum_{k=1}^n \ln(s_k^2 + \omega^2). \quad (\text{П1.6.2})$$

Установим координаты точек локальных экстремумов функции (П1.6.2) с учетом, вытекающего из соотношений (6.2.21) и (6.2.25), ограничения

$$-\sum_{k=1}^n s_k = C_s. \quad (\text{П1.6.3})$$

Для этого, воспользовавшись методом неопределенных множителей Лагранжа, образуем новую функцию

$$F(s_1, s_2, \dots, s_n, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \ln|\Delta(i\omega)|^2 + \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^n s_k + C_s \right), \quad (\text{П1.6.4})$$

где λ_0 и λ_1 – множители Лагранжа.

Точки локальных экстремумов функции (П1.6.4) совпадают с экстремальными точками функции (П1.6.2) при ограничении (П1.6.3).

Местонахождение локальных экстремумов определяется из уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial s_k} = \frac{\partial \ln|\Delta(i\omega)|^2}{\partial s_k} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 0, \quad k=1, n; \quad (\text{П1.6.5})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \sum_{k=1}^n s_k + C_s = 0. \quad (\text{П1.6.6})$$

Принимая во внимание выражение (П1.6.1) уравнения (П1.6.5) представим в виде

$$\frac{s_k}{s_k^2 + \omega^2} = -\frac{\lambda_1}{2\lambda_0}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (\text{П1.6.7})$$

Равенства (П1.6.7) выполняются для любого значения ω лишь в том случае, если

$$s_1 = s_2 = \dots = s_n. \quad (\text{П1.6.8})$$

Исходя из равенств (П1.6.8) и уравнения (П1.6.6) установим значения координат локального экстремума

$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = -\frac{C_s}{n}. \quad (\text{П1.6.9})$$

Таким образом, функция (П1.6.2), при наличии ограничения (П1.6.3), имеет единственный локальный экстремум. Вид этого экстремума можно установить, сравнив значения функции (П1.6.1) в экстремальной точке (П1.6.9), и на границе области допустимых значений.

Поскольку, в силу ограничения (3.3.3), система устойчива, то выполняются неравенства (П1.5.2). С учетом этих неравенств и ограничения (П1.6.3) на границе области допустимых значений имеют место равенства

$$s_1 = s_2 = \dots = s_{n-1} = 0; \quad s_n = -C_s. \quad (\text{П1.6.10})$$

Воспользовавшись выражением (6.3.3), равенства (П1.6.9) и (П1.6.10) соответственно представим в виде

$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = -m_{\Pi} \omega_*. \quad (\text{П1.6.11})$$

$$s_1 = s_2 = \dots = s_{n-1} = 0; \quad s_n = -n m_{\Pi} \omega_*. \quad (\text{П1.6.12})$$

В таком случае, подставляя значения s_k , $k = \overline{1, n}$, заданные равенствами (П1.6.11) и (П1.6.12), в выражение (П1.6.1) установим, что функция (П1.6.1) достигает локального максимума при выполнении (П1.6.11), если справедливо следующее неравенство:

$$\left(1 + m_{\Pi}^2 \frac{\omega_*^2}{\omega^2}\right)^n > 1 + n^2 m_{\Pi}^2 \frac{\omega_*^2}{\omega^2}. \quad (\text{П1.6.13})$$

Как видно из (П1.6.13), это неравенство заведомо выполняется при малых значениях ω и нарушается когда ω велико. Следовательно, существует $\omega = \omega_1$ при котором неравенство (П1.6.13) превращается в равенство, т. е.

$$\left(1 + m_{\Pi}^2 \frac{\omega_*^2}{\omega_1^2}\right)^n > 1 + n^2 m_{\Pi}^2 \frac{\omega_*^2}{\omega_1^2}. \quad (\text{П1.6.14})$$

Таким образом, в случае вещественных корней характеристического уравнения (П1.5.1) и выполнении требований (П1.6.11) величина $|\Delta(i\omega)|^2$ принимает максимальное значение, если

$$|\omega| < \omega_1, \quad (\text{П1.6.15})$$

причем ω_1 – решение уравнения (П1.6.14).

Поскольку существует интервал частот (П1.6.15), в котором $|\Delta(i\omega)|^2$ принимает максимальное значение при вещественных кратных корнях уравнения (П1.5.1), то в случае четных n без потери общности рассмотрения можно считать все корни комплексносопряженными. Это означает, что выполняются равенства (П1.5.9). В таком случае выражение (П1.6.1) принимает вид

$$|\Delta(i\omega)|^2 = \alpha_n^2 \prod_{k=1}^n [\beta_k^4 + 2(\omega^2 + \omega_k^2)\beta_k^2 + (\omega^2 - \omega_k^2)^2]. \quad (\text{П1.6.16})$$

Подставив в равенство (П1.6.3) выражения (П1.5.9), получим

$$-\sum_{k=1}^n \beta_k = C_s. \quad (\text{П1.6.17})$$

Кроме того, ввиду ограничения (3.3.4) имеют место неравенства

$$\omega_k^2 \leq \frac{\beta_k^2}{m_{\Pi}^2}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (\text{П1.6.18})$$

Согласно (П1.6.18) максимум величин ω_k^2 достигается при выполнении равенств

$$\omega_k^2 = \frac{\beta_k^2}{m_{\Pi}^2}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (\text{П1.6.19})$$

С учетом (П1.6.19) выражение (П1.6.16) принимает вид

$$|\Delta(i\omega)|^2 = \alpha_n^2 \prod_{k=1}^n \left[\beta_k^4 + 2 \left(\omega^2 + \frac{\beta_k^2}{m_{\Pi}^2} \right) \beta_k^2 + \left(\omega^2 - \frac{\beta_k^2}{m_{\Pi}^2} \right)^2 \right]. \quad (\text{П1.6.20})$$

Проверим теперь, в каком случае подстановка (П1.6.19) в (П1.6.16) способствует возрастанию функции $|\Delta(i\omega)|^2$. С этой целью установим, когда выполняется неравенство

$$\beta_k^4 + 2 \left(\omega^2 + \frac{\beta_k^2}{m_{\Pi}^2} \right) \beta_k^2 + \left(\omega^2 - \frac{\beta_k^2}{m_{\Pi}^2} \right)^2 > (\beta_k^2 + \omega^2)^2. \quad (\text{П1.6.21})$$

Данное неравенство имеет место, когда

$$\omega^2 < \beta_k^2 \left(1 + \frac{1}{2m_{\Pi}^2} \right), \quad k = \overline{1, n}. \quad (\text{П1.6.22})$$

Следовательно, при выполнении неравенства (П1.6.22) справедливы выражения (П1.6.19) и поэтому необходимо установить локальные экстремумы функции

$$\ln |\Delta(i\omega)|^2 = \ln \alpha_n^2 + \sum_{k=1}^n \ln \left[\beta_k^4 + 2 \left(\omega^2 + \frac{\beta_k^2}{m_{\Pi}^2} \right) \beta_k^2 + \left(\omega^2 - \frac{\beta_k^2}{m_{\Pi}^2} \right)^2 \right], \quad (\text{П1.6.23})$$

при ограничении (П1.6.17).

Снова применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим на этот раз функцию

$$F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \ln |\Delta(i\omega)|^2 + \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^n \beta_k + C_s \right). \quad (\text{П1.6.24})$$

Расположение локальных экстремумов функции F определяется уравнениями

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \ln |\Delta(i\omega)|^2}{\partial \beta_k} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (\text{П1.6.25})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \sum_{k=1}^n \beta_k + C_s = 0. \quad (\text{П1.6.26})$$

С учетом выражения (П1.6.23) уравнения (П1.6.25) и (П1.6.26) принимают вид

$$\frac{\beta_k^3 \left(1 + \frac{3}{m_{\Pi}^2}\right) + \beta_k \omega^2 \left(1 - \frac{1}{m_{\Pi}^2}\right)}{\beta_k^4 + 2 \left(\omega^2 + \frac{\beta_k^2}{m_{\Pi}^2}\right) \beta_k^2 + \left(\omega^2 - \frac{\beta_k^2}{m_{\Pi}^2}\right)^2} = -\frac{\lambda_1}{4\lambda_0}, \quad k = \overline{1, n}; \quad (\text{П1.6.27})$$

$$\sum_{k=1}^n \beta_k + C_s = 0. \quad (\text{П1.6.28})$$

Равенства (П1.6.27) имеют место лишь в том случае, если

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n. \quad (\text{П1.6.29})$$

Исходя из (П1.6.28) и (П1.6.29) получим

$$\beta_k = -\frac{C_s}{n} = -m_{\Pi} \omega_*, \quad k = \overline{1, n}. \quad (\text{П1.6.30})$$

С учетом (П1.6.30) выражения (П1.6.19) принимают вид

$$\omega_k^2 = \frac{\beta_k^2}{m_{\Pi}^2} = \omega_*^2, \quad k = \overline{1, n}. \quad (\text{П1.6.31})$$

При подстановке выражений (П1.6.31) в неравенства (П1.6.22) получим

$$\frac{\omega_*^2}{\omega^2} > \frac{1}{m_{\Pi}^2 + \frac{1}{2}}. \quad (\text{П1.6.32})$$

Неравенство (П1.6.32) выполняется при малых значениях ω и нарушается, когда значения ω велики. В таком случае существует $\omega = \omega_2$ при котором неравенство (П1.6.32) превращается в равенство, т. е.

$$\omega_2^2 = \omega_*^2 \left(m_{\Pi}^2 + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{П1.6.33})$$

При данных обстоятельствах выполнение неравенства (П1.6.32) обеспечивается, если

$$|\omega| < \omega_2. \quad (\text{П1.6.34})$$

Таким образом, функция (П1.6.20) при ограничении (П1.6.17) имеет единственный локальный экстремум, местоположение которого определяется равенствами (П1.6.30) и (П1.6.31). Поскольку этот экстремум единственный, то его вид можно установить, если сравнить значение функции (П1.6.16) в экстремальной точке с ее значением на границе области допустимых значений. Следовательно, при выполнении равенств (П1.6.30) и (П1.6.31) функция (П1.6.16) достигает максимума, если справедливо неравенство

$$\left[m_{\Pi}^4 \frac{\omega_*^4}{\omega^4} + 2m_{\Pi}^2 \left(1 + \frac{\omega_*^2}{\omega^2} \right) \frac{\omega_*^2}{\omega^2} + \left(1 - \frac{\omega_*^2}{\omega^2} \right)^2 \right]^N > 1 + 4N^2 m_{\Pi}^2 \frac{\omega_*^2}{\omega^2}. \quad (\text{П1.6.35})$$

Неравенство (П1.6.35) заведомо выполняется при малых значениях ω и нарушается, когда ω велико. В таком случае существует $\omega = \omega_{\text{гр}}$, при котором неравенство (П1.6.35) превращается в равенство, т. е.

$$\left[m_{\Pi}^4 \frac{\omega_*^4}{\omega^4} + 2m_{\Pi}^2 \left(1 + \frac{\omega_*^2}{\omega^2} \right) \frac{\omega_*^2}{\omega^2} + \left(1 - \frac{\omega_*^2}{\omega^2} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}} = 1 + n^2 m_{\Pi}^2 \frac{\omega_*^2}{\omega^2}. \quad (\text{П1.6.36})$$

Следовательно, неравенство (П1.6.35) имеет место, если

$$\omega = \omega_{\text{гр}}. \quad (\text{П1.6.37})$$

В результате доказано, что в случае четных значений n величина $|\Delta(i\omega)|$ достигает максимума в интервале частот, заданным неравенством (П1.6.37), если расположение полюсов системы удовлетворяет требованиям (6.3.1).

На этом теорема 6.2 доказана.

П1.7. Доказательство достаточности теоремы 6.3. Пусть

$$\operatorname{Re} s_k = \beta_k = -\frac{C_s}{n} + \Delta\beta_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (\text{П1.7.1})$$

где $\Delta\beta_k$ – вещественные величины. Тогда ввиду ограничения (3.3.3) выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^n \Delta\beta_k \geq 0, \quad (\text{П1.7.2})$$

с учетом которого можно установить справедливость неравенства

$$\Delta\beta^* \geq 0, \quad (\text{П1.7.3})$$

где

$$\Delta\beta^* = \max_{k = \overline{1, n}} \Delta\beta_k. \quad (\text{П1.7.4})$$

В таком случае согласно (3.3.1), (П1.7.1), (П1.7.3) и (П1.7.4) должно выполняться равенство

$$\eta = \frac{C_s}{n} - \Delta\beta^*. \quad (\text{П1.7.5})$$

Принимая во внимание равенство (П1.7.5) и неравенство (П1.7.3) приходим к выводу, что величина η достигает максимума, если

$$\Delta\beta^* = 0. \quad (\text{П1.7.6})$$

Согласно (П1.7.2), (П1.7.4) можно заключить, что при выполнении (П1.7.6) справедливы также следующие равенства:

$$\Delta\beta_k = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (\text{П1.7.7})$$

Поскольку при выполнении требований (4.10) имеют место равенства

$$\operatorname{Re} s_k = \beta_k = -\frac{C_s}{n}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (\text{П1.7.8})$$

то с учетом (П1.7.1) и (П1.7.7) можно сделать вывод о максимизации величины η .

Достаточность теоремы 6.3 доказана.

Доказательство необходимости теоремы 6.3. Ввиду (1.52) выполняются следующие соотношения:

$\eta \leq -\beta_k, \quad k = \overline{1, n}$, с учетом которых, а также вытекающего из (6.2.25) ограничения

$$-\sum_{k=1}^n s_k = -\sum_{k=1}^n \beta_k \leq C_s, \quad (\text{П1.7.10})$$

приходим к неравенству

$$\eta \leq \frac{C_s}{n}.$$

Следовательно, при выполнении требования максимальности величины η имеет место равенство

$$\eta \leq \frac{C_s}{n}. \quad (\text{П1.7.11})$$

Согласно (П1.7.9), (П1.7.10) и (П1.7.11) выполняется соотношение

$$C_s \leq -\sum_{k=1}^n \beta_k \leq C_s,$$

которое имеет место лишь в том случае, если

$$-\sum_{k=1}^n \beta_k = C_s.$$

Ввиду (П1.7.9) и (П1.7.11) это равенство может выполняться лишь тогда, когда значения величин β_k , $k=\overline{1, n}$ определяются выражениями (П1.7.9), что обеспечивает выполнение требований (6.3.1).

Необходимость теоремы 6.3 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ОТВЕТЫ НА ТЕСТЫ

Тест В

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	в	б	а	б	б	а	в	а	в	б

Тест 1

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	а	в	б	а	в	б	б	а	в	б

Тест 2

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	б	а	а	в	а	в	б	в	а	в

Тест 3

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	б	а	в	б	в	а	б	в	а	в

Тест 4

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	в	а	в	а	в	б	а	б	в	б

Тест 5

Номер вопроса	1	2	3	4	5
Ответ	а	в	а	а	а

Тест 6

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	в	а	б	а	в	а	а	в	а	б

Тест 7

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	а	б	а	б	в	б	б	в	а	а

Тест 8

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	а	в	б	в	в	б	а	в	б	а

Тест 9

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	в	а	б	а	б	в	а	в	б	в

Тест 10

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	а	б	а	в	б	а	б	в	а	б

Тест 11

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	б	а	в	б	а	в	б	а	в	б

Учебное издание

Судник Юрий Александрович

Солдатов Виктор Владимирович

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Оригинал-макет *Светлана Минченко*

Дизайн обложки *Роман Бурак*

Подписано в печать 02.12.2022. Формат 60x90/16
Усл.-печ. л. 30,75. Тираж 500 экз. Заказ № 43

ООО «Мегаполис»

www.mmegapolis.ru

Тел. 8 (495) 643-28-71

E-mail: mmegapolis-zakaz@yandex.ru

127550, Москва, ул. Прянишникова, д. 23 А

Отпечатано в ПАО «Т8 Издательские Технологии»

Тел.: +7 (499) 322-38-31

109316, Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5