

УДК 621(075.8)

ПАВЛОВ АЛЕКСАНДР ЕГОРОВИЧ, канд. физ.-мат. наук, доцент

E-mail: alexpavlov60@mail.ru

ПАВЛОВА ЛАРИСА АЛЕКСАНДРОВНА, доцент

E-mail: krasilnikowa.larisa2011@yandex.ru

Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, ул. Тимирязевская, 49, Москва, 127550, Российская Федерация

КИНЕМАТИКА ДЕЗАКСИАЛЬНОГО КРИВОШИПНО-ПОЛЗУННОГО МЕХАНИЗМА В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ЯКОБИ

Кривошипно-ползунные механизмы широко применяются в сельскохозяйственной технике: в механизмах с гидроустройствами и пневмоустройствами. Механизм поршневого двигателя, поршневого пресса, механизм привода ножа косилки имеют в своей основе кривошипно-ползунный механизм. Кинематический анализ даёт возможность найти законы движения деталей кривошипно-шатунного механизма при известном законе движения коленчатого вала. В современной учебной литературе при изложении теории движения механизмов традиционно принято разложение нелинейных функций в ряд по степенным или тригонометрическим функциям и трудоёмкое использование большого количества таблиц. Целью работы является нахождение класса функций для адекватного представления движения звеньев кривошипно-ползунного механизма. Показано, что эллиптические функции, введенные в теории аналитических функций Якоби и Абелем, оказываются естественными для описания кинематики механизма. Обосновывается их предпочтительность над традиционно применяемыми тригонометрическими функциями для описания движения кривошипно-шатунных механизмов. Рассмотрен дезаксиальный механизм с некоторыми характеристиками и построены его шатунные траектории. Для аксиального механизма шатунные кривые описываются алгебраическим уравнением четвёртого порядка, а для частного случая равенства длин кривошипа и шатуна показано, что точки шатуна вычерчивают эллипсы. Использование высших трансцендентных функций в инженерных задачах закономерно, оперировать с ними также удобно, как и с элементарными функциями.

Ключевые слова: дезаксиальные и аксиальные кривошипно-ползунные механизмы, шатунные траектории, центры масс точек шатуна.

Введение. В курсе кинематики изучаются движения звеньев механизмов вне зависимости от сил, вызывающих движение. Кривошипно-ползунные механизмы широко применяются в сельскохозяйственной технике: в механизмах с гидроустройствами и пневмоустройствами. Механизм поршневого двигателя [1], поршневого пресса, механизм привода ножа косилки [2] имеют в своей основе всё тот же кривошипно-ползунный механизм [3-7]. Кинематический анализ даёт возможность найти законы движения деталей кривошипно-шатунного механизма при известном законе движения коленчатого вала. В учебной литературе, включая и современные учебники [1], при изложении теории движения механизмов традиционно принято разложение нелинейных функций в ряд до первого порядка и обширное применение таблиц. Современное сельскохозяйственное машиностроение предъявляет повышенные требования к проведению теоретических расчётов [8].

Цель исследований – нахождение класса функций для адекватного представления движения звеньев кривошипно-ползунного механизма.

Материалы и методы. Показано, что эллиптические функции, введенные в теории аналитических функций Якоби и Абелем, оказываются естественными для описания кинематики механизма. В работе обосновывается их предпочтительность над традиционно применяемыми для описания движения кривошипно-шатунных механизмов тригонометрическими функциями. В XXI в. использование высших трансцендентных функций в инженерных задачах закономерно, оперировать с ними также комфортно, как и с элементарными функциями.

Результаты и обсуждение. Рассмотрим кривошипно-ползунный механизм (рис. 1). Радиус кривошипа – r , длина шатуна – l . Центр O оси кривошипа примем за начало координат, а прямую, вдоль которой перемещается поршень, назовём осью Ox . Прямоугольная система координат Oxy является неподвижной.

С шатуном свяжем подвижную систему координат $O_1\xi\eta$, в которой прямая линия $O_1\xi$ проходит через ось шатуна, e – дезаксиал механизма.

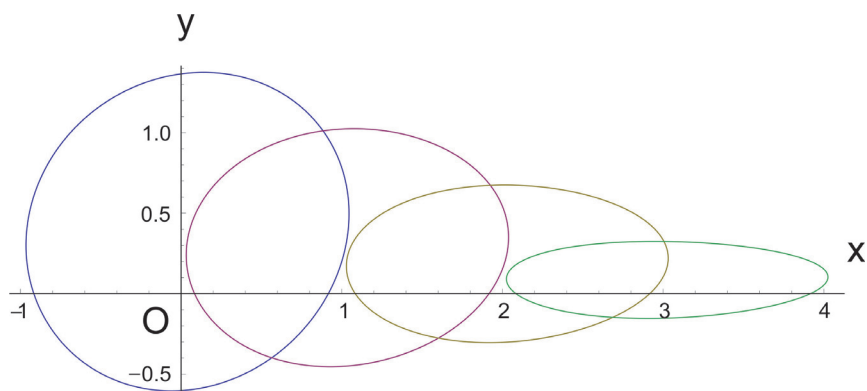


Рис. 2. Шатунные траектории в абсолютной системе координат

Для аксиального механизма шатунные кривые будут описываться алгебраическим уравнением четвёртого порядка, а для частного случая $r = l$ получим, что точки шатуна вычерчивают эллипсы.

Формулы перехода от подвижной системы координат к неподвижной системе имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - rA^{-1} \begin{pmatrix} cn(u) \\ sn(u) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Вычислим скорость точки M в абсолютной системе координат, продифференцировав матричное выражение (4) по времени. Производная матрицы A равна

$$\frac{d}{dt} A = -k \cdot cn(u) \cdot dn(u) \frac{du}{dt} B. \quad (8)$$

Здесь была введена ортогональная матрица

$$B \equiv \begin{pmatrix} \frac{k \cdot sn(u) + q}{\sqrt{1 - (k \cdot sn(u) + q)^2}} & -1 \\ 1 & \frac{k \cdot sn(u) + q}{\sqrt{1 - (k \cdot sn(u) + q)^2}} \end{pmatrix} \quad (9)$$

и использованы правила дифференцирования функций Якоби:

$$\frac{d}{du} sn(u) = cn(u) \cdot dn(u),$$

$$\frac{d}{du} cn(u) = -sn(u) \cdot dn(u),$$

$$\frac{d}{du} dn(u) = -k^2 sn(u) \cdot cn(u).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -k \cdot cn(u) \cdot dn(u) \frac{du}{dt} B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \\ &+ r \cdot dn(u) \cdot \frac{du}{dt} \begin{pmatrix} -sn(u) \\ cn(u) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Применим к уравнениям (10) формулы обратного перехода (7) и получим

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -k \cdot cn(u) \cdot dn(u) \frac{du}{dt} C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \quad (11)$$

$$+ r \cdot dn(u) \left(1 + \frac{k \cdot cn(u)}{\sqrt{1 - (k \cdot sn(u) + q)^2}} \right) \frac{du}{dt} \begin{pmatrix} -sn(u) \\ cn(u) \end{pmatrix}.$$

Матрица C определяется как произведение матриц и имеет вид:

$$C \equiv BA^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 - (k \cdot sn(u) + q)^2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Найдём координаты мгновенного центра скоростей шатуна $P(x, y)$ в системе координат, связанной со стойкой, положив в формуле (11) $\dot{x}_p = 0, \dot{y}_p = 0$. Отсюда получаем параметрическое представление центроиды в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = l \left(k \cdot cn(u) + \sqrt{1 - (k \cdot sn(u) + q)^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ sc(u) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для частного случая аксиального механизма $e = 0$, уравнения центроиды приобретают совсем простой вид:

$$x_p = l(k \cdot cn(u) + dn(u)), \quad (14)$$

$$y_p = l \cdot sn(u)(k + dc(u)). \quad (15)$$

В полученных формулах (13) и (15) были введены следующие эллиптические функции:

$$sc(u) \equiv \frac{sn(u)}{cn(u)}; \quad dc(u) \equiv \frac{dn(u)}{cn(u)}.$$

Неподвижная центроида для аксиального случая $e = 0$ описывается алгебраической кривой шестого порядка:

$$(x_p^2 - l^2 k^2)^2 (x_p^2 + y_p^2) = 4k^2 l^2 x_p^4. \quad (16)$$

Характерный вид кривой представлен на рисунке 3.

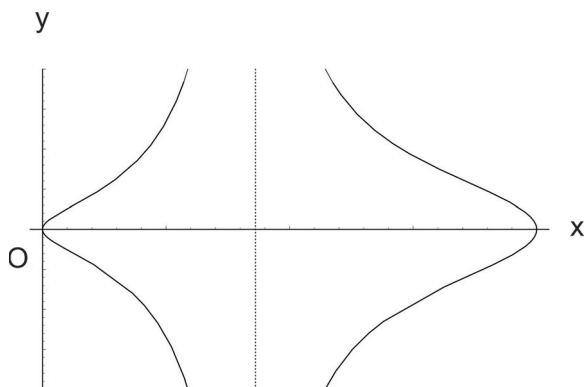


Рис. 3. Неподвижная центраида

Правая и левая крайние точки на рисунке отвечают предельным положениям шатуна, а точка разрыва соответствует мгновенно-поступательному движению твёрдого тела. В частности, когда длина кривошипа равна длине шатуна $r = l$, параметры эллиптического интеграла – $k = 1$; $k' = 0$, уравнение центраида приобретает вид:

$$x_p^4(x_p^2 + y_p^2) = 4l^2x_p^4. \quad (17)$$

Геометрическим местом точек на плоскости (x, y) , отвечающим решению алгебраического уравнения (17), является окружность радиуса $2l$ и прямая $x_p = 0$. Таким образом, кривая качественно изменилась, а точка разрыва, соответствующая моменту мгновенно-поступательного движения тела, описывается корнем уравнения (17) $x_p = 0$.

Авторы выражают благодарность к.т.н., доценту А.Н. Никитенко за обсуждение технических аспектов движения механизма, а также благодарны участникам 59-й юбилейной конференции МФТИ (секция теоретической механики) за интерес, проявленный к докладу.

Библиографический список

1. Гоц А.Н. Кинематика и динамика кривошипно-шатунного механизма поршневых двигателей. Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. 142 с.
2. Трубилин Е.Н. и др. Машины для уборки сельскохозяйственных культур (конструкции, теория и расчёт). Краснодар: КГАУ, 2009. 216 с.
3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Изд-во Наука, 1988. 640 с.
4. Жуков В.А., Яманин А.И. Анализ алгоритмов расчета кинематики кривошипно-шатунных механизмов с прицепными шатунами // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 2 (36). С. 109-117.
5. Грабовский А.А. Анализ уравновешенности двигателей внутреннего сгорания с кривошипно-шатунным механизмом со сдвоенными кинематическими связями // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2011. № 4 (20). С. 214-224.
6. Вершина Г.А. и др. Влияние величины дезаксажа кривошипно-шатунного механизма на технико-экономические показатели работы двухтактного двигателя внутреннего сгорания // Наука и техника. 2011. № 4. С. 39-43.
7. Глемба К.В. и др. Диагностирование коренных и шатунных подшипников кривошипно-шатунного механизма // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. 2014. № 1. Т. 14. С. 63-71.
8. Ерохин М.Н. и др. Детали машин и основы конструирования. М.: КолосС, 2005. 464 с.
9. Якоби К. Лекции по динамике. М.: УРСС, 2004. 272 с.
10. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. М.: УРСС, 2010. 516 с.
11. Павлов А.Е., Павлова Л.А. Динамика твёрдого тела для агроинженеров. LAP Lambert Academic Publishing. Saarbrucken. Germany, 2014. 348 с. URL: <http://www.ljubiljuknigi.ru/>.

Статья поступила 16.11.2016 г.

KINEMATICS OF SLIDER-CRANK MECHANISM IN JACOBI ELLIPTIC FUNCTIONS

ALEKSANDR E. PAVLOV, PhD (Math), Associate Professor

E-mail: alexpavlov60@mail.ru

LARISA A. PAVLOVA, Associate Professor

E-mail: krasilnikowa.larisa2011@yandex.ru

Russian State Agrarian University – Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazev, Timiryazevskaya street, 49, 127550, Moscow, Russian Federation

Crank-slide mechanisms are widely used in agricultural machinery, especially in mechanisms with hydraulic and pneumatic devices. A reciprocating engine mechanism, a piston press mechanism, and the drive mechanism

of a mower's knife are based on a crank-slide mechanism. The kinematic analysis makes it possible to find the laws of motion the crank mechanism parts with account of the known law of the crankshaft motion. In modern manuals describing the theory of mechanism motion it is customary to expand nonlinear functions in a series of power or trigonometric functions and use a large number of time-consuming tables. The paper aim is to find a class of functions for adequate representation of the motion of crank-slide mechanism links. It has been shown that the elliptic functions introduced in the theory of analytic functions by Jacobi and Abel prove to be natural for describing the mechanism kinematics. The authors justify their preferences over traditionally applied trigonometric functions for describing the motion of crank-connecting mechanisms. The paper also considers a eccentric mechanism with some its characteristics and provides its connecting rod trajectories. For the axial mechanism, the connecting rod curves are described by an algebraic equation of the fourth order, and for a special case of equality of crank and connecting rod lengths, it has been shown that the connecting rod points draw ellipses. Applying higher transcendental functions in engineering problems is rather appropriate and as convenient as using elementary functions.

Key words: eccentric and axial slider-crank mechanisms, connecting rod trajectories, connecting rod centroid points.

References

1. Gots A.N. Kinematika i dinamika krivoshipno-shatunnogo mekhanizma porshnevykh dvigateley [Kinematics and dynamics of the crank-piston mechanism of reciprocating engines]. Vladimir: Izd-vo VIGU, 2014. 142 p.
2. Trubilin Ye.N. i dr. Mashiny dlya uborki sel'skokhozyaystvennykh kul'tur (konstruktsii, teoriya i raschet) [Machines for harvesting crops (construction, theory and calculation)]. Krasnodar: KGAU, 2009. 216 p.
3. Artobolevskiy I.I. Teoriya mekhanizmov i mashin [Theory of mechanisms and machines]. M.: Izd-vo Nauka, 1988. 640 p.
4. Zhukov V.A., Yamanin A.I. Analiz algoritmov rascheta kinematiki krivoshipno-shatunnykh mekhanizmov s pritsepnyimi shatunami [Analysis of algorithms for calculating the kinematics of crank-and-rod mechanisms with auxiliary connecting rods] // Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. 2016. Issue 2 (36). Pp. 109-117.
5. Grabovskiy A.A. Analiz uravnoveshennosti dvigateley vnutrennego sgoraniya s krivoshipno-shatunnym mekhanizmom so sdvoyennymi kinematicheskimi svyazyami [Analysis of the balancing of internal combustion engines with a crank-connecting mechanism with twin kinematical connections] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskii nauki. 2011. Issue 4 (20). Pp. 214-224.
6. Vershina G.A. i dr. Vliyaniye velichiny dezak-sazha krivoshipno-shatunnogo mekhanizma na tekhniko-ekonomicheskiye pokazateli raboty dvukhtaktnogo dvigatelya vnutrennego sgoraniya [Influence of the magnitude of the crank-connecting mechanism offsetting on the technical and economic index of a two-stroke internal combustion engine operation] // Nauka i tekhnika. 2011. Issue 4. Pp. 39-43.
7. Glemba K.V. i dr. Diagnostirovaniye korennykh i shatunnykh podshipnikov krivoshipno-shatunnogo mekhanizma [Diagnostics of main and connecting-rod bearings of the crank-and-rod mechanism] // Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Mashinostroyeniye. 2014. Issue 1. Vol. 14. Pp. 63-71.
8. Yerokhin M.N. i dr. Detali mashin i osnovy konstruirovaniya [Machine components and design basics]. M.: KolosS, 2005. 464 p.
9. Yakobi K. Lektsii po dinamike [Lectures on dynamics]. M.: URSS, 2004. 272 p.
10. Uitteker E.T., Vatson Dzh. N. Kurs sovremennogo analiza [Course of modern analysis]. M.: URSS, 2010. 516 p.
11. Pavlov A.Ye., Pavlova L.A. Dinamika tvordogo tela dlya agroinzhenerov [Rigid body dynamics for agroengineers]. LAP Lambert Academic Publishing. Saarbrucken. Germany, 2014. 348 p. URL: <http://www.ljubljkunigi.ru/>.

Received on November 16, 2016