ЭЛЕКТРОТЕХНОЛОГИИ, ЭЛЕКТРИФИКАЦИЯ И АВТОМАТИЗАЦИЯ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА

УДК 631.371:621.31:519.248–192

Н.Н. Сырых, *доктор техн. наук*
Н.Е. Кабдин, *канд. техн. наук*
Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ

В статье авторов [1] сформулированы две основные взаимно связанные задачи, возникающие при статистических исследованиях случайных величин выборочными методами:

1. «Количественная» сторона решения задачи — установление необходимого объема выборки.

2. «Качественная» сторона формирования выборки — из каких единиц случайных величин необходимо формировать выборку, чтобы ее можно рассматривать в качестве представительного образца рассматриваемой генеральной совокупности [2]. Здесь имеется в виду выполнение требований центральной предельной теоремы теории вероятностей [3–6] об условиях замены законов распределения случайных величин нормальным (Гауссовским) законом. Выполнение этого требования достигается использованием случайных чисел и метода статистического моделирования, или, как его часто называют, методом Монте-Карло [2, 3].

Этот метод относится к численным методам решения вероятностно-статистических задач, позволяющий получать реализацию различных испытаний и опытов, не производя в действительности самих испытаний и опытов. Идея метода состоит в «розыгрыше» случайного явления с помощью специальной процедуры, дающей случайный результат. В результате статистического моделирования («розыгрыша») каждый раз получают новую, отличную от других, искусственную реализацию случайного процесса. Множество полученных таким путем реализаций в дальнейшем обрабатывается как статистический материал и из него получают нужные вероятностные характеристики: вероятности, математические ожидания, дисперсии случайных величин и т. д. [2, 4].

В основе «розыгрыша» случайного явления при методе Монте-Карло является получение случайного числа (условно назовем его R), все значения которого лежат в пределах некоторого определенного интервала, причем в пределах этого интервала все значения случайного числа R одинаково вероятны (точнее обладают одной и той же вероятностью). Наиболее подходящей математической моделью получения таких чисел является закон равномерной плотности, при котором случайная величина x на участке от a до b имеет плотность $f(x)$ постоянной C, а вне этого отрезка она равна нулю [6]:

$$f(x)=\begin{cases} C \text{ при } a<x<b, \\ 0 \text{ при } x<a \text{ и } x>b. \end{cases} \qquad (1)$$

Так как площадь, ограниченная кривой распределения плотности $f(x)$, равна единице, то $C = \dfrac{1}{b-a}$.

Функция распределения $F(x)$ закона равномерной плотности выражается площадью кривой распределения, лежащей левее точки x, следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a < x < b, \\ 1 \text{ при } x > b. \end{cases} \quad (2)$$

Математическое ожидание и дисперсия равны:

$$M[x] = \frac{a+b}{2};\ D[x] = \frac{b-a}{12}. \quad (3)$$

Для практической реализации метода Монте-Карло требуется большое количество случайных чисел, которые получены с использованием закона равномерной плотности и представлены в виде таблиц случайных чисел большой размерности (до нескольких сот и более). Так, таблица равномерно распределенных случайных чисел, приведенная в ГОСТ 11.003–73 содержит более 1000 чисел.

Наиболее практичная таблица равномерно распределенных случайных чисел имеется в [5]. Ниже приводится краткая выдержка из этой таблицы и примеры пользования.

Полная таблица содержит случайные числа, равномерно распределенные в интервале от 0 до 10000. Для того чтобы получить отсюда случайные числа x_i, равномерно распределенные в интервале от 0 до 1, нужно все числа таблицы разделить на 10000. Если нужны случайные числа U_i, равномерно распределенные в интервале от a до b, то их можно получить при помощи линейного преобразования:

$$U_i = a + x_i(b - a). \quad (4)$$

Пример 1. Найти 5 случайных величин, равномерно распределенных в интервале от 0 до 1.

Решение. Берем из таблицы первые 5 чисел (можно любые) и делим каждое из них на 10 000. В результате получим: 0,1009; 0,7325; 0,3376; 0,5201; 0,3586.

Пример 2. Найти 3 случайных числа, равномерно распределенных в интервале от 20 до 120.

Решение. Используя первые три числа из таблицы и уравнение (4), в котором полагаем $a = 20$, $b = 120$, получаем

$$20 + 0{,}1009(120 - 20) = 30{,}09;\ 20 + 0{,}7325(120 - 20) = 93{,}25;\ 20 + 0{,}3376(120 - 20) = 57{,}76.$$

Как следует из табл. 1, цифры могут рассматриваться как четыре знака после запятой случайного числа R от 0 до 1. Заметим, что порядок выбора чисел из таблицы произволен: можно, например, так, как они записаны, можно через одну, можно снизу вверх или сверху вниз и т. д., т. е. любым способом, лишь бы выбор числа никак не был связан с его значением. При этом принятая однажды процедура выбора должна сохраняться при неоднократном обращении к таблице.

Используя таблицы случайных чисел, равномерно распределенных в интервале от 0 до 1, можно получить случайные числа, распределенные по любому закону, используя соотношение из работы [5]:

$$x_i = \int_{-\infty}^{y_i} f(y)dy, \quad (5)$$

где x_i — случайны числа, равномерно распределенные в интервале от 0 до 1; $f(y)$ — плотность распределения (плотность вероятности) случайной величины y; y_i — случайные числа, распределенные по закону $f(x)$.

Если случайная величина y определена только на положительной полуоси, то в интеграле (4) нижний предел заменится нулем. Тогда уравнение примет вид

$$x_i = F(y_i), \quad (6)$$

где $F(y_i)$ — функция распределения случайной величины y.

Из уравнения (6) следует, что случайное число y_i является квантилью распределения y, отвечающей вероятности x_i. Поэтому, взяв значение x_i из таблицы случайных чисел, равномерно распределенных в интервале от 0 до 1, можно найти соответствующее значение y_i из таблицы квантилей распределения y.

Заметим, что из таблицы случайных чисел Z_i, отвечающих распределению с математическим ожиданием Z_o и дисперсией σ_x^2, можно получить случайные числа U_i с другими математическими ожиданиями и другими дисперсиями при помощи линейного преобразования:

$$U_i = CZ_i + d. \quad (7)$$

Таблица 1

Фрагмент равномерно-распределенных случайных чисел

1009	7325	3376	5201	3586	3467	3548	7680	9590
3754	2048	564	8947	4296	2480	5240	3720	6361
842	2689	5319	6450	9303	2320	9025	6015	9543
9901	9025	2909	3767	715	3831	1311	6588	6767
1280	7999	7080	1573	6147	6403	2366	5398	9511
6606	5747	1734	727	6850	3669	7361	7065	8183

Из уравнения (7) находим, что

$$M[U_i] = CM[Z_i] + d = CZ_o + d,$$
$$D[U_i] = \sigma^2(U_i) = C^2\sigma^2(Z_i) = C^2\sigma_z^2. \quad (8)$$

В настоящей статье помещены таблицы случайных чисел для трех наиболее распространенных зако-

Таблица 2

Случайные числа нормального распределения

464	137	2455	–323	–68	296	–288	1298	241
60	–2526	–531	–194	543	–1558	187	–1190	–22
1486	–354	–634	697	926	1375	785	–963	–853
1022	–472	1279	3521	571	–1851	194	1192	–501
1394	–555	46	321	2945	1974	–258	412	439

нов распределения — нормальном, Вейбулла–Гнеденко и экспоненциальном с использованием квантилей соответствующих распределений, имеющихся в работе [5] (табл. 2, 3, 4).

В таблице помещены в сокращенном виде случайные числа Z_i для нормального распределения с параметрами $M[Z_i] = 0$ и $\sigma_z = 1000$. Если нужны случайные числа с параметрами $M[U] = U_0$ и $\sigma(U) = \sigma_U$, то их можно получить при помощи линейного преобразования:

$$U_i = U_0 + \frac{Z_i}{1000}\sigma_U. \qquad (9)$$

Пример 3. Найти три случайных числа для нормального распределения с параметрами $U_0 = 0$, $\sigma_U = 1$.

Ответ: используя первые три числа из табл. 2 и уравнение (9), получаем:

$$0 + \frac{464}{1000}\cdot 1 = 0{,}464;\ 0 + \frac{137}{1000}\cdot 1 = 0{,}137;$$

$$0 + \frac{2455}{1000}\cdot 1 = 2{,}455.$$

Пример 4. Найти три случайных числа для нормального распределения с параметрами $U_0 = 1000$, $\sigma_U = 200$.

Ответ: используя первые три числа из табл. 2 и уравнение (9), получаем:

$$1000 + \frac{464}{1000}\cdot 200 = 1093;\ 1000 + \frac{137}{1000}\cdot 200 = 1027;$$

$$1000 + \frac{2455}{1000}\cdot 200 = 1491.$$

Пример 5. Наработка невосстанавливаемого изделия до отказа имеет нормальное распределение с параметрами $U_0 = 1000$ ч, $\sigma_U = 200$ ч. Испытания производятся до отказа всех изделий. Найти одну реализацию результата этих испытаний.

Ответ: используя первые пять чисел из табл. 2 и уравнение (9), получаем:

$$1000 + \frac{464}{1000}\cdot 200 = 1093;$$

$$1000 + \frac{137}{1000}\cdot 200 = 1027;$$

$$1000 + \frac{2455}{1000}\cdot 200 = 1491;$$

$$1000 - \frac{323}{1000}\cdot 200 = 935;$$

$$1000 - \frac{68}{1000}\cdot 200 = 987.$$

Расположив эти числа в порядке возрастания их величины, получим одну реализацию: 935, 987, 1027, 1093, 1491.

Для получения случайных чисел, отвечающих экспоненциальному распределению можно воспользоваться выражением (5), не используя квантили, так как интеграл (5) выражается через элементарные функции (берется) $\lambda\int_0^{y_i} e^{-\lambda y_i}dy = x_i$. После соответствующих преобразований получим

$$y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln x_i. \qquad (10)$$

Подставляя в правую часть уравнения (10) последовательно случайные числа x_i, получим последовательность чисел с экспоненциальным законом распределения.

Краткая выписка из таблицы случайных чисел [5], экспоненциально распределенных с математическим ожиданием $M[Z_i] = 1000$, представлена таблицей [3]. Если нужны случайные числа U_i, отвечающие экспоненциальному распределению с математическим ожиданием U_0, то их можно получить при помощи линейного преобразования:

$$U_i = \frac{Z_i}{1000}U_0. \qquad (11)$$

Пример 6. Найти три случайных числа, отвечающих экспоненциальному распределению с математическим ожиданием $U_0 = 500$.

Ответ: используя первые три числа из табл. 3 и уравнение (11), получаем:

$$\frac{550}{1000}\cdot 500 = 275;\ \frac{426}{1000}\cdot 500 = 213;\ \frac{711}{1000}\cdot 500 = 356.$$

Пример 7. После окончания периода приработки изделия наработка на отказ составляет 500 ч. Найти моменты появления пяти отказов в одной реализации.

Таблица 3

Случайные числа экспоненциального распределения

550	426	711	497	1705	1679	1023	474	424	103
334	68	1705	860	487	54	3433	314	389	1272
305	2856	1651	1358	293	597	307	522	368	616
355	5714	3705	69	216	161	414	18	513	1482
1774	125	585	456	703	1252	1144	903	98	1457

Таблица 4

Случайные числа распределения Вейбулла–Гнеденко

b = 1,5 $M[Z]$ = 1000									
1624	1371	429	292	196	645	995	1869	995	2730
1124	178	2003	1393	638	894	1833	1690	921	929
1284	884	595	1719	212	514	1742	1193	133	1452
634	420	742	696	1447	1383	551	214	364	762
b=2,0 $M[Z]$ = 1000									
1452	969	1124	1559	1061	1998	1037	507	310	1101
359	871	1332	1284	909	1226	454	242	841	565
957	596	969	194	1204	1142	1655	1393	537	1460
688	1203	1128	882	331	350	1540	355	676	341
b = 2,5 $M[Z]$ = 1000									
1579	651	1172	942	1150	1153	1148	392	316	1064
225	1724	462	1059	1288	946	1063	820	1623	1254
946	804	394	1328	454	861	328	179	454	1240
1121	1657	1138	1521	804	775	1510	619	0,744	1465

Ответ: используя первые пять чисел из табл. 3 и уравнение (11), получаем:

$$\frac{550}{1000}\cdot 500 = 275; \frac{426}{1000}\cdot 500 = 213; \frac{711}{1000}\cdot 500 = 356;$$

$$\frac{497}{1000}\cdot 500 = 248; \frac{1705}{1000}\cdot 500 = 852,$$

т. е. следующий ряд случайных чисел 275, 213, 356, 248, 852. Путем последовательного сложения находим моменты появления отказов, ч:

$$275;\ 275 + 213 = 488;\ 488 + 356 = 843;$$
$$843 + 248 = 1091;\ 1091 + 852 = 1943;$$

т. е. 275, 488, 843, 1091 и 1943 ч.

С использованием таблиц равномерно распределенных случайных чисел и квантилей распределения Вейбулла–Гнеденко по изложенной выше методике получены случайные числа Z_i, отвечающие распределению Вейбулла–Гнеденко с параметрами b = 1,5, b = 2,0 и b = 2,5 при математическом ожидании $M[Z_i]$ = 1000. Кратная таблица приведена в табл. 4, полная — в [5]. Если нужны случайные числа U_i, отвечающие распределению Вейбулла–Гнеденко с математическим ожиданием U_0, то их можно получить при помощи линейного распределения:

$$U_i = \frac{Z_i}{M[Z]}U_0. \qquad (12)$$

Пример 8. Найти три случайных числа, отвечающих распределению Вейбулла–Гнеденко с параметрами b = 2, U_0 = 800 ч.

Ответ: используя первые три числа из табл. 4 и уравнение (12), получаем:

$$\frac{1452}{1000}\cdot 500 = 726; \frac{969}{1000}\cdot 500 = 484;$$

$$\frac{1124}{1000}\cdot 500 = 562.$$

Использование равномерно распределенных случайных чисел и чисел, отвечающих рассмотренным распределениям, позволяет решать многие практические задачи с уточненными законами распределения случайных функций (процессов), используя полученные их реализации.

Список литературы

1. Сырых Н.Н., Кабдин Н.Е. Теоретические основы эксплуатации электрооборудования. — М.: Агробизнесцентр, 2007. — 514 с.

2. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. — М.: Физматгиз, 1961. — 480 с.

3. Вентцель Е.С. Исследование операций. — М.: Знание, 1976. — 66 с.

4. Бусленко Н.П. Метод статистического моделирования. — М.: Статистика, 1970. — 112 с.

5. Шор Я.Б., Кузьмин Ф.И. Таблицы для анализа и контроля надежности. — М.: Советское радио, 1968. — 286 с.

6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Высшая школа, 2001. — 576 с.

УДК 621.3.011.6:621.365.46:635.132

И.В. Алтухов, *канд. техн. наук*
В.Д. Очиров
С.М. Быкова
Н.И. Поздеева
Иркутская государственная сельскохозяйственная академия

ПОСТОЯННАЯ ВРЕМЕНИ НАГРЕВА КОРНЕПЛОДОВ МОРКОВИ

Из продуктов растительного происхождения морковь — одна из ценных овощных культур, широко распространенных в России. Этот овощ особенно богат витаминами и минеральными веществами, в которых содержится много каротина. Как витаминизированный продукт особенно цен-