УДК 621(075.8)

ПАВЛОВ АЛЕКСАНДР ЕГОРОВИЧ, *канд. физ.-мат. наук, доцент*
E-mail: alexpavlov60@mail.ru.

ПАВЛОВА ЛАРИСА АЛЕКСАНДРОВНА, *доцент*
E-mail: krasilnikowa.larisa2011@yandex.ru

Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, ул. Тимирязевская, 49, Москва, 127550, Российская Федерация

СОПРЯЖЕНИЕ ДВУХ ЦЕНТРОИД, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ – ЭКСЦЕНТРИЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

В машиностроении нашли применение колёса некруглой формы благодаря разработанной технологии нарезки зубьев. При проектировании колёс первоначальной задачей является определение их центроид, т.е. таких сопряжённых кривых, которые при зацеплении профилей перекатываются друг по другу без проскальзывания. При расчёте передачи непрерывного вращения накладывается условие: центроиды колёс должны быть замкнутыми. Наибольшее распространение получили колёса с эллиптическими центроидами, центры которых являются фокусами эллипсов. В сельскохозяйственном машиностроении некруглые колёса могут быть использованы в зерноуборочных комбайнах, стационарных сепараторах зернового вороха, для разделения зерновых смесей, снижения вибрации устройств путём периодического изменения скорости ленты конвейера. В работе рассматривается зубчатая передача, ведущим колесом которой является эксцентричный круг, а ведомое колесо имеет некруглую форму. Из условия замкнутости центроиды выведена точная формула, позволяющая найти характеристики ведомого колеса. Для выбранного относительного эксцентриситета можно найти межцентровое расстояние между колёсами. Формула выражается через полные эллиптические интегралы первого и третьего родов. В настоящее время эллиптические функции встроены в аналитические компьютерные пакеты программ и удобны в работе. Ранее же в расчётной работе инженеры пользовались приближёнными формулами. Межцентровое расстояние приходилось вычислять методом последовательных приближений, раскладывая в тригонометрический ряд Фурье подынтегральное выражение в гиперэллиптическом интеграле. В результате для демонстрации правильности выведенной формулы с помощью компьютерной графики начерчен ряд замкнутых центроид для заданного числа оборотов ведущего колеса.

Ключевые слова: центроиды, сопряжение кривых, межцентровое расстояние, эксцентриситет, передаточное отношение.

Введение. С точки зрения кинематики, механизмы некруглых зубчатых колес характеризуются нелинейной зависимостью между углами поворотов ведущего и ведомого колёс. Такой механизм используется для передачи движения с переменным отношением скоростей [1-5]. Некруглые колёса нашли применение в машинах-автоматах лёгкой промышленности. Они применяются также в бумагоделательном машиностроении, в качающихся конвейерах, металлообрабатывающей промышленности, приборостроении. В сельскохозяйственном машиностроении некруглые колёса могут быть использованы в зерноуборочных комбайнах, стационарных сепараторах зернового вороха, для разделения зерновых смесей, снижения вибрации устройств путём периодического изменения скорости ленты конвейера.

Цель работы – получить точную формулу сопряжения круглого эксцентричного колеса с некруглыми колёсами и представить вид замкнутых центроид, имеющих практический интерес.

Методом исследования служит математический анализ эллиптических функций.

Результаты и обсуждение. Рассмотрим кинематическую схему передачи движения от круглого колеса со смещённым центром вращения к некруглому колесу некоторого произвольного вида. На рисунке 1 приведены обозначения: радиус окружности первого колеса – a; его эксцентриситет – e; межцентровое расстояние колес $O_1O_2 = A$; полярные координаты произвольной точки первого тела $M_1(r_1, \varphi_1)$; полярные координаты произвольной точки второго тела $M_2(r_2, \varphi_2)$. Центроида задаётся уравнением окружности с центром в точке O_1

$$r_1(\varphi_1) = \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cdot \cos \varphi_1 . \qquad (1)$$

Функция передаточного числа i_{12} определяется отношением угловых скоростей колёс [2]:

$$i_{12} = \frac{d\varphi_1 / dt}{d\varphi_2 / dt} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} . \qquad (2)$$

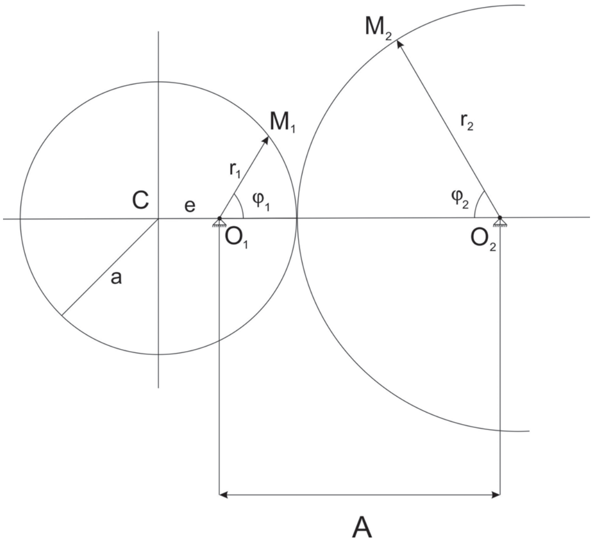

Рис. 1. Сопряжение круглого колеса, эксцентричного относительно центра вращения, с некруглым колесом

Подставим в формулу (2) функцию $r_1 = r_1(\varphi_1)$ (1) и получим зависимость передаточного числа как функции угла поворота ведущего колеса $i_{12} = i_{12}(\varphi_1)$:

$$i_{12} = \frac{A}{\sqrt{a^2 - e^2\sin^2\varphi_1} - e\cdot\cos\varphi_1} - 1. \quad (3)$$

Поскольку $i_{12} = \dfrac{d\varphi_1/dt}{d\varphi_2/dt} = \dfrac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$, определим отсюда интегральную связь между углами поворота колёс:

$$\varphi_2(\varphi_1) = \int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{i_{12}(\varphi)} = $$

$$= \int_0^{\varphi_1}\frac{\sqrt{a^2 - e^2\sin^2\varphi} - e\cdot\cos\varphi}{A - \sqrt{a^2 - e^2\sin^2\varphi} + e\cdot\cos\varphi}d\varphi. \quad (4)$$

Отнеся размеры межцентрового расстояния и эксцентриситета к радиусу a окружности $d \equiv A/a$, $\varepsilon \equiv e/a$, получим, «перебрасывая» корневое выражение, стоящее в знаменателе подынтегральной функции, в числитель:

$$\varphi_2(\varphi_1) = \int_0^{\varphi_1}\frac{1-\varepsilon^2 - d\cdot\varepsilon\cdot\cos\varphi + d\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{\left(d^2+\varepsilon^2-1\right) + 2d\cdot\varepsilon\cdot\cos\varphi}d\varphi \equiv$$

$$\equiv I_1(\varphi_1) + I_2(\varphi_1). \quad (5)$$

Неопределённый интеграл (5) состоит из двух частей $I_1(\varphi_1)$ и $I_2(\varphi_1)$. Первый интеграл

$$I_1(\varphi_1) \equiv \int_0^{\varphi_1}\frac{1-\varepsilon^2 - d\cdot\varepsilon\cdot\cos\varphi}{\left(d^2+\varepsilon^2-1\right)+2d\cdot\varepsilon\cdot\cos\varphi}d\varphi =$$

$$= -\frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2}\left(d^2+\varepsilon^2-1\right)\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\left(d^2+\varepsilon^2-1\right)+2d\cdot\varepsilon\cdot\cos\varphi} \quad (6)$$

берётся в элементарных функциях

$$I_1(\varphi_1) = -\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\left(d^2+\varepsilon^2-1\right)}{\sqrt{[(d-\varepsilon)^2-1][(d+\varepsilon)^2-1]}} \times$$

$$\times \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{(d-\varepsilon)^2-1}{(d+\varepsilon)^2-1}}\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\right). \quad (7)$$

Интеграл $I_2(\varphi_1)$ является гиперэллиптическим:

$$I_2(\varphi_1) \equiv d\int_0^{\varphi_1}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{\left(d^2+\varepsilon^2-1\right)+2d\cdot\varepsilon\cdot\cos\varphi}d\varphi. \quad (8)$$

Найдём относительное межцентровое расстояние d колёс, при котором удовлетворяется условие замкнутости центроиды второго колеса. Для этого необходимо, чтобы при полном обороте ведущего колеса $\varphi_1 = 2\pi$ угол поворота ведомого колеса был равен $\varphi_2 = 2\pi/n$. Здесь n – целое число оборотов ведомого колеса за один оборот ведущего колеса. Значение определённого интеграла I_1 (7) для интервала $-\pi \le \varphi_1 \le \pi$ равно

$$I_1 = -\pi + \frac{\pi\left(d^2-\varepsilon^2+1\right)}{\sqrt{[(d-\varepsilon)^2-1][(d+\varepsilon)^2-1]}}. \quad (9)$$

Здесь учтено, что универсальная подстановка, применённая при взятии интеграла (6), задана на интервале $-\pi \le \varphi_1 \le \pi$ [6]. Определённый интеграл I_2 (8) выражается через K[m] – полный эллиптический интеграл первого рода и П[n, m] – полный эллиптический интеграл третьего рода [7-10]:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{1+B\cos\varphi}d\varphi = -\frac{4\varepsilon^2}{B^2}K[\varepsilon^2] +$$

$$+ 4\left(\frac{\varepsilon^2}{B^2} + \frac{1}{1-B^2}\right)\Pi\left[-\frac{B^2}{1-B^2}, \varepsilon^2\right], \quad (10)$$

где введено обозначение

$$B \equiv \frac{2\cdot d\varepsilon}{d^2+\varepsilon^2-1}.$$

Из условия замкнутости центроид $2\pi/n = I_1 + I_2$ получаем линии уровня поверхности $f(\varepsilon, d)$:

$$f(\varepsilon, d) \equiv \frac{I_1+I_2}{2\pi} = -\frac{1}{2} + \frac{\left(d^2-\varepsilon^2+1\right)}{2\sqrt{[(d-\varepsilon)^2-1][(d+\varepsilon)^2-1]}} - \frac{\left(d^2+\varepsilon^2-1\right)}{2\pi d}K[\varepsilon^2] +$$

$$\frac{2d}{\pi}\left(d^2+\varepsilon^2-1\right)\cdot\left(\frac{\left(d^2+\varepsilon^2-1\right)^2 + 4d^2(1-\varepsilon^2)}{4d^2[\left(d^2+\varepsilon^2-1\right)^2 - 4d^2\varepsilon^2]}\right)\Pi\left[\frac{4d^2\varepsilon^2}{4d^2\varepsilon^2 - \left(d^2+\varepsilon^2-1\right)^2}\varepsilon^2\right] = \frac{1}{n}. \quad (11)$$

Полученное трансцендентное уравнение для фиксированного относительного эксцентриситета ε определяет d – относительное межцентровое расстояние. Линии уровня поверхности представлены на рисунке 2 для первых натуральных значений n.

Отметим, что в монографиях [1, 3, 5] приводится приближённая формула для нахождения межцентрового расстояния, полученная методом последовательных приближений. Параметрическое представление центроиды в полярной системе координат следует из уравнений (2), (3) и (5):

$$r_2\left(\varphi_1\right) = \mathrm{a}\left(\mathrm{d} - \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi_1} + \varepsilon\cdot\cos\varphi_1\right), \qquad (12\text{а})$$

$$\varphi_2\left(\varphi_1\right) = \int\limits_0^{\varphi_1} \frac{1-\varepsilon^2 - \mathrm{d}\cdot\varepsilon\cdot\cos\varphi + \mathrm{d}\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{\left(\mathrm{d}^2+\varepsilon^2-1\right)+2\mathrm{d}\cdot\varepsilon\cdot\cos\varphi}\,d\varphi. \qquad (12\text{б})$$

Построим замкнутые центроиды, взяв для определённости радиус первого колеса a = 1, его эксцентриситет ε = 0,6. Из диаграммы, представленной на рисунке 2, получим значения относительного межцентрового расстояния d для n = 2…5. На рисунке 3 показаны кривые эллиптического вида с d ≈ 3,00 и треугольного вида с d ≈ 3,87; на рисунке 4 – четырёхугольного вогнутого вида с d ≈ 4,76 и пятиугольного вида с d ≈ 5,66.

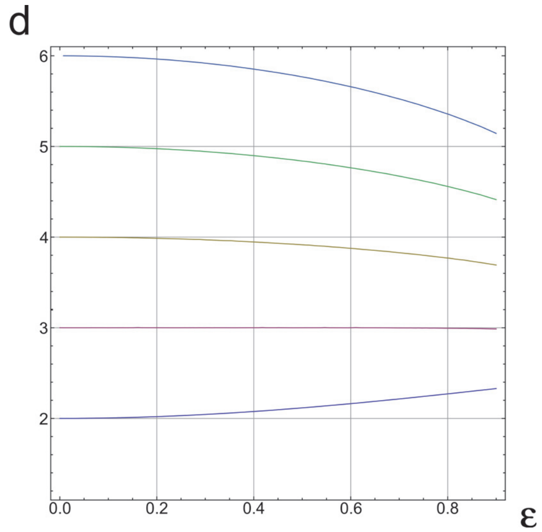

Рис. 2. Семейство кривых: относительное межцентровое расстояние (d) – относительный эксцентриситет (ε) для первых натуральных значений n

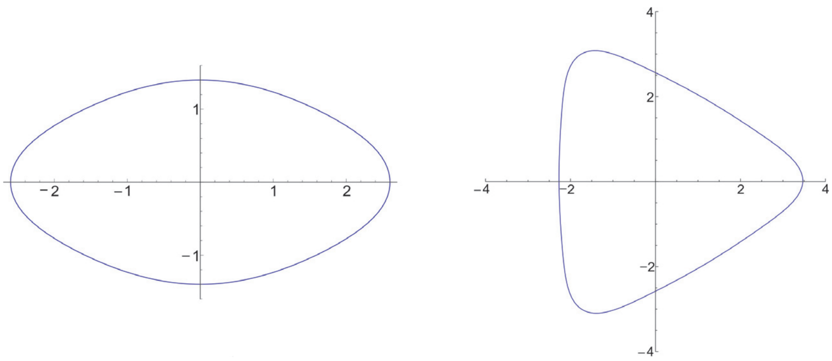

Рис. 3. Центроида эллиптического вида (слева) и центроида треугольного вида (справа)

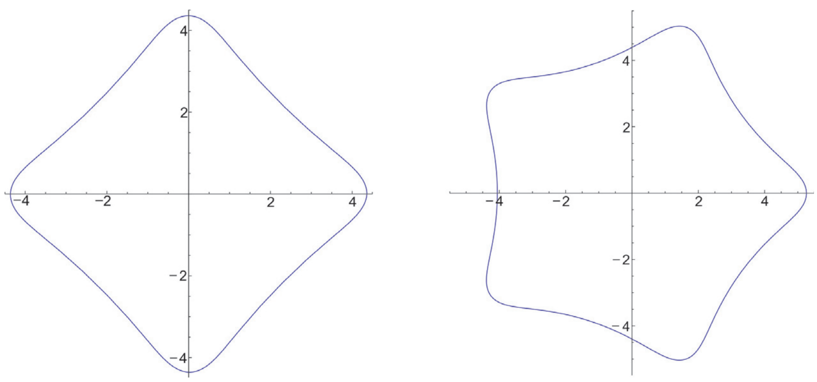

Рис. 4. Центроида четырехугольного вогнутого вида (слева) и центроида пятиугольного вогнутого вида (справа)

Выводы

Работа по расчёту колёс зубчатой передачи в силу важной практической значимости имеет длинную историю. Так, в книге [11] была дана без вывода формула для определения относительного межцентрового расстояния. Такая зависимость является грубо приближённой. В монографии [12] предлагается графическое интегрирование, поскольку аналитическое интегрирование вызывает определённые трудности. В книге [1] для определения искомого межцентрового расстояния используется разложение в тригонометрический ряд Фурье подынтегрального выражения в гиперэллиптическом интеграле (8). Ограничиваясь членами, содержащими ε не выше четвёртой степени, получено приближённое выражение, из которого находят d методом последовательных приближений. В современных монографиях [3], [5] предлагается получить решение методом последовательных итераций.

Выведена аналитическая формула (11), позволяющая найти характеристики ведомого колеса. С помощью формулы получено семейство кривых: относительное межцентровое расстояние – относительный эксцентриситет. Для иллюстрации работоспособности формулы продемонстрированы замкнутые центроиды колёс для различных целых значений числа оборотов n ведущего колеса.

Авторы благодарят доцента к.т.н. А.Н. Никитенко за обсуждение работы и рекомендованную научно-техническую литературу, а также *благодарны участникам LIII Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (РУДН, Москва, 2017) за проявленный интерес к работе и активное обсуждение доклада.*

Библиографический список

1. Литвин Ф.Л. Некруглые зубчатые колеса. М.; Л.: ГНТИМЛ, 1956. 308 с.
2. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988. 640 с.
3. Litvin L. Faydor, Fuentes Alfonso. Gear geometry and applied theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 816 p.
4. Ерохин М.Н. Детали машин и основы конструирования. М.: КолосС, 2005. 464 с.
5. Litvin L. Faydor, et al. Noncircular gears: design and generation. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 204 p.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. Т. 2. 810 с.
7. Гурвиц А. Теория аналитических и эллиптических функций. Л.; М.: Гостехиздат, 1933. 345 с.
8. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1963. 515 с.
9. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
10. Павлов А.Е., Павлова Л.А. Эллиптические функции в задачах теоретической механики. Ижевск: Изд-во ИжГСХА, 2007. С. 132.
11. Burmester L.E. Lehrbuch der Kinematik. Leipzig. Germany: Verlag Von Arthur Felix, 1888. 962 p.
12. Добровольский В.В. Теория механизмов. М.: Машгиз, 1953. 472 с.

Статья поступила 04.06.2017

CONJUGATION OF TWO CENTROIDES, ONE OF THEM BEING AN EXCENTRIC CIRCLE

ALEKSANDR Ye. PAVLOV, *PhD (Math), Associate Professor*
E-mail: alexpavlov60@mail.ru.

LARISA A. PAVLOVA, *Associate Professor*
E-mail: krasilnikowa.larisa2011@yandex.ru

Russian State Agrarian University – Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazev, Timiryazevskaya Str., 49, Moscow, 127550, Russian Federation

Wheels of non-circular shape have found wide use in machine building due to the developed technology of teeth cutting. When designing wheels, the initial task is to determine their centroid, i.e. such conjugated curves, which roll over one another without slipping when the profiles are engaged. When calculating the gear ratio of continuous rotation, the following condition should be taken into account: the wheel centroids must be closed. The most widely used wheels are elliptical centroids, the centers of which are focuses of ellipses. In agricultural machinery building, non-circular wheels can be used in grain harvesters and stationary grain separators to separate grain mixtures and reduce the vibration of devices by periodically changing the conveyor belt speed. The paper concentrates on a tooth gear train, the driving wheel of which is an eccentric wheel, and the driven wheel has a non-circular shape. Basing on the condition of the closed centroids, the authors derive an exact formula, which makes it possible to find the characteristics of the driven wheel. For the selected relative eccentricity, the center-to-center distance between the wheels can be found. The formula is expressed in terms of the complete elliptic integrals of the first and third kinds. Currently, elliptical functions are built into analytical computer software packages and are easy to use. Earlier, engineers used to apply approximate formulas in calculations. The center-to-center distance had to be calculated by a method of successive approximations expanding an integrand expression into the trigonometric Fourier series in a hyperelliptic integral. As a result, to demonstrate the correctness of the derived formula by means of computer graphics, a series of closed centroids is produced for a given number of the driving wheel turns.

Key words: centroids, conjugation of curves, center-to-center distance, eccentricity, gear ratio.

References

1. Litvin F.L. Nekruglyye zubchatyye kolesa [Non-circular tooth gears]. M., L.: GNTIML, 1956. 308 p. (in Rus.)

2. Artobolevskiy I.I. Teoriya mekhanizmov i mashin [Theory of mechanisms and machines]. M., Nauka, 1988. 640 p. (in Rus.)

3. Litvin L. Faydor, Fuentes Alfonso. Gear geometry and applied theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 816 p.

4. Yerokhin M.N. Detali mashin i osnovy konstruirovaniya [Machine parts and design basics]. M., KolosS, 2005. 464 p. (in Rus.)

5. Litvin L. Faydor, et al. Noncircular gears: design and generation. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 204 p.

6. Fikhtengol’ts G.M. Kurs differentsial’nogo i integral’nogo ischisleniya [Course of differential and integral calculus]. M., FIZMATLIT, 2001. Vol. 2. 810 p. (in Rus.)

7. Gurvits A. Teoriya analiticheskikh i ellipticheskikh funktsiy [Theory of analytic and elliptic functions]. L., M., Gostekhizdat, 1933. 345 p. (in Rus.)

8. Uitteker E.T., Vatson Dzh.N. Kurs sovremennogo analiza [Course of modern analysis]. Vol. 2. M., GIFML, 1963. 515 p. (in Rus.)

9. Akhiyezer N.I. Elementy teorii ellipticheskikh funktsiy [Elements of the theory of elliptic functions]. M., Nauka, 1970. 304 p. (in Rus.)

10. Pavlov A.Ye., Pavlova L.A. Ellipticheskiye funktsii v zadachakh teoreticheskoy mekhaniki [Elliptic functions in problems of theoretical mechanics]. Izhevsk, Izd-vo IzhGSKhA, 2007. P. 132. (in Rus.)

11. Burmester L.E. Lehrbuch der Kinematik. Leipzig. Germany: Verlag Von Arthur Felix, 1888. 962 p.

12. Dobrovol’skiy V.V. Teoriya mekhanizmov [Theory of mechanisms]. M., Mashgiz, 1953. 472 p. (in Rus.)

The paper was received on June 4, 2017