

is exceeded, there is slag formation on a rotary grate, which prevents its operation in the combustion chamber and the operation of the ash removal system. In this connection, the calculation of air supply to ensure the combustion of dung litter in solid fuel boilers should include the calculation of flue gases supply. The authors examine problems of calculating the volume fraction of oxygen in a mixture of air and flue gases supplied into the combustion zone and perform actual calculation of this fraction. The obtained analytical dependencies and coefficients will allow to lower the critical temperatures in the combustion zone to prevent uncontrolled ignition of volatile substances with a release of a significant amount of heat leading, in its turn, to sintering the slag on the grate and then stopping the equipment.

**Key words:** thermal recycling, dung burning, dung litter, flue gas recirculation, slag, dung disposal.

### References

1. Ivanov YU.G., Tselikov V.V., Shafeyev A.F. Osobnosti szhiganiya podstilochnogo pometa pri termicheskoy utilizatsii [Peculiarities of incineration of dung litter during thermal utilization]. *Vestnik FGOU VPO "MGAU imeni V.P. Goryachkina"*. 2015. No. 1 (65). Pp. 25-30. (in Rus).

2. Ivanov Yu.G., Tselikov V.V., Shafeyev A.F. Osobennosti szhiganiya podstilochnogo pometa v tverdotoplivnykh kotlakh [Features of incineration of dung litter in solid fuel boilers]. *Vestnik VNIIMZH*. 2015. No. 4 (20). Pp. 220-224. (in Rus).

3. Ivanov Yu.G., Tselikov V.V., Shafeyev A.F. Termicheskaya utilizatsiya ptich'yego pometa [Thermal utilization of poultry dung]. *Sel'skiy mekhanizator*. 2015. No. 9. Pp. 32-33. (in Rus).

4. Ivanov Yu.G. i dr. Eksperimental'naya ustanovka dlya utilizatsii podstilochnogo pometa i proizvodstva teplovoy energii [Experimental installation for utilization of dung litter and production of heat energy]: *Trudy 9-oy Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Energoobespecheniye i energosberezheniye v sel'skom khozyaystve" v 5-ti chastyakh*. Part 3. "Energosberegayushchiye tekhnologii v zhivotnovodstve i statsionarnoy energetike: Moskva, 21-22 maya 2014. Moskva: GNU VIESKH, 2014. Pp. 243-247 (in Rus).

5. Kantorovich B.V. Osnovy teorii goreniya i gaziifikatsii tverdogo topliva [Fundamentals of the theory of combustion and gasification of solid fuels]. M.: Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, 1958. 601 p. (in Rus).

*Received on January 18, 2017*

УДК 621(075.8)

**ПАВЛОВ АЛЕКСАНДР ЕГОРОВИЧ**, канд. физ.-мат. наук, доцент

E-mail: alexpavlov60@mail.ru

**ПАВЛОВА ЛАРИСА АЛЕКСАНДРОВНА**, доцент

E-mail: krasilnikowa.larisa2011@yandex.ru

Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева,

ул. Тимирязевская, 49, Москва, 127550, Российская Федерация

## КАЛИБРОВКА КЛУБНЕЙ КАРТОФЕЛЯ

Сортирование клубней по размерам является важной частью процесса послеуборочной и предпосадочной обработки картофеля. Процесс калибрования картофеля является вероятностным по своему характеру. Поэтому задача о нахождении вероятности прохождения клубня сквозь щелевые отверстия сита картофелесортировки имеет большую практическую значимость. Методом исследования является геометрическая и комбинаторная теория вероятностей, служащие математическим аппаратом изучения случайных процессов. В качестве модели клубня рассмотрен трёхосный эллипсоид, падающий вертикально вниз на горизонтальную сетку. Клубень может пройти, не коснувшись сетки, если его проекция на горизонтальную плоскость, являющаяся эллипсом, впишется в ячейку сетки. В представленной авторами работе получены аналитические формулы вероятности прохождения клубня картофеля сквозь щелевые отверстия. Разработан комбинаторный подход для решения обобщённой проблемы Бюффона. Найденная формула пригодна также для случая клубней, форма которых отличается от эллиптической. При определённых условиях постановки эксперимента, в пределе большого числа испытаний, частотность появления событий

может быть принята в качестве вероятности. Поэтому найденные авторами формулы можно проверить на практике. В работе авторов знаменитая задача Жоржа Бюффона из математической теории вероятностей о бросании иглы на расчерченные параллельные полосы получила обобщение на различные, представляющие практический интерес случаи.

**Ключевые слова:** калибровка картофеля по размеру, эллипсоид, задача Бюффона, вероятность пересечения эллипсом параллельных линий.

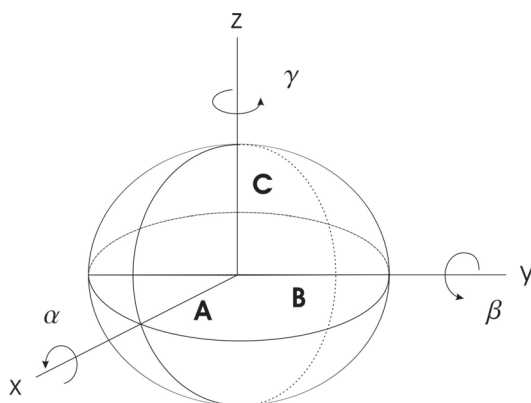
**Введение.** Сортирование клубней по размерам является важной частью процесса послеуборочной и предпосадочной обработки картофеля [1]. Точное калибрование семенного картофеля по размеру клубней обеспечит надежную работу картофелепосадочных машин и дружные всходы, улучшит качество ухода за посадками и в конечном счёте увеличит урожайность. К сортирующим устройствам предъявляются требования точности калибрования. Математическая модель процесса разделения картофеля на фракции позволит совершенствовать конструкции сортирующих устройств, повысить их надёжность и эффективность.

Процесс калибрования картофеля является вероятностным по своему характеру. Поэтому задача о нахождении вероятности прохождения клубня сквозь щелевые отверстия сита картофелесортировки имеет не только практическую значимость [2], но и приводит к моделям, представляющим теоретико-вероятностный интерес [3].

**Цель работы** – получить аналитические формулы вероятности прохождения клубня через щелевые отверстия.

Методом исследования является геометрическая теория вероятностей, служащая математическим аппаратом изучения случайных процессов.

**Результаты и обсуждение.** Пусть эталонный клубень – эллипсоид, длины полуосей которого  $A, B, C$ , падает вертикально вдоль оси  $Oz$  (рис. 1) на горизонтальную сетку.



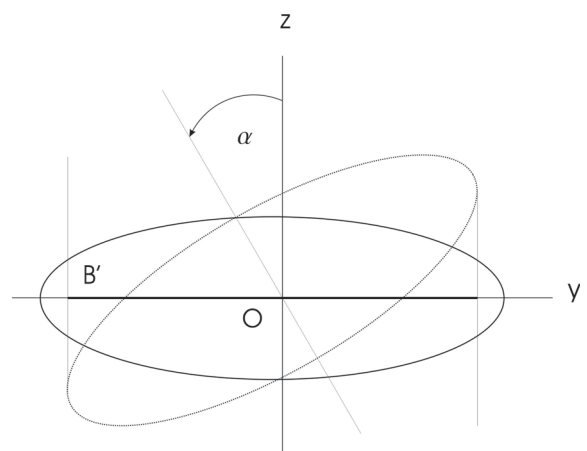
**Рис. 1. Распределение случайных величин  $\alpha, \beta, \gamma$ - углов поворота тела вокруг осей координат является равномерным**

Клубень может пройти сквозь сито, не коснувшись сетки, если его проекция на горизонтальную плоскость  $Oxy$ , являющаяся эллипсом, впишется

в ячейку сетки. Найдем усреднённые характеристики – длины полуосей ( $a, b$ ) этого эллипса. Пусть главные оси эллипсоида направлены по осям декартовой системы координат. В исходном положении проекцией эллипсоида на горизонтальную плоскость является эллипс с длинами полуосей  $A$  и  $B$  (рис. 1). Ориентация эллипсоида при падении может быть произвольной. Предполагается, что распределение случайных величин  $\alpha, \beta, \gamma$ - углов поворота тела вокруг осей координат является равномерным. Углы изменяются в интервалах:  $0 \leq \alpha \leq \pi / 2, 0 \leq \beta \leq \pi / 2, 0 \leq \gamma \leq \pi / 2$ . Если повернуть эллипсоид вокруг оси  $Ox$  на угол  $\alpha$ , длина полуоси его проекции  $OB'$  (рис. 2) будет равна (в статье [4] эта формула получена интегрированием кинематической связи):

$$OB' = \sqrt{B^2 \cos^2 \alpha + C^2 \sin^2 \alpha} = B\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \alpha}, \quad (1)$$

где  $k_1^2 \equiv (B^2 - C^2) / B^2$  – квадрат эксцентриситета эллипса.



**Рис. 2. Поворот эллипсоида вокруг оси  $Ox$  на угол  $\alpha$**

Если повернуть эллипсоид вокруг оси  $Oy$  на угол  $\beta$ , изменится длина полуоси его проекции  $OA'$  (рис. 3):

$$OA' = \sqrt{A^2 \cos^2 \beta + C^2 \sin^2 \beta} = A\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \beta}, \quad (2)$$

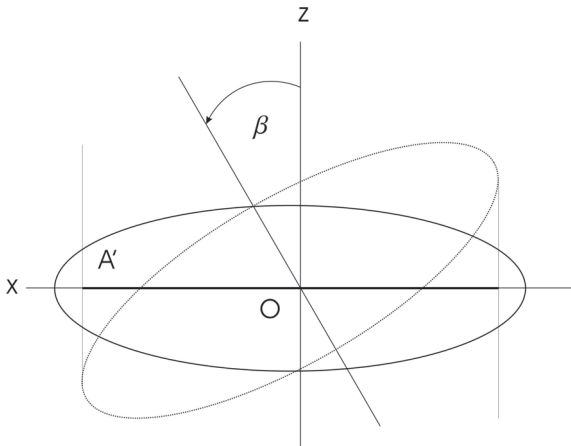
где  $k_2^2 \equiv (A^2 - C^2) / A^2$  – квадрат эксцентриситета эллипса.

Поворот эллипсоида вокруг оси  $Oz$  на угол  $\gamma$  меняет ориентацию его проекции, не изменяя формы. Найдем теперь усреднённые характеристики: мате-

математические ожидания величин  $OB'$  (1) и  $OA'$  (2) – длин полуосей эллипса, лежащего в плоскости  $Oxy$ . Получаем

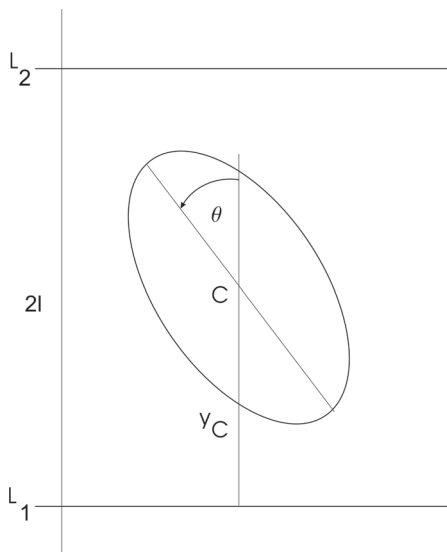
$$a \equiv \langle OA' \rangle = A\sqrt{1 - k_2^2} / 2, \quad b \equiv \langle OB' \rangle = B\sqrt{1 - k_1^2} / 2,$$

поскольку средние значения углов  $\alpha, \beta$  равны  $\pi/4$ .



**Рис. 3. Поворот эллипсоида вокруг оси  $Oy$  на угол  $\beta$**

Сформулируем и решим обобщённую проблему Бюффона [5]. На горизонтальной плоскости начерчены параллельные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии  $2l$ . На эту плоскость наудачу бросается эллипс, длины полуосей которого  $a$  и  $b$  ( $a \geq b$ ). Найти вероятность пересечения эллипсом хотя бы одной из этих прямых. Положение эллипса, с точностью до выбора конкретной прямой, зададим парой чисел  $(y_C; \theta)$ . Здесь  $y_C$  – расстояние от центра эллипса  $C$  до прямой  $L_1$ , а  $\theta$  – угол отклонения эллипса от вертикали (рис. 4).



**Рис. 4. Положение эллипса, задаваемое парой чисел  $(y_C; \theta)$**

Пересечение эллипса с нижней прямой  $L_1$  происходит в том и только в том случае, когда

$$y_C \leq a\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}, \quad (3)$$

где  $k^2 \equiv (a^2 - b^2) / a^2$  – квадрат эксцентриситета эллипса. Пересечение эллипса с верхней прямой  $L_2$  происходит в случае

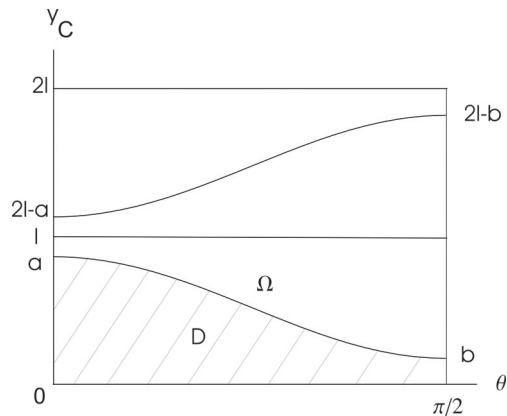
$$y_C \geq 2l - a\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}. \quad (4)$$

Определим пространство элементарных событий  $\Omega$ :

$$\Omega = \{(y_C, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi / 2, 0 \leq y_C \leq l\}$$

и пространство благоприятных событий  $D$  (показано штриховкой):

$$D = \{(y_C, \theta) : y_C \leq a\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\}.$$



**Рис. 5. Определение пространства элементарных событий  $\Omega$  и пространства благоприятных событий  $D$**

Найдём площадь  $S_D$  области  $D$  в пространстве элементарных событий  $\Omega$ :

$$S_D = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = aE(k^2), \quad (5)$$

где  $E(k^2)$  – полный эллиптический интеграл второго рода с параметром  $k^2$ . Площадь  $S_D$  пространства элементарных событий  $\Omega$  равна  $S_D = (\pi/2) l$ .

Вероятность  $P$  попадания в область  $D$  находим по формуле геометрической вероятности как отношение площадей вероятностных событий [6]:

$$P = \frac{S_D}{S_\Omega} = \frac{4aE(k^2)}{2\pi l}. \quad (6)$$

Заметим, что полученная формула представляет отношение длин: в числителе дроби стоит периметр эллипса, а в знаменателе – длина окружности радиуса  $l$ .

Остановимся на частных случаях. Если  $a = b$ , эксцентриситет эллипса равен нулю:  $k = 0$  – эллипс представляет собой окружность. Получим из (6) вероятность пересечения окружности радиуса  $r \equiv a$  с прямой  $P = r/l$ .

Если  $k = 1$ , эллипс вырождается в отрезок длиной  $2a \equiv 2r$ . Тогда площадь пространства благоприятных событий будет равна

$$S_D = r \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = r,$$

а искомая вероятность равна  $P = 2r / \pi l$ . Получается формула Бюффона [7].

Соотношение между параметрами эллипса и расстоянием между прямыми может оказаться таким, что эллипс может пересечь одновременно обе прямые  $L_1$  и  $L_2$ . В этом случае области благоприятных событий на рисунке 6 пересекаются.

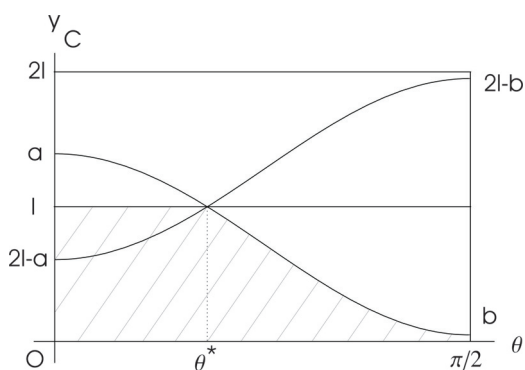


Рис. 6. Пересечение областей благоприятных событий

Из условия пересечения кривой  $y_c = a\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}$  с прямой  $y_c = l$  найдём критический угол  $\theta^*$ , когда эллипс касается одновременно прямых  $L_1$  и  $L_2$ :

$$\theta^* = \arcsin \sqrt{\frac{a^2 - l^2}{a^2 - b^2}}. \quad (7)$$

Вычислим теперь площадь  $S_D$  благоприятных событий:

$$S_D = l\theta^* + a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = l\theta^* + aE(k^2) - aE(\theta^*, k^2),$$

где  $E(\theta^*, k^2)$  – неполный эллиптический интеграл второго рода. Искомая вероятность будет равна

$$P = \frac{2}{\pi} \theta^* + \frac{2a}{\pi l} E(k^2) - \frac{2a}{\pi l} E(\theta^*, k^2). \quad (8)$$

Разработаем комбинаторный подход для решения обобщённой проблемы Бюффона и получим формулу (6) другим способом. Аппроксимируем эллипс выпуклым многоугольником с бесконечно возрастающим в пределе числом сторон. Если этот

$n$ -угольник пересекается с прямой линией, то пересечение происходит по каким-либо двум сторонам. Событие  $A$ , состоящее в том, что многоугольник пересечёт одну прямую, представляется в виде суммы попарно несовместных событий:

$$A = (A_{12} + A_{13} + \dots + A_{1n}) + (A_{23} + A_{24} + \dots + A_{2n}) + \dots + (A_{n-2,n-1} + A_{n-2,n}) + A_{n-1n},$$

где через  $A_{ij}$  обозначено событие, состоящее в пересечении прямой линии с  $i$ -й и  $j$ -й сторонами многоугольника (рис. 7).

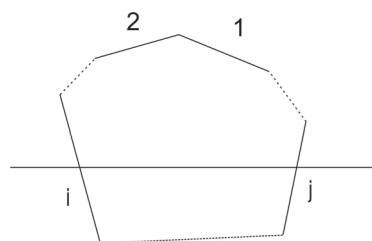


Рис. 7. Событие  $A_{ij}$ , состоящее в пересечении прямой линии с  $i$ -й и  $j$ -й сторонами многоугольника

Представим событие  $A$  в эквивалентной форме:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}, \quad (9)$$

где суммирование ведётся по обоим индексам. Вероятность суммы попарно несовместных событий находим по теореме сложения вероятностей:

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n P_{ij}, \quad (10)$$

где  $P_{ij} = P_{ji}$  есть вероятность пересечения прямой с  $i$ -й и  $j$ -й сторонами многоугольника. Сумма  $\sum_{j=1}^n P_{ij}$  есть вероятность пересечения прямой с  $i$ -й стороной многоугольника. Длину этой стороны обозначим как  $2L_i$ . Из формулы Бюффона найдем эту вероятность:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = \frac{2L_i}{\pi l}. \quad (11)$$

Производя суммирование в (10) по второму индексу, получаем искомую вероятность  $P$ :

$$P = \frac{1}{2\pi l} \sum_{i=1}^n 2L_i = \frac{L}{2\pi l}, \quad (12)$$

где  $L$  – периметр многоугольника.

Из полученной формулы видим, что вероятность  $P$  не зависит ни от числа сторон, ни от длин сторон многоугольника. В формулу входит только периметр  $L$  многоугольника. Формула (12) пригодна и для случая, когда форма клубня не является эллиптической. На практике клубень картофеля не является идеальным эллипсоидом. Его проекция представляет собой

некую ломаную линию. Значит, формула (12) обладает непосредственной практической ценностью.

Во многих задачах, возникающих в механизации сельского хозяйства, влияние случайных факторов является неотъемлемой характерной особенностью самого изучаемого явления. Разработкой методов анализа для описания влияния случая занимается теория вероятностей. Согласно теореме Бернулли [8], при определённых условиях постановки эксперимента, в пределе большого числа испытаний, частота появления событий может быть принята в качестве вероятности.

### Выводы

Используя методы геометрической теории вероятностей, получены формулы (6), (8) и (12) для вычисления вероятности прохождения клубня картофеля сквозь щелевые сита картофелесортировки. Выведенные в работе формулы помогут конструкторам сельскохозяйственной техники обеспечить выполнение современных требований точности калибрования.

### Библиографический список

1. Петров Г.Д. Картофелеуборочные машины. М.: Машиностроение, 1984. 320 с.
2. Ерохин М.Н. Детали машин и основы конструирования. М.: КолосС, 2005. 464 с.
3. Павлов А.Е., Павлова Л.А. Эллиптические функции в задачах теоретической механики. Ижевск: Изд-во ИжГСХА, 2007. 132 с.
4. Павлов А.Е. Плоскопараллельное качение эллипсоида по плоскости и цилиндру // Проблемы механики и управления: нелинейные динамические системы. Пермь, 2004. № 6. Вып. 36. С. 94-118.
5. Канаев И.И. Жорж Луи Леклер де Бюффон. 1707-1781. М.; Л.: Наука, 1966. 266 с.
6. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир, 1990. 240 с.
7. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972. 192 с.
8. Павлов А.Е., Павлова Л.А. Элементы математической статистики. Ижевск: Изд-во ИжГСХА, 2010. 83 с.

*Статья поступила 17.01.2017*

## POTATO TUBER CALIBRATION

*ALEKSANDR Ye. PAVLOV, PhD (Math), Associate Professor*

E-mail: alexpavlov60@mail.ru

*LARISA A. PAVLOVA, Associate Professor*

E-mail: krasilnikowa.larisa2011@yandex.ru

Russian State Agrarian University – Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazev, Timiryazevskaya str., 49, 127550, Moscow, Russian Federation

Sorting of tubers by size is an important part of post-harvest and pre-plant potato processing. The process of potato calibration is probabilistic by its nature. Therefore, the problem of finding the probability of tuber passing through slotted holes in a potato sorting sieve is of great practical significance. The research method is the geometric and combinatorial probability theory serving as a mathematical apparatus for studying random processes. The authors consider a three-axis ellipsoid as a tuber model, which falls vertically downwards on a horizontal grid. A tuber is supposed to pass without touching the grid if its projection onto the horizontal elliptical plane will fit into the grid cell. The considered paper provides analytical formulas for calculating the probability of potato tuber passing through the grid cells. A combinatorial approach is developed to solve the generalized Buffon problem. The formula found is also suitable for the case of tubers, the shape of which differs from the elliptical one. Under certain experimental setting conditions within the limit of a large number of tests, the event occurrence frequency can be considered as a probability. Therefore, the formulas found by the authors can be verified in practice. In their research, they analyze the famous problem of Georges Buffon from the mathematical theory of probability, namely, throwing a needle onto drawn parallel strips and generalize it to various cases of practical interest.

**Key words:** potato calibration by size, ellipsoid, Buffon problem, probability of ellipse intersection of parallel lines.

### References

1. Petrov G.D. Kartofeleuborochnyye mashiny [Potato harvesters]. M.: Mashinostroyeniye, 1984. 320 p. (in Rus).

2. Yerokhin M.N. Detali mashin i osnovy konstruirovaniya [Machine parts and design basics]. M.: KolosS, 2005. 464 p. (in Rus).

3. Pavlov A. Ye., Pavlova L.A. Ellipticheskiye funktsii v zadachakh teoreticheskoy mekhaniki [El-



liptic functions in problems of theoretical mechanics]. Izhevsk: Izd-vo IzhGSKhA, 2007. 132 p. (in Rus).

4. Pavlov A. Ye. Ploskoparallel'noye kachenije ellipsoida po ploskosti i tsilindru [Plane-parallel rolling of an ellipsoid along a plane and a cylinder] *Problemy mekhaniki i upravleniya: nelineynyye dinamicheskiye sistemy*. Perm', 2004. No. 6. Issue 36. Pp. 94-118. (in Rus).

5. Kanayev I.I. Zhorzh Lui Lekler de Byuffon [Georges Louis Leclerc de Buffon]. 1707-1781. M.; L.: Nauka, 1966. 266 p. (in Rus).

6. Sekey G. Paradoksy v teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike [Paradoxes in probability theory and mathematical statistics]. M.: Mir, 1990. 240 p. (in Rus).

7. Kendall M., Moran P. Geometricheskiye veroyatnosti [Geometric probabilities]. M.: Nauka, 1972. 192 p. (in Rus).

8. Pavlov A. Ye., Pavlova L.A. Elementy matematicheskoy statistiki [Elements of mathematical statistics]. Izhevsk: Izd-vo IzhGSKhA, 2010. 83 p. (in Rus).

*Received on January 17, 2017*

УДК 636

**ИГНАТКИН ИВАН ЮРЬЕВИЧ**, канд. техн. наук, доцент

E-mail: ignatkinivan@gmail.com

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1, Москва, 105005, Российская Федерация

## СПОСОБ ОСУШЕНИЯ ВОЗДУХА В КОРОВНИКАХ

Описана технология осушения воздуха в комплексах крупного рогатого скота (КРС). Микроклимат оказывает значительное влияние на продуктивность КРС. Так максимальные удои коровы наблюдаются в температурном диапазоне +5...+20 градусов Цельсия. При температурах ниже –20 градусов Цельсия корова молока не дает. При снижении температуры на каждые 5 градусов Цельсия расход корма увеличивается приблизительно на 8%. При высокой относительной влажности воздуха в производственных помещениях (более 75%) удои коровы снижается на 35% и на 20% повышается расход корма; привесы снижаются на 30% и повышается расход корма у КРС на откорме. В попытке «сэкономить» производители продукции КРС занижают воздухообмены в отопительный период. Такая «экономия» неминуемо приводит к ухудшению микроклимата, а следовательно, негативно сказывается на продуктивности животных. В условиях сложившегося производства устанавливать систему отопления представляется капиталоемкой и хлопотной задачей. Компания ООО «АгроПроектИнвест», расположенная в Липецкой области, предлагает применить систему рекуперации тепла с целью обеспечения необходимого микроклимата без затрат на отопление, а именно поддерживать нормативную относительную влажность воздуха (75...40%); снизить концентрацию углекислого газа на 0,15%; сэкономить около 200 кВт отопительной мощности для коровника на 600 гол.

**Ключевые слова:** вентиляция, микроклимат, осушение воздуха, рекуперация теплоты, скотоводство, система микроклимата, система отопления и вентиляции, утилизация теплоты, энергосбережение.

**Введение.** Обеспечение требуемого микроклимата – одна из наиболее важных задач на пути снижения себестоимости молока и говядины.

Микроклимат значительно влияет на продуктивность животных. В частности, максимальные удои коровы наблюдаются в температурном диапазоне +5...+20°C, а за пределами этой зоны удои снижаются. При температурах ниже –20°C корова молока не дает. Максимальные привесы КРС наблюдаются в зоне температур 0...+25°C, а за пределами этого диапазона привесы снижаются. В то же время наблюдается практически линейная зависимость по-

вышения расхода корма с понижением температуры воздуха. Так при снижении температуры на каждые 5°C расход корма увеличивается приблизительно на 8%. При высокой относительной влажности воздуха в производственных помещениях (> 75%) удои коровы снижается на 35% и на 20% повышается расход корма; привесы снижаются на 30% и повышается расход корма у КРС на откорме [1-7].

КРС комфортно себя чувствует при температуре +10°C, и если запереть окна и двери, тепловыделений животных вполне будет достаточно для обеспечения указанного температурного режима.