

DOI: <https://doi.org/10.26897/2618-8732-2020-20-71-76>

УДК 631.

ПОДОБИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В СРЕДЕ, СОПРОТИВЛЕНИЕ КОТОРОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО КВАДРАТУ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ**Черноволов В. А., Кравченко Л.В., Шерстов С.А.**

На частицу, брошенную под углом к горизонту с начальной скоростью, действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха. В расчете ветрозащитных и распределительных устройств возникает необходимость уменьшения различий траекторий при смене вида удобрений. Имеется две возможности простых регулировок. Во-первых, можно попытаться увеличить скорость метания удобрений с большим коэффициентом парусности. Во-вторых, можно регулировать начальный угол метания. Однако, регулированием угла метания добиться совмещения траекторий не удастся. Наименьшее различие траекторий получено путем совмещения одновременного изменения начального угла и скорости метания. Одновременным регулированием начального угла и начальной скорости метания можно почти совместить траектории частиц с различным коэффициентом парусности, что полезно при работе с распределительным устройством

Ключевые слова: Коэффициент парусности; дальность метания частиц; метод подобия; угол метания; дифференциальные уравнения; распределительное устройство; метод Рунге-Кутта

LIKE TRAJECTORIES OF THE BODY MOTION IN THE MEDIUM, THE RESISTANCE OF WHICH IS PROPORTIONAL TO THE SQUARE OF RELATIVE VELOCITY**Chernovolov V.A, Kravchenko L.V., Sherstov S.A.**

The force of gravity and the force of air resistance affect a particle thrown at an angle to the horizon with an initial velocity. In the calculation of wind protection and distribution devices, it becomes necessary to reduce the differences in trajectories when changing the type of fertilizer. There are two possibilities for simple adjustments. First, you can try to increase the throwing speed of fertilizers with a high windage factor. Secondly, the initial throwing angle can be adjusted. However, it is not possible to achieve alignment of the trajectories by adjusting the throwing angle. The smallest difference in trajectories was obtained by combining the simultaneous change in the initial angle and throwing speed. By simultaneously adjusting the initial angle and initial throwing speed, it is possible to almost match the trajectories of particles with different wind ratios, which is useful when working with a distributor

Key words: Windage coefficient; particle throwing range; similarity method; throwing angle; differential equations; Switchgear; Runge-Kutta method

Разбросной посев семян и удобрений в прошлом широко применялся в сельскохозяйственном производстве. В настоящее время такой способ посева эффективен для луговых трав, сидератов. Ограниченность применения таких аппаратов связана с недостаточной теоретической и экспериментальной разработкой моделей их функционирования [1].

Применение теории подобия при экспериментальных и вычислительных экспериментах позволяет уменьшить число вариантов опытов, так как вместо единичных явлений рассматриваются их группы с одинаковыми критериями подобия [2].

На частицу, брошенную под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0 , действуют сила тяжести mg и сила сопротивления воздуха R . Дифференциальные уравнения движения частицы в проекциях на неподвижные оси координат XOY имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} mX'' &= -R \cos \alpha \\ mY'' &= -mg - R \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Установлено, что при работе аппаратов для внесения минеральных удобрений разбросным способом сопротивление среды пропорционально второй степени относительной скорости, т.е.

$$R = m k_p V^2,$$

где k_p – коэффициент парусности частицы, определяется на парусном классификаторе [4].

Учитывая, что $V \cos \alpha = X'$, $V \sin \alpha = Y'$ и $V = \sqrt{X'^2 + Y'^2}$, получим

$$\begin{aligned} X'' &= -k_n X' \sqrt{X'^2 + Y'^2} \\ Y'' &= -g - k_n Y' \sqrt{X'^2 + Y'^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения (2) решаются на ЭВМ.

Для этого запишем систему (2) в форме Коши. Введем вектор $D(t, y_0)$. Элементами его будут правые части системы дифференциальных уравнений (2) в форме Коши. Применим следующие обозначения: $X' = y_{01}$, $Y' = y_{03}$.

Тогда получим систему уравнений в форме Коши

$$\left. \begin{aligned} X' &= y_{01} \\ X'' &= y_{01}' = -k_n (v(y_{01}, y_{03}) \cdot y_{01}) \\ Y' &= y_{03} \\ Y'' &= y_{03}' = -g - k_n (v(y_{01}, y_{03}) \cdot y_{03}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В системе Mathcad имена переменных набирают в одну строку. Индексы обозначают элементы векторов. Начинаются номера с нуля по умолчанию

Решение дифференциальных уравнений (3) выполним с помощью стандартной программы в системе Mathcad. Программа Rkadapt (y_0 , T1, T2, N, D) решает уравнения численным методом Рунге-Кутты. Аргументами функции являются вектор начальных условий y_0 , границы интервала времени T1, T2, число шагов N, вектор правых частей дифференциальных уравнений в форме Коши. Пример решения показан на рисунке 1. В матрице вывода результатов счета: нулевой столбец – интервалы времени; первый – координата X; второй – скорость Vx; третий – координата Y; в четвертом – скорость Vy.

```
Mtr(kp, Vo, alpha) :=
  Vox ← Vo·cos(alpha)
  Voy ← Vo·sin(alpha)
  v(vx, vy) ← √(vx² + vy²)
  xo ← 0
  Ho ← 0.8
  g ← 9.81
  yo ← ( xo
        Vox
        Ho
        Voy )
  D(t, yo) ← ( yo1
              -kp·v(yo1, yo3)·yo1
              yo3
              -g - kp·v(yo1, yo3)·yo3 )
  To ← 0
  Tk ← 2
  L ← Rkadapt(yo, To, Tk, 3, D)
  Mtr ← L
  Mtr
```

$$\text{Mtr}(0.1, 20, 0.2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 19.601 & 0.8 & 3.973 \\ 0.667 & 8.333 & 8.434 & 0.8 & -2.958 \\ 1.333 & 12.637 & 4.848 & -2.54 & -6.736 \\ 2 & 15.1 & 2.712 & -7.775 & -8.705 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1 – Программа и результат счета траектории твердого тела, имеющего коэффициент парусности kp , брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0

Для построения траекторий по программе Mtr увеличивают число точек решения, например, до 100, используют первый и третий столбцы матрицы.

Пересечение траекторий с нулевой горизонталью позволяет определить дальность метания частиц на горизонтальном поле.

Аналогично можно построить графики при изменении начальной скорости и угла метания.

Уменьшение числа вариантов вычислений достигается применением методов подобия.

Подобие траекторий полета частиц рассмотрим при допущении о векторных координатах траектории. Запишем в таблицу 1 наименования, обозначения, единицы измерения и размерности физических величин, характерных для процесса.

$$\begin{aligned} Y1 &:= \text{Mtr}(0.1, 30, 0.2)^{(3)} & Y2 &:= \text{Mtr}(0.2, 30, 0.2)^{(3)} & Y3 &:= \text{Mtr}(0.4, 30, 0.2)^{(3)} \\ X1 &:= \text{Mtr}(0.1, 30, 0.2)^{(1)} & X2 &:= \text{Mtr}(0.2, 30, 0.2)^{(1)} & X3 &:= \text{Mtr}(0.4, 30, 0.2)^{(1)} \end{aligned}$$

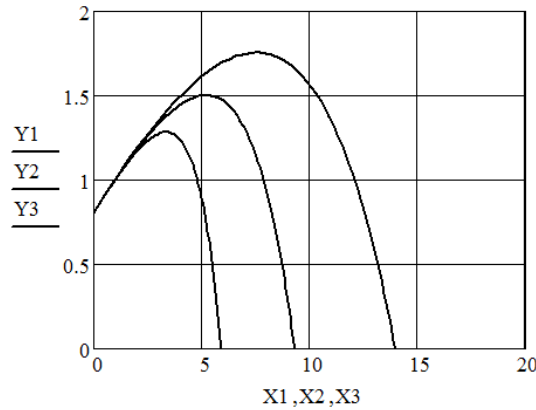


Рисунок 2 – Траектории движения тела с коэффициентами парусности: 0,1; 0,2 и 0,4 1/м при начальной скорости метания 30 м/с и начальном угле 0,2 рад.

Из шести физических величин, влияющих на процесс, одна имеет нулевую размерность, то есть он является одним из критериев подобия.

В размерностях пяти остальных величин (таблица 1) две независимые единицы измерения. По теореме подобия определяется тремя критериями. Первый из них назовем относительной дальностью $X_{om} = X \cdot k$; второй – относительной высотой $Y_{om} = Y \cdot k$. Третий критерий получим методом анализа размерностей.

Таблица 1

Обозначения и размерности величин

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Размерность в системе MLT
Начальный угол	α	рад.	0
Координата 1	X	м	L
Координата 2	Y	м	L
Коэффициент парусности	k	1/м	L^{-1}
Ускорение	g	м/с ²	$L \cdot T^{-2}$
Начальная скорость	V_0	м/с	$L \cdot T^{-1}$

Запишем критерий в виде произведения

$$\Pi_3 = V_0^\beta \cdot k^\beta \cdot g^\gamma = L^0 \cdot T^0 \quad (4)$$

По условию равенства показателей степеней в левой и в правой частях уравнения (4) получим при $\alpha = 1$

$$\Pi_3 = V_0 \sqrt{\frac{k}{g}}$$

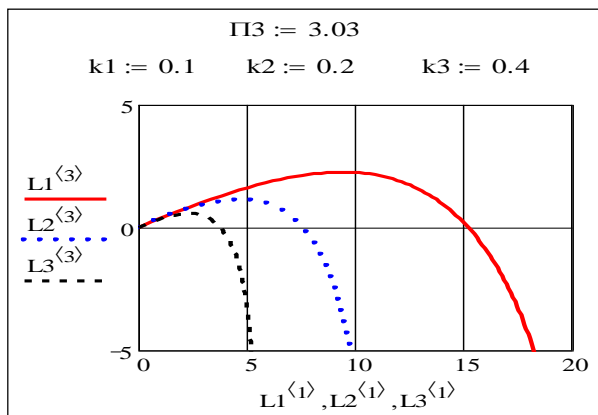
Так как скорость витания U_s определяется по формуле

$$U_s = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad (5)$$

то

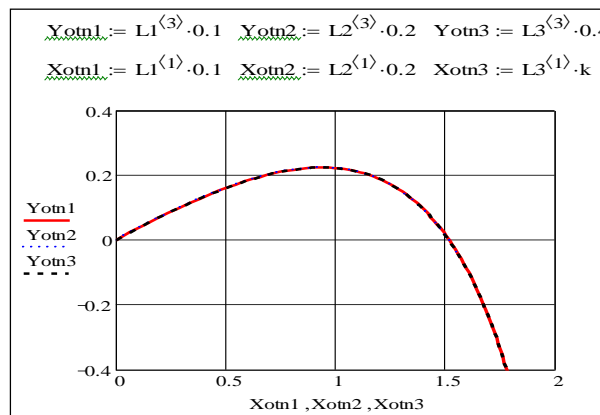
$$\Pi_3 = \frac{V_0}{U_s}. \quad (6)$$

Размерные траектории полета частиц удобрений при различных коэффициентах парусности и постоянном критерии Π_3 (рисунок 3,а) получены решением дифференциальных уравнений по программе Mtr. В соответствии с зависимостью (6) получены начальные скорости 30; 21,2 и 15 м/с. Начальная координата Y принята равной нулю, начальный угол – 20°.



а)

Рисунок 3,а – Траектории полета частиц удобрений при $k = 0,1; 0,2$ и $0,4$ 1/м



б)

Рисунок 3,б.– Относительные траектории полета частиц

Как и следовало ожидать, по условиям равенства критериев подобия все три кривых совместились в одну. Траектории, изображенные на рисунке 3,а подобны. Коэффициенты подобия определяются по коэффициентам парусности, если критерии Π_3 равны.

Изменение критерия Π_3 от трех до пяти (рисунок 4,а) приводит к увеличению относительной дальности полета на горизонтальном поле от 1,5 до 2,1. Заметен рост максимальной высоты траектории.

Обратный пересчет относительных координат в размерные выполняется делением каждого элемента массива на коэффициент парусности (рисунок 5,б).

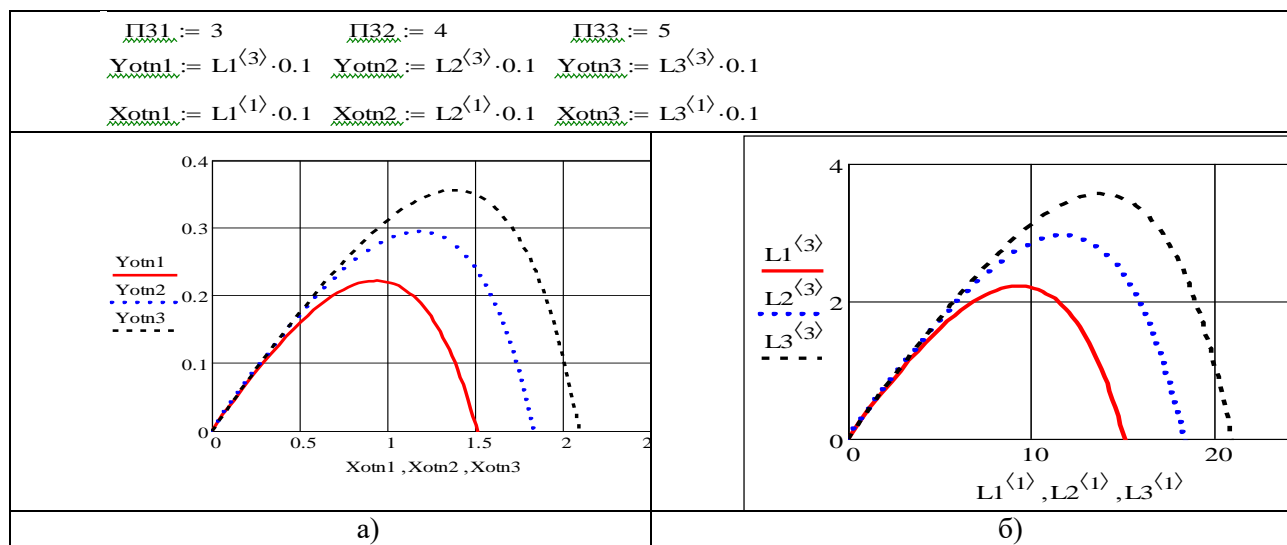


Рисунок 4,а – Относительные траектории при критериях Π_3 равных 3; 4; 5

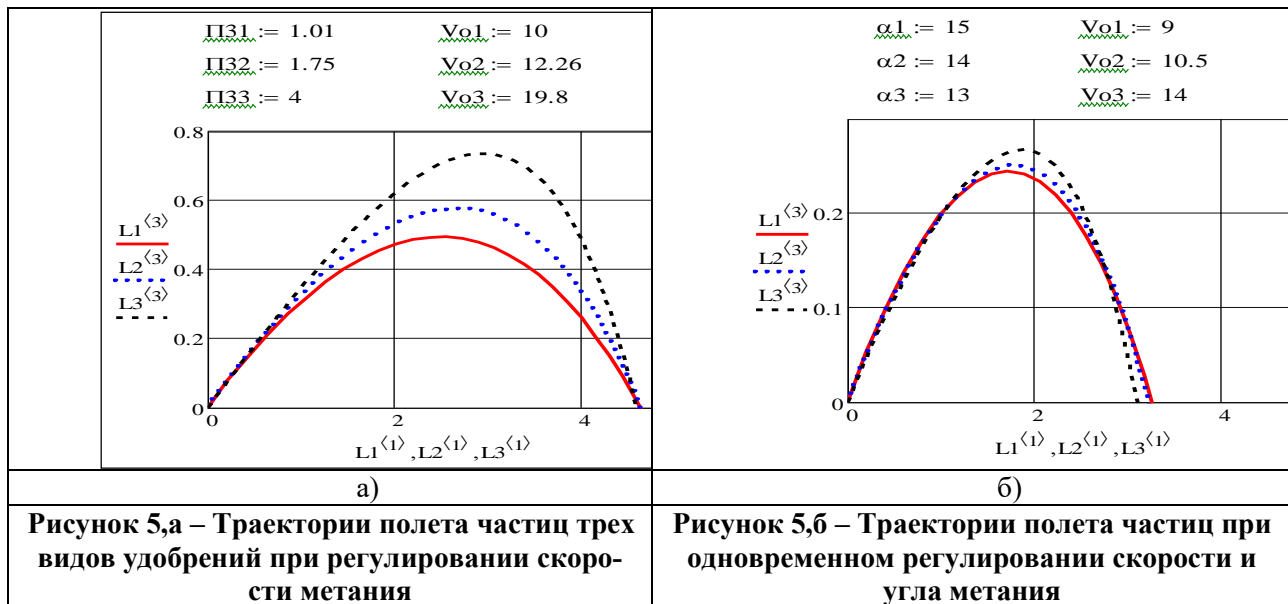
Рисунок 4,б – Размерные траектории полета частиц при Π_3 равных 3; 4; 5

В расчете ветрозащитных и распределительных устройств [4,5,6] возникает необходимость уменьшения различий траекторий при смене вида удобрений. Имеется две возможности простых регулировок.

Во-первых, можно попытаться увеличить скорость метания удобрений с большим коэффициентом парусности. На рисунке 5,а изображены траектории полета частиц с коэффициентами парусности 0,1; 0,2; 0,4 1/м. Скорости метания подобраны так, чтобы получить одинаковую дальность метания на горизонтальном поле. Различие траекторий менее существенно по сравнению с рисунком 4,б, но различие высоты траекторий значительно.

Во-вторых, можно регулировать начальный угол метания. Однако, регулированием угла метания добиться совмещения траекторий не удалось.

Более приемлемый результат получен при одновременном изменении начального угла и скорости метания (рисунок 5,б). Максимальная высота траекторий различается всего на 0,03 м.



Выводы

1. Подобие траекторий движения тела в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату относительной скорости, определяется четырьмя критериями подобия: начальным углом метания, относительной дальностью, относительной высотой траектории и критерием $\Pi_3 = \frac{V_0}{U_s}$, равным отношению начальной скорости к скорости витания.

2. Траектория в относительных координатах характеризует семейство подобных траекторий. Пакет относительных траекторий с разными значениями начального угла метания и критерия Π_3 заменяет множество размерных траекторий. Его можно использовать для расчета размерных траекторий при любых начальных условиях без применения специальных программ.

3. Одновременным регулированием начального угла и начальной скорости метания можно почти совместить траектории частиц с различным коэффициентом парусности, что полезно при работе с распределительным устройством.

4. Применение метода подобия в математическом моделировании и в экспериментальном исследовании позволяет уменьшить число вариантов моделирования и число опытов, перейти от анализа единичных случаев к исследованию группы подобных явлений.

Литература

- Черновол В.А., Шерстов С.А. Экспериментальное исследование вертикальных роторных аппаратов для посева минеральных удобрений // Мичуринский агрономический вестник. 2017. № 2. С. 103-110.
- Черновол В.А., Ужахов Т.М. Моделирование процессов распределения минеральных удобрений центробежными аппаратами: Монография. - зерноград: АЧГАА, 2010. - 269 с.
- Черновол В.А. Сельскохозяйственные машины: Практикум. - зерноград: АЧГАА, 2008. - 188 с.
- СССР 475129 А 01 С 17/00. Ветрозащитное устройство к разбрасывателю минеральных удобрений./ В.А.Черновол; В.И.Полевик; Т.М.Ляшенко; А.П.Курилов; Э.А.Плотников; В.А.Лурье; А.А.Докучаев; А.С.Винник / №19533998/30-15 Заявл. 24.07.73. Оpubл. "Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки". 1975. № 24.
- СССР 971143 А 01 С 17/00. Ветрозащитное устройство разбрасывателя удобрений. / Г.Н.Григорчук; В.И.Полевик; А.И.Довгань; В.А.Черновол; Б.Н.Мельников; Т.М.Ляшенко/ №3328236/30-15 Заявл. 28.07.91. Оpubл. "Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки". 1982. № 41.
- СССР 460028 А 01 с 17/00. Разбрасыватель минеральных удобрений бункерного типа. /В.А.Скользаев; Н.М.Федотов; В.А.Черновол; А.П.Жилин; А.П.Курилов; В.А.Лурье; В.И.Полевик; Н.Д.Грибняк; Э.А.Плотников; А.А.Докучаев; В.А.Ткаченко; Е.А.Готлеб / №1657861/30-15 Заявл. 25.05.71. Оpubл. "Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки". 1975. № 6.

7. Гухман, А.А. Введение в теорию подобия / А.А. Гухман. – М.: Машиностроение, 1973. – 296 с.
 8. Основы теории подобия: конспект лекций / Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2011.

References

1. Chernovolov V.A., Sherstov S.A. Eksperimentalnoe issledovanie vertikalnykh rotornykh apparatov dlia rasseva mineralnykh udobrenii // Michurinskii agronomicheskii vestnik. 2017. № 2. S. 103-110
2. Chernovolov V.A., Uzhakhov T.M. Modelirovanie protsessov raspredeleniia mineralnykh udobrenii tsentrobezhnyimi apparatami: Monografiia. – Zernograd: AChGAA, 2010. – 269 s.
3. Chernovolov V.A. Selskokhoziaistvennye mashiny: Praktikum. – Zernograd: AChGAA, 2008. – 188 s.
4. SSSR 475129 A 01 S 17/00. Vetrozashchitnoe ustroistvo k razbrasyvateliu mineralnykh udobrenii./ V.A.Chernovolov; V.I.Polevik; T.M.Liashenko; A.P.Kurilov; E.A.Plotnikov; V.A.Lure; A.A.Dokuchaev; A.S.Vinnik / №19533998/30-15 Zaiavl. 24.07.73. Opubl. "Otkrytiia, izobreteniia, promyshlennye obraztsy, tovarnye znaki". 1975. № 24.
5. SSSR 971143 A 01 S 17/00. Vetrozashchitnoe ustroistvo razbrasyvatelia udobrenii. / G.N.Grigorchuk; V.I.Polevik; A.I.Dovgan; V.A.Chernovolov; B.N.Melnikov; T.M.Liashenko / №3328236/30-15 Zaiavl. 28.07.91. Opubl."Otkrytiia, izobreteniia, promyshlennye obraztsy, tovarnye znaki". 1982. № 41.
6. SSSR 460028 A 01 s 17/00. Razbrasyvatel mineralnykh udobrenii bunkernogo tipa. /V.A.Skolzaev; N.M.Fedotov; V.A.Chernovolov; A.P.Zhilin; A.P.Kurilov; V.A.Lure; V.I.Polevik; N.D.Gribniak; E.A.Plotnikov; A.A.Dokuchaev; V.A.Tkachenko; E.A.Gotleb/ №1657861/30-15 Zaiavliu 25.05.71. Opubl. "Otkrytiia, izobreteniia, promyshlennye obraztsy, tovarnye znaki". 1975. № 6.
7. Gukhman, A.A. Vvedenie v teoriiu podobiiia / A.A. Gukhman. – М.: Mashinostroenie, 1973. – 296 с.
8. Osnovy teorii podobiiia: konspekt lektsii / Vladim. gos. un-t. – Vladimir: Izd-vo Vladim. gos. un-ta, 2011.

Данные об авторах:

Черноволов Василий Александрович, профессор кафедры «механизация растениеводства»

SPIN-код: 5006-2280, AuthorID: 472893

e-mail: chernovolov.v@mail.ru

Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ

ул. Ленина, 21, 347740, Зерноград, Россия

Кравченко Людмила Владимировна, заведующий кафедрой «проектирование и технический сервис транспортно-технологических систем»

SPIN-код: 9684-8955, AuthorID: 355288

e-mail: Lusya306@yandex.ru

Донской государственный технический университет

Площадь Гагарина 1, 344000, Ростов-на-Дону, Россия

Шерстов Сергей Анатольевич, преподаватель

SPIN-код: 4556-4812, AuthorID: 1091984

e-mail: sherstov_83@mail.ru

ГАПОУ ПК № 8 им. И.Ф. Павлова

1-й Боткинский проезд, дом 7А, 125284, Москва, Россия

Data about the authors:

Chernovolov Vasily Alexandrovich, Professor of the Department, Department of Crop Mechanization

Azov-Black Sea Engineering Institute FGBOU VO Don GAU

st. Lenina, 21, 347740, Zernograd, Russia

Kravchenko Lyudmila Vladimirovna, Head of the Department, Department of Design and Technical Service of Transport and Technological Systems

Don State Technical University

Gagarin Square 1, 344000, Rostov-on-Don, Russia

Sherstov Sergey Anatolievich, Teacher

GAPOU PK No. 8 named after I.F. Pavlov

1st Botkinsky proezd, 7A, 125284, Moscow, Russia

Рецензент: Балабанов В.И., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой мелиоративных и строительных машин РГАУ-МСХА.