

ТЕХНИЧЕСКИЙ СЕРВИС В АПК

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК. 621.891

DOI: 10.26897/2687-1149-2021-5-42-47

О ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗЫ КОСИНУСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНТАКТЕ «ВАЛ-ОТВЕРСТИЕ»

БЕЗИК ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ , канд. техн. наук, доцент

bda20101@yandex.ru , <https://orcid.org/0000-0003-1883-716X>

РОМАНЕЕВ НИКОЛАЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ, канд. техн. наук, доцент

romaneev_nikolai@mail.ru

Брянский государственный аграрный университет; 243365, Российская Федерация, Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, ул. Советская, 2а

Аннотация. Одним из часто встречающихся в машиностроении и строительстве видом соединения является соединение «Вал-отверстие». Возникающие при его нагружении механические напряжения распределяются сложным образом в месте контакта соединения и в некоторых случаях могут привести к его разрушению. Поэтому в процессе проектирования важно уметь рассчитывать механические напряжения в зоне контакта. Традиционно в расчетах полагается, что контактные напряжения распределены по косинусоидальному закону. Однако это не совсем верно, особенно при различных диаметрах вала и отверстия. Опираясь на теоретические исследования по определению зоны контакта вала и отверстия (в том числе и при различных их диаметрах) и распределению напряжений в зоне контакта, авторами в среде APMWinMachine проведены численные расчеты напряжений в объеме вала и пластины с отверстием при нагружении соединения «Вал-отверстие». Расчеты производились для двумерного случая методом конечных элементов в программе APMStructure. Расчеты показали, что при равенстве диаметров в соединении распределение напряжений близко к косинусоидальному, при этом в зоне контакта возникает только один концентратор напряжения, находящийся на прямой действия нагружающей силы. Однако при наличии даже небольшого расхождения в диаметрах вала и отверстия в месте контакта возникает три зоны концентрации напряжений, в которых возможно разрушение соединения. Это центральная зона и две боковых, угловое расстояние между которыми можно рассчитать, исходя из известных формул, полученных теоретически. Проведен эксперимент с моделью из оргстекла, качественно подтверждающий правильность проведенных расчетов.

Ключевые слова: механические напряжения, соединение, контакт, вал, отверстие, метод конечных элементов, распределение напряжений.

Формат цитирования: Безик Д.А., Романеев Н.А. О проверке гипотезы косинусного распределения напряжений в контакте «Вал-отверстие» // Агроинженерия. 2021. № 5(105). С. 42-47. <https://doi.org/10.26897/2687-1149-2021-5-42-47>.

© Безик Д.А., Романеев Н.А., 2021



ORIGINAL PAPER

TESTING THE HYPOTHESIS OF THE COSINE DISTRIBUTION OF STRESSES IN THE SHAFT-HOLE CONTACT

DMITRY A. BEZIK , PhD (Eng), Associate Professor

bda20101@yandex.ru , <https://orcid.org/0000-0003-1883-716X>

NIKOLAYA A. ROMANEEV, PhD (Eng), Associate Professor

romaneev_nikolai@mail.ru

Bryansk State Agrarian University; 2a, Sovetskaya Str., Kokino, Vygonichi district, Bryansk region, 243365, Russian Federation

Abstract. One of the most common connection types in mechanical engineering and construction is the shaft-hole connection. The mechanical stresses caused by its loading are distributed in the contact zone of the loaded parts of the joint. In some cases, they can lead to destruction. Therefore, while designing, it is important to analyze the mechanical stresses in the contact zone. Traditionally, calculations assume that the contact stresses are distributed according to the cosine law. However, this is not entirely true, especially with different shaft and hole diameters. The authors examined theoretical studies of the contact zone of the shaft

and the hole (including the cases of different diameters) and the stress distribution in the contact zone. Based on the studies, they performed numerical calculations in the APMWinMachine environment to determine the stresses in the volume of the shaft and the plate with a hole when loading the shaft-hole connection. The analyses were performed for the two-dimensional case by the finite element method in the APMStructure program. The results show that when the diameters in the connection are equal, the stress distribution is close to the cosine law. In this case, only one stress raiser occurs in the contact zone, which is located on the line of action of the loading force. However, if there is a slight discrepancy in the shaft and hole diameters, there are three stress raisers in which the connection may break – the central zone and two side zones. The angular distance between them can be determined based on the known theoretical formulas. The authors made an experiment with a plexiglass model, which qualitatively confirmed the correctness of the analysis performed.

Key words: mechanical stresses, connection, contact, shaft, hole, finite elements method, stress distribution.

For citation: Bezik D.A., Romaneev N.A. Testing the hypothesis of the cosine distribution of stresses in the shaft-hole contact. Agricultural Engineering, 2021; 5 (105): 42-47. (In Rus.). <https://doi.org/10.26897/2687-1149-2021-5-42-47>.

Введение. Часто в пределах срока службы одного поколения техники приходится решать задачи по её совершенствованию и повышению уровня надежности. Увеличение темпов жизни, требования экономики диктуют необходимость увеличения производительности оборудования одновременно в категории массы и времени. Для выпускаемого оборудования такая ситуация обеспечивается постоянным увеличением скоростей и нагрузок в опорных конструкциях и узлах трения, что приводит к возрастанию размеров, массы, моментов инерции, увеличению вибрации машины и, как следствие, к ужесточению напряженного состояния узлов деталей [1].

Проведение подробных всесторонних расчетов, тщательного анализа конструкций еще на этапе их проектирования позволяют поднять уровень надежности изделий – главного показателя качества. Принимаются определенные усилия по внедрению современных методов расчета на прочность и устойчивость опорных конструкций [2, 3].

Несмотря на широкое применение соединений типа «Вал-отверстие», их расчет обычно производится только для случая плотного положения шарнира (вала) в отверстии, однако соединения с неплотным положением вала в отверстии весьма часто применяются.

Экспериментальные исследования показывают, что распределение напряжений пластины с отверстием и вала существенно отличается в зависимости от соотношения их диаметров [4]. При этом максимальное напряжение увеличивается при расхождении диаметров отверстия и вала.

В традиционных расчетах обычно полагается, что при отсутствии трения и при одинаковых диаметрах вала и отверстия контактные напряжения распределены по косинусоидальному закону, что не соответствует действительности.

Цель исследований: изучение напряженного состояния системы «Вал-отверстие» в месте их контакта путем проведения численного расчета, основанного на точном аналитическом решении задачи о контактном напряжении этой системы, и экспериментальная проверка полученных результатов.

Материал и методы. Для проведения численных расчетов применена отечественная разработка – APMWinMachine, созданная компанией Научно-технический центр «АПМ», г. Королев [5], которая позволяет решать большой круг прикладных машиностроительных расчетов (от расчета механических передач до расчета внутренних напряжений деформированного тела). Использование программного

обеспечения позволяет быстро оценивать картину механических напряжений для оптимизации конструкции и проверки множества вариантов вместо проведения трудоёмкого и затратного натурного эксперимента.

Авторами произведены расчеты контактного напряжения (радиальная составляющая напряжения) по аналитическому решению контактной задачи сопряжения вала и отверстия для случая, когда вал и пластина с отверстием имеют одинаковые механические свойства (материал – сталь Ст3). Известно аналитическое решение этой задачи, причем для отличающихся диаметров вала и отверстия [6]. Контактные напряжения в этом случае можно рассчитать по формулам:

$$\frac{2a^4 + \ln(a^2 + 1) - 2}{a^4 + a^2} = -\frac{4\pi\varepsilon E}{(1+\chi)(1+\nu)P_0}; \quad (1)$$

$$F = \frac{2P_0(a^2 + (\sqrt{a^2 + 1} - 1)(2 - \ln(a^2 + 1)))}{\sqrt{a^2 + 1}(2 - \ln(a^2 + 1))R} + \frac{2\varepsilon\pi E(2(\sqrt{a^2 + 1} - 1) + \ln(a^2 + 1))}{(1+\chi)(1+\nu)(2 - \ln(a^2 + 1))R}; \quad (2)$$

$$\xi = tg \frac{\alpha}{2}; \quad \phi(\alpha) = \sqrt{a^2 - \xi^2}; \quad (3)$$

$$p(\alpha) = \frac{P_0}{\pi R} \left(\frac{\sqrt{a^2 + 1} - 1}{a^2 + 1} \ln \frac{\sqrt{a^2 + 1} - \phi(\alpha)}{\sqrt{a^2 + 1} + \phi(\alpha)} + \frac{2\phi(\alpha)}{\sqrt{a^2 + 1}(1 + \xi^2)} \right) - \frac{1}{2\pi\sqrt{a^2 + 1}} \left(F + \frac{2\pi\varepsilon E}{(1+\chi)(1+\nu)R} \right) \ln \frac{\sqrt{a^2 + 1} - \phi(\alpha)}{\sqrt{a^2 + 1} + \phi(\alpha)}, \quad (4)$$

где $a = tg \left(\frac{\alpha_0}{2} \right)$ – параметр, определяющий угол контакта α_0 ; $\varepsilon = R_1 - R_2$ – разность радиусов отверстия (R_1) и вала (R_2), м; $\chi = 3 \dots 4 \cdot \nu$; ν , – коэффициент Пуассона; P_0 – нагрузка на вал, Н; E – модуль Юнга, МПа.

Искомое распределение напряжений пластине с отверстием и в валу находилось с помощью программы APMWinStructure из пакета APMWinMachine.

Расчеты выполнялись в пакете MATLAB. При этом сначала по формуле (1) рассчитывается угол контакта α_0 (который занимает диапазон не от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, как при косинусоидальном распределении, а меньше). Затем по формулам (2) и (3) определяются вспомогательные

параметры, и далее по формуле (4) – искомое контактное давление.

Результаты исследований. Расчёт контактного давления проводился в соединении, в котором вал (D_2) и пластина с отверстием (D_1) выполнены из стали Ст3, ширина контакта составила 10 мм, нагрузка – 10 т.

Эпюры расчётного контактного давления показаны на рисунке 1. Из рисунка следует, что при уменьшении диаметра вала пятно контакта уменьшается (на рисунке показано пятно контакта, величина векторов контактного давления имеет произвольный масштаб). При этом контактное давление растёт.

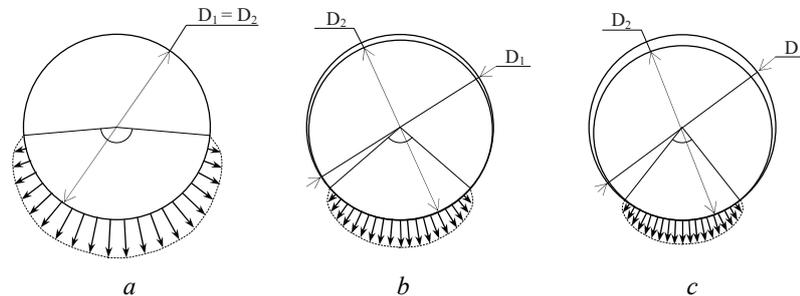


Рис. 1. Эпюры контактного давления в зоне контакта вала (D_2) и пластины с отверстием (D_1):

- a) $D_1 = D_2 = 65$ мм, угол полного контакта 1,4806 рад;
 б) $D_1 = 65$ мм, $D_2 = 64$ мм, угол полного контакта 0,8576 рад;
 в) $D_1 = 65$ мм, $D_2 = 63$ мм, угол полного контакта 0,6705 рад

Fig. 1. Diagrams of the contact pressure in the contact area of the shaft (D_2) and the plate with the hole (D_1):

- a) $D_1 = 65$ mm, $D_2 = 65$ mm, full contact angle 1.4806 rad;
 б) $D_1 = 65$ mm, $D_2 = 64$ mm, full contact angle 0.8576 rad;
 в) $D_1 = 65$ mm, $D_2 = 63$ mm, full contact angle 0.6705 rad

В общем случае решить контактную задачу численными методами достаточно сложно, хотя работы по разработке программного обеспечения для этих целей активно ведутся. Для решения задачи необходимо знать конфигурацию пятна контакта и распределение напряжений в пятне контакта. В этом случае мы имеем двумерную задачу, которую относительно несложно решить. Получить более точные результаты можно путем решения трехмерной задачи.

Угловые размеры пятна контакта системы «Вал-отверстие» можно определить по формуле 1. Распределение напряжения в наших сравнительных расчетах использовалось косинусоидальное и точное аналитическое по формулам 2-4.

Сначала для сравнения были произведены расчёты для двух случаев: для гипотезы о косинусоидальном распределении контактного напряжения и для случая точного аналитического решения (формулы 1-4). При этом производился расчет напряжений в пластине с отверстием. Размеры пластины были выбраны достаточно большими, чтобы они не влияли на напряжения вблизи отверстия. Расчетные усилия были приложены к узлам конечных элементов, на которые разбивалась пластина. Они были получены исходя из расчетного напряжения и размеров конечных элементов. Рассмотренные соотношения диаметров вала и отверстия: 65 мм и 65 мм, 64 мм и 65 мм, 63 мм и 65 мм. Карта расчетных напряжений показана на рисунке 2. Первая цель расчетов – проверить допустимость гипотезы о косинусоидальном распределении напряжений.

Распределение напряжений в пластине с отверстием при одинаковых диаметрах вала и отверстия показано на рисунке 2 (а, б). Максимальное напряжение

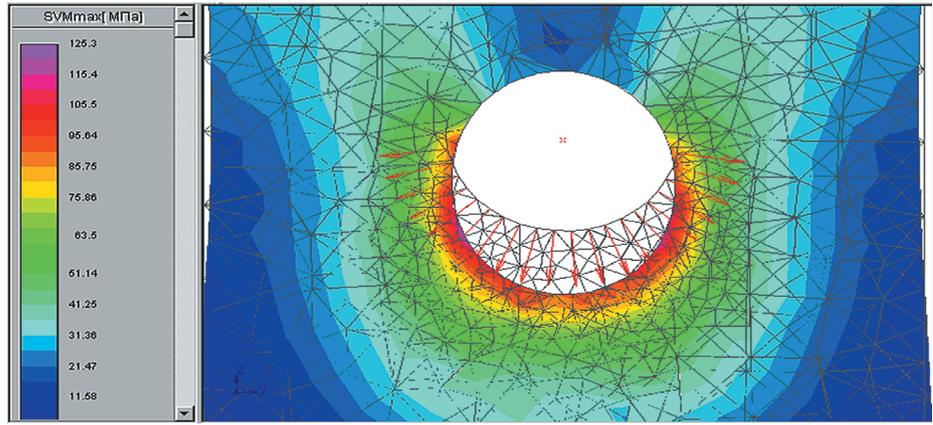
в пластине практически не отличается при точном расчете контактных напряжений по формулам 1-4 и при косинусоидальном распределении контактных напряжений.

Таким образом, для расчётов напряжённого состояния детали с отверстием при одинаковых диаметрах вала и отверстия вполне можно использовать гипотезу о косинусоидальном распределении напряжения.

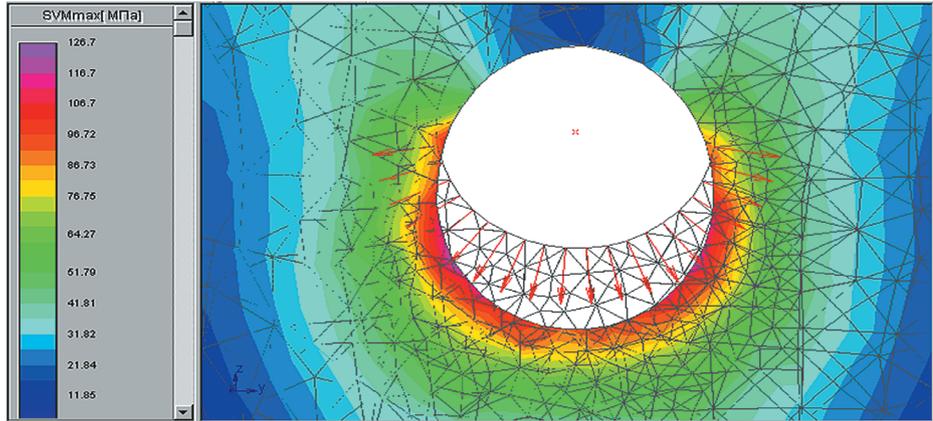
Однако при различии диаметра вала и отверстия наблюдается существенное изменение как в величине максимального напряжения в пластине, так и его распределения в объёме пластины. Первое, что необходимо отметить, это концентрация напряжений в трех точках: в центре контакта и в двух точках симметрично по краям. При этом максимальное напряжение в пластине может достигаться не в центре контакта, а в точках по краям контакта.

В работах И.С. Сухого показано, что распределение напряжений в проушине при плотном и неплотном приложении вала существенно отличается. По результатам авторских расчетов четко наблюдается три концентратора напряжений в месте контакта вала и пластины с отверстием (проушины). Отсюда следует необходимость поправки на расположение тензодатчиков при экспериментальных исследованиях. В измерениях И.С. Сухого они располагаются в горизонтальной и вертикальной плоскостях (относительно рисунка 2), хотя это и не всегда соответствует расположению концентраторов. Действительно, анализ разрывов пластин под нагрузкой, приложенной к валу, находящемуся в отверстии, показывает, что разрушение при перегрузке происходит часто именно в местах расположения концентраторов (можно сравнить рисунки 2с и 3).

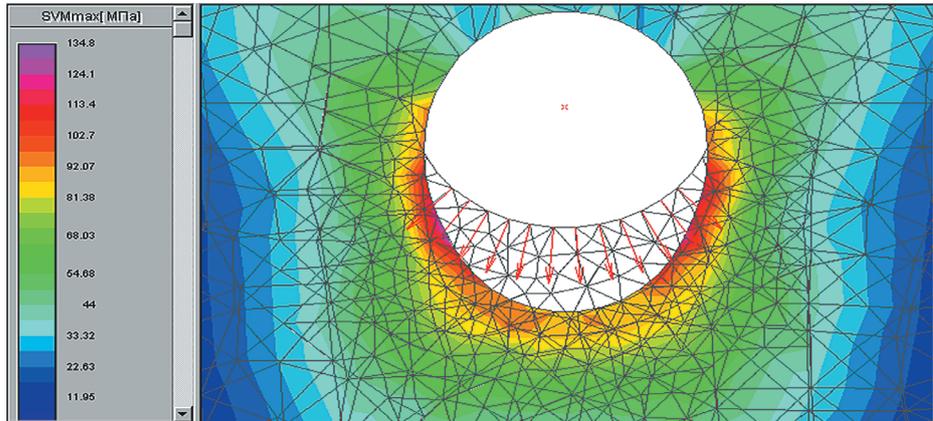
a) $D_1 = D_2 = 65$ мм,
 $\sigma_{\max} = 126,3$ МПа



b) $D_1 = D_2 = 65$ мм,
 $\sigma_{\max} = 126,7$ МПа



c) $D_1 = 65$ мм,
 $D_2 = 64$ мм
 $\sigma_{\max} = 134,6$ МПа



d) $D_1 = 65$ мм,
 $D_2 = 63$ мм,
 $\sigma_{\max} = 144,8$ МПа

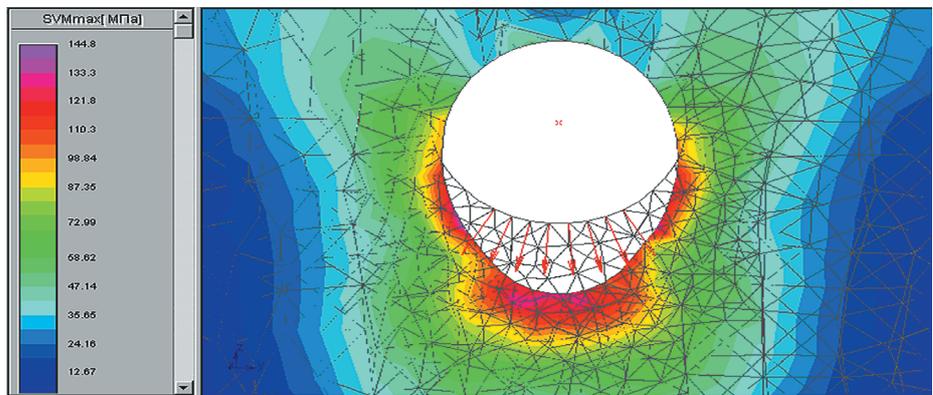


Рис. 2. Карта напряжений в пластине с отверстием под действием нагрузки от вала с различным диаметром:
a – контактные напряжения приняты распределенными по косинусоидальному закону;
b...d – контактные напряжения рассчитаны по точному аналитическому решению

Fig. 2. Stress map in a plate with a hole under the action of a load from the shaft with a different diameter:
a – the contact pressures are assumed to be distributed according to the cosine law;
b...d – the contact pressures are calculated according to the exact analytical solution

Отметим, что даже небольшое различие в диаметрах вала и отверстия приводит к существенному росту максимального напряжения. Это следует из анализа рисунков 2а и 2д – уменьшение диаметра вала на 3,07% приводит к увеличению максимального напряжения в теле серьги на 14,6%.



Рис. 3. Пример разрушения проушины под нагрузкой от вала [4]

Fig. 3. Example of the destruction of the eye ring under the shaft load [4]

Традиционные расчеты соединения вала и отверстия подразумевают в первую очередь расчёт вала по сдвиговому напряжению, а также расчет пластины с отверстием на разрыв в сечении, проходящим через ось вала. Однако, как следует из рисунка 2, это неверно, так как максимальные напряжения достигаются не в этом сечении, особенно при различных диаметрах вала и отверстия. Это является хорошей демонстрацией эффективности численных расчетов (например, конечноэлементным методом) с использованием современного программного обеспечения. В нашем случае для расчетов напряженного состояния высокую эффективность демонстрирует отечественный пакет программ APMWinMachine.

Численный эксперимент удобен, быстр и позволяет получить такие результаты, которые весьма сложно получить экспериментально, – например, карту внутренних напряжений. Однако любой численный эксперимент подразумевает использование некоторых ограничений и предположений. Поэтому всегда требуется проверка адекватности математической модели. Для качественной проверки карты распределения напряжений в случае небольшой разницы в диаметре вала и отверстия авторами была изготовлена модель системы «Вал-отверстие» из оргстекла. Эта модель была нагружена радиальной нагрузкой и наблюдалась при освещении поляризованным светом. Нагрузка передавалась к центру вала стальным стержнем, что, конечно, несколько искажает результаты. Но авторами были рассмотрены напряжения в пластине

Библиографический список

1. Белоус Н.М., Ториков В.Е. Стратегия инновационного развития научных исследований в Брянской государственной сельскохозяйственной академии // Вестник

с отверстием, а на них распределение напряжений в валу влияет несущественно. Полученная картина напряжений показана на рисунке 4 и качественно подтверждает результаты расчётов.

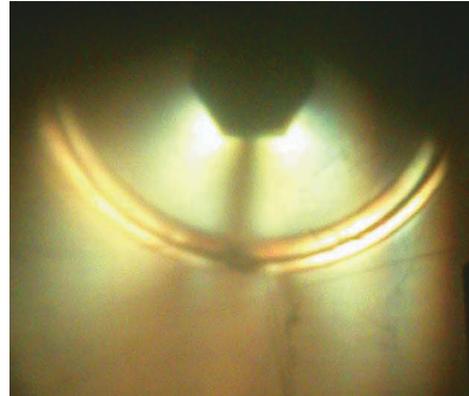


Рис. 4. Экспериментальная карта напряжений системы «Вал-отверстие»

Fig. 4. Experimental stress map of the shaft-hole system

В пластине наблюдается три места с концентрацией напряжения: одно в центре пятна контакта и два по краям, с углом раскрытия около 45°. Подобная картина наблюдалась и в месте контакта стального стержня с отверстием в валу. В этом случае не наблюдается концентратор напряжения в центре пятна контакта, но производить расчет напряжения в пластине с отверстием в плоскости, содержащей ось вала, не совсем корректно. Таким образом, проведенный эксперимент качественно подтверждает правильность численных расчётов.

Выводы

1. При расчётах напряжённого состояния системы «Вал-отверстие» можно использовать гипотезу о косинусоидальном распределении нормального напряжения, если их диаметры отличаются незначительно. При отличии диаметра вала и отверстия более чем на 1% наблюдается увеличение напряжения в пластине с отверстием примерно на 5% на каждый процент различия диаметра вала и отверстия. При этом в пластине наблюдается три концентратора напряжения: один по центру пятна контакта и два, расположенные симметрично, по краям пятна контакта. Этот факт необходимо учитывать как при расчете проектируемых изделий, так и при проверочном расчете при наличии существенного износа деталей.

2. Программное обеспечение APM WinMachine, использующее метод конечных элементов, и аналитические формулы 2-4 позволяют провести более точные расчеты напряжений, возникающих в месте контакта вала и пластины с отверстием при различном сочетании их диаметров.

References

1. Belous N.M., Torikov V.E. Strategiya innovatsionnogo razvitiya nauchnykh issledovaniy v Bryanskoj gosudarstvennoj sel'skohozyaystvennoj akademii [Strategy

Брянской государственной сельскохозяйственной академии. 2010. № 2. С. 4-16.

2. Кисель Ю.Е., Шишова В.П., Мурачев С.М. и др. Применение МКЭ для расчета упругих характеристик композиционных материалов // Сборник материалов Международной научно-технической конференции «Проблемы энергообеспечения, автоматизации, информатизации и природопользования в АПК». Брянск: Издательство Брянский государственный аграрный университет (Кокино), 2020. С. 57-62.

3. Безик Д.А., Романеев Н.А. Расчеты напряженного состояния элементов грузоподъемных машин с использованием современного программного обеспечения // Подъемно-транспортное дело. 2008. № 1 (45). С. 2-5.

4. Сухов И.С., Платонов А.С. Проблемы применения шарнирных соединений в стальных конструкциях автотранспортных мостов // Транспортное строительство. 2009. № 4. С. 19-20.

5. Шелофаст В.В., Прокопов В.С., Шелофаст В.В. и др. Возможности отечественных систем инженерного анализа (САЕ) // Сборник трудов XVI Международной молодежной конференции 17-19 октября 2016 г. «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2016)». М.: Изд-во ООО «Аналитик», 2016. С. 19-23.

6. Комогорцев В.Ф., Попов Г.Я., Радиолло М.В. Контактная задача для кругового кольца // Прикладная механика. 1980. Т. 16. № 1. С. 81-87.

Критерии авторства

Безик Д.А., Романеев Н.А. выполнили теоретические исследования, на основании полученных результатов провели обобщение и подготовили рукопись. Безик Д.А., Романеев Н.А. имеют на статью авторские права и несут ответственность за плагиат.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 25.04.2021

Одобрена после рецензирования 16.07.2021

Принята к публикации 16.07.2021

of the innovative development of scientific research in Bryansk State Agricultural Academy]. *Vestnik Bryanskoy gosudarstvennoy sel'skokhozyaystvennoy akademii*, 2010; 2: 4-16. (In Rus.)

2. Kisel' Yu.E., Shishova V.P., Murachyov S.M. et al. Primenenie MKE dlya rascheta uprugikh kharakteristik kompozitsionnykh materialov [Application of FEM for determining the elastic characteristics of composite materials]. *Sbornik materialov Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Problemy energoobespecheniya, avtomatizatsii, informatizatsii i prirodopol'zovaniya v APK"*. Bryansk, Bryanskiy gosudarstvenniy agrarniy universitet (Kokino), 2020: 57-62. (In Rus.)

3. Bezik D.A., Romaneev N.A. Raschety napryazhennogo sostoyaniya elementov gruzopodyemnykh mashin s ispol'zovaniem sovremennogo programmnogo obespecheniya [Analyzing the stress state of lifting machine elements using modern software]. *Podyemno-transportnoe delo*, 2008; 1: 2-5. (In Rus.)

4. Sukhov I.S., Platonov A.C. Problemy primeneniya sharnirnykh soedineniy v stal'nykh konstruksiyakh avtodorozhnykh mostov [Problems of the use of articulated joints in steel structures of road bridges]. *Transportnoe stroitel'stvo*, 2009; 4: 19-20. (In Rus.)

5. Shelofast V.V., Prokopov V.S., Shelofast V.V. et al. Vozmozhnosti otechestvennykh sistem inzhenerного analiza (CAE) [Capacities of domestic systems of engineering analysis (CAE)]. *Sbornik trudov XVI-oy mezhdunarodnoy molodyozhnoy konferentsii 17-19 oktyabrya 2016 goda: "Sistemy proektirovaniya, tekhnologicheskoy podgotovki proizvodstva i upravleniya etapami zhiznennogo tsikla promyshlennogo produkta (SAD/CAM/PDM – 2016)"*. Moscow, Izdatel'stvo ООО "Analitik". 2016: 19-23. (In Rus.)

6. Komogortsev V.F., Popov G.Ya., Radiollo M.V. Kontakt-naya zadacha dlya krugovogo kol'tsa [Contact task for a circular ring]. *Prikladnaya mekhanika*, 1980; 16(1): 81-87. (In Rus.)

Contribution

D.A. Bezik, N.A. Romaneev performed theoretical studies, and based on the results obtained, generalized the results and wrote a manuscript. D.A. Bezik, N.A. Romaneev have equal author's rights and bear equal responsibility for plagiarism.

Conflict of interests

The authors declare no conflict of interests regarding the publication of this paper.

The paper was received 25.04.2021

Approved after reviewing 16.07.2021

Accepted for publication 16.07.2021