УДК 636.294.036.5

Д.А. Горин
С.П. Рудобашта, доктор техн. наук
Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРОЦЕССА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО СВЧ-НАГРЕВА ПАНТОВ ОЛЕНЯ

Продукция пантового оленеводства хорошо известна своими целебными свойствами и зарекомендовала себя в России и ряде крупных стран Азиатского региона (Китай, Япония, Корея). Наиболее популярным сырьем отрасли пантового оленеводства являются панты. Процесс их заготовки для дальнейшей переработки подразумевает консервацию (сушку), одной из стадий которой является нагрев. Из-за высокой термолабильности исходного материала к технологическому процессу сушки предъявляются жесткие требования. Таким образом, каждая из стадий сушки должна быть детально изучена с целью определения наиболее подходящих параметров сушильного оборудования. В качестве способа нагрева был выбран СВЧ-энергоподвод, так как он зарекомендовал себя как эффективный и перспективный способ обработки биологически активных материалов.

Математическое моделирование позволяет получить аналитическое решение задачи СВЧ-нагрева, что в дальнейшем значительно упростит задачу определения оптимальных параметров и условий протекания процесса. В целях упрощения построения математической модели нагрева панта пант был представлен в виде двухслойного цилиндра (внутренняя часть и слой кожного покрова). Ранее авторы сформулировали задачу СВЧ-нагрева панта [1]. Определение температурных полей при СВЧ-нагреве пантов описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1(\tau,r)}{\partial\tau} = a_1\nabla^2 T_1 + \frac{q_1}{\rho_1 c_1}, \quad 0 \le r \le R_1, \tau > 0,\\
&T_1(0,r) = T_{01}, \quad 0 \le r \le R_1, \tau = 0,\\
&\frac{\partial T_1(\tau,0)}{\partial r} = 0, \quad \tau > 0,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_2(\tau,r)}{\partial\tau} = a_2\nabla^2 T_2 + \frac{q_2}{\rho_2 c_2}, \quad R_1 < r < R_2, \tau > 0,\\
&T_2(0,r) = T_{02}, \quad R_1 \le r \le R_2,\\
&T_2(\tau,R_2) + \frac{\lambda_2}{\alpha}\frac{\partial T_2(\tau,R_2)}{\partial r} = T_{\text{c}}, \quad r = R_2, \tau > 0,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1\frac{\partial T_1(\tau,R_1)}{\partial r} = \lambda_2\frac{\partial T_2(\tau,R_1)}{\partial r}, \quad r = R_1, \tau > 0,\\
&T_1(\tau,R_1) = T_2(\tau,R_1), \quad r = R_1, \tau > 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Рассмотрим аналитическое решение поставленной задачи. Конкретный вид решения систем (1)—(3) будет определяться функцией распределения источников теплоты q как вдоль линейных размеров объекта, так и во времени. Для начала принимаем, что источники теплоты распределены по объему равномерно и постоянны во времени ($q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$) и рассмотрим этот случай СВЧ-нагрева.

Введем обобщенные переменные:

$$\begin{gathered}
\xi = \frac{r}{R_2}; \zeta = \frac{R_1}{R_2}; H = \frac{\lambda_2}{\alpha R_2}; \varsigma = \frac{q_2}{q_1};\\
L_1 = \frac{T_c}{R_2^2 q_1}\lambda_1; L_2 = \frac{T_c}{R_2^2 q_1}\lambda_2; A_1 = \frac{a_1}{R_2^2}; A_2 = \frac{a_2}{R_2^2};\\
\theta_1(\tau,\xi) = \frac{T_1(\tau,\xi) - T_{\text{c}}}{T_{\text{c}}}; \theta_{02} = \frac{T_{02} - T_{\text{c}}}{T_{\text{c}}}.
\end{gathered} \tag{4}$$

Тогда система уравнений (1)—(3) преобразуется к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{A_1}\frac{\partial\theta_1(\tau,\xi)}{\partial\tau} = \nabla^2\theta_1(\tau,\xi) + \frac{1}{L_1}, \quad 0 \le \xi < \zeta, \tau > 0,\\
&\theta_1(0,\xi) = \theta_{01}, \quad 0 \le \xi \le \zeta, \tau = 0,\\
&\frac{\partial\theta_1(\tau,0)}{\partial r} = 0, \quad \tau > 0,
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{A_2}\frac{\partial\theta_2(\tau,\xi)}{\partial\tau} = \nabla^2\theta_2(\tau,\xi) + \frac{\varsigma}{L_2}, \quad \zeta < \xi < 1, \tau > 0,\\
&\theta_2(0,\xi) = \theta_{02}, \quad \zeta > \xi \ge 1, \tau = 0,\\
&\theta_2(\tau,1) + H\frac{\partial\theta_2(\tau,1)}{\partial\xi} = 0, \quad \xi = 1, \tau > 0,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&L_1\frac{\partial\theta_1(\tau,\zeta)}{\partial\xi} = L_2\frac{\partial\theta_2(\tau,\zeta)}{\partial\xi}, \quad \xi = \zeta, \tau > 0,\\
&\theta_1(\tau,\zeta) = \theta_2(\tau,\zeta), \quad \xi = \zeta, \tau > 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Искомое решение систем (5)–(7) может быть редуцировано следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_1(\tau,\xi) = \Psi_1(\xi) + W_1(\tau,\xi),\\
&\theta_2(\tau,\xi) = \Psi_2(\xi) + W_2(\tau,\xi),
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где функции $\Psi_1(\xi)$ и $\Psi_2(\xi)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\Psi_1(\xi) + \frac{1}{L_1} = 0, \quad 0 \le \xi < \zeta, \tau > 0,\\
&\frac{\partial\Psi_1(0)}{\partial\xi} = 0, \quad \tau > 0,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\Psi_2(\xi)+\frac{\varsigma}{L_2}=0, \quad \zeta<\xi<1,\ \tau>0,\\ &\Psi_2(1)+H\frac{\partial\Psi_2(1)}{\partial\xi}=0, \quad \xi=1,\ \tau>0,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &L_1\frac{\partial\Psi_1(\zeta)}{\partial\xi}=L_2\frac{\partial\Psi_2(\zeta)}{\partial\xi}, \quad \xi=\zeta,\ \tau>0,\\ &\Psi_1(\zeta)=\Psi_2(\zeta), \quad \xi=\zeta,\ \tau>0,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

а функции $W_1(\tau, \xi)$, $W_2(\tau, \xi)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{A_1}\frac{\partial W_1(\tau,\xi)}{\partial\tau}=\nabla^2 W_1(\tau,\xi), \quad 0\le\xi<\zeta, \tau>0,\\ &W_1(0,\xi)=-\Psi_1(\xi)+\theta_{01}, \quad 0\le\xi<\zeta, \tau=0,\\ &\frac{\partial W_1(\tau,0)}{\partial\xi}=0, \tau>0,\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{A_2}\frac{\partial W_2(\tau,\xi)}{\partial\tau}=\nabla^2 W_2(\tau,\xi), \quad \zeta<\xi<1,\ \tau>0,\\ &W_2(0,\xi)=-\Psi_2(\xi)+\theta_{02}, \quad \zeta<\xi<1,\ \tau=0,\\ &W_2(\tau,1)+H\frac{\partial W_2(\tau,1)}{\partial\xi}=0, \quad \xi=1,\ \tau>0,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &L_1\frac{\partial W_1(\tau,\zeta)}{\partial\xi}=L_2\frac{\partial W_2(\tau,\zeta)}{\partial\xi}, \quad \xi=\zeta,\ \tau>0,\\ &W_1(\tau,\zeta)=W_2(\tau,\zeta), \quad \xi=\zeta,\ \tau>0.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Решая систему уравнений (9)–(11), получаем следующие выражения для $\Psi_1(\xi)$ и $\Psi_2(\xi)$:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_1(\xi)=\frac{1}{4L_1}(l_3-\xi^2),\\ &\Psi_2(\xi)=\frac{\varsigma}{4L_2}(l_1+l_2\ln\xi-\xi^2).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $l_1=1-H(2\zeta^2(1-\frac{1}{\varsigma})-2)$; $l_2=2\zeta^2(1-\frac{1}{\varsigma})$;

$$l_3=\varsigma\frac{L_1}{L_2}\left[2\zeta^2(1-\frac{1}{\varsigma})(\ln\zeta-H)+2H-\zeta^2+1\right]+\zeta^2.$$

Решая систему уравнений (12)–(14) методом разделения переменных Фурье [2], находим, что данным уравнениям удовлетворяют частные решения вида:

$$\varpi_1(\tau,\xi)=aJ_0(mB_1\xi)\exp(-m^2\tau); \tag{16}$$

$$\varpi_2(\tau,\xi)=\left[bJ_0(kB_2\xi)+cN_0(kB_2\xi)\right]\exp(-k^2\tau), \tag{17}$$

где a, b, c — постоянные интегрирования; m, k — постоянные разделения, $B_1=\sqrt{\frac{1}{A_1}}$, $B_2=\sqrt{\frac{1}{A_2}}$.

Условия (14) для постоянных a, b, c могут быть выполнены при $k = m$.

Положим $kB_2 = \gamma$ и $\varepsilon = B_1/B_2$, тогда с учетом (14) получим соотношения для коэффициентов a, b, c:

$$\begin{aligned} &b=aP(\gamma,\varepsilon,\zeta);\\ &c=az(\gamma,\varepsilon,\zeta),\end{aligned} \tag{18}$$

где $P(\gamma,\varepsilon,\zeta)=\dfrac{J_0(\gamma\varepsilon\zeta)N_0^{'}(\gamma\zeta)-\frac{L_1}{L_2}(\gamma\varepsilon\zeta)N_0(\gamma\zeta)}{J_0(\gamma\zeta)N_0^{'}(\gamma\zeta)-J_0^{'}(\gamma\zeta)N_0(\gamma\zeta)}$;

$$Z(\gamma,\varepsilon,\zeta)=\frac{L_1}{L_2}\frac{J_0^{'}(\gamma\varepsilon\zeta)}{N_0^{'}(\gamma\zeta)}-P(\gamma,\varepsilon,\zeta)\frac{J_0^{'}(\gamma'\zeta)}{N_0^{'}(\gamma\zeta)}.$$

Для выполнения граничных условий на поверхности цилиндра при $\xi = 1$, в соответствии с форулами (12) и (18), необходимо, чтобы собственные значения γ удовлетворяли следующему трансцедентному уравнению:

$$\begin{aligned} &P(\gamma,\varepsilon,\zeta)\left[J_0(\gamma)+HJ_0^{'}(\gamma)\right]+\\ &+Z(\gamma,\varepsilon,\zeta)\left[N_0(\gamma)+HN_0^{'}(\gamma)\right].\end{aligned} \tag{19}$$

Корни уравнения (19) представляют дискретный спектр значений γ_n (n = 1, 2, ...).

Тогда с учетом соотношений (18)–(19) функции $W_1(\tau, \xi)$ и $W_2(\tau, \xi)$ определим как бесконечные суммы решений вида (16)–(17):

$$W_1(\tau,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n J_0(\gamma_n\varepsilon\xi)\exp\left[-(\gamma_n/B_2)^2\tau\right]; \tag{20}$$

$$\begin{aligned} W_2(\tau,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n&\left[P(\gamma_n,\varepsilon,\zeta)J_0(\gamma_n\xi)+\right.\\ &\left.+Z(\gamma_n,\varepsilon,\zeta)N_0(\gamma_n\xi)\right]\exp\left[-(\gamma_n/B_2)^2\tau\right].\end{aligned} \tag{21}$$

Можно доказать, что условие ортогональности собственных функций в выражениях (20) и (21) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &L_1B_1^2\int_0^x A_n J_0(\gamma_n\varepsilon R)A_m J_0(\gamma_m\varepsilon\xi)\xi\,d\xi+\\ &+L_2B_2^2\int_x^1 A_n\left[P(\gamma_n,\varepsilon,\zeta)J_0(\gamma_n\xi)+Z(\gamma_n,\varepsilon,\zeta)N_0(\gamma_n\xi)\right]\times\\ &\times A_m\left[P(\gamma_m,\varepsilon,\zeta)J_0(\gamma_m\xi)+Z(\gamma_m,\varepsilon,\zeta)N_0(\gamma_m\xi)\right]\xi d\xi=\\ &=\begin{cases} L_1B_1^2A\,\tilde N_1^2+L_2B_2^2A_n\tilde N_2^2 & \text{при } n=m;\\ 0 & \text{при } n\ne m,\end{cases}\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\tilde N_1^2=\int_0^x J_0^2(\gamma_n\varepsilon\xi)\xi\,d\xi; \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \tilde N_2^2=\int_x^1&\left[P(\gamma_n,\varepsilon,\zeta)J_0(\gamma_n\xi)+\right.\\ &\left.+Z(\gamma_n,\varepsilon,\zeta)N_0(\gamma_n\xi)\right]^2\xi d\xi.\end{aligned} \tag{24}$$

Тогда в соответствии с начальными условиями (12), (13) и соотношениями (20)–(24) получим выражение для коэффициента A_n:

$$\begin{aligned} A_n=&\frac{L_1B_1^2\int_0^x\xi(\theta_{01}-\Psi_1(\xi)J_0(\gamma_n\varepsilon\xi)\,d\xi}{L_1B_1^2\tilde N_1^2+L_2B_2^2\tilde N_2^2}+\\ &+\frac{L_2B_2^2\int_x^1\xi(\theta_{02}-\Psi_2(\xi)\begin{bmatrix}P(\gamma_n,\varepsilon,\zeta)J_0(\gamma_n\xi)+\\ +Z(\gamma_n,\varepsilon,\zeta)N_0(\gamma_n\xi)\end{bmatrix}d\xi}{L_1B_1^2\tilde N_1^2+L_2B_2^2\tilde N_2^2}.\end{aligned} \tag{25}$$

Соотношение (25) можно записать в виде

$$A_{\text{n}} = \frac{L_1 B_1^2 \overset{*}{C}_{\text{n}} + L_2 B_2^2 \overset{*}{D}_{\text{n}}}{L_1 B_1^2 \tilde{N}_1^2 + L_2 B_2^2 \tilde{N}_2^2}, \qquad (26)$$

где

$$\overset{*}{C}_{\text{n}} = \int_0^x \xi(\theta_{01} - \Psi_1(\xi)) J_0(\gamma_{\text{n}} \varepsilon \xi)\, d\xi; \qquad (27)$$

$$\overset{*}{D}_{\text{n}} = \int_x^1 \xi(\theta_{02} - \Psi_2(\xi)) \big[P(\gamma_{\text{n}}, \varepsilon, \zeta) J_0(\gamma_{\text{n}} \xi) + Z(\gamma_{\text{n}}, \varepsilon, \zeta) N_0(\gamma_{\text{n}} \xi) \big] d\xi. \qquad (28)$$

Интегрируя выражения (23), (24), получим

$$\tilde{N}_1^2 = \frac{\zeta^2}{2} \big[J_1^2(\gamma_{\text{n}} \varepsilon \zeta) + J_0^2(\gamma_{\text{n}} \varepsilon \zeta) \big]; \qquad (29)$$

$$\tilde{N}_2^2 = \frac{1}{2} \Big[F_1^2(\gamma_{\text{n}}) + F_0^2(\gamma_{\text{n}}) - x^2 \big(F_1^2(\gamma_{\text{n}} \zeta) + F_0^2(\gamma_{\text{n}} \zeta) \big) \Big], \qquad (30)$$

где

$$F_0(\gamma_{\text{n}}) = P(\gamma_{\text{n}}, \varepsilon, \zeta) J_0(\gamma_{\text{n}}) + Z(\gamma_{\text{n}}, \varepsilon, \zeta) N_0(\gamma_{\text{n}});$$

$$F_0(\gamma_{\text{n}} \zeta) = P(\gamma_{\text{n}}, \varepsilon, \zeta) J_0(\gamma_{\text{n}} \zeta) + Z(\gamma_{\text{n}}, \varepsilon, \zeta) N_0(\gamma_{\text{n}} \zeta);$$

$$F_1(\gamma_{\text{n}}) = P(\gamma_{\text{n}}, \varepsilon, \zeta) J_1(\gamma_{\text{n}}) + Z(\gamma_{\text{n}}, \varepsilon, \zeta) N_1(\gamma_{\text{n}});$$

$$F_1(\gamma_{\text{n}} \zeta) = P(\gamma_{\text{n}}, \varepsilon, \zeta) J_1(\gamma_{\text{n}} \zeta) + Z(\gamma_{\text{n}}, \varepsilon, \zeta) N_1(\gamma_{\text{n}} \zeta).$$

Выражения для $\overset{*}{C}_{\text{n}}$ и $\overset{*}{D}_{\text{n}}$ после интегрирования соотношений (27) и (28) с учетом (15) имеют вид

$$\overset{*}{C}_{\text{n}} = \frac{1}{4L_1} \left[J_0(\gamma_{\text{n}} \varepsilon \zeta) \left[\frac{2\zeta^2}{(\gamma_{\text{n}} \varepsilon)^2} \right] + J_1(\gamma_{\text{n}} \varepsilon \zeta) \left[\frac{\zeta^3 - \zeta \tilde{l}_3}{\gamma_{\text{n}} \varepsilon} - \frac{4\zeta}{(\gamma_{\text{n}} \varepsilon)^3} \right] \right]; \qquad (31)$$

$$\overset{*}{D}_{\text{n}} = \frac{\varsigma}{4L_2} \left[F_0(\gamma_{\text{n}}) \frac{1}{\gamma_{\text{n}}^2} (2 - l_2) + F_1(\gamma_{\text{n}}) \frac{1}{\gamma_{\text{n}}} \Big(1 - \tilde{l}_1 - \frac{4}{\gamma_{\text{n}}^2}\Big) - F_0(\gamma_{\text{n}} \zeta) \frac{1}{\gamma_{\text{n}}^2} (2\zeta^2 - l_2) - F_1(\gamma_{\text{n}} \zeta) \frac{1}{\gamma_{\text{n}}} \Big(\zeta^3 - \tilde{l}_1 \zeta - l_2 \zeta \ln \zeta - \frac{4\zeta}{\gamma_{\text{n}}^2} \Big) \right], \qquad (32)$$

где $\tilde{l}_1 = l_1 - 4L_2\theta_{02}/\varsigma$, $\tilde{l}_3 = l_3 - 4L_1\theta_{01}$.

Таким образом, соотношения (8), (15), (19)–(21), (26)–(32) описывают температурные поля в двухслойном цилиндрическом объекте при наличии равномерно распределенных по объему и постоянных во времени источников теплоты. Численный анализ полученных выражений при наличии современных вычислительных средств не представляет затруднений и позволяет оценить температурное воздействие при СВЧ-нагреве двухслойных цилиндрических объектов, в частности пантов.

Список литературы

1. Горин Д.А. Задача теоретического исследования процесса технологического нагрева пантов северного оленя в ЭМП СВЧ // Наукові праці Одесько˚ національно˚ академі˚ харчових технологій. — Одеса, 2012. — Вип. 41. — Т. 2. — С. 221–225.

2. Будаев В.Д., Флегонтов А.В. Метод разделения переменных в математической физике: учеб. изд. — СПб.: Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, 2009. — С. 10–18.

УДК 631.3.032

С.А. Андреев, *канд. техн. наук*
Е.А. Петрова
Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ИОНОВ ОЗОНА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ ДВИЖИТЕЛЕМ

Электростатические движители приобретают возрастающую роль в различных областях техники и сельского хозяйства. Например, для вентиляции помещений, активного перемешивания газов, нанесения краски или распыления аэрозолей. Перспективное направление использования электростатических движителей связано с осуществлением озонового наддува в топочные камеры водогрейных котлов.

Известно, что озон, являясь сильным окислителем, способен существенно интенсифицировать процесс горения топлива. В то же время, в отличие от обычного кислорода, озон легко получается из воздуха и поэтому его применение в качестве агента наддува более перспективно [1]. В связи с чрезвычайной нестойкостью озона процесс его получения должен производиться непосредственно перед подачей в топку. Поэтому в конструкции котла необходимо предусмотреть озонатор и вентилятор. При этом последний служит для нагнетания полученного озона в топочную камеру [2]. Однако дополнение небольших водогрейных котлов вентиляторами приводит к их усложнению, удорожанию, снижает надежность и создает предпосыл-