УДК 621(075.8)

ПАВЛОВ АЛЕКСАНДР ЕГОРОВИЧ, *канд. физ.-мат. наук, доцент*
E-mail: alexpavlov60@mail.ru.

ПАВЛОВА ЛАРИСА АЛЕКСАНДРОВНА, *доцент*
E-mail: krasilnikowa.larisa2011@yandex.ru

Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, ул. Тимирязевская, 49, Москва, 127550, Российская Федерация

ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОХОЖДЕНИЯ КЛУБНЯ КАРТОФЕЛЯ СКВОЗЬ СИТА КАРТОФЕЛЕСОРТИРОВКИ

Возделывание картофеля представляет собой трудоёмкую отрасль сельскохозяйственного производства. Сокращение затрат предпосадочной и послеуборочной обработки снижает себестоимость картофеля. Сортировка является важной операцией в технологии обработки картофеля. В процессе сортировки клубни картофеля проходят сквозь щелевые отверстия сита. Для достижения максимальной точности калибрования и устранения варьирования размеров клубней в значительном интервале построена вероятностная модель процесса сортирования. Точная математическая модель процесса разделения картофеля на фракции позволит совершенствовать конструкции сортирующих устройств, повысить их надёжность и эффективность. Методом исследования является геометрическая теория вероятностей, служащая математическим аппаратом изучения случайных процессов. В работе получены аналитические формулы вероятности прохождения клубня картофеля сквозь отверстия прямоугольного, треугольного и шестиугольного типов. Предложенный математический подход обеспечит нахождение размеров калибрующих отверстий при конструировании картофелесортировок для приближения к максимально возможной точности калибрования. Разработанный подход является теоретической основой для дальнейшего применения теоретико-вероятностных методов при исследовании процессов сепарирования сельскохозяйственных продуктов.

Ключевые слова: калибровка картофеля по размеру, эллипсоид, задача Бюффона, вероятность пересечения эллипсом сторон прямоугольника, треугольника, шестиугольника.

Введение. Возделывание картофеля представляет собой трудоёмкую отрасль сельскохозяйственного производства. Сокращение затрат предпосадочной и послеуборочной обработки снижает себестоимость картофеля. Сортировка является важной операцией в технологии обработки картофеля. В процессе сортировки клубни картофеля проходят сквозь щелевые отверстия сита [1-3].

Цель работы – получить формулы вероятности прохождения клубня через сита прямоугольного, треугольного, шестиугольного типов.

Методом исследования является геометрическая теория вероятностей, служащая математическим аппаратом изучения случайных процессов.

Для начала решим более простую математическую задачу. С какой вероятностью игла, длина которой равна $2r$, пересечёт хотя бы одну из прямых, если прямые, параллельные оси Ox, располагаются друг от друга на расстоянии $2l_y$, а прямые, параллельные оси Oy, – на расстоянии $2l_x$? Пусть длина иглы меньше размеров решетки: $r < l_x$ и $r < l_y$.

Координаты геометрического центра иглы $C(x_C, y_C)$. Положение тела на плоскости задаётся тремя числами: $(x_C,\ y_C,\ \varphi)$, где φ – угол наклона иглы к оси Ox (рис. 1). Пространство событий, отвечающих прохождению тела без пересечения прямых, будет задаваться неравенствами:

$$r\cos\varphi \le x_C \le 2l_x - r\cos\varphi,$$

$$r\sin\varphi \le y_C \le 2l_y - r\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi / 2.$$

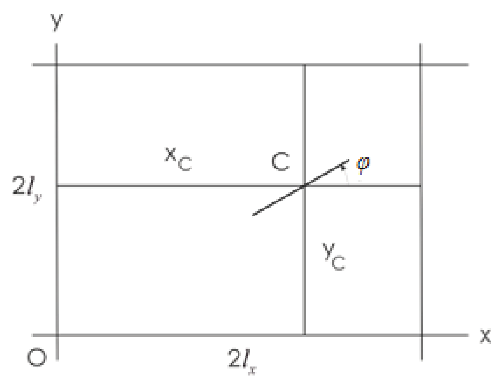

Рис. 1. Координаты геометрического центра иглы $C(x_C, y_C)$

Найдём объем V_D этого пространства, для чего вычислим трёхмерный интеграл, пределы интегрирования которого по переменным x_C и y_C зависят от угла φ:

$$V_D = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{r\sin\varphi}^{(2l_y - r\sin\varphi)} dy_C \int_{r\cos\varphi}^{(2l_x - r\cos\varphi)} dx_C = 4\left(\frac{\pi}{2} l_x l_y - rl_x - rl_y + \frac{r^2}{2}\right).$$

Объём пространства всех возможных событий V_Ω равен

$$V_\Omega = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2l_x} dx_C \int_0^{2l_y} dy_C = 2\pi l_x l_y .$$

Вероятность непересечения найдём как отношение объёмов V_D/V_Ω [4]:

$$1 - \frac{2r}{\pi}\left(\frac{1}{l_x} + \frac{1}{l_y} - \frac{r}{2l_x l_y}\right).$$

Следовательно, вероятность P того, что игла пересечёт хотя бы одну из прямых, находится из полученной выше формулы как вероятность противоположного события:

$$P = \frac{2r}{\pi l_x} + \frac{2r}{\pi l_y} - \frac{r^2}{\pi l_x l_y}. \qquad (1)$$

Зависимость функции P от всех трёх параметров r, l_x, l_y является монотонной. Вероятность пересечения прямо пропорциональна длине иглы r и обратно пропорциональна размерам решетки l_x, l_y. Полученную формулу можно интерпретировать следующим образом. Пусть A – событие, состоящее в том, что игла пересечёт одну прямую, параллельную оси Oy, а событие B – прямую, параллельную оси Ox. Вероятность суммы двух независимых событий (A+B) по теореме сложения вероятностей будет равна [5]:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), видно, что $P(A)$ и $P(B)$ задаются формулой Бюффона $P = \dfrac{2r}{\pi l}$, а вероятность совместного события $A{\cdot}B$, состоящего в пересечении иглой одновременно двух прямых, не равна произведению вероятностей $P(A)$ и $P(B)$, поскольку эти события не являются независимыми:

$$P(A \cdot B) = \frac{r^2}{\pi l_x l_y}.$$

В частном случае, когда игла бросается на квадратную (шахматную) доску с длиной клетки $l = l_x = l_y$, получаем из (1) решение для учебников [6]:

$$P = \frac{r}{\pi l^2}(4l - r).$$

Результаты и обсуждение. Рассмотрим задачу о нахождении вероятности пересечения эллипсом с длинами полуосей a и b хотя бы одной прямой прямоугольной сетки с размерами $2l_x$ и $2l_y$. Координаты геометрического центра эллипса $C(x_C, y_C)$. Положение тела на плоскости задаётся числами (x_C, y_C, φ), где φ – угол наклона эллипса к оси Ox (рис. 2).

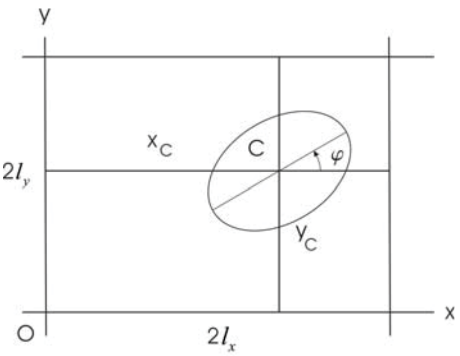

Рис. 2. Эллипс случайно попадает на прямоугольную сетку с размерами $2l_x$ и $2l_y$

Пусть размеры эллипса таковы, что a и b меньше как l_x, так и l_y. Координаты $C(x_C, y_C)$ центра эллипса, который касается одновременно обеих осей декартовой системы координат, равны

$$y_C = a\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}, \quad x_C = b\sqrt{1 + k^2/(1-k^2)\sin^2\varphi}. \qquad (3)$$

Формула x_C получается из равенства $y_C = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$ поворотом эллипса на угол $\pi/2 : \varphi \to \varphi + \pi/2$, в результате чего имеем:

$$x_C = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

Найдём объём пространства событий D, отвечающих прохождению эллипса сквозь сетку:

$$V_D = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}^{(2l_y - a\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi})} dx_C \int_{b\sqrt{1+k^2/(1-k^2)\sin^2\varphi}}^{(2l_x - b\sqrt{1+k^2/(1-k^2)\sin^2\varphi})} dy_C$$

Пределы интегрирования по x_C и y_C, координатам центра эллипса, соответствуют предельным случаям касания эллипсом сторон прямоугольника и зависят от угла наклона эллипса. Объём пространства событий Ω равен $V_\Omega = 2\pi l_x l_y$. Вероятность P пересечения хотя бы одной прямой находим по формуле геометрической вероятности (2), где вероятности событий A и B определяются через полные эллиптические интегралы второго рода:

$$P(A) = \frac{4a}{2\pi l_x} E(k^2), \quad P(B) = \frac{4a}{2\pi l_y} E(k^2). \qquad (4)$$

Вероятность совместного события $A{\cdot}B$ находим по формуле

$$P(A \cdot B) = \frac{2ab}{\pi l_x l_y} I(k^2), \qquad (5)$$

где абелев интеграл имеет вид

$$I\left(k^2\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{1 + k^2 / (1 - k^2) \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Комплексной заменой переменной интегрирования ($\varphi \mapsto z$)

$$z = e^{i\varphi}, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

формулу (5) можно свести к интегрированию по единичной окружности $|z| = 1$ в комплексной плоскости

$$P\left(A \cdot B\right) = \frac{ab}{8\pi i l_x l_y} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^3} \sqrt{4z^2 + k^2(z^2 - 1)^2} \times$$
$$\times \sqrt{4z^2 - k^2 / \left(1 - k^2\right)(z^2 - 1)^2},$$

вокруг полюса $z = 0$. Можно сравнить вероятности пересечения эллипсом границ щелевого и прямоугольного отверстий с помощью формул (4), (5), рассмотрев их отношение. Пусть $l = l_y$ и $l_x > l_y$, тогда их отношение равно: $1 + \frac{l}{l_x} - \frac{b}{l_x}\frac{I\left(k^2\right)}{E\left(k^2\right)} > 1.$

Следовательно, вероятность беспрепятственного прохождения щелевого отверстия больше вероятности прохождения сквозь прямоугольное отверстие. В частном случае, если эллипс является окружностью радиуса *r*, эксцентриситет эллипса равен нулю ($k = 0$) и проблема приводится к учебной задаче о бросании монеты на прямоугольную сетку. Тогда из формулы (1) находим вероятность пересечения:

$$P = \frac{r}{l_x} + \frac{r}{l_y} - \frac{r^2}{l_x l_y}. \qquad (6)$$

Из формулы (6), выражающей теорему сложения вероятностей, следует, что события *A* и *B*, в этом частном случае, оказываются независимыми. Соответствующее пространство событий вырождается и становится двумерным, поскольку теперь положение окружности на сетке не зависит от угла ориентации φ. Формулу (6) получаем сравнивая площади соответствующих прямоугольников в конфигурационном пространстве. Как видно из рисунка 3, площадь пространства вероятностных событий равна $S_\Omega = 4 l_x l_y$. Заштрихованная область отвечает пространству событий непересечения сетки клубнем – ω. Его площадь равна $S_D = 4\left(l_x - r\right)\left(l_y - r\right)$. Отсюда, как отношение площадей событий, следует формула (6).

Случай с шарообразным клубнем является самым простейшим. Нетрудно геометрически получить формулу вероятности пересечения шарообразным клубнем радиуса *r* треугольной сетки. В этом случае пространством элементарных событий будет правильный треугольник с длинами сторон, равными *l* (рис. 4).

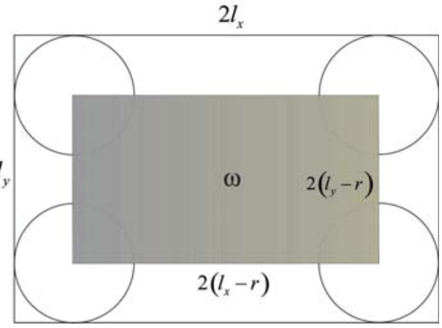

Рис. 3. Пространство событий (прямоугольник со сторонами $2l_x$ и $2l_y$); пространство ω (прямоугольник со сторонами $2(l_x - r)$ и $2(l_y - r)$)

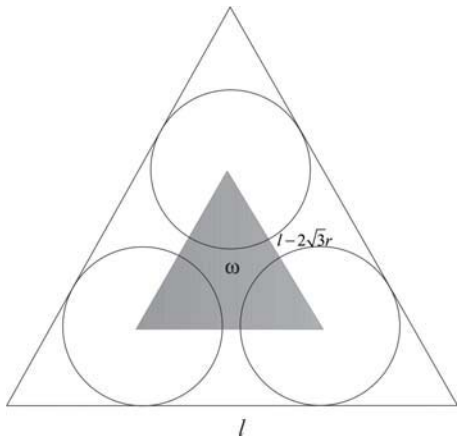

Рис. 4. Пространство событий (треугольник со стороной *l*); пространство ω (треугольник со стороной $l - 2\sqrt{3}r$)

Событиям, отвечающим непересечению сетки клубнем, соответствует заштрихованная область ω на рисунке. Площадь пространства всех элементарных событий $S_\Omega = l^2\sqrt{3} / 4$. Площадь заштрихованного треугольника $S_D = \sqrt{3} / 4\left(l - 2\sqrt{3}r\right)^2$ (рис. 4). Значит, вероятность *P* пересечения шарообразным клубнем правильной треугольной сетки будет равна:

$$P = 4\sqrt{3}\left(\frac{r}{l}\right) - 12\left(\frac{r}{l}\right)^2. \qquad (7)$$

Достоверным событием $P = 1$ пересечения сетки клубнем будет следующее соотношение между радиусом *r* клубня и параметром решетки *l*: $\left(\frac{r}{l}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Он отвечает случаю, когда круг касается одновременно всех сторон треугольника, то есть является вписанным в него.

Получим формулу для нахождения вероятности пересечения шарообразным клубнем радиуса *r* шестиугольной сетки. В этом случае пространством элементарных событий будет правильный шестиугольник с длинами сторон, равными l (рис. 5).

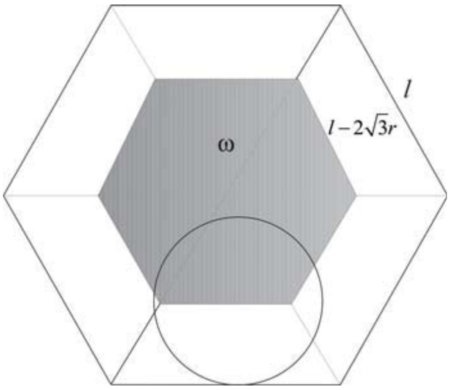

Рис. 5. Пространство событий (шестиугольник со стороной l); пространство ω (шестиугольник со стороной $l-2\sqrt{3}r$)

Событиям, отвечающим непересечению сетки клубнем, соответствует заштрихованный шестиугольник ω на рисунке 5. Площадь шестиугольника равна $S_\Omega = l^2\sqrt{3}\,/\,4$, площадь заштрихованного шестиугольника $S_D = 1\,/\,\sqrt{3}\left(l\sqrt{3}\,/\,2 - r\right)^2$. Отсюда находим искомую вероятность пересечения сетки:

$$P = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{r}{l}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{l}\right)^2. \qquad (8)$$

При радиусе круга $r = l\sqrt{3}\,/\,2$ вероятность достоверного события равна единице, поскольку он является вписанным в шестиугольник.

Выводы

Для достижения максимальной точности калибрования и устранения варьирования размеров клубней в значительном интервале построена вероятностная модель процесса сортирования. Используя методы геометрической теории вероятностей [7], получены формулы для вычисления вероятности прохождения клубнем картофеля сквозь сита картофелесортировки разных типов. Предложенный математический подход обеспечит нахождение размеров калибрующих отверстий при конструировании картофелесортировок для приближения к максимально возможной точности калибрования.

Библиографический список

1. Павлов А.Е., Павлова Л.А. Калибровка клубней картофеля // Вестник ФГОУ ВПО «МГАУ имени В.П. Горячкина». 2017. № 3. С. 15-20.

2. Петров Г.Д. Картофелеуборочные машины. М.: Машиностроение,1984. 320 с.

3. Ерохин М.Н. Детали машин и основы конструирования. М.: КолосС, 2005. 464 с.

4. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир, 1990. 240 с.

5. Павлов А.Е., Павлова Л.А. Эллиптические функции в задачах теоретической механики. Ижевск: Изд-во ИжГСХА, 2007. 132 с.

6. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972. 192 с.

7. Павлов А.Е., Павлова Л.А. Элементы математической статистики. Ижевск: Изд-во ИжГСХА, 2010. 83 с.

Статья поступила 17.01.2017

PROBABILITY OF POTATO TUBER PASSING THROUGH POTATO-SEPARATING SIEVES

ALEKSANDR Ye. PAVLOV, *PhD (Phys-Math), Associate Professor*
E-mail: alexpavlov60@mail.ru

LARISA A. PAVLOVA, *Associate Professor*
E-mail: krasilnikowa.larisa2011@yandex.ru

Russian State Agrarian University – Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazev, Timiryazevskaya str., 49, Moscow, 127550, Russian Federation

Potato cultivation is a labor-intensive branch of agricultural production. Reducing the costs of preplant and post-harvest processing decresases the potato production costs as well. Sorting is an important operation in potato processing technology. In the process of sorting, potato tubers pass through slotted sieve openings. To achieve maximum calibration accuracy and eliminate the variation in tuber size over a significant range, a probabilistic model of the sorting process has been worked out. A precise mathematical model of the process of potato separating into fractions will improve the design of sorting devices, increase their reliability and efficiency. The study method is the geometric theory of probability, which serves as a mathematical apparatus for studying random processes. The authors have obtained analytical formulas for a probability of potato tuber passing through openings of a rectangular, triangular, and hexagonal type. The proposed mathematical approach will help determine the dimensions of the calibration holes for designing potato sorting machines in order to ensure the maximum possible calibration accuracy. The developed approach is a theoretical base for further application of theory-probabilistic methods in the study of farm produce separation processes.

Key words: potato size calibration, ellipsoid, Buffon problem, probability of ellipse intersection of rectangle, triangle, and hexagon sides.

References

1. Pavlov A. Ye., Pavlova L.A. Kalibrovka klubney kartofelya [Potato tubers calibration]. *Vestnik FGOU VPO "MGAU imeni V.P. Goryachkina"*, 2017, No. 3. Pp. 15-20. (In Rus.)

2. Petrov G.D. Kartofeleuborochnyye mashiny [Potato-harvesting machines]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1984. 320 p. (In Rus.)

3. Yerokhin M.N. Detali mashin i osnovy konstruirovaniya [Machinery parts and design principles]. Moscow, KolosS, 2005. 464 p. (In Rus.)

4. Székey G. Paradoksy v teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike [Paradoxes in probability theory and mathematical statistics]. Moscow, Mir, 1990. 240 p. (In Rus.)

5. Pavlov A. Ye., Pavlova L.A. Ellipticheskiye funktsii v zadachakh teoreticheskoy mekhaniki [Elliptic functions applied in theoretical mechanics]. Izhevsk, Izd-vo IzhGSKhA, 2007. 132 p. (In Rus.)

6. Kendall M., Moran P. Geometricheskiye veroyatnosti [Geometrical probabilities]. Moscow, Nauka, 1972. 192 p. (In Rus.)

7. Pavlov A. Ye., Pavlova L.A. Elementy matematicheskoy statistiki [Elements of mathematical statistics]. Izhevsk, Izd-vo IzhGSKhA, 2010. 83 p. (In Rus.)

Received on January 17, 2017

УДК 631.621.3

ВОРОБЬЕВ ВИКТОР АНДРЕЕВИЧ, *докт. техн. наук, профессор*
E-mail: tatiana49@mail.ru

ИВАНОВ ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ, *докт. техн. наук, профессор*
E-mail: iy.electro@mail.ru

Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, ул. Тимирязевская, 49, г. Москва, 127550, Российская Федерация

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА НА РАЗВИТИЕ РАСТЕНИЙ

Вопросам влияния электрического тока на растения посвящены многочисленные исследования ученых. Природа воздействия электричества на растения во многом хорошо изучена. Установлена принципиальная возможность использования обработки растительных объектов электрическим током с целью стимулирования корнеобразования и приживаемости прививок плодовых культур, увеличения урожайности зерновых и овощных культур. Доказано, что при стимуляции ускоряется прорастание семян, черенков и клубней, активируются процессы жизнедеятельности, повышается урожайность, сокращаются сроки созревания и т.д. Такая обработка отличается незначительными энергетическими затратами; возможностью широкого варьирования режимами и точностью дозирования интенсивности воздействия; малой экспозицией. Целью исследования являлось выяснение влияния направления постоянного тока на развитие растения. Эксперимент проводился в августе 2016 г. на кафедре «Электропривод и электротехнологии» РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева. В опыте принимали участие отрезки лозы винограда длиной 60…70 мм, диаметром 4…5 мм, погруженные в воду комнатной температуры, по черенкам пропускали электрический ток. В результате на третий день эксперимента на черенках, подключенных к отрицательному полюсу батарейки, обозначились почки. На пятый день на концах черенков, расположенных в воде, появились корешки. Через неделю листки существенно увеличились в размерах. На нижних концах че-