

УДК 502/504:631.372

СИРЕКАНЯН САМВЕЛ РАФИКОВИЧ, канд. техн. наук¹

E-mail: samsir1@rambler.ru

ЕВГРАФОВ ВЛАДИМИР АЛЕКСЕЕВИЧ, докт. техн. наук, профессор²

E-mail: ekspl@rgau-msha.ru

¹ Национальный аграрный университет Армении, 0009, Республика Армения, Ереван, ул. Теряна, 74² Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, ул. Большая Академическая, 44, Москва, 127550, Российская Федерация

ЗАКОНОМЕРНОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ В ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ШИРИНЕ ОБОДА ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ КАЧЕНИИ ЖЕСТКОГО КОЛЕСА

С целью выявления возникающих деформаций и закономерности их изменения при криволинейном качении жесткого колеса по деформируемой дороге, для обоснования исходной расчетной схемы исследования явлений, возникающих в контактной поверхности колеса и дороги, рассмотрена задача качения колеса на горизонтальной местности в условиях одновременно действующих нормальной нагрузки, боковой и толкающей сил. Применен закон независимости действия сил: определены возникающие на контактной площадке давления от нормальной нагрузки и боковой силы по отдельности и соответственно сложением полученных результатов выявлен закон распределения линейных давлений в поперечном направлении обода колеса при совместном действии указанных сил. Выведена формула определения деформаций в зависимости от режима нагружения колеса и его геометрических параметров с учетом деформационных свойств дороги. Выведенная формула деформаций содержит многочлен, изменяющийся по закону кубической параболы, наличие которой весьма усложнит ее применение при дальнейших аналитических исследованиях процесса криволинейного качения колеса. С целью упрощения полученной формулы кубический многочлен аппроксимирован функцией, изменяющейся линейным законом. Оценены погрешности, появляющиеся в результате аппроксимации, которые находятся в пределах допустимых приближений.

Ключевые слова: жесткое колесо, опрокидывающий момент, обод колеса, опорная поверхность, деформация.

Введение. Во многих случаях теория качения колеса базируется на основах качения жесткого (металлического) колеса. Поэтому вопрос качения жесткого колеса остается актуальным, особенно при взаимодействии с деформируемыми основаниями. В данной работе рассмотрена задача качения колеса на горизонтальной местности в условиях одновременно действующих нормальной нагрузки, боковой и толкающей сил.

Цель исследований – выявление возникающих деформаций и закономерности их изменения при криволинейном качении жесткого колеса по деформируемой поверхности и обоснование исходной расчетной схемы исследования явлений, возникающих в контактной поверхности колеса и основания.

Результаты исследований. С целью обоснования и с достаточной точностью, исходной расчетной схемы исследования явлений, возникающих в контактной поверхности колеса и дороги, рассмотрим задачу качения жесткого колеса в условиях

одновременно действующих нормальной нагрузки Q , боковой силы T и толкающей (перекатывающей) силы P .

Воспользуемся законом независимости действия сил [1, 2]: определим возникающие на контактной площадке давления от сил Q и T по отдельности и, соответственно сложив результаты, найдем закон распределения линейных давлений от совместного действия сил в поперечном направлении обода колеса.

При определенных параметрах колеса (радиусе r_0 и ширине обода b) и объемной жесткости грунта c под воздействием нормальной силы $Q = const$ в вертикальном направлении произойдет определенная деформация: $h_0 = const$, и в контакте образуется деформированная призма полусегментного сечения. Площади поперечных сечений OAB деформируемой призмы (рис. 1а) по всей ширине обода равны.

На каждое сечение деформируемой призмы приходится линейная сила с интенсивностью Q/b ,

которые уравниваются суммарными реакциями q_Q , возникающими от деформации данного сечения. При этом $q_Q = c \cdot S_{OAB}$, где S_{OAB} – площадь сечения OAB : $S_{OAB} = \frac{2}{3} h_o \cdot r_o \cdot \sin \varphi_o \approx \frac{2}{3} h_o \cdot r_o \cdot \varphi_o$.

Следовательно,

$$\frac{Q}{b} = q_Q = \frac{2}{3} h_o \cdot r_o \cdot \varphi_o \cdot c, \quad (1)$$

или, имея в виду, что

$$h_o = r_o - r_o \cos \varphi_o = r_o (1 - \cos \varphi_o) \approx r_o \left[1 - \left(1 - \frac{\varphi_o^2}{2} \right) \right] = r_o \frac{\varphi_o^2}{2}, \quad (2)$$

получим

$$q_Q = q_o = \frac{1}{3} c \cdot r_o^2 \cdot \varphi_o^3 = \frac{Q}{b}, \quad (3)$$

откуда следует:

$$Q = \frac{1}{3} c \cdot r_o^2 \cdot b \cdot \varphi_o^3, \quad (4)$$

где $V = \frac{1}{3} r_o^2 \cdot b \cdot \varphi_o^3$ – объем деформируемой полусегментной призмы.

Из уравнения (2) видно, что деформация и угол обхвата контактной дуги OA призмы связаны простым геометрическим соотношением:

$$\varphi_o = \sqrt{\frac{2h_o}{r_o}}. \quad (5)$$

Исключив угол φ_o из уравнения (1), получим

$$q_Q = q_o = \frac{Q}{b} = \frac{2}{3} c \cdot r_o \cdot h_o \sqrt{\frac{2h_o}{r_o}} = \frac{2}{3} c \sqrt{2r_o \cdot h_o^3}. \quad (6)$$

Силы линейных реакций q_o применены в центрах тяжести каждого сечения полусегментной призмы, и для сечения OAB (рис. 1а) находятся на $1/3$ отрезка BA от точки B , т.е. $x_e = AB/3$. Силы линейных реакций q_o по ширине b обода будут распределены на линии, соединяющей центры тяжести сечений.

Рассмотрим реакции, возникающие под воздействием $T = const$ боковой силы.

Боковая сила T перпендикулярна плоскости вращения колеса и, действуя по его оси, создает поворачивающий (опрокидывающий) момент $M = T \cdot r = Q \cdot e$, под воздействием которого в контакте обода и дороги центр давления перемещается от центра симметрии колеса на величину

$$e = \frac{T \cdot r}{Q} \quad (7)$$

и происходит перераспределение нормальных давлений. При этом кромка 1-1 обода (рис. 1а), допол-

нительно нагружаясь, еще больше вдавливается в опорную поверхность, а кромка 2-2, частично разгружаясь, стремится оторваться от поверхности. В этом процессе неизменными остаются только давление q_o и деформация h_o , соответствующие центру O обода. В результате сечения деформируемой призмы в контакте обода и опорной поверхности хоть и сохраняют свой полусегментный вид, однако в различных сечениях параметры приобретают переменные значения: h_y , φ_y , q_y , и площади сечений по направлению от частично разгруженной кромки к дополнительно нагруженной кромке возрастают, как показано на схемах 1-4 рисунка 1б.

Возникшие от опрокидывающего момента M линейные давления или их реакции в правой и левой областях от центра O обода распределяются по закону треугольника и во всяком сечении y по положительному направлению оси OY будут:

$$q_{M,y} = \frac{12e}{b^3} Q \cdot y = \frac{Q}{b} \lambda_o \cdot y, \text{ где принято обозначение}$$

$\lambda_o = \frac{12e}{b^2}$. Эти давления распределяются по линии, соединяющей центры тяжести сечений, где одновременно действуют также линейные реакции $q_Q = q_o = \frac{Q}{b} = const$, возникшие от действия толкающей силы Q . Следовательно, в данном сечении y суммарная линейная реакция от силы Q и момента M будет:

$$q_y = q_o - q_{M,y} = \frac{Q}{b} (1 - \lambda_o \cdot y) = q_o (1 - \lambda_o \cdot y).$$

Заметим, что цель данного исследования – выявление возникающих деформаций h_y и закономерности их изменения, и, поскольку возникающая реакция прямо пропорциональна площади сечения ($c = const$), можем написать:

$$\frac{S_y}{S_o} = \frac{q_y}{q_o}, \quad (8)$$

где S_y и S_o – площади указанных (y и o) сечений. С учетом уравнения (6) можем написать: $S_y = \frac{2}{3} \sqrt{2r_o \cdot h_y^3}$ и $S_o = \frac{2}{3} \sqrt{2r_o \cdot h_o^3}$. Подставляя эти значения в соотношение (8), получим $\sqrt{\frac{h_y^3}{h_o^3}} = 1 - \lambda_o \cdot y$, откуда

$$h_y = h_o \sqrt[3]{(1 - \lambda_o \cdot y)^2}. \quad (9)$$

Воспользуемся закономерностью биномиального ряда [3, 4] $(1 - x)^m = 1 - m \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$ и, имея в виду, что при $\lambda_o \cdot y = 1$ этот ряд быстро сходится, и пренебрегая $(\lambda_o \cdot y)^4$ и членами более высоких порядков, для определения деформаций получим

$$h_y = h_o \left(1 - \frac{2}{3} \lambda_o \cdot y - \frac{1}{9} \lambda_o^2 \cdot y^2 - \frac{4}{81} \lambda_o^3 \cdot y^3 \right). \quad (10)$$

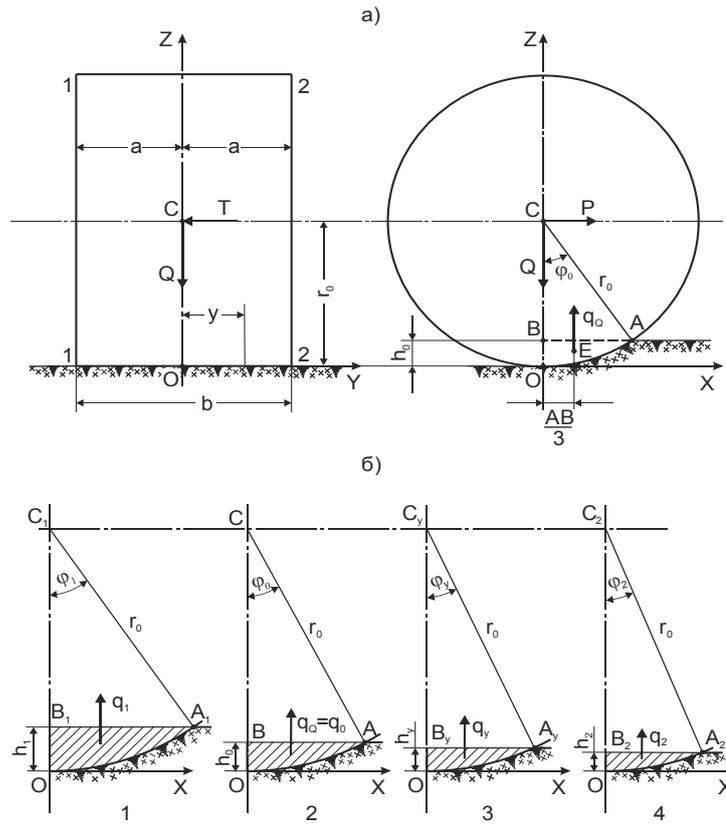


Рис. 1. Реакции, возникающие под воздействием постоянной боковой силы

Как видно из уравнения (10), функция $Y_1 = 1 - \frac{2}{3} \lambda_0 \cdot y - \frac{1}{9} \lambda_0^2 \cdot y^2 - \frac{4}{81} \lambda_0^3 \cdot y^3$ является многочленом третьей степени и представляет из себя кубическую параболу. Для определения графического вида и исследования поведения параболы подставим в уравнение значение $\lambda_0 = 12e / b^2$ и приведем его к каноническому виду

$$Y_1 = 1 - 8 \frac{e}{b^2} y - 16 \frac{e^2}{b^4} y^2 - 85,333 \frac{e^3}{b^6} y^3. \quad (11)$$

Функцию Y_1 будем исследовать в промежутке $-0,5b \leq y \leq 0,5b$, соответствующему ширине b обода колеса. Обозначив $y = b \cdot x$, где $-0,5 \leq x \leq 0,5$, получим $-0,5b \leq y \leq 0,5b$ $Y_1 = 1 - 8 \frac{e}{b} x - 16 \frac{e^2}{b^2} x^2 - 85,333 \frac{e^3}{b^3} x^3$, или

$$Y_1 = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + d_1, \quad (12)$$

где $a_1 = -85,333$; $b_1 = -16 \frac{e^2}{b^2}$; $c_1 = -8 \frac{e}{b}$; $d_1 = 1$.

По уравнению (12) графический вид и поведение функции $Y_1(x)$ зависит от знаков величин a_1 и Δ , где $\Delta = 3a_1 \cdot c_1 - b_1^2 = 1792 \frac{e^4}{b^4} > 0$.

Так как $\Delta > 0$ и $a_1 < 0$, функция $Y_1(x)$ является монотонно убывающей (рис. 2). Координаты точки E перегиба графика кубической параболы, которая является центром симметрии кривой $Y_1(x)$, определяются по формулам $E \left(-\frac{b_1}{3a_1}, \frac{2b_1^3 - 9a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 + d_1}{27a_1^2} \right)$. Определим их значения:

$$x_E = -\frac{b_1}{3a_1} = -\frac{16 \frac{e^2}{b^2}}{3 \cdot 85,333 \frac{e^3}{b^3}} = -0,0625 \frac{e}{b}, \quad (*)$$

$$y_E = \frac{2b_1^3 - 9a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 + d_1}{27a_1^2} = \frac{-2 \cdot 16^3 + 9 \cdot 85,333 \cdot 16 \cdot 8}{27 \cdot 85,333^2} + 1 \approx 0,458 + 1 = 1,458. \quad (**)$$

Значение абсциссы x_E зависит от соотношения b/e , и при данной ширине b обода колеса, в зависимости от значения боковой силы T , величина перемены e центра давления может иметь разные значения в пределах $0 \leq e \leq e_{\max}$. При этом, значение $e = 0$ возможно только в случае $T = 0$, когда колесо совершает прямолинейное качение. Однако в данном случае рассматривается качение колеса по криволинейной траектории, а это означает: что e всегда должна быть больше нуля. С другой сторо-

ны, $e = e_{max}$ означает: боковая сила (T_{max}) такова, что действующая на разгруженную кромку линейная реакция q_2 исчезла, т.е. $q_2 = 0$, и что в данной точке деформации не происходит. Когда боковая сила превысит значение T_{max} , разгруженная кромка колеса оторвется от опорной поверхности и поставленная задача станет некорректной. Для исключения подобного события необходимо и достаточно, чтобы при значении абсциссы $y = b/2$, что соответствует разгруженной кромке обода, имело место условие $Y_1 \geq 0$, т.е. $Y_1 = 1 - 8 \frac{e}{b^2} \cdot \frac{b}{2} - 16 \frac{e^2}{b^4} \cdot \frac{b^2}{4} - 85,333 \frac{e^3}{b^6} \cdot \frac{b^3}{8} = 1 - 4 \frac{e}{b} - 4 \frac{e^2}{b^2} - 10,666 \frac{e^3}{b^3} \geq 0$. Решая последнее методом подстановки, получим

$$e = e_{max} = 0,1933 \cdot b \approx \frac{b}{5,17}. \quad (13)$$

Подставив полученное значение e_{max} в уравнение (*), получим $x_E = -0,0625 \frac{b}{e} = -0,0625 \cdot 5,17 \approx -0,323$. Значит, точка перегиба, или центр симметрии функции $Y_1(x)$, смещена в сторону отрицательной области оси X и при $e = e_{max}$ имеет координаты $E(-0,323; 1,458)$ (рис. 2). Заметим, что при значениях e меньше e_{max} центр симметрии E приблизится к оси Y , стремясь к точке O , однако всегда останется в области отрицательных значений оси OX , так как при значении $e = 0$, как уже отметили выше, колесо покатится прямолинейно и функция $Y_1(x)$ исчезнет.

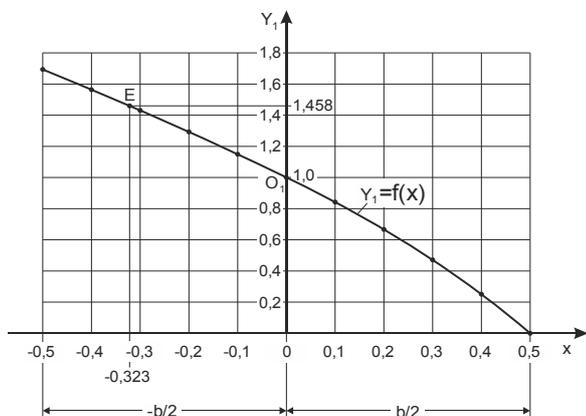


Рис. 2. График функции $Y_1(x)$

Следовательно, при условии контакта колеса и дороги функция $Y_1(x)$ в основном действует на ветви, находящейся правее от точки симметрии E , где кривая имеет направленную вверх выпуклость. Однако заметим, что в интервале ширины b обода колеса, когда аргумент $y = x \cdot b$ меняется в пределах $-0,5b \leq y \leq 0,5b$, кривизна указанной кривой весьма незначительна и приближается к прямой линии. В этом убеждаемся, построив графики функции $Y_1 = f(e, y)$ для различных значений смещения центра давления e ($e = b/6, b/9, b/12, b/15$) (рис. 3).

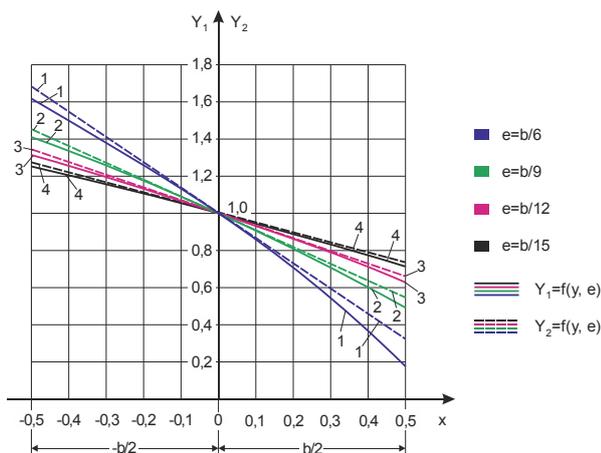


Рис. 3. Кривые параболической функции $Y_1(e, y)$

Это означает, что изменяющуюся по закону кубической параболы функцию Y_1 с высокой точностью можно аппроксимировать функцией Y_2 , изменяющейся линейным законом.

Очевидно, что линейная функция Y_2 должна быть такой, чтобы при практических расчетах, для всего поля переменных y, e и семейства кривых, с приемлемой точностью воспроизвести значения нелинейной функции Y_1 , т.е. должно иметь место приближенное тождество:

$$Y_2(y, e) \cong Y_1(y, e). \quad (14)$$

Ясно, что линейная функция Y_2 должна иметь вид $Y_2 = 1 - k \cdot \lambda_0 \cdot y$, где коэффициент k – пока неизвестная усредненная величина, при наличии которой осуществится условие (14). Следовательно, необходимо и достаточно, чтобы имело место уравнение $1 - k \cdot \lambda_0 \cdot y = Y_1(y, e)$, откуда определим усредненный коэффициент k :

$$k = \frac{1 - Y_1(y, e)}{\lambda_0 \cdot y}, \quad (15)$$

или

$$k = \frac{1 - 1 + \frac{2}{3} \lambda_0 \cdot y + \frac{1}{9} \lambda_0^2 \cdot y^2 + \frac{4}{81} \lambda_0^3 \cdot y^2}{\lambda_0 \cdot y} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \lambda_0 \cdot y + \frac{4}{81} \lambda_0^2 \cdot y^2. \quad (16)$$

Выполнив необходимые расчеты, определили значение усредненного коэффициента $k: k = 0,6751$ – и для линейной функции Y_2 получили следующее уравнение:

$$Y_2 = 1 - 0,6751 \cdot \lambda_0 \cdot y = 1 - 8,1 \frac{e}{b^2} y = 1 - \lambda \cdot y, \quad (17)$$

где

$$\lambda = 0,675 \cdot \lambda_0 = 8,1 \frac{e}{b^2}. \quad (18)$$

Для того же интервала y ($-0,5b \leq y \leq 0,5b$) и различных значений e ($e = b/6, b/9, b/12, b/15$) рассчитали значения линейной функции Y_2 и на графике, отображающем кривые параболической функции $Y_1(e, y)$ (рис. 3), построили прямые линейной функции Y_2 , которые выполнены пунктирными линиями.

Анализ полученных графиков показал, что для всего множества рассчитанных точек, принадлежащих исследуемым кривым, в зависимости от возможных значений переменных y, e отклонения и ошибки в основном находятся в пределах допустимых приближений, кроме значений четырех-пяти точек, соответствующих значениям $e = b/6$ промежутка $0,3b \leq y \leq 0,5b$ и значениям $e = b/9$ промежутка $0,4b \leq y \leq 0,5b$. Для этих точек ошибки находятся в недопустимо больших пределах $\delta = 5,7 \dots 88\%$.

Последнее можно объяснить тем, что в указанных пределах изменения y при данных значениях e разгруженная кромка обода колеса на контактной поверхности, с точки зрения силового воздействия, весьма приближается к тому граничному состоянию, когда из-за чрезмерного разгрузки кромка колеса стремится оторваться от опорной поверхности. Это явление при наименьших значениях e ($e = b/12, b/15$) и указанных пределах изменения y не наблюдается: ошибки находятся в пределах $\delta = 2,1 \dots 4,7\%$. Следовательно, большие ошибки появляются из-за больших значений e , граничное значение которой, как определили выше, $e_{\max} = 0,1933 \cdot b \approx \frac{b}{5,17}$, а значение $e = b/6$ близко к максимально допустимому значению.

Кроме того, надо иметь в виду, что в данном случае исследуется отдельно взятое свободное колесо, которое практического применения не имеет. В действительности колесо работает в ходовой системе машины, где влияние смещения центра давления e значительно меньше, так как здесь учитывается как ширина b обода колеса, так и величина B колеи ко-

лесной пары или моста. В результате значительно уменьшаются возникающие ошибки не только в указанных точках, а также, и без того малые ошибки, всех точек, находящихся в поле переменных y, e .

Учитывая вышесказанное, приходим к выводу, что при качении колеса по криволинейной траектории возникающие деформации, определяющиеся нелинейной, изменяющейся по закону кубической параболы функцией Y_1 , можно заменить линейной функцией Y_2 . При этом деформации, возникающие в контакте по ширине обода колеса, определяются по линейному закону

$$h_y = h_o (1 - \lambda \cdot y). \quad (19)$$

Выводы

Выявлена закономерность распределения линейных давлений в поперечном направлении обода колеса при совместном действии указанных сил. На основании этой закономерности выведена формула определения деформаций в зависимости от режима нагружения колеса и его геометрических параметров с учетом деформационных свойств дороги.

Библиографический список

1. Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.Н., Трещев Д.В. Теоретическая механика: Учебник. М.: Академия, 2010. 432 с.
2. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 3-е изд. М.: Физматлит, 2008. 720 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 2012. 640 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

Статья поступила 01.09.2017

PATTERNS OF CHANGING DEFORMATIONS IN TIRE WIDTH SUPPORT SURFACE IN CURVE ROLLING OF HARD WHEELS

SAMVEL R. SIREKANIAN, PhD (Eng)¹

E-mail: samsir1@rambler.ru

VLADIMIR A. YEVGRAFOV, DSc (Eng), Professor²

E-mail: ekspl@rgau-msha.ru

¹ National Agrarian University of Armenia, 0009, Republic of Armenia, Yerevan, Teryan Str., 74

² Russian State Agrarian University – Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazev; Bolshaya Akademicheskaya Str., 44, Moscow, 127550, Russian Federation

In order to identify the emerging deformations and the regularities of their changes in the curvilinear rolling of a rigid wheel along a deformed road, as well as to justify the initial design scheme for investigating phenomena occurring in the contact surface of a wheel and a road, the authors have studied a problem

of rolling a wheel on a horizontal terrain under conditions of a simultaneously acting normal load, lateral and pushing forces. The law of the independence of the action of forces has been applied: the pressures arising from the normal load and the lateral forces arising on the contact pad are determined separately, and the law of the distribution of linear pressures in a transverse direction of the wheel rim has been determined basing on the combined action of these forces. The formula for determining deformations has been derived depending on the wheel load mode and its geometric parameters, taking into account the deformation properties of the road. The derived strain formula contains a polynomial that varies according to the law of a cubic parabola, the presence of which will complicate its application in further analytical studies of the process of curvilinear rolling of a wheel. To simplify the formula, the cubic polynomial is approximated by a function that varies linearly. The authors have also estimated errors resulting from the approximation and occurring within acceptable approximations.

Key words: rigid wheel, overturning torque, wheel rim, bearing surface, deformation.

References

1. Bolotin S.V., Karapetyan A.V., Kugushev Ye.N., Treshchev D.V. *Teoreticheskaya mekhanika: Uchebnik* [Theoretical Mechanics: Textbook]. Moscow, Akademiya, 2010. 432 p. (in Rus.)
2. Zhuravlev V.F. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki: Uchebnik* [Fundamentals of theoretical mechanics: Textbook]. 3rd ed. Moscow, Fizmatlit, 2008. 720 p. (in Rus.)
3. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka, 2012. 640 p.
4. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniye matematicheskoy fiziki* [Equation of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1966. 724 p.

The paper was accepted on September 1, 2017