

## ПО СТРАНИЦАМ ИСТОРИИ

УДК 621(075.8)

**ПАВЛОВ АЛЕКСАНДР ЕГОРОВИЧ**, канд. физ.-мат. наук, доцент<sup>1</sup>

E-mail: alexpavlov60@mail.ru

**СОРОКИН СЕРГЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ**, канд. техн. наук, доцент<sup>1</sup>

E-mail: sergsor2011@yandex.ru

**ПАВЛОВА ЛАРИСА АЛЕКСАНДРОВНА**, доцент<sup>1</sup>

E-mail: krasilnikowa.larisa2011@yandex.ru

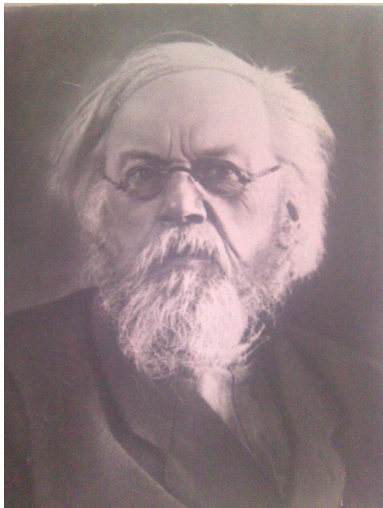
<sup>1</sup> Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, ул. Лиственничная аллея, 2А, Москва, 127550, Российская Федерация

### ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МЕХАНИЗМЫ МЕРЦАЛОВА

*К 150-летию со дня рождения Николая Ивановича Мерцалова*

Основные исследования Н.И. Мерцалова относятся к теории машин и механизмов, термодинамике, теории трения. Николай Иванович является одним из основоположников теории динамики машин и теории пространственных механизмов. Он создал и впервые в 1921 г. прочитал курс теории пространственных механизмов, используя методы проективной геометрии. Н.И. Мерцалов в период работы в нашей академии занимался вопросами теории сельскохозяйственных машин.

**Ключевые слова:** кинематика пространственных механизмов, гироскоп, волчок Ковалевской.



**Николай Иванович Мерцалов**

Николай Иванович Мерцалов в 1888 г. окончил математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Несколько лет он работал на машиностроительных

заводах Германии и в то же время посещал лекции в Дрезденском высшем техническом училище. По возвращении в Россию в 1892 г. он сдал магистерские экзамены; в 1894 г., окончив Императорское Московское высшее техническое училище, получил звание инженера-механика. С 1895 по 1912 гг. он преподавал в Московском университете; в 1897 г. по рекомендации Н.Е. Жуковского был избран адъюнкт-профессором Императорского Московского высшего технического училища по кафедре прикладной механики и термодинамики. С 1899 по 1930 гг. он – ординарный профессор. В 1920 г. Николай Иванович избран профессором инженерного факультета Московской сельскохозяйственной академии имени К.А. Тимирязева, преобразованной в 1930 г. в Московский институт механизации и электрификации сельского хозяйства.

Мерцалов является одним из основоположников теории пространственных механизмов [1]. Впервые в мировой науке он обобщил методы динамического анализа машин и механизмов в курсе лекций «Динамика механизмов» [2]. В его книге «Кинематика механизмов» были изложены основы кинематической геометрии, её практическое приложение к задачам исследования механизмов [3]. Эти работы

оказали большое влияние на развитие теории механизмов в России. В 1921 г. он начал читать курс теории пространственных механизмов. Большое значение имеют работы Мерцалова по проектированию пространственных зубчатых передач по развертывающимся и неразвертывающимся поверхностям [4].

На его работах было воспитано несколько поколений советских учёных. Лекции в течение ряда лет издавались учениками Мерцалова и были закончены в 1914–1916 гг. Вышли два больших тома: «Кинематика машин и механизмов» и «Динамика механизмов и машин». В 1944 г. Николаю Ивановичу Мерцалову – выдающемуся ученому, специалисту в области механики и термодинамики – было присвоено звание «Заслуженный деятель науки и техники РСФСР».

Продолжая труды С.В. Ковалевской и С.А Чаплыгина, Николай Иванович проводил лабораторные исследования движения твёрдого тела, имеющего неподвижную точку, смоделировав трёхосный гироскоп (рис.). Мерцалов ходатайствовал перед президиумом АН СССР об издании сборника, посвящённого памяти Ковалевской. Сборник был издан в 1940 г. под редакцией Мерцалова и Чаплыгина [5]. Работу над изданием сборника Николай Иванович считал своим долгом перед заслугами замечательной русской женщины-математика.

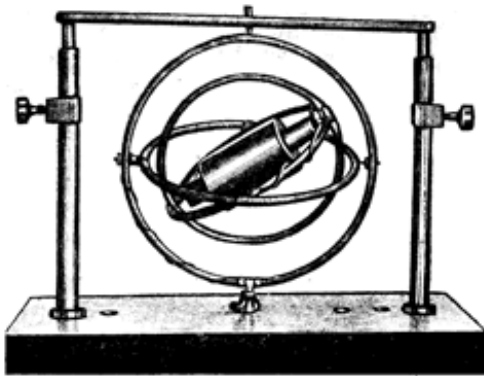


Рис. Трёхосный гироскоп

Пусть  $O\xi\eta\zeta$  – подвижная система координат, жёстко связанная с телом, а  $p, q, r$  – проекции вектора угловой скорости  $\omega$  тела на её оси,  $A, B, C$  являются главными моментами инерции тела. Рассмотрим движение волчка в однородном поле тяжести [6, 7]. Внешней силой является сила тяжести, приложенная в центре масс тела  $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ . Единичный орт  $\vec{e}_z$  и радиус – вектор центра тяжести тела  $\vec{r}_C$  – разложим по ортам подвижной системы координат:

$$\begin{aligned}\vec{e}_z &= \gamma_1\vec{e}_\xi + \gamma_2\vec{e}_\eta + \gamma_3\vec{e}_\zeta, \\ \vec{r}_C &= x_C\vec{e}_\xi + y_C\vec{e}_\eta + z_C\vec{e}_\zeta.\end{aligned}$$

Главные моменты инерции в системе отсчёта, жёстко связанной с телом, не изменяются во вре-

мя движения, уравнения движения приобретают вид:

$$\begin{aligned}A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= mg(z_C\gamma_2 - y_C\gamma_3), \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= mg(x_C\gamma_3 - z_C\gamma_1), \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= mg(y_C\gamma_1 - x_C\gamma_2).\end{aligned}$$

Полученные дифференциальные уравнения сферического движения твёрдого тела называются динамическими уравнениями Эйлера.

В уравнения Эйлера входят 6 неизвестных функций времени  $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и 6 постоянных величин  $A, B, C, x_C, y_C, z_C$ , характеризующих распределение массы тела. Для нахождения этих 6 неизвестных функций необходимо добавить уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= q\gamma_1 - p\gamma_2.\end{aligned}$$

Замкнутая система шести нелинейных дифференциальных уравнений относительно 6 неизвестных функций  $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  называется системой уравнений Эйлера-Пуассона.

Система уравнений имеет 3 первых интеграла.

1. *Интеграл энергии:*  $T + U = E$ , где  $T$  – кинетическая энергия волчка:  $T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$ , а  $U$  – его потенциальная энергия  $U = -mgz_C$ ,  $z_C = (\vec{r}_C \cdot \vec{e}_z) = x_C\gamma_1 + y_C\gamma_2 + z_C\gamma_3$ .
2. *Интеграл площадей:*  $(\vec{K} \cdot \vec{e}_z) = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = K_z$ .
3. *Геометрический интеграл:*  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ .

Для полной интегрируемости системы уравнений не хватает одного интеграла. Это утверждение сделано на основе теории множителя Якоби. Согласно теореме Эйлера-Пуассона об интегрируемости систем с инвариантной мерой, к которым относится и система уравнений Эйлера-Пуассона, её можно свести к квадратурам при любых начальных условиях. При определённых значениях параметров дополнительный интеграл имеется только в трёх случаях.

1. *Случай Эйлера:*  $x_C = y_C = z_C = 0$ . Тело имеет любую форму, но закреплено в центре масс. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= 0, \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= 0,\end{aligned}$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = 0.$$

Недостающий интеграл найти нетрудно. Умножим первое уравнение на  $Ap$ , второе – на  $Bq$ , третье – умножим на  $Cr$  и сложим их. Получим закон сохранения величины  $A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = const$ .

2. *Случай Лагранжа* (симметричный гироскоп):  $A = B$ ,  $x_c = y_c = 0$ .

Тело имеет ось симметрии  $O_\xi$ . Закреплённая точка  $O$  и центр масс находятся на этой оси. Остаётся одно уравнение движения:  $dr/dt = 0$ .

Отсюда получаем недостающий интеграл движения:  $r = const$ .

3. *Случай Ковалевской*:  $A = B = 2C$ ,  $z_c = y_c = 0$ .

Закреплённая точка располагается на оси симметрии  $O_\xi$ , центр масс находится в эквивалентной плоскости эллипсоида инерции (плоскости  $O\xi\eta$ ). Уравнения Эйлера в этом случае имеют вид:

$$2 \frac{dp}{dt} - qr = 0;$$

$$2 \frac{dq}{dt} + rp = c\gamma_3;$$

$$\frac{dr}{dt} = -c\gamma_2.$$

Здесь введено обозначение  $c \equiv mgx_c/C$ . Покажем, как нашла недостающий интеграл С.В. Ковалевская. Умножим второе уравнение на мнимую единицу  $i$  и сложим с первым. Получим уравнение:

$$2 \frac{d}{dt}(p + iq) = -ir(p + iq) + ic\gamma_3.$$

Рассмотрим два первых уравнения Пуассона. Умножим второе из них на мнимую единицу  $i$  и сложим с первым. Получаем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1 + i\gamma_2) = -ir(\gamma_1 + i\gamma_2) + i\gamma_3(p + iq).$$

Чтобы исключить из последних двух уравнений величину  $\gamma_3$ , умножим первое из них на выражение  $(p + iq)$ , а второе умножим на  $(-c)$  и сложим их. Найдём

$$\frac{d}{dt} \log[(p + iq)^2 - c(\gamma_1 + i\gamma_2)] = -ir.$$

Сложим теперь полученное уравнение с комплексно-сопряжённым. Получим интеграл Ковалевской:

$$(p^2 - q^2 - c\gamma_1)^2 + (2pq - c\gamma_2)^2 = C_4.$$

Отметим, что интеграл является полиномом четвёртой степени. В рассмотренных трёх случаях задача сводится к квадратурам, и её удаётся явно проинтегрировать.

### Библиографический список

1. Артоболевский И.И. Жизнь и деятельность Николая Ивановича Мерцалова // Труды семинара по теории машин и механизмов. Т. 7. Вып. 26. Изд-во АН СССР; Ин-т машиноведения. М., 1949.
2. Мерцалов Н.И. Динамика механизмов, 1912.
3. Мерцалов Н.И. Кинематика механизмов, 1916.
4. Мерцалов Н.И. Теория пространственных механизмов // Избранные труды: В 3-х тт. / Ред. Н.Г. Бруевич, Н.Г. Смирнов. М.: Изд-во Машгиз, 1950–1952.
5. Движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки // Сборник, посвящённый памяти С.В. Ковалевской / Ред. С.А. Чаплыгин, Н.И. Мерцалов. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1940.
6. Павлов А.Е., Павлова Л.А. Теоретическая механика: Конспект лекций. LAP Lambert Academic Publishing. Saarbrücken. Germany. 2013. URL: <http://www.ljubluknigi.ru/>.
7. Павлов А.Е., Павлова Л.А. Динамика твёрдого тела для агроинженеров. LAP Lambert Academic Publishing. Saarbrücken. Germany. 2014. URL: <http://www.ljubluknigi.ru/>.

Статья поступила 13.11.2015

## MERTZALOV'S SPATIAL MECHANISMS

**ALEKSANDR YE. PAVLOV**, PhD (Phys-Math), Associate Professor<sup>1</sup>

E-mail: alexpavlov60@mail.ru

**SERGEY V. SOROKIN**, PhD (Eng), Associate Professor<sup>1</sup>

E-mail: sersor2011@yandex.ru

**LARISA A. PAVLOVA**, Associate Professor<sup>1</sup>

E-mail: krasilnikowa.larisa2011@yandex.ru

<sup>1</sup> Russian State Agrarian University - Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazev, Timiryazevskaya str., 49, Moscow, 127550, Russian Federation

Nikolai I. Mertsalov's basic research works relate to the theory of machines and mechanisms, thermodynamics, and the theory of friction. Nikolai Mertsalov was one of the founders of the theory of dynamics of machines and the theory of spatial mechanisms. In 1921, he developed and presented for the first time a course on the theory of spatial mechanisms based on projective geometry methods. N.I. Mertsalov developed the theory of agricultural machines while working in our academy.

**Key words:** kinematics of spatial mechanisms, gyroscope, Kovalevskaya's wheel.

### References

1. Artobolevsky I.I. Zhizn' i deyatel'nost' Nikolaya Ivanovicha Mertsalova [The life and work of Nikolai Ivanovich Mertsalov]. Proceedings of the Seminar on the theory of machines and mechanisms. V. 7, Issue 26. Publishing House of the USSR Academy of Sciences. Institute of Mechanical Engineering, Moscow, 1949.
2. Mertsalov N.I. Dinamika mekhanizmov [Dynamics of mechanisms]. 1912.
3. Mertsalov N.I. Kinematika mekhanizmov [Kinematics of mechanisms]. 1916.
4. Mertsalov N.I. Teoriya prostranstvennykh mekhanizmov [Theory of spatial mechanisms]. Selected papers in 3 volumes. Brouevich N.G. (Ed.), Smirnov N.G. (Ed.). Publishing House of MashGiz. Moscow, 1950–1952.
5. Dvizhenie tverdogo tela vokrug nepodvizhnoy tochki [A rigid body motion around a fixed point]. The collection of papers dedicated to the memory of S.V. Kovalevskaya. Chaplygin S.A. (Ed.), Mertsalov N.I. (Ed.). Publishing House of the USSR Academy of Sciences. Moscow – Leningrad, 1940.
6. Pavlov A.Ye., Pavlova L.A. Teoreticheskaya mekhanika: Konspekt lektsiy. [Theoretical Mechanics. Lecture notes]. LAP Lambert Academic Publishing. Saarbrücken. Germany. 2013. <http://www.ljubluknigi.ru/>.
7. Pavlov A.Ye., Pavlova L.A. Dinamika tverdogo tela dlya agroinzhenerov [Rigid Body Dynamics for Agroengineers]. LAP Lambert Academic Publishing. Saarbrücken. Germany. 2014. <http://www.ljubluknigi.ru/>.

*Received on November 13, 2015*