

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 631.313

<https://doi.org/10.26897/2687-1149-2024-1-37-46>

Полуаналитическая модель взаимодействия дисковой секции луцильника с неоднородной по глубине почвой

Ю.В. Константинов

Чувашский государственный аграрный университет; г. Чебоксары, Россия

yukonsc@yandex.ru

Аннотация. Тяговое сопротивление дисковой секции луцильника определяет удельные энергетические затраты на обработку почвы. С целью минимизации затрат по определению тягового сопротивления секции в зависимости от параметров луцильника и свойств почвы произведено математическое моделирование взаимодействия секции луцильника с почвой. Построена полуаналитическая модель с учетом неоднородности почвы по глубине и постоянства заглубления, поступательной скорости и угла атаки секции луцильника. Показано, что в случае неоднородности почвы только по глубине ее свойства можно охарактеризовать с помощью двух эмпирических постоянных и коэффициента трения почвы о поверхность дисков. Кинематический параметр дисковой секции, равный отношению окружной скорости на лезвиях дисков к поступательной скорости луцильника, определяется свойствами почвы, относительным заглублением, равным отношению максимальной глубины обработки к радиусу дисков, и углом атаки секции луцильника. Анализ моментов сил сопротивления почвы резанию и трению показал, что в случае пренебрежимо малых сил трения в подшипниках дисков в неоднородной по глубине почве дисковая секция луцильника вращается с угловой скоростью, при которой минимальна потребная мощность секции для обработки почвы. Получены явные выражения для потребной мощности и тягового сопротивления секции луцильника в зависимости от числа дисков, угла атаки секции луцильника, относительного заглубления, радиуса дисков и свойств почвы. По полученным выражениям можно определять тяговое сопротивление секции луцильника со сферическими дисками. Сравнение с опубликованными полевыми экспериментами показало, что максимальная относительная погрешность определения тягового сопротивления дисковой секции луцильника с плоскими дисками при луцинии стерни составила 3,3%, а для дисковой секции со сферическими дисками в почвенном канале погрешность составила 2,6%.

Ключевые слова: полуаналитическая модель, неоднородность почвы по глубине, дисковая секция луцильника, угол атаки, относительное заглубление, кинематический параметр, мощность, тяговое сопротивление

Для цитирования: Константинов Ю.В. Полуаналитическая модель взаимодействия дисковой секции луцильника с неоднородной по глубине почвой // *Агроинженерия*. 2024. Т. 26, № 1. С. 37-46. <https://doi.org/10.26897/2687-1149-2024-1-37-46>

ORIGINAL ARTICLE

Semi-analytical model of the interaction of a harrow disc gang with variable-depth soil

Yu. V. Konstantinov

Chuvash State Agrarian University; Cheboksary, Russia

yukonsc@yandex.ru

Abstract. The draft force of a harrow disc gang determines the specific energy cost of tillage. To minimize the cost of determining the draft force of the disc gang in relation to the harrow parameters and soil properties, the author carried out a mathematical modeling of the interaction of the harrow gang with the soil. The semi-analytical model has been built on the assumption of variable depth soil, constancy of depth, forward speed and approach angle of the harrow. It is shown that when the soil is variable only in depth, it can be characterised by two empirical constants and the coefficient of friction of the soil on the disc surface. The kinematic parameter of the disc gang, equal to the ratio of the circumferential speed on the disc blades to the forward speed of the harrow, is determined by the soil properties, the relative depth, equal to the ratio of the working depth to the radius of the discs, and the approach angle of the harrow gang. Based on the analysis of the moments of the soil resistance forces

to cutting and friction, the author has shown that when the friction forces in the disc bearings in the variable depth soil are negligibly small, the disc gang of the harrow rotates at an angular speed that provides the minimum possible power of the harrow gang required for tillage. Explicit expressions are obtained for the required power and tractive force of the harrow gang as a function of the number of discs, the angle of approach of the harrow gang, the relative depth, the radius of the discs and the soil properties. Their comparison with published field experiments showed that the maximum relative error in determining the draft of a harrow gang with flat discs was 3.3% for post-harvest stubble harrowing, and 2.6% for a harrow gang with spherical discs in a tillage bin.

Keywords: semi-analytical model, variable depth soil, disc harrow, angle of approach, relative depth, kinematic parameter, power, draft resistance

For citation: Konstantinov Yu.V. Semi-analytical model of the interaction of a harrow disc gang with variable-depth soil. *Agricultural Engineering (Moscow)*. 2024;26(1):37-46. (In Rus.). <https://doi.org/10.26897/2687-1149-2024-1-37-46>

Введение

Лущение стерни является обязательным агротехническим приёмом как в отвальной, так и безотвальной системах обработки почвы. В качестве рабочих органов дисковых лущильников обычно используются сферические диски¹. Плоские диски принято использовать в зонах, подверженных ветровой эрозии, поскольку при обработке почвы такими дисками большая часть растительных остатков остаётся на её поверхности, эти диски меньше распыляют почву и не выносят на поверхность её нижние влажные слои. Среди наиболее распространенных лущильников ЛД-10 (ЛДГ-10) выпускалось с плоскими дисками около 30%¹.

Тяговое сопротивление дисковой секции лущильника, определяющее энергозатраты на обработку почвы, является наиболее важной силовой характеристикой дискового лущильника. Чаще всего оно находится экспериментально в поле или в почвенном канале лаборатории [1-3]. Математическое моделирование позволяет определять тяговое сопротивление диска с наименьшими затратами.

Величина тягового сопротивления определяется не только параметрами самого лущильника, но и свойствами обрабатываемой почвы. При рассмотрении взаимодействия лущильника и почвы нужно учитывать механическую неоднородность почвы [4], проявляющуюся в изменении плотности и твёрдости почвы по глубине [5].

С увеличением глубины резания как при блокированном, так и полублокированном резании изменяется удельное сопротивление чистому резанию², поэтому математическая модель должна учитывать изменение удельного давления почвы на круговой сегмент диска в почве и удельного сопротивления

резанию дугой его лезвия с изменением глубины резания диска.

Обзор источников литературы показал, что известные модели взаимодействия с почвой плоских дисков сошников [6, 7], батареи из дисков [8] и других рабочих органов не учитывают неоднородности почвы по глубине. Таким образом, разработка более совершенных методов расчёта, учитывающих действительный технологический процесс земледельческих орудий и реальные свойства почвы, остается актуальной задачей [4].

Математические модели должны быть простыми и адекватными, то есть определять искомые величины с удовлетворительной погрешностью³. Этим требованиям отвечают полуаналитические модели, имеющие решение в аналитической форме, содержащей эмпирические постоянные коэффициенты. Они позволяют не только рассчитывать тяговое усилие основного диска однодискового сошника [6, 7], но и решать задачи оптимизации функционирования дискового ножа [9].

Цель исследований: построить простую полуаналитическую модель взаимодействия с неоднородной по глубине почвой дисковой секции пассивного лущильника с плоскими дисками с учётом количества дисков секции, радиуса дисков, максимальной глубины обработки, угла атаки и свойств почвы, используя эмпирические постоянные; показать, что полученное выражение позволяет рассчитывать также тяговое сопротивление дисковой секции со сферическими дисками.

Материалы и методы

Полуаналитическая модель взаимодействия плоского диска лущильника с однородной почвой была построена нами ранее [10]. На базе этой модели продолжим развивать модель взаимодействия дисковой

¹ Стрельбицкий В.Ф. Дисковые почвообрабатывающие машины: монография. М.: Машиностроение, 1978. 135 с.

² Зеленин А.Н. Основы разрушения грунтов механическими способами: монография. М.: Машиностроение, 1968. 376 с.

³ Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. М.: КомКнига, 2007. 192 с. EDN: QJRGDD.

секции луцильника и неоднородной по глубине почвой. Пусть дисковый луцильник движется поступательно с постоянной скоростью v_n , а все n дисков его секции погружены на глубину h в неоднородную по глубине почву. Поскольку диски секции закреплены на одной оси, они вращаются с некоторой одинаковой постоянной угловой скоростью ω . Режим работы секции луцильника характеризуется углом атаки α , безразмерным относительным заглублением $\xi = h/r$ и безразмерным кинематическим параметром $\lambda = \omega r / (v_n \cos \alpha)$, где r – радиус дисков луцильника.

Поскольку диски секции луцильника параллельны между собой, а почва является неоднородной только по глубине, то каждый из них одинаково взаимодействует с почвой. Поэтому для определения ее силовых характеристик достаточно рассмотреть взаимодействие с почвой одного из дисков секции луцильника (рис. 1).

Начало подвижной прямоугольной системы координат, связанной с диском, поместим в его центре, направив ось Ox в направлении вектора поступательной скорости луцильника, ось Oz направим вертикально вниз, а ось Oy – перпендикулярно этим двум осям в сторону, соответствующей правой системе координат. Свяжем с диском также вторую подвижную систему координат Ox_1y_1z , ось Ox_1 которой направим горизонтально в плоскости диска так, чтобы угол между осями Ox и Ox_1 был равен углу атаки α , а ось Oy_1 была направлена по оси вращения диска (рис. 1).

Нормальные составляющие вектора скорости почвенной частицы и контактирующей с ней точкой

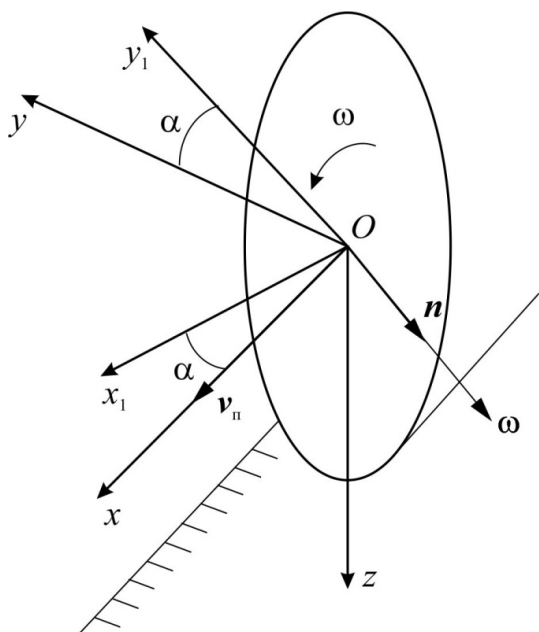


Рис. 1. Почвообрабатывающий диск и связанные с ним системы координат

Fig. 1. Tillage disc and associated coordinate systems

диска одинаковы. Поэтому сила трения частицы почвы о диск направлена против векторной проекции v' на плоскость диска вектора скорости v точки диска, контактирующей с этой частицей (рис. 2).

Поле векторных проекций скоростей точек диска на плоскость диска соответствует вращательному движению диска с одновременным поступательным движением со скоростью $v_n \cos \alpha$ в направлении оси Ox_1 . Поэтому его мгновенный центр скоростей расположен на оси Oz в точке $C(0; a)$, (где $a = r/\lambda$), координаты которой и координаты точки M указаны для плоской системы координат x_1Oz (рис. 2).

На круговой сегмент диска, контактирующий с почвой, действует плоская система распределенных сил трения (рис. 2а). Приводя эту систему сил к центру диска O , заменим ее эквивалентной системой: главным вектором F_T , приложенным в центре приведения O , и парой с моментом, равным главному моменту m_o системы распределенных сил трения относительно точки O .

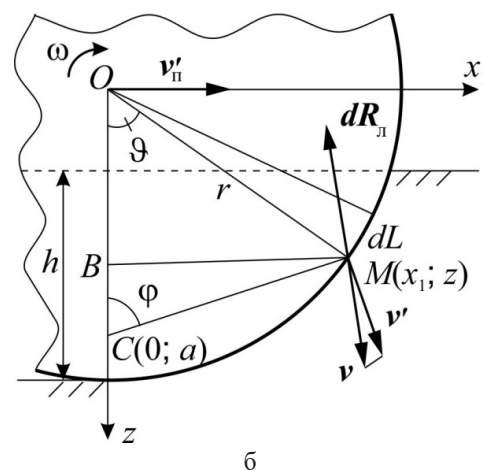
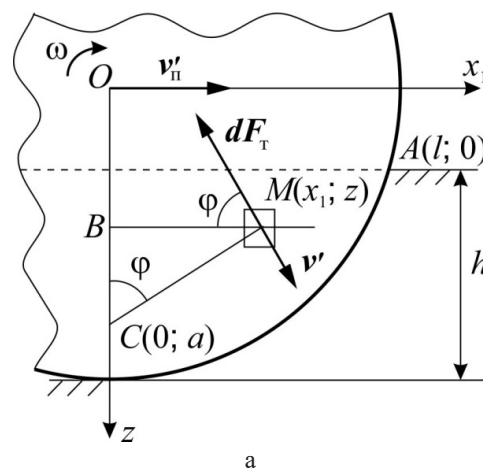


Рис. 2. Схема взаимодействия с почвой элементарной площадки кругового сегмента диска (а) и элементарной дуги лезвия диска (б)

Fig. 2. Interaction scheme between the soil and the elementary area of a circular disc segment (a) and the elementary arc of a disc blade (b)

Найдём момент m_o . На произвольную элементарную площадку контактирующего с почвой кругового сегмента диска, содержащую точку $M(x_1; z)$ и имеющую площадь $dS = dx_1 dz$, действует элементарная сила трения о почву dF_T . Эта сила направлена против вектора \mathbf{v}' – векторной проекции вектора абсолютной скорости \mathbf{v} точки $M(x_1; z)$ этой площадки на плоскость диска, то есть перпендикулярно отрезку CM (рис. 2а). Величина этой силы равна $dF_T = fp_1(z)dx_1 dz$, где f – коэффициент трения почвы о стальную поверхность диска, а $p_1(z)$ – давление почвы на рассматриваемую площадку, зависящее от глубины её расположения.

Сила dF_T образует с отрицательным направлением оси Ox_1 угол φ (рис. 2а), для которого из прямоугольного треугольника MBC находим

$$\cos\varphi = \frac{a-z}{\sqrt{x_1^2 + (a-z)^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + (a-z)^2}}. \quad (1)$$

Примем направление вращения диска за положительное направление моментов сил. Тогда момент, который создаёт элементарная сила трения, действующая на элементарную площадку, содержащую точку $M(x_1; z)$, будет равен

$$dm_o = dF_T \cos\varphi \cdot z - dF_T \sin\varphi \cdot x_1.$$

Подставляя равенства (1) в последнее равенство и вычисляя двойной интеграл по круговому сегменту S , контактирующему с почвой, получим искомый главный момент относительно центра диска (оси вращения) системы сил трения почвы, действующих на этот сегмент:

$$m_o = -f \iint_S p_1(z) \frac{x_1^2 + (z-a)z}{\sqrt{x_1^2 + (z-a)^2}} dx_1 dz. \quad (2)$$

Отметим, что при $p_1(z) = p = \text{const}$ из равенства (2) следует, как частный случай, формула для главного момента в случае взаимодействия диска с однородной почвой [10].

Из прямоугольного треугольника MBC (рис. 2а) следует, что модуль векторной проекции вектора скорости на плоскость диска произвольной точки диска $M(x_1; z)$ равен $v' = \omega \cdot MC$. Эта проекция направлена перпендикулярно отрезку MC , соединяющему данную точку с мгновенным центром C . Поскольку сила dF_T направлена противоположно вектору \mathbf{v}' , элементарная мощность, необходимая для преодоления этой элементарной силы трения, равна

$$dP_T = -\mathbf{v}' \cdot d\mathbf{F}_T = fp_1(z)\omega\sqrt{x_1^2 + (a-z)^2} dx_1 dz.$$

Мощность P_T , необходимая для преодоления сил трения, действующих на круговой сегмент диска

в почве, находится двойным интегрированием по этому сегменту элементарной мощности dP_T :

$$P_T = f\omega \iint_S p_1(z)\sqrt{x_1^2 + (a-z)^2} dx_1 dz. \quad (3)$$

При $p_1(z) = p = \text{const}$ из равенства (3) следует, как частный случай, формула для этой мощности в случае взаимодействия диска с однородной почвой [10].

На фаски лезвия диска действует система распределённых сил сопротивления почвы расклиниванию фасками. Выбрав в качестве центра приведения этой системы сил центр O , заменим систему элементарных реакций почвы на лезвие диска эквивалентной системой: главным вектором \mathbf{R}_n , приложенным в центре приведения, и парой с моментом M_o , равным главному моменту системы этих элементарных реакций относительно точки O .

Найдём M_o . Рассмотрим произвольную элементарную дугу лезвия диска длиной $dL = r \cdot d\vartheta$ с точкой $M(r\sin\vartheta; r\cos\vartheta)$ на ней, координаты которой указаны в плоской системе координат $x_1 Oz$ (рис. 2б). Для дисков с острым лезвием элементарное сопротивление почвы расклиниванию фасками лезвия дуги – вектор $d\mathbf{R}_n$ – лежит в плоскости диска, и этот вектор направлен против векторной проекции на плоскость диска \mathbf{v}' вектора скорости \mathbf{v} точки M [10]. Согласно В.Ф. Стрельбицкому¹ лезвия дисков луцильника быстро затупляются. Для затупленного лезвия эта реакция почвы выходит из плоскости диска, при этом вектор $d\mathbf{R}_n$ направлен против вектора скорости \mathbf{v} :

$$d\mathbf{R}_n = -Q_1(r\cos\vartheta) \cdot \frac{\mathbf{v}}{v} rd\vartheta, \quad (4)$$

где $Q_1(r\cos\vartheta)$ – удельное сопротивление почвы расклиниванию фасками лезвия дуги dL (на глубине $r-z = r - r\cos\vartheta$).

Движение точки M_1 диска с радиус-вектором $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i}_1 + y_1\mathbf{j}_1 + z\mathbf{k}$, где $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$ и \mathbf{k} – орты системы координат $Ox_1 y_1 z$, можно представить как сложное движение, относительным движением которого является вращательное движение диска, а переносным – его поступательное движение.

Относительную скорость \mathbf{v}_r рассматриваемой точки найдём по формуле Эйлера:

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 = -\omega z\mathbf{i}_1 + \omega x_1\mathbf{k},$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен противоположно оси Oy_1 (рис. 1).

Переносная скорость \mathbf{v}_e любой точки диска равна вектору \mathbf{v}_n (рис. 1), то есть

$$\mathbf{v}_e = v_n \cos\alpha\mathbf{i}_1 - v_n \sin\alpha\mathbf{j}_1.$$

Поэтому искомый вектор скорости равен

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e = (v_n \cos\alpha - \omega z)\mathbf{i}_1 - v_n \sin\alpha\mathbf{j}_1 + \omega x_1\mathbf{k},$$

а его модуль определяется формулой:

$$v = \sqrt{v_n^2 - 2v_n \omega \cos \alpha z + \omega(x_1^2 + z^2)}.$$

Для рассматриваемой точки M на лезвии диска $x_1 = r \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$. Подстановка этих двух равенств в два предыдущих позволяет определить вектор скорости точки M :

$$\mathbf{v} = v_n \cos \alpha ((1 - \lambda \cos \vartheta) \mathbf{i}_1 - tg \alpha \mathbf{j}_1 + \lambda \sin \vartheta \mathbf{k}), \quad (5)$$

его модуль:

$$v = v_n \cos \alpha \sqrt{1 + tg^2 \alpha + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta}. \quad (6)$$

Как следует из данных рисунка 2б и равенства (5), момент вектора \mathbf{v} относительно точки O равен

$$m_o(\mathbf{v}) = v_z r \sin \vartheta - v_{x_1} r \cos \vartheta = r(\lambda - \cos \vartheta) v_n \cos \alpha.$$

Поэтому из равенств (4) и (6) следует, что момент элементарной реакции почвы dR_n относительно точки O определяется равенством:

$$\begin{aligned} dM_o &= -\frac{Q_1(r \cos \vartheta) r d\vartheta}{v} m_o(\mathbf{v}) = \\ &= \frac{Q_1(r \cos \vartheta) r^2 (\cos \vartheta - \lambda) d\vartheta}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta}}. \end{aligned}$$

Вычисляя определенный интеграл в пределах от 0 до $\vartheta_0 = \arccos(1 - \xi)$ от левой и правой частей последнего равенства, находим искомый момент:

$$M_o = r^2 \int_0^{\vartheta_0} \frac{Q_1(r \cos \vartheta) (\cos \vartheta - \lambda) d\vartheta}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta}}. \quad (7)$$

Поскольку сила dR_n направлена противоположно вектору \mathbf{v} , то согласно равенству (4) элементарная мощность, необходимая для преодоления элементарной реакции почвы, действующей на рассматриваемую элементарную дугу лезвия, равна

$$dP_n = -\mathbf{v} \cdot dR_n = Q_1(r \cos \vartheta) v r d\vartheta.$$

Вычисляя определённый интеграл в пределах от 0 до ϑ_0 от левой и правой частей последнего равенства, находим полную мощность P_n , необходимую для преодоления сил сопротивления почвы расклиниванию фасками всей режущей части лезвия диска:

$$P_n = r v_n' \int_0^{\vartheta_0} Q_1(r \cos \vartheta) \sqrt{1 + tg^2 \alpha + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta} d\vartheta, \quad (8)$$

где для краткости обозначено $v_n' = v_n \cos \alpha$.

Вектор элементарной нормальной реакции почвы dN на элементарную площадку площадью $dx_1 dz$, содержащую точку $M(x_1; z)$ (рис. 2а), равен

$$dN = -p_1(z) dx_1 dz \cdot \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к диску, направленный в сторону сминаемой круговым сегментом диска почвы (рис. 1).

Элементарная мощность, необходимая для преодоления реакции почвы dN , равна $dP_c = -dN \cdot \mathbf{v} = p_1(z) dx_1 dz \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$, то есть окончательно

$$dP_c = p_1(z) v_n \sin \alpha dx_1 dz.$$

Вычислив двойной интеграл от левой и правой частей этого равенства по круговому сегменту S , контактирующему с почвой, найдём мощность, необходимую для преодоления сил сопротивления почвы смятию и перемещению круговым сегментом диска:

$$P_c = v_n \sin \alpha \iint_S p_1(z) dx_1 dz.$$

Обозначим через p среднее давление почвы на диск:

$$p = \frac{1}{S_1} \iint_S p_1(z) dx_1 dz,$$

где S_1 – площадь кругового сегмента в почве. Тогда

$$P_c = p v_n \sin \alpha S_1 = p r^2 v_n \sin \alpha (\vartheta_0 - \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0).$$

Подставляя сюда выражение для угла ϑ_0 , выразим эту мощность через относительное заглубление ξ :

$$P_c = p r^2 v_n \sin \alpha (\arccos(1 - \xi) - (1 - \xi) \sqrt{2\xi - \xi^2}). \quad (9)$$

Мощность, потребная для функционирования одного диска секции луцильника, равна сумме мощности, необходимой для преодоления сил трения о боковые поверхности диска, мощности, необходимой для преодоления сопротивления почвы расклиниванию фасками его лезвия, и мощности, необходимой для преодоления сил сопротивления почвы смятию и перемещению круговым сегментом диска.

Поскольку секция луцильника содержит n одинаковых дисков, движущихся в почве в одинаковых условиях, то потребная мощность P для работы секции луцильника в n раз больше потребной мощности для функционирования одного диска секции:

$$P = n \cdot (P_t + P_n + P_c). \quad (10)$$

Поскольку интеграл, входящий в равенство (3), содержит неизвестную функцию $p_1(z)$, а интеграл из равенства (8) содержит неизвестную функцию $Q_1(z)$, то использовать полученные формулы для определения потребной мощности дисковой секции луцильника, обрабатывающего неоднородную по глубине почву, не удаётся. Это затруднение можно обойти.

Результаты и их обсуждение

Равенство (8) явно выражает мощность P_n через кинематический коэффициент λ . Чтобы выразить явно через λ мощность P_t и момент m_o , выполним

замену переменных $x = ru, z = rw$ в двойных интегралах (2) и (3):

$$m_o = -fr^3 \iint_{S'} p_1(rw) \frac{\lambda u^2 + (\lambda w - 1)w}{\sqrt{\lambda^2 u^2 + (\lambda w - 1)^2}} dudw,$$

$$P_\tau = fr^2 v'_n \iint_{S'} p_1(rw) \sqrt{\lambda^2 u^2 + (\lambda w - 1)^2} dudw,$$

где S' – круговой сегмент единичного радиуса, являющийся образом кругового сегмента S .

Продифференцировав частным образом по параметру λ под знаком двойного интеграла второе из двух последних равенств, с учётом первого из них, получим

$$\frac{\partial P_\tau}{\partial \lambda} = -\frac{m_o}{r} v'_n. \tag{11}$$

Частное дифференцирование равенства (8) по параметру λ под знаком определённого интеграла с учётом (7) приводит к следующему равенству:

$$\frac{\partial P_n}{\partial \lambda} = -\frac{M_o}{r} v'_n. \tag{12}$$

Поскольку из (9) следует, что $\frac{\partial P_c}{\partial \lambda} = 0$, то частное дифференцирование равенства (10) по параметру λ в силу равенств (11) и (12) даёт

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = -\frac{v'_n}{r} \cdot n(m_o + M_o). \tag{13}$$

Диски секции луцильника, движущегося с постоянной поступательной скоростью, будут вращаться с постоянной угловой скоростью в случае, когда сумма всех реактивных моментов, приложенных к каждому из дисков секции, равна нулю, то есть

$$m_o + M_o = 0. \tag{14}$$

Решая это уравнение относительно кинематического параметра λ , находим $\lambda = \lambda^*$ и угловую скорость вращения дисков секции луцильника $\omega^* = \lambda^* v'_n \cos \alpha / r$.

Как следует из (14) и (13), $\frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda^*) = 0$. Находя с помощью равенств (11)-(12) вторую производную $\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}$ несложно показать $\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}(\lambda^*) > 0$, следовательно, в точке $\lambda = \lambda^*$ функция $P(\lambda)$ имеет минимум, который является глобальным минимумом, что позволяет использовать для определения λ^* хорошо развитые численные методы оптимизации.

Пусть поступательная скорость луцильника и максимальная глубина обработки почвы постоянны, силы трения в подшипнике диска пренебрежимо малы, а почва является неоднородной только по глубине. Тогда секция дискового луцильника движется

с такой постоянной угловой скоростью, при которой минимальны суммарные затраты мощности на преодоление сил трения почвы о круговые сегменты дисков секции в почве, сил сопротивления почвы расклиниванию фасками лезвия дисков и сил сопротивления почвы смятию и перемещению круговыми сегментами дисков в почве.

Поскольку модель однородной почвы является частным случаем модели неоднородной почвы при $p_1(z) = p = \text{const}$ и $Q(z) = Q = \text{const}$, то полученный результат является верным также и для однородной почвы, что было показано ранее для одного диска [10].

Поскольку почва неоднородна по глубине, ее давление на диск изменяется по глубине и является некоторой неизвестной функцией $p_1(z)$. Предположим, что эта функция непрерывна. Поскольку $\sqrt{x_1^2 + (a - z)^2} > 0$ (при $x_1 \neq 0$ и $z \neq a$ одновременно), то по обобщенной теореме о среднем для двойного интеграла справедливым является равенство⁴:

$$\iint_S p_1(z) \sqrt{x_1^2 + (a - z)^2} dx_1 dz = p_1(z^*) \iint_S \sqrt{x_1^2 + (a - z)^2} dx_1 dz,$$

где $p_1(z^*)$ – значение давления почвы на диск секции на некоторой промежуточной глубине $r - h \leq z^* \leq r$.

Предположим для упрощения модели, что $p_1(z^*) \approx p$ (давление приближённо равно среднему давлению), подставив предыдущее равенство в (3), перейдем в полученном двойном интеграле к повторному интегралу:

$$P_\tau = 2fp\omega \int_{r-h}^r dz \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} \sqrt{x_1^2 + (a - z)^2} dx_1.$$

Сделав замену переменной $x_1 = ru$ во внутреннем интеграле и замену переменной $z = rt$ во внешнем, вычислим внутренний интеграл. В итоге выразим мощность P_τ через следующий определённый интеграл:

$$P_\tau = fpr^2 \lambda v'_n \cos \alpha \int_{1-\xi}^1 \left(\sqrt{1-t^2} \sqrt{\mu^2 - 2\mu t + 1} + (\mu - t)^2 \ln \frac{\sqrt{1-t^2} + \sqrt{\mu^2 - 2\mu t + 1}}{|\mu - t|} \right) dt, \tag{15}$$

где $\mu = 1/\lambda$.

В силу неоднородности почвы по глубине ее удельное сопротивление расклиниванию фасками лезвия диска изменяется по глубине и является некоторой неизвестной функцией $Q_1(z)$. Предположим, что эта функция непрерывна. Поскольку $\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta} > 0$, то по обобщенной

⁴ Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. II. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 848 с. EDN: QJTKMX.

теореме о среднем для определённого интеграла справедливо равенство⁵:

$$\int_0^{\vartheta_0} Q_1(r \cos \vartheta) \sqrt{1 + tg^2 \alpha + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta} d\vartheta = Q_1(r \cos \vartheta^*) \int_0^{\vartheta_0} \sqrt{1 + tg^2 \alpha + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta} d\vartheta,$$

где $Q_1(r \cos \vartheta^*)$ – значение удельного сопротивления почвы расклиниванию фасками лезвия диска в некоторой промежуточной точке дуги резания $0 \leq \vartheta^* \leq \vartheta_0$.

Введём для удобства обозначение $Q = Q_1(r \cos \vartheta^*)$ и, подставив предыдущее равенство в (8), выразим мощность $P_{\text{л}}$ через определённый интеграл:

$$P_{\text{л}} = Qrv_{\text{л}} \cos \alpha \int_0^{\vartheta_0} \sqrt{1 + tg^2 \alpha + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta} d\vartheta. \quad (16)$$

Чтобы воспользоваться формулами (15), (16) и (9), (10) для определения мощности P , потребной для работы секции дискового луцильника, необходимо предварительно определить величину кинематического параметра λ из трансцендентного уравнения (14). Однако для неоднородной почвы в общем случае это сделать не удаётся, поскольку момент m_0 выражается через неизвестную функцию $p_1(z)$, а момент M_0 выражается через неизвестную функцию $Q_1(z)$.

Поскольку потребная мощность почвообрабатывающего диска достигает минимума при $\lambda = \lambda^* \approx 1$, то естественно предположить, что эта мощность мало изменяется в некоторой окрестности точки $\lambda = \lambda^*$. Анализ зависимости мощности диска от параметров λ , ξ и α показал, что это действительно так.

Введём для сокращения числа независимых параметров исследуемых зависимостей безразмерные мощности диска [10]:

$$P_{\text{т}}^* = \frac{P_{\text{т}}}{fpr^2 v_{\text{л}} \cos \alpha}, \quad P_{\text{л}}^* = \frac{P_{\text{л}}}{Qrv_{\text{л}} \cos \alpha}. \quad (17)$$

Выразив из равенств (17) мощности через соответствующие безразмерные мощности и подставив их в равенство (10), получим

$$P = n[(fprP_{\text{т}}^* + QP_{\text{л}}^*)rv_{\text{л}} \cos \alpha + P_c], \quad (18)$$

где $P_{\text{т}}^* = P_{\text{т}}^*(\lambda^*, \xi)$, $P_{\text{л}}^* = P_{\text{л}}^*(\lambda^*, \xi, \alpha)$.

Из (15)-(17) следует, что безразмерная мощность $P_{\text{л}}^*$ является функцией трёх безразмерных параметров λ , ξ и α , определяющих режим работы диска, а безразмерная мощность $P_{\text{т}}^*$ является функцией только двух из них (λ и ξ). Эти функции задаются формулами (17), в которых мощности $P_{\text{т}}$ и $P_{\text{л}}$ определяются равенствами (15) и (16) через интегралы, которые можно найти известными численными методами.

Как следует из уравнения (14), величина безразмерного кинематического параметра λ^* зависит от относительного заглубления ξ , угла атаки α и свойств обрабатываемой почвы. Согласно экспериментальным данным⁶ при малых углах атаки диска α кинематический параметр λ^* диска заключён в пределах $0,85 \leq \lambda^* \leq 1,1$.

По данным В.Ф. Стрельбицкого, глубина обработки почвы h луцильниками составляет 4...10 см. Радиус дисков луцильника обычно равен $r = 45/2 = 22,5$ см. Поэтому диапазон относительных заглублений луцильника составляет $0,15 < \xi < 0,5$.

Анализ зависимости мощности $P_{\text{т}}^*$ от λ и ξ , проведённый ранее, показал, что при указанных ξ и $0,85 \leq \lambda \leq 1,1$ справедливо приближённое равенство $P_{\text{т}}^*(\lambda, \xi) \approx P_{\text{т}}^*(1, \xi)$ [10].

С помощью Mathcad построены графики изменения мощности $P_{\text{л}}^* \cos \alpha$ в зависимости от λ для фиксированного значения $\xi = 0,5$ и $\alpha = 0, 20, 35^\circ$ (рис. 3). Как показывают расчёты, для значений $\xi = 0,3$ и $0,1$ характер изменения мощности $P_{\text{л}}^* \cos \alpha$ не меняется. На рисунке 4 приведены графики зависимости мощности $P_{\text{л}}^* \cos \alpha$ от угла α для значений $\lambda = 0,85; 1,0; 1,1$ и значений $\xi = 0,1; 0,3; 0,5$. Отметим, что для $\xi = 0,1$ пунктирная линия практически совпадает со штрихпунктирной линией.

Как следует из рисунков 3 и 4, при $0,85 \leq \lambda \leq 1,1$ справедливо приближённое равенство $P_{\text{л}}^*(\lambda, \xi, \alpha) \approx P_{\text{л}}^*(1, \xi, \alpha)$. Значит, из равенства (18) при $0,85 \leq \lambda \leq 1,1$ следует приближённое равенство для искомой мощности

$$P = n[(fprP_{\text{т}}^*(1, \xi) + QP_{\text{л}}^*(1, \xi, \alpha))rv_{\text{л}} \cos \alpha + P_c]. \quad (19)$$

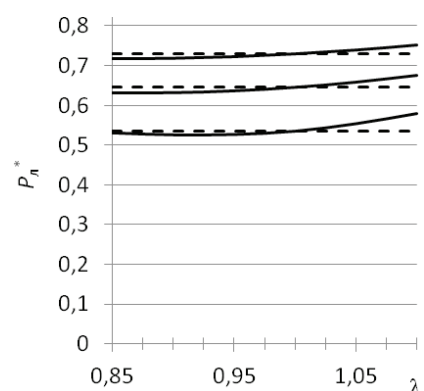


Рис. 3. Зависимость безразмерной мощности $P_{\text{л}}^* \cos \alpha$ от кинематического коэффициента λ :

----- для фиксированного значения $\xi = 0,5$;
- - - - - при $\lambda = 1$

Fig. 3. Relationship between the dimensionless power $P_{\text{л}}^* \cos \alpha$ and the parameter λ :

————— for a fixed value $\xi = 0,5$; - - - - - when $\lambda = 1$

⁵ Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. I. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 614 с. EDN: QJTKNH.

⁶ Нартов П.С. Дисковые почвообрабатывающие орудия. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1972. 184 с. EDN: SKWQBH.

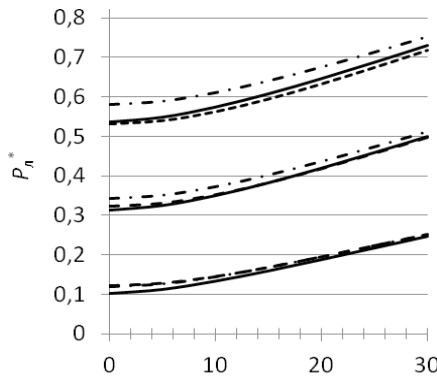


Рис. 4. Зависимость безразмерной мощности $P_n^* \cos \alpha$ от угла атаки диска α :

----- $\lambda = 1$; - - - - - $\lambda = 0,85$; - · - · - $\lambda = 1,1$

Fig. 4. Relationship between the dimensionless power $P_n^* \cos \alpha$ and the angle of approach α :

—— $\lambda = 1$; - - - - $\lambda = 0.85$; - · - · - $\lambda = 1.1$

При $\lambda = 1$ интеграл в равенстве (15) выражается через элементарные функции, что с учётом первого из равенств (17) даёт

$$P_n^*(1, \xi) = \frac{32}{9} + \frac{(3\xi^2 - 4\xi - 16)\sqrt{4 - 2\xi} - \frac{\xi^3}{3} \ln\left(\frac{2 - \sqrt{4 - 2\xi}}{\sqrt{2\xi}}\right)}{9}$$

При $\lambda = 1$ интеграл в равенстве (16) упрощается, что с учётом второго из равенств (17) приводит к

$$P_n^*(1, \xi, \alpha) = \int_0^{\vartheta_0} \sqrt{\text{tg}^2 \alpha + 4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta$$

Интеграл в последнем равенстве при $\alpha \neq 0$ не выражается через элементарные функции. Но поскольку обычно $\xi \leq 0,5$, то есть $\vartheta/2 \leq \vartheta_0/2 = \arccos(0,5)/2 < 0,53$, то $\sin(\vartheta/2) \approx \vartheta/2$ – с относительной ошибкой, меньшей $0,53^3/6 < 2,5\%$. Поэтому

$$P_n^*(1, \xi, \alpha) \approx \int_0^{\vartheta_0} \sqrt{\text{tg}^2 \alpha + \vartheta^2} d\vartheta = \frac{\vartheta_0}{2} \sqrt{\text{tg}^2 \alpha + \vartheta_0^2} + \frac{\text{tg}^2 \alpha}{2} \ln \left| \vartheta_0 \text{ctg} \alpha + \sqrt{1 + \vartheta_0^2 \text{ctg}^2 \alpha} \right|$$

Подставив в равенство (19) выражения для функций $P_n^*(1, \xi)$, $P_n^*(1, \xi, \alpha)$ и выражение (9) для мощности P_c , получим следующее явное приближённое выражение для мощности P секции дискового луцильника, потребной для обработки почвы:

$$\frac{P}{nv_{nr}} = Q \cos \alpha \left(\frac{\vartheta_0}{2} \sqrt{\text{tg}^2 \alpha + \vartheta_0^2} + \frac{\text{tg}^2 \alpha}{2} \ln \left(\vartheta_0 \text{ctg} \alpha + \sqrt{1 + \vartheta_0^2 \text{ctg}^2 \alpha} \right) \right) + pr \left\{ \arccos(1 - \xi) - (1 - \xi) \sqrt{2\xi - \xi^2} \right\} \sin \alpha + f \left[-\frac{\xi^3}{3} \ln \left(\frac{2 - \sqrt{4 - 2\xi}}{\sqrt{2\xi}} \right) + \frac{(3\xi^2 - 4\xi - 16)\sqrt{4 - 2\xi} + \frac{32}{9}}{9} \right] \cos \alpha \Bigg\},$$

где $\vartheta_0 = \arccos(1 - \xi)$.

Тяговое сопротивление дисковой секции луцильника $F = P/v_n$, поэтому приближённое явное выражение для тягового сопротивления секции луцильника примет следующий вид:

$$\frac{F}{nr} = Q \cos \alpha \left(\frac{\vartheta_0}{2} \sqrt{\text{tg}^2 \alpha + \vartheta_0^2} + \frac{\text{tg}^2 \alpha}{2} \ln \left(\vartheta_0 \text{ctg} \alpha + \sqrt{1 + \vartheta_0^2 \text{ctg}^2 \alpha} \right) \right) + pr \left\{ \arccos(1 - \xi) - (1 - \xi) \sqrt{2\xi - \xi^2} \right\} \sin \alpha + f \left[-\frac{\xi^3}{3} \ln \left(\frac{2 - \sqrt{4 - 2\xi}}{\sqrt{2\xi}} \right) + \frac{(3\xi^2 - 4\xi - 16)\sqrt{4 - 2\xi} + \frac{32}{9}}{9} \right] \cos \alpha \Bigg\}, \tag{20}$$

где $\vartheta_0 = \arccos(1 - \xi)$.

Расчёты по формуле (20) проще и быстрее проводить в современных математических пакетах Maple, MathCAD и т.д.

Поскольку направление проекции на горизонтальную плоскость равнодействующей нормальных сил реакций почвы на сферический диск и направление равнодействующей нормальных сил реакций почвы на плоский диск совпадают, то возможность использования формулы (20) для определения тягового сопротивления сферического диска зависит от величины результирующей силы трения почвы о его внутреннюю поверхность в почве. По сообщениям многих исследователей, в том числе П.С. Нартова⁶, её доля в тяговом сопротивлении диска невелика, и в этих случаях использование формулы (20) для сферического диска не приведёт к существенным погрешностям.

Для подтверждения количественной адекватности построенной полуаналитической модели взаимодействия секции дискового луцильника с почвой были использованы результаты полевых экспериментов по пространственному динамометрированию дисковой секции из 8 плоских дисков диаметром 450 мм, опубликованные В.Ф. Стрельбицким.

Как указывает автор, механический состав исследуемого участка стерни представлял лёгкую глину. В слоях 0...5, 5...10, 10...15 см средняя твердость (по твердомеру Ревякина) составляла 10,8; 14,4; 17,6 кГ/см², средняя влажность – соответственно 20,2; 22,4; 24,6%. Поскольку в экспериментах коэффициент трения почвы о диски не измерялся, то для него было принято наиболее вероятное значение: $f = 0,5$.

Глубина хода дисков составляла $h = 90$ мм, то есть относительное заглубление $\xi = h/r = 0,4$.

На рисунке 5 изображены средние результаты полевого динамометрирования тягового сопротивления дисковой секции при лущении стерни, опубликованные В.Ф. Стрельбицким. Сплошной линией

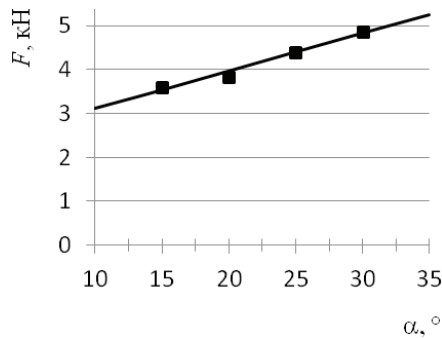


Рис. 5. Зависимость тягового сопротивления от угла α для секции из плоских дисков:
 $Q = 19,098 \text{ Н/см}$, $p = 2,187 \text{ Н/см}^2$

Fig. 5. Relationship between draft force and angle α for a gang of flat discs:
 $Q = 19.098 \text{ N/cm}$, $p = 2.187 \text{ N/cm}^2$

изображён график зависимости (20) при значениях $Q = 19,098 \text{ Н/см}$ и $p = 2,187 \text{ Н/см}^2$, найденных методом наименьших квадратов в пакете Mathcad. Максимальная относительная погрешность определения тягового сопротивления дисковой секции по выражению (20) не превышает 3,3%, а средняя погрешность составляет 1,6%.

На рисунке 6 изображены средние результаты экспериментального определения тягового усилия батареи из 4 сферических дисков в почвенном канале [8]. Коэффициент трения почвы о диск в этих опытах также не измерялся, поэтому было принято значение: $f = 0,5$. Глубина хода дисков составляла $h = 100 \text{ мм}$, а диаметр – 450 мм, то есть относительное заглубление $\xi = h/r = 0,444$. Сплошной линией на этом рисунке изображён график зависимости (20) при значениях $Q = 16,099 \text{ Н/см}$ и $p = 0,748 \text{ Н/см}^2$, найденных методом наименьших квадратов в пакете Mathcad. Как показали расчёты, максимальная относительная погрешность определения тягового усилия диска по выражению (20) составила 2,6%, а средняя – 2,0%. Отметим, что максимальная относительная погрешность

Список литературы

1. Лобачевский Я.П., Старовойтов С.И., Гринь А.М. Энергетические и технологические аспекты работы дискового рабочего органа // Сельскохозяйственные машины и технологии. 2017. № 1. С. 18-22. EDN: YFTHEZ
2. Malasli M.Z., Celik A. Disc angle and tilt angle effects on forces acting on a single-disc type no-till seeder opener. *Soil and Tillage Research*. 2019;194:104304. <https://doi.org/10.1016/j.still.2019.104304>
3. Murray S.E., Chen Y. Soil bin tests and discrete element modeling of a disc opener. *Canadian Biosystems Engineering/Le genie des biosystemes au Canada*. 2018;60:2.1-2.10.
4. Дьяков В.П. О природе сопротивления почвы механической нагрузке // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. 2018. № 8. С. 184-189. EDN: VQHNXD
5. Смилский В.В. К вопросу о механических свойствах почв // Агропанорама. 2013. № 3. С. 17-20. EDN: JZIAEQ

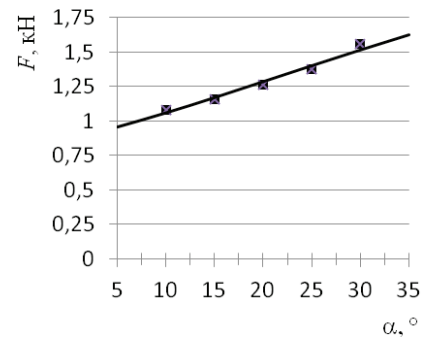


Рис. 6. Зависимость тягового сопротивления от угла α для секции из сферических дисков:
 $Q = 16,099 \text{ Н/см}$, $p = 0,748 \text{ Н/см}^2$

Fig. 6. Relationship between draft force and angle α for a gang of spherical discs:
 $Q = 16.099 \text{ N/cm}$, $p = 0.748 \text{ N/cm}^2$

определения тягового усилия при дискретно-элементном моделировании составила значительно большую величину – 22,2% [8].

Выводы

1. Полуаналитическая модель взаимодействия дисковой секции луцильника с неоднородной по глубине почвой позволяет определить потребную мощность секции дискового луцильника и её тяговое сопротивление в зависимости от количества дисков секции, радиуса дисков, относительного заглубления, угла атаки секции луцильника и свойств почвы.
2. Полученная модель является применимой для определения силовых характеристик секций с плоскими и сферическими дисками.
3. Для секции луцильника с плоскими дисками погрешность определения тягового сопротивления составила 3,3%, а для секции со сферическими дисками – 2,6% (рассчитанная по данным лабораторных экспериментов в почвенном канале).
4. В дальнейшем предполагается исследовать возможность обобщения предложенной модели для описания взаимодействия с почвой дисков дискаторов.

References

1. Lobachevsky Ya.P., Starovoitov S.I., Grin A.M. Energetic and technological aspects of disc working tool operation. *Agricultural Machinery and Technologies*. 2017;1:18-22. (In Rus.)
2. Malasli M.Z., Celik A. Disc angle and tilt angle effects on forces acting on a single-disc type no-till seeder opener. *Soil and Tillage Research*. 2019;194:104304. <https://doi.org/10.1016/j.still.2019.104304>
3. Murray S.E., Chen Y. Soil bin tests and discrete element modeling of a disc opener. *Canadian Biosystems Engineering/Le genie des biosystemes au Canada*. 2018;60:2.1-2.10.
4. Dyakov V.P. On soil resistance to mechanical loading. *Bulletin of the Kursk State Agricultural Academy*. 2018;8:42-46. (In Rus.)
5. Smilsky V.V. To the question of the mechanical properties of soils. *Agrapanorama*. 2013;3:17-20. (In Rus.)

6. Goshtasb A.K., Desbiolles J., Fielke J. Circular disc blade considerations in soil force prediction modelling. *Journal of Agricultural Science and Technology*. 2014;4:371-383.

7. Khosravani A., Desbiolles J.M.A., Fielke J.M., Ucgul M., Saunders C. Prediction of single disc seeding system forces, using a semi-analytical and discrete element method (DEM). *Agriculture*. 2023;13(1):206. <https://doi.org/10.3390/agriculture13010206>

8. Лысыч М.Н. Компьютерное моделирование процесса обработки почвы рабочими органами почвообрабатывающих машин // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12, № 3. С. 607-627. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-3-607-627>

9. Акимов А.П., Константинов Ю.В., Аквильянова И.Н. Критерии и оптимальные параметры функционирования дискового ножа // Тракторы и сельскохозяйственные машины. 2008. № 4. С. 31-34. EDN: KWPMPPF

10. Константинов Ю.В. Полуаналитическая модель взаимодействия с почвой плоского диска луцильника // Вестник НГИЭИ. 2022. № 11 (138). С. 19-32. <https://doi.org/10.24412/2227-9407-2022-11-19-32>

Сведения об авторе

Юрий Валентинович Константинов, канд. техн. наук, доцент; Чувашский государственный аграрный университет; 428003, Российская Федерация, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 29; <https://orcid.org/0000-0002-2076-0432>; yukonsc@yandex.ru

Статья поступила 29.08.2023; после рецензирования и доработки 19.10.2023; принята к публикации 20.10.2023

6. Goshtasb A.K., Desbiolles J., Fielke J. Circular disc blade considerations in soil force prediction modelling. *Journal of Agricultural Science and Technology*. 2014;4:371-383.

7. Khosravani A., Desbiolles J.M.A., Fielke J.M., Ucgul M., Saunders C. Prediction of single disc seeding system forces, using a semi-analytical and discrete element method (DEM). *Agriculture*. 2023;13(1):206. <https://doi.org/10.3390/agriculture13010206>

8. Lysych M.N. Computer simulation of the process soil treatment by tillage tools of soil processing machines. *Computer Research and Modeling*. 2020;12(3):607-627 (In Rus.) <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-3-607-627>

9. Akimov A.P., Konstantinov Yu.V., Akvilyanova I.N. Criteria and optimal parameters for the disc knife operation. *Tractors and Agricultural Machinery*. 2008;4:31-34. (In Rus.)

10. Konstantinov Yu.V. Semi-analytical model of interaction of a flat harrow disc with soil. *Bulletin NGIEI*. 2022;11:19-32. (In Rus.) <https://doi.org/10.24412/2227-9407-2022-11-19-32>

Author Information

Yuriy V. Konstantinov, PhD (Eng), Associate Professor; Chuvash State Agrarian University; 29, K. Marx Str., Cheboksary, 428003, Russian Federation; <https://orcid.org/0000-0002-2076-0432>; yukonsc@yandex.ru

Received 29.08.2023; revised 19.10.2023; accepted 20.10.2023