

УДК 621.81:539.3

М.Н. Ерохин, доктор техн. наук

Российский государственный аграрный университет — МСХА имени К.А. Тимирязева

П.В. Дородов, канд. техн. наук

Ижевская государственная сельскохозяйственная академия

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДЕТАЛЕЙ В ЗОНЕ КОНТАКТА

Интерес к контактным задачам объясняется тем, что сельскохозяйственная техника состоит из взаимодействующих деталей и доля конструктивных отказов по причине контактной усталости достигает 20 %. Разрушению под действием контактных напряжений подвергаются болты и заклепки, зубья шестерен, подпирающие клинья, шейки и цапфы валов, детали шарикоподшипников и т. п. Контактные напряжения при статическом нагружении хрупких материалов приводят к излому изделия, пластичных — к возникновению местных остаточных деформаций, что недопустимо. При повторном действии нагрузок в зоне контакта пластичного материала может появиться трещина, которая, постепенно проникая в деталь, приводит к ее разрушению [1]. Например, при испытаниях мини-комбайна (копатель ОМК-1) [2] появилась трещина в направляющих выгрузного транспортера — сепаратора, которые в сечении представляли собой соединение типа «ласточкин хвост». Трещина развилась в хвостовике от фиксирующего клина.

Проблемам исследования напряженно-деформированного состояния при известной форме деталей в зоне контакта (прямая краевая задача) посвящено значительное число работ. Однако из-за сложности математического аппарата актуальным остается определение геометрии контактирующих тел при заданных контактных напряжениях (обратная краевая задача), например, при оптимальном проектировании. В данной статье предлагается один из методов ее решения.

Следует рассмотреть вдавливание жесткого штампа в упругое основание при плоской деформации (рис. 1).

Здесь неизвестной является форма линии контакта (границы Γ) плоской области $\Omega(x, z < 0)$, удовлетворяющей условию [3]:

$$g(\tau_{\max})|_{\Omega} \leq g(\tau_{\max})|_{\Gamma} = k^2$$

или $g(\tau_{\max})|_{\Gamma} \rightarrow \text{const}$, (1)

где g — заданная функция максимальных касательных напряжений в зоне контакта, которая является критерием оптимальности; k — константа, характеризующая свойства упругого материала.

Для определения контактных напряжений можно воспользоваться сингулярным интегральным уравнением [4–7]:

$$a\varphi(x) + \frac{b}{\pi i} \int_{-t}^{+t} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = f(x), \quad (2)$$

где $f(x) = \frac{du}{dx} - i \frac{dw}{dx}$; $\varphi(x) = \sigma_{1z}(x) + i\tau_1(x)$; $a = \frac{\varepsilon}{\theta}$; $b = \frac{1}{\theta}$;
 $\varepsilon = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$; $\theta = \frac{G}{1-\nu}$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; E — модуль упругости

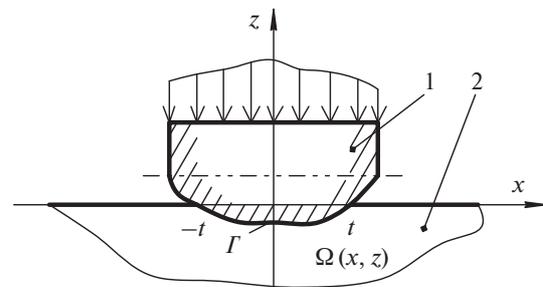


Рис. 1. Взаимодействие жесткого штампа с упругим основанием:

1 — жесткий штамп; 2 — упругая полуплоскость

сти; ν — коэффициент Пуассона; u, w — перемещения точек линии контакта; $\sigma_{1z}(x), \tau_1(x)$ — контактные нормальные и касательные напряжения.

В случае ограниченных напряжений на обоих концах отрезка $[-t; t]$ границы Γ решение уравнения (2) имеет вид [4, 6]:

$$\varphi(x) = a^* f(x) - \frac{b^*}{\pi i} \sqrt{t^2 - x^2} \int_{-t}^{+t} \frac{f(\xi)}{\sqrt{t^2 - \xi^2} (\xi - x)} d\xi, \quad (3)$$

причем решение существует тогда и только тогда, когда

$$\int_{-t}^{+t} \frac{f(\xi)}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} d\xi = 0, \quad (4)$$

т. е. выражение (4) для плоских контактных задач является эквивалентом условия (1).

Для симметричных задач условие (4) выполняется, если $f(\xi)$ будет нечетной функцией. Ее можно представить в виде степенного ряда возле точки разложения $x = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{d^{(2n-1)} f(0)}{dx^{2n-1}}.$$

Пренебрегая перемещениями вдоль оси x , вертикальные перемещения вдоль оси z должны подчиняться закону

$$w(x) = \int |f(x)| dx + \delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{(2n)} f(0)}{dx^{2n}} + \delta,$$

где δ — жесткое перемещение вдавливаемого тела (штампа) в упругое основание.

Так как интересует только форма тела, а не деформации, принимают $\delta = 0$, т. е. выражение

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{(2n)} f(0)}{dx^{2n}}$$

будет определять оптимальную форму линии контакта.

С технологической точки зрения штамп проще всего изготовить с постоянным радиусом кривизны R у его основания (рис. 2).

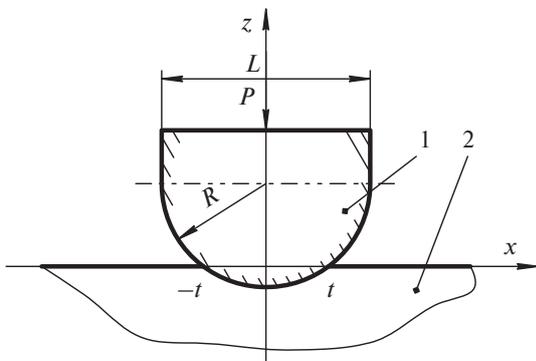


Рис. 2. Взаимодействие круглого штампа с упругой полуплоскостью:

- 1 — жесткий штамп с круглым основанием;
- 2 — упругая полуплоскость

Форма основания штампа в явном виде описывается известным уравнением окружности:

$$z(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}. \quad (5)$$

Функцию (5) можно разложить в ряд Маклорена:

$$z(x) = z(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^{(n)} z(0)}{dx^n}.$$

Так как для жестких материалов пятно контакта ограничено ($t < R$), то достаточно учесть только два первых отличных от нуля члена ряда. Предполагая, что в зоне контакта упругое основание принимает круглую форму основания штампа, записывают

$$w = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3}. \quad (6)$$

Например, при $x = \pm R/2$ погрешность ряда (6) не превышает 0,9% по сравнению с функцией (5).

Тогда

$$f(x) = -i \left(\frac{x}{R} + \frac{x^3}{2R^3} \right),$$

которое подчиняется условию (4) и после разделения переменных решение (3) запишут так:

$$\sigma_{1z}(x) = \frac{b^*}{\pi} \sqrt{t^2 - x^2} \int_{-t}^{+t} \frac{\left(\frac{\xi}{R} + \frac{\xi^3}{2R^3} \right) d\xi}{\sqrt{t^2 - \xi^2} (\xi - x)}, \quad (7)$$

$$\tau_1 = -a^* \left(\frac{x}{R} + \frac{x^3}{2R^3} \right), \quad (8)$$

где упругие постоянные имеют следующий вид:

$$b^* = \frac{\theta}{\varepsilon^2 - 1}; a^* = \varepsilon b^*; \theta = \frac{G}{(1 - \nu)}; \varepsilon = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}.$$

Согласно [2, 5]

$$\int_{-t}^{+t} \frac{d\xi}{\sqrt{t^2 - \xi^2} (\xi - x)} = 0,$$

тогда сингулярный интеграл в формуле (7) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \int_{-t}^{+t} \frac{\left(\frac{\xi}{R} + \frac{\xi^3}{2R^3} \right) d\xi}{\sqrt{t^2 - \xi^2} (\xi - x)} &= \frac{1}{R} \int_{-t}^{+t} \frac{(\xi - x) + x}{\sqrt{t^2 - \xi^2} (\xi - x)} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2R^2} \int_{-t}^{+t} \frac{(\xi^3 - x^3) + x^3}{\sqrt{t^2 - \xi^2} (\xi - x)} d\xi = \frac{\pi}{R} \left(1 + \frac{t^2}{4R^2} + \frac{x^2}{2R^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, контактное напряжение формулы (7) перепишется:

$$\sigma_{1z} = \frac{b^*}{R} \sqrt{t^2 - x^2} \left(1 + \frac{t^2}{4R^2} + \frac{x^2}{2R^2} \right). \quad (9)$$

Условие равновесия для упругой полуплоскости и штампа при сжатии можно записать так:

$$\int_{-t}^{+t} \sigma_{1z} dx = -P \text{ или } \frac{\pi t^2 b^*}{2R} \left(1 + \frac{3t^2}{8R^2} \right) = -P,$$

откуда

$$\frac{b^*}{R} = -\frac{2P}{\pi t^2 \left(1 + \frac{3t^2}{8R^2} \right)}. \quad (10)$$

Учитывая формулу (10), выражения (8) и (9) примут такой вид:

$$\sigma_{1z} = -\frac{2P\sqrt{t^2 - x^2}}{\pi t^2 \left(1 + \frac{3t^2}{8R^2} \right)} \left(1 + \frac{t^2}{4R^2} + \frac{x^2}{2R^2} \right); \quad (11)$$

$$\tau_1 = \frac{2P\epsilon R}{\pi t^2 \left(1 + \frac{3t^2}{8R^2} \right)} \left(\frac{x}{R} + \frac{x^3}{2R^3} \right). \quad (12)$$

При вдавливании штампа в упругое основание меняется пятно контакта, т. е. неизвестным является параметр t . Для его определения переписывают выражение (10) в виде уравнения четвертой степени относительно t :

$$\frac{3}{8R^2} t^4 + t^2 + \frac{2PR}{\pi b^*} = 0. \quad (13)$$

Оставляя только действительный и положительный корень уравнения (13), получают

$$t = \frac{2R}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{1 - \frac{3P}{\pi b^* R}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Для проверки решения рассматривают взаимодействие штампа из дюралюминия радиусом основания $R = 350$ мм, шириной $L = 21,6$ мм и прямоугольной полосы из органического стекла с размерами: 40×107 мм и толщиной $s = 7,17$ мм. Нагрузка на штамп составила $p = 981$ Н или на единицу толщины модели $P = p / s = 137$ Н/мм. Упругие постоянные: модуль сдвига $G = 890$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$, тогда

$$\theta = \frac{G}{(1 - \nu)} = 1,19 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \epsilon = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} = 0,23,$$

$$b^* = \frac{\theta}{\epsilon^2 - 1} = -1446,25 \text{ МПа}.$$

Из выражения (14) имеют $t = 4,04$ мм.

По формулам (11) и (12) определяют контактные нормальные и касательные напряжения, а по выражениям

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{1z}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{1z}}{2} \right)^2 + \tau_1^2},$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{1z}^2 + 4\tau_1^2} -$$

главные и максимальные касательные напряжения.

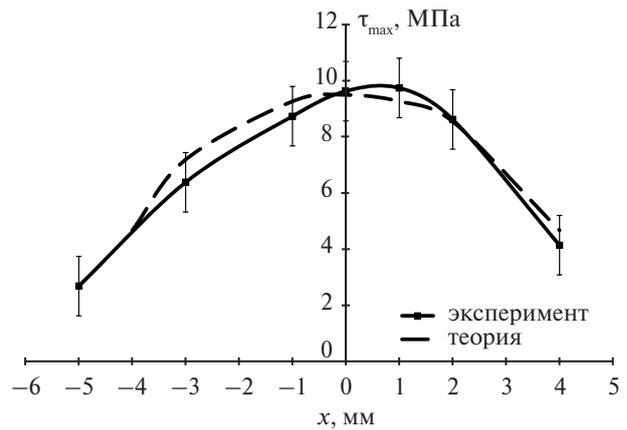


Рис. 3. Сравнение теоретической эпюры максимальных касательных напряжений на линии сопряжения с экспериментальными данными для упругой полосы на глубине 1 мм

Для сравнения теории с экспериментальными данными на рис. 3 построены эпюры максимальных касательных напряжений.

Экспериментальная эпюра построена для прямоугольной полосы из органического стекла на глубине 1 мм под поверхностью контакта. Экспериментальные исследования проведены на установке с комбинированным оптико-механическим прибором (лазерном интерферометре) по методике, описанной в работах [8–10]. Сравнительный анализ показал, что теоретическая кривая не выходит за пределы доверительного интервала стандартного отклонения 5%. Следовательно, округлое основание штампа во втором приближении является одной из оптимальных форм в контактных задачах. Максимальные эквивалентные напряжения составили $\sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)_{\max} = 19,5$ МПа, а номинальные — $\sigma_1 = P / 2t = 17$ МПа. Следовательно, действительный коэффициент концентрации нормальных напряжений $\alpha_\sigma = 1,15$. Для прямоугольного штампа он составляет 1,7 [10], или на 32% выше по сравнению с округлым.

Выводы

Разработана методика оптимального проектирования формы основания штампа, которая включает следующие этапы:

1. Дается внешняя нагрузка на жесткий штамп P .
2. Определяется упругая механическая характеристика материала b^* детали, на которую действует штамп.
3. Выбирается необходимый параметр пятна контакта t .
4. Определяется оптимальный радиус основания жесткого штампа R , используя выражение (10). Если его раскрыть относительно оптимального радиуса, получают кубическое уравнение:

$$R^3 + \frac{\pi b^* t^2}{2P} R^2 + \frac{3\pi b^* t^4}{16P} = 0,$$

действительное решение которого имеет вид

$$R = \frac{\left(12\sqrt{81\beta^2 + 12\beta\alpha^3} - 108\beta - 8\alpha^3\right)^{1/3}}{6} + \frac{2\alpha^2}{3\left(12\sqrt{81\beta^2 + 12\beta\alpha^3} - 108\beta - 8\alpha^3\right)^{1/3}} - \frac{\alpha}{3},$$

где

$$\alpha = \frac{\pi b^* t^2}{2P}, \beta = \frac{3\pi b^* t^4}{16P}. \quad (15)$$

5. Применяя стандартную методику масштабно-физического моделирования, изготавливается плоская модель детали из органического стекла, штамп с круглым основанием из жесткого материала (металл) и проводятся исследования НДС по методике и установке, описанной в работах [8, 10].

6. Затем этапы 1...4 повторяются при изготовлении реальной детали с оптимальной формой контура в зоне контакта.

Данная методика позволяет проектировать сопряжения деталей, не прибегая к сложному математическому аппарату или дорогостоящему программному обеспечению [11], причем ошибка в расчетах не превысит 5%.

Список литературы

1. Детали машин и основы конструирования: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по агроинженерным специальностям / М.Н. Ерохин, А.В. Карп, Е.И. Соболев [и др.]; под ред. М.Н. Ерохина. — М.: Колос, 2008. — 462 с.

2. Максимов П.Л. Разработка универсальных технических средств для уборки корнеклубнеплодов: монография. — Ижевск: Изд-во ИжГСХА, 2002. — 172 с.

3. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. — М.: Наука, 1980. — 256 с.

4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 512 с.

5. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. — Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. — 114 с.

6. Дородов П.В. Приведение краевой задачи для плоского упругого тела к одному особому интегральному уравнению [Электронный ресурс] // Политехнический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. — 2012. — № 80. — С. 1–10. — Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/06/pdf/14.pdf>

7. Дородов П.В. Исследование напряжений на линии сопряжения ступенчатой пластины [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона. — 2013. — Т. 25. — № 2 (25). — С. 36. — Режим доступа: <http://www.ivdon.ru/>

8. Интерферометр для определения нормальных напряжений в плоских прозрачных моделях / В.П. Беркутов, Н.В. Гусева, П.В. Дородов [и др.] // Датчики и системы. — 2009. — № 2. — С. 26–29.

9. Полярископ для определения разности главных напряжений в плоских моделях, изготовленных из оптически малочувствительных прозрачных материалов / В.П. Беркутов, Н.В. Гусева, П.В. Дородов [и др.] // Вестник Ижевского государственного технического университета. — 2008. — № 4 (40). — С. 108–110.

10. Киселев М.М. Разработка установки для определения главных напряжений с повышенным пространственным разрешением в плоских прозрачных изделиях: дис. ... канд. техн. наук: 05.11.13 / Киселев Михаил Михайлович. — Ижевск, 2010. — 136 с.

11. Ерохин М.Н., Казанцев С.П., Дорохов А.С. Компьютерные технологии проектирования в учебном процессе агроинженерных вузов // Вестник ФГОУ ВПО МГАУ. — 2010. — № 4. — С. 82–85.

УДК 631.3:629.3.014.2.033:636.085

В.В. Стрельцов, доктор техн. наук

Российский государственный аграрный университет — МСХА имени К.А. Тимирязева

В.П. Лапик, канд. техн. наук

И.П. Адылин

Брянская государственная сельскохозяйственная академия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ РЕЗИНОАРМИРОВАННОЙ ГУСЕНИЧНОЙ ЛЕНТЫ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ЕЕ ОПОРНЫМИ КАТКАМИ ГУСЕНИЧНОГО ДВИЖИТЕЛЯ

Применение резиноармированных гусениц в конструкции гусеничных движителей имеет свои особенности взаимодействия с ведущей звездочкой и опорными катками. Наличие достаточно высоких грунтозацепов и гибкость гусеничной ленты в промежутках между ними существенно из-

меняет и характер воздействия на почву, особенно переувлажненную пойменную. Резина как материал при приложении нагрузки изменяется по определенным законам [1].

Пренебрегая в первом приближении взаимным влиянием нагрузок от соседних опорных катков,