

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ –
МСХА имени К.А. ТИМИРЯЗЕВА

В.К. Хлюстов, Г.Н. Светлова

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМ**

Учебное пособие

Москва
РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева
2018

УДК (630*5+630*24):004.9:519.87:519.2(470+571)(075.8)
ББК 43.425:43.6:43.9:43.4(2Рос)я73
Х 625

*Рецензенты: д.б.н., профессор И.И. Васенёв,
д.с.-х.н., профессор В.Л. Черных*

Х 625 **Хлюстов, В. К.** Математическое моделирование лесных экосистем : учебное пособие / В. К. Хлюстов, Г. Н. Светлова ; Российский государственный аграрный университет - МСХА имени К. А. Тимирязева. – Москва : РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева, 2018. – 191 с. – Текст : электронный.

DOI: 10.34677/2018.097

Учебное пособие посвящено решению многомерных задач классификации лесных объектов для комплексного ресурсно-экологического районирования лесов субъектов Российской Федерации. Рассмотрены методы статистического моделирования многомерных закономерностей роста, строения и продуктивности насаждений разной породной, возрастной и пространственной структуры по типам леса и типам лесорастительных условий, моделирования оптимальных управленческих решений для выращивания максимально продуктивных и экологически устойчивых насаждений, решения производственных задач экономико-математическими методами линейного программирования.

Предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению «Лесное дело», может быть использовано специалистами, интересующимися методами управления лесными ресурсами.

Рекомендовано к изданию методической комиссией факультета почвоведения, агрохимии и экологии РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, протокол № 10 от 09 октября 2017 г.

© Хлюстов В.К., Светлова Г.Н., 2018

© ФГБОУ ВО РГАУ-МСХА

имени К.А. Тимирязева, 2018

ПРЕДИСЛОВИЕ

С позиций современного естествознания следует критически оценить отсутствие методов математического моделирования динамики компонентов лесных экосистем на основе региональных лесотипологических схем и классификаций. При этом следует обязательно учитывать логическое единство типов лесорастительных условий, типов леса и уровней продуктивности древостоев.

Повсеместно используемый в лесном хозяйстве методический подход описания процессов роста основан на уровнях продуктивности (бонитетах) древостоев по своей сути условно-схематичный и не совсем удачный, в силу того, что только качество лесорастительных условий определяют возрастную динамику всего перечня таксационных показателей конкретного насаждения. Общеизвестно, что в конкретном древостое с возрастом сумма площадей сечений зачастую имеет кульминирующую кривую хода роста. Этот факт подтвержден периодическими (через 5-10 лет) долгосрочными наблюдениями за постоянными пробными площадями на Лесной опытной даче РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, научных объектах Германии и других стран.

Как правило, максимальная сумма площадей сечений древостоя достигается с возрастом лишь один раз. Именно она соответствует полноте древостоя, принимаемой за единицу в таблицах хода роста и стандартных таблицах.

При этом оставался открытым вопрос о том, в каком соотношении находятся средний диаметр древостоя (D , см) и число деревьев (N , шт./га), так как одно и то же значение суммы площадей сечения (G , кв. м/га) может наблюдаться при значительных расхождениях этих показателей. Функциональная модель (закон) суммы площадей сечений имеет вид:

$$G = \exp(\ln(0,0001 * \pi/4) + 2,0 \ln D + 1,0 \ln N), \quad R^2 = 1,0$$

Любая комбинация аргументов в уравнении регрессии в начальном возрасте (A_n , лет) конкретного древостоя с возрастом через заданное число лет (n) в возрасте (A_{n+n}) показывает присущее лишь этому древостою изменение как среднего диаметра, так и числа деревьев.

Так как существующая теория хода роста применима к древостоям с условной полнотой, принятой за 1,0, то она не в состоянии описать возможного многообразия комбинаций таксационных показателей D и N .

Именно эти показатели определяют, как текущее состояние любого чистого по составу древостоя, так и прогностические изменения таксационных показателей от начального возраста на заданный период упреждения (n , лет) (прогноза).

Критика сортиментных таблиц заключается в том, что они построены по разрядам высот и относятся к приспевающим, спелым и перестойным древостоям. При построении графиков высот не учитывается ступенчатое изменение с возрастом линий регрессий высоты от толщины деревьев.

Критика таблиц распределения числа деревьев по ступеням толщины в зависимости от среднего диаметра древостоев заключается в том, что они действуют в основном для сформировавшихся и находящихся в стадии приспевающих, спелых и перестойных древостоев. Сочетание рядов распределения числа деревьев по ступеням толщины с сортиментными таблицами используется для построения товарных таблиц. Таким образом, лесоводы не располагают нормативами распределения деревьев по толщине и товарной структуре в молодняках и средневозрастных древостоях.

И самый главный недостаток изложенных нормативов заключается в том, что они не взаимосвязаны между собой в единый системный комплекс лесотаксационных нормативов.

С появлением новых информационных технологий, методов программирования вызывает не только критическую оценку, но и эвристическое понимание экологической полифакториальности как

естественного процесса роста и развития насаждений, так и оптимизации лесовосстановления и лесопользования на уровне конкретного лесотаксационного выдела.

Многовариантные комбинации сочетания элементов леса в древостоях разной породной, возрастной и пространственной структуры требуют разработки многомерных экологических нормативов для таксации лесов в системе комплексного ресурсно-экологического районирования лесного фонда субъектов Российской Федерации.

Решение поставленных задач следует выстроить в следующем логическом порядке:

1. Согласовать региональном уровне и утвердить многомерные схемы комплексного ресурсно-экологического районирования лесного фонда по субъектам Российской Федерации и Федеральным округам.

2. Разработать многомерные статистические модели роста, строения, общей, товарной, биологической продуктивности древостоев разной породной, возрастной и пространственной структуры по типам леса и типам лесорастительных условий.

3. Разработать статистические модели экобиоэнергетического потенциала фракций фитомассы древостоев разной породной, возрастной и пространственной структуры по типам леса и типам лесорастительных условий.

4. Внедрить региональные информационно-справочные системы нормативов возрастной динамики роста, строения, товарной и биологической продуктивности элементов леса древостоев разного породного, состава, полноты и густоты по типам леса и типам лесорастительных условий.

5. Внедрить информационно-справочные системы региональных нормативов текущей и прогностической актуализации таксационных показателей роста, строения, товарной, биологической продуктивности древостоев разного породного состава, возраста, полноты по типам леса и типам лесорастительных условий.

6. Внедрить информационно-справочные системы региональных нормативов прогностической актуализации таксационных показателей роста, строения, товарной и биологической продуктивности древостоев по элементам леса от начального возраста на заданный период упреждения (прогноза, лет).

7. Внедрить информационно-справочные системы региональных нормативов для автоматизированной инвентаризации насаждений методами дистанционного зондирования и геопозиционирования.

Широкомасштабное внедрение перечисленных информационно-справочных систем позволяет на несколько порядков увеличить информационные возможности новых лесотаксационных нормативов, полностью исключить камеральную обработку данных полевой таксации, перевести наземную таксацию древостоев на согласительный уровень и обеспечить детальную визуализацию закономерностей роста, строения и продуктивности древостоев на уровне лесотаксационного выдела.

В соответствии с поставленными задачами в учебном пособии рассмотрены методические вопросы моделирования роста, строения и продуктивности лесных дендроценозов, оптимального управления ими на период оборот рубки, разработки и практического применения информационно-справочных систем нормативов комплексной оценки лесных ресурсов при сплошной и выборочной инвентаризации лесов.

Разделы 1, 2, 3, 4 написаны В.К Хлюстовым, раздел 5 - Г.Н. Светловой

1. РЕСУРСНО-ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЛЕСОВ РОССИИ

1.1. Комплексное лесное районирование субъектов РФ

Отсутствие утвержденных Рослесхозом научно обоснованных методических рекомендаций, а также согласованных на уровне субъектов Российской Федерации схем комплексного ресурсно-экологического лесного районирования наносит колоссальный экологический, лесоводственный и экономический ущерб. Раздел учебного пособия является составной частью монографии В.К. Хлюстова, М.В. Устинова (2014) «Ресурсно-экологическое районирование лесов Брянской области».

Так, возраста рубок лесных насаждений, правила заготовки древесины, правила ухода за лесами и другие нормативные правовые документы, утвержденные федеральным органом исполнительной власти по лесорастительным районам, не соответствуют условиям использования, охраны, защиты и воспроизводства лесов по субъектам РФ.

Количество лесничеств и штатная численность лесных инспекторов не соответствуют современным требованиям решения вопросов использования, охраны, защиты и воспроизводства лесов, в том числе осуществление федерального государственного лесного надзора по соблюдению лесного законодательства. Глобальность экологических проблем, вызванных отсутствием достоверных схем комплексного ресурсно-экологического районирования лесного фонда, очевидна как для целей Государственной инвентаризации лесов, так и для разработки оптимальных лесных планов по субъектам РФ.

Устранение недостатков

Устранить указанные недостатки возможно только на основе глубокого системного анализа почвенно-климатических показателей и данных учета лесного фонда лесничеств и лесопарков (таксонов). Только полифакториальная классификация лесничеств по комплексу ресурсно-экологических показателей, характеризующих плодородие почв, типы

климата, структуру земель лесного фонда, структуру площадей, занятых разными типами лесов, средневзвешенный бонитет и полноту по типам лесов, позволяет разработать достоверную схему ресурсно-экологического лесного районирования.

В общей сложности число переменных, включаемых в анализ, может насчитывать от 35 до 50 показателей в зависимости от площади таксонов (лесничеств) в каждом из 78 субъектов Российской Федерации. После последовательного применения факторного, кластерного и дискриминантного анализов осуществляется многомерная группировка лесничеств по типичности. Статистическая достоверность формирования типичных групп лесничеств, образующих отдельный район, оценивается по суммарному и межкластерному расстоянию Махаланобиса, что позволяет статистически доказать достоверность разработанной схемы районирования по каждому субъекту РФ.

Очевидна необходимость увязки схем ресурсно-экологического районирования с разработкой экологических лесотаксационных нормативов для обоснования возрастов рубок и моделей оптимизации рубок ухода и главного пользования лесом. В теории лесоводства отсутствует привязка схем интенсификации ведения лесного хозяйства и лесопользования к лесным районам.

Действующие схемы лесного районирования

Действующие схемы районирования представляют собой решения, основанные, как правило, на интуитивно – субъективном подходе исполнителей. Наиболее ярким примером лесорастительного районирования служит схема зонального и провинциального деления лесов СССР С.Ф. Курнаева. Более обоснованную схему районирования лесов Дальнего Востока предложил А.С. Шейнгауз, положивший в основу классификации таксонов (лесничеств) кластерный анализ. Целенаправленное использование схем районирования для государственной инвентаризации лесов и

лесопользования требует наличия лесотаксационных нормативов, которые увязаны с конкретными лесными районами.

Отсутствие достоверных схем ресурсно-экологического районирования, а также системного комплекса экологических лесотаксационных нормативов роста и продуктивности древостоев не позволяет решить поставленную задачу.

1.2. Методические требования к разработке аналитических схем районирования

Научно-методическое решение проблемы районирования территории любого субъекта Российской Федерации должно основываться, прежде всего, на доказательном распределении лесничеств (таксонов) по типичным группам, в которых проявляется наибольшая однородность лесной территории (отдельного района) по множеству природных и организационно-хозяйственных признаков. Только минимальная изменчивость всего комплекса показателей, характеризующих структуру земель лесного фонда, типов лесов и экологических условий в группе типичных лесничеств, обеспечивает достоверность выделения контура конкретного района.

Достоверная схема комплексного ресурсно-экологического лесного районирования может быть получена только на основе методов многомерной классификации (группировки) лесничеств по однородности (схожести) значений показателей, включённых в анализ. Сущность такого подхода заключается в логически связанном, поочередном применении факторного, кластерного и дискриминантного анализов. На необходимость применения статистических методов многомерной классификации хозяйствующих субъектов ещё в начале 80-х годов прошлого столетия указывалось в специальной литературе.

В настоящее время большое внимание уделяется экологическим вопросам природопользования, которые по своему содержанию должны быть тесно увязаны с экономикой региона.

Появились новые методы, технические средства и информационные технологии, дающие возможность вовлечения в статистический анализ всего комплекса показателей, определяющих типичность лесничеств, составляющих контур конкретного лесного района.

Для этого при разработке новой схемы районирования впервые задействовано от 35 до 50 показателей (независимых переменных), разделённых на пять блоков, характеризующих:

- классы потенциальной продуктивности типов почв;
- климатические показатели, характеризующие типы климата по сезонам года;
- долю площадей, занятых различными категориями земель и объектами лесного фонда;
- долю площадей под светлохвойными, темнохвойными, твердолиственными и мягколиственными типами лесов;
- средневзвешенные классы бонитета и полноты по типам лесов.

Критериальная оценка достоверности распределения лесничеств по типичным группам (районам) осуществляется по суммарному и межкластерному расстоянию Махаланобиса.

Выделенные районы должны удовлетворять главному требованию, предъявляемому к схеме районирования, – достоверной полифакториальной однородности территории отдельного района. Государственная (выборочная) инвентаризация лесов будет недостоверной без формирования типической выборки выделов. Только в однородном лесном районе можно сформировать типическую выборку выделов, которые будут характеризовать лесной фонд генеральной совокупности выделов. Это, в свою очередь, позволяет дифференцировать нормативную базу по оценке лесных ресурсов, разрабатывать на более высоком научно-методическом уровне оптимальные лесные планы и тем самым более эффективно решать задачи, связанные с управлением лесными ресурсами в субъектах РФ.

1.3. Статистическое обоснование типичности лесных районов

Достоверная схема комплексного лесного районирования может быть получена только на основе методов многомерной классификации (группировки) лесничеств по однородности (схожести) значений показателей, включённых в анализ. Сущность такого подхода заключается в последовательном применении факторного, кластерного и дискриминантного анализов.

Следуя критическим замечаниям и указанным методическим рекомендациям, при решении поставленной задачи было задействовано 34 показателя, разделенных на пять блоков:

I. Геопозиционирование лесничеств:

X_1 – широта северная;

X_2 – долгота восточная.

II. Группа почвенно-климатических переменных:

– *почвенные*: характеризуются процентом площадей с классами потенциальной продуктивности почв от 1 до 6:

X_3 – доля площадей с продуктивностью почв – 1;

X_4 – доля площадей с продуктивностью почв – 2;

X_5 – доля площадей с продуктивностью почв – 4;

X_6 – доля площадей с продуктивностью почв – 5;

X_7 – доля площадей с продуктивностью почв – 6.

Для распределения почв по административным районам области использованы результаты исследований, проведенные МГУ [76].

– *климатические*:

X_8 – суммарная обеспеченность теплом;

X_9 – продолжительность весны;

X_{10} – увлажнение весной;

X_{11} – температура средняя наиболее теплого месяца;

X_{12} – температура средняя наиболее холодного месяца.

III. Группа переменных, отображающих структуру земель лесного фонда:

- X_{13} – всего земель, покрытых лесом;
- X_{14} – фонд лесовосстановления;
- X_{15} – всего лесных земель;
- X_{16} – сельхозугодья (пашни, сенокосы, пастбища, сады, ягодники);
- X_{17} – воды;
- X_{18} – дороги и просеки (протяженность на 1 км² лесного фонда);
- X_{19} – усадьбы и пр.;
- X_{20} – болота;
- X_{21} – пески;
- X_{22} – прочие земли;
- X_{23} – всего нелесных земель.

IV. Группа показателей, характеризующих структуру площадей под типами лесов:

- X_{24} – доля площади под светлохвойными лесами;
- X_{25} – доля площади под темнохвойными лесами;
- X_{26} – доля площади под твердолиственными лесами;
- X_{27} – доля площади под мягколиственными лесами;
- X_{28} – доля площади под кустарниками.

V. Группа показателей, характеризующих продуктивность и сомкнутость древостоев по типам лесов:

- X_{29} – средневзвешенный бонитет хвойных пород;
- X_{30} – средневзвешенный бонитет твердолиственных пород;
- X_{31} – средневзвешенный бонитет мягколиственных пород;
- X_{32} – средневзвешенная полнота хвойных пород;
- X_{33} – средневзвешенная полнота твердолиственных пород;
- X_{34} – средневзвешенная полнота мягколиственных пород.

Источниками информации являются:

– данные государственного учета земель сельскохозяйственного назначения РФ ($X_1 - X_7$);

– данные гидрометеослужбы РФ ($X_8 - X_{12}$);

– данные государственного учета лесного фонда РФ ($X_{13} - X_{34}$).

Перечисленные переменные непосредственно или косвенно характеризуют экологические и социально-экономические условия лесничеств.

Следует отметить, что границы контуров лесничеств, соответствующие административным районам, определяют в итоге общий контур типичного лесного района. При этом даже на тематической карте (атласе) практически невозможно визуально представить и нанести достоверные границы районов.

Тем не менее, соблюдая требования ст.15 Лесного Кодекса Российской Федерации по разработке карты-схемы ресурсно-экологических лесных районов, требуется, в первую очередь, определиться с принципами и методами распределения таксонов (лесничеств) в многомерном комплексе переменных, характеризующих хозяйствующие субъекты.

Так, для решения географических задач по тематическому районированию традиционно положен принцип соблюдения целостности выделенного района, хотя территориальная целостность района не всегда обеспечена требуемой достоверностью. При разработке карт-схем многомерной группировки лесничеств некоторые из них, как правило, отдельные лесничества не могут в полной мере соответствовать типичности выделенным районам. В этом случае будет справедливым допустить выделение типичных лесничеств отдельного подрайона с присущей ему специфичностью переменных.

Следуя этим указаниям, проведем многомерную классификацию лесничеств на основе факторного, кластерного и дискриминантного анализов.

1.4. Факторизация ресурсно-экологических показателей лесничеств

Достоверная многомерная классификация лесничеств по комплексу показателей, приведенных в предыдущем разделе, возможна лишь в том случае, если устранена автокорреляция между переменными. Устранить автокорреляцию переменных позволяет факторный анализ или метод главных компонент. При его проведении оценена корреляция между парно связанными переменными. Критическое значение коэффициента корреляции на 5–процентном уровне значимости равно 0,449. Число статистически значимых взаимосвязей равно 86, что соответствует 15%. Соотношение автокоррелированных переменных оценивались путем поворота осей координат, что позволило получить собственные значения факторов (таблица 2.1) и отложить их на графике в качестве зависимой переменной относительно номеров факторов, отложенных на оси абсцисс (рисунок 2.1).

Таблица 2.1

Собственные значения факторов и процент объясняемой ими дисперсии

Показатели	Собственные значения факторов и их дисперсии по номерам факторов					
	1	2	3	4	5	6
Собственное значение фактора	8,09	6,33	4,73	3,37	2,57	1,94
Дисперсия, %	23,79	18,61	13,92	9,91	7,54	5,70
Накопленная дисперсия, %	23,79	42,40	56,32	66,23	73,77	79,47

Наряду с этим, были рассчитаны и также показаны по оси ординат значения дисперсии факторов и накопленной дисперсии факторов в зависимости от номеров факторов. Число главных компонент (факторов) определено путем графического построения и выбора точки перегиба кривой, названной критерием «каменистой осыпи» Кеттелла (Рис. 2.2).

Затабулированные и графически представленные собственные значения факторов и дисперсий относительно номеров факторов позволяют определить число главных компонент. В нашем случае их количество составляет от 3 до 6, они охватывают накопленную дисперсию соответственно от 56 до 79 процентов.

Проведение факторизации переменных позволяет освободиться от автокорреляции по критерию Дарбина – Уотсона и представить с использованием расстояния Евклида нагрузки на оси первой и второй переменной до вращения (Рис. 2.3), а также нагрузки на факторные оси после варимакс – вращения системы координат (Рис. 2.4). Упрощение структуры факторных нагрузок позволяет наглядно по рисунку 2.4, без дополнительных статистических оценок, выявить число факторов, как минимум, равное четырем.



Рис. 2.1. Изменение дисперсий и собственных значений факторов относительно номеров факторов

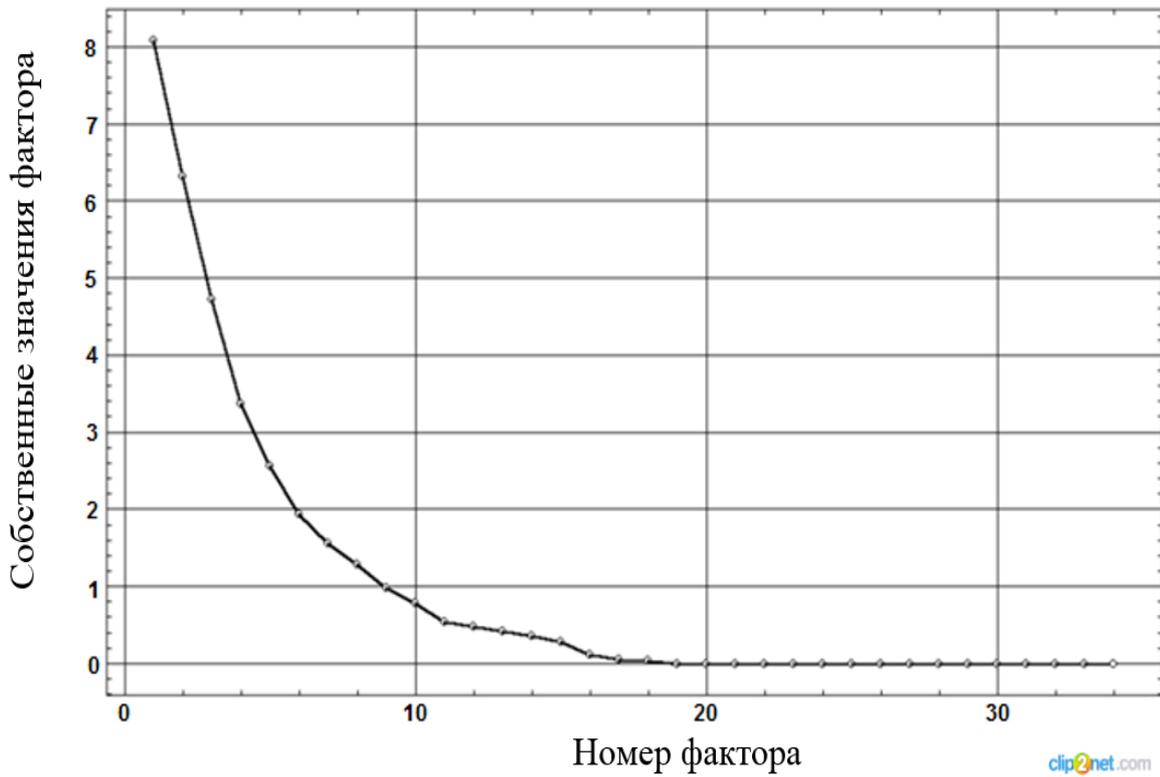


Рис. 2.2. Изменение собственных значений факторов относительно номеров факторов

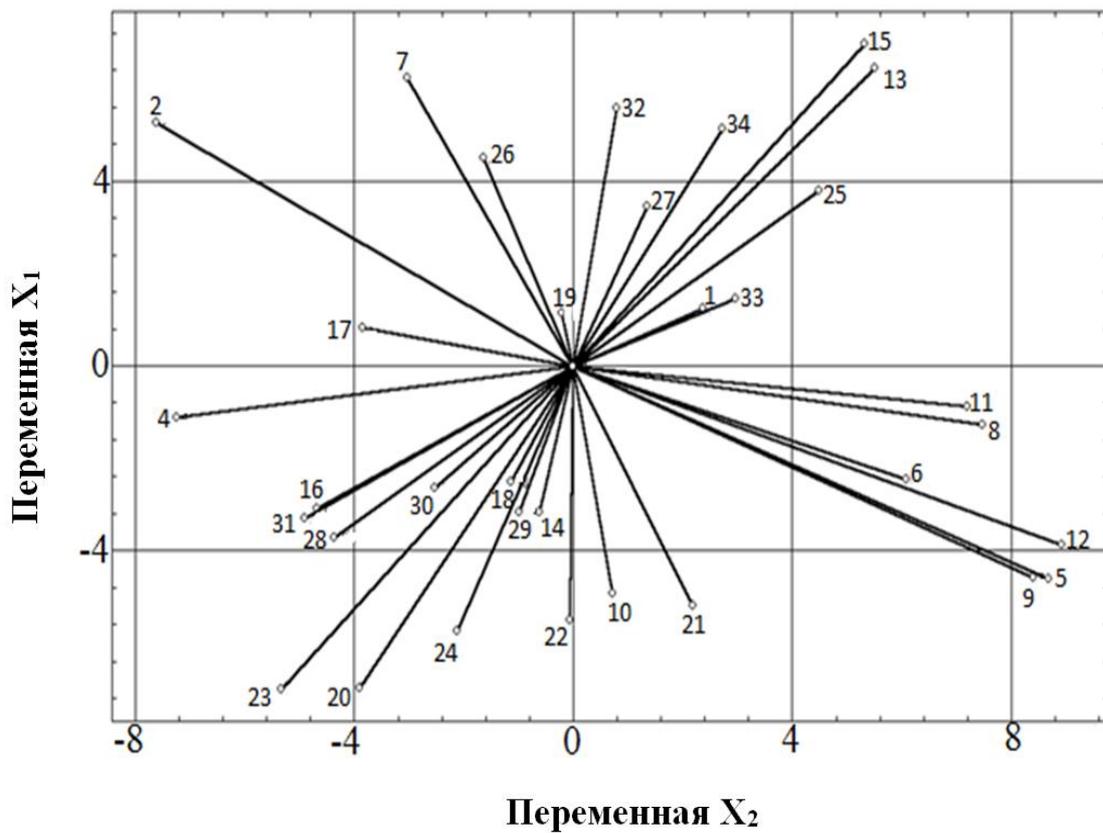


Рис. 2.3. Нагрузки на оси переменных X_1 и X_2 до вращения системы координат

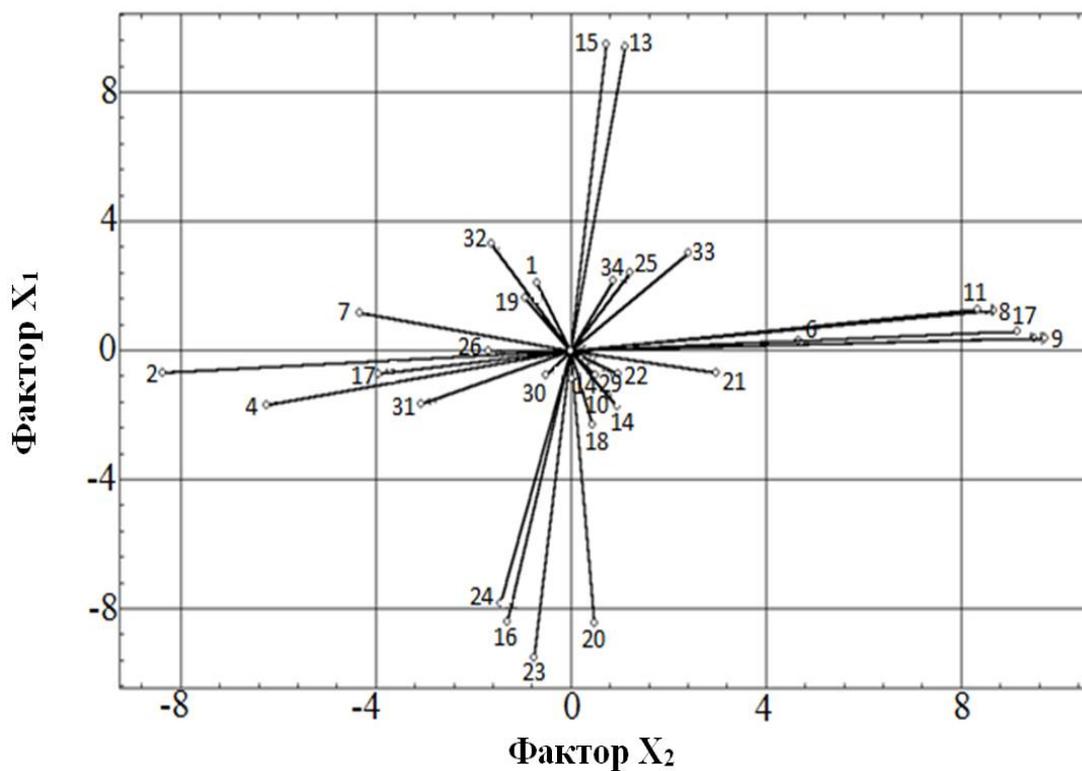


Рис. 2.4. Нагрузки на оси факторов X_1 и X_2 после вращения системы координат

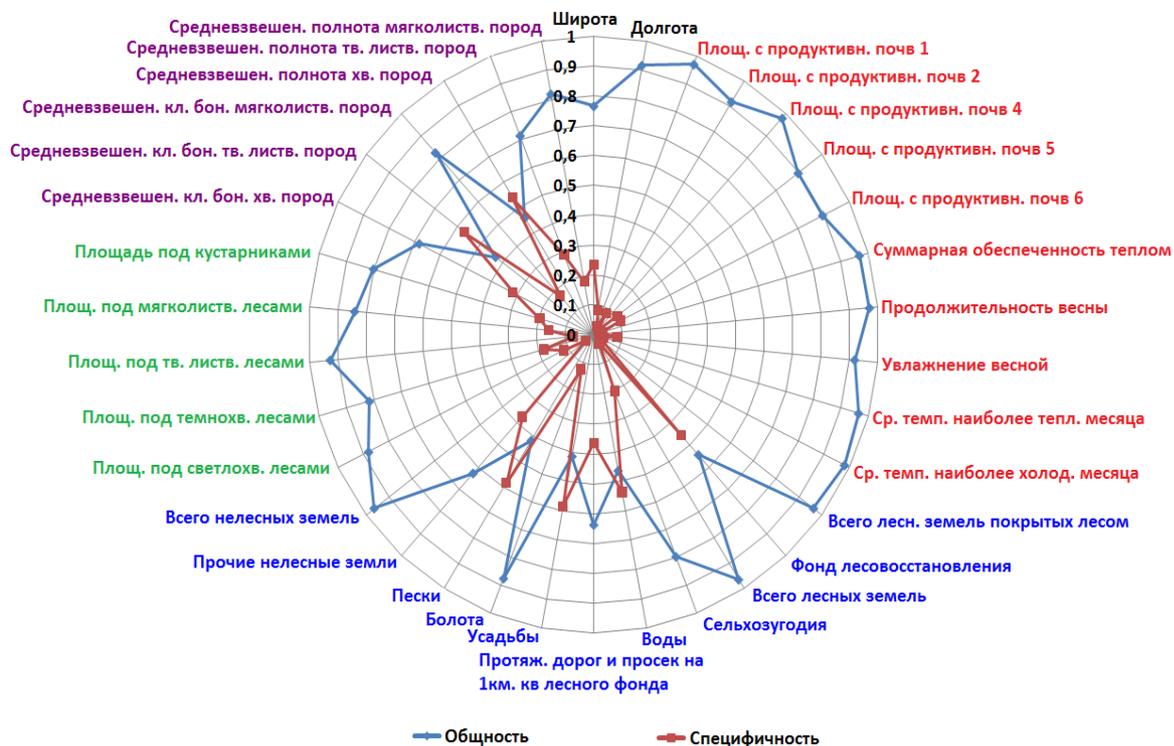


Рис. 2.5. Диаграмма соотношения общности и специфичности переменных при 6 главных компонентах

После вращения системы координат структура нагрузок существенно упростилась. Явно коррелированные между собой переменные, объединяемые в понятие главного компонента или фактора, стали располагаться ближе друг к другу. Объективность распределения нагрузок на факторные оси подтвердим примером. Коэффициент корреляции $r=0,941$ соответствует тесноте связи между показателями X_{13} и X_{15} ; $r=0,704$ между X_{16} и X_{28} ; $r=0,840$ между X_{20} и X_{23} ; $r=0,997$ между X_8 и X_{11} ; $r=0,796$ между X_8 и X_9 и т.д. Расшифровка аббревиатуры перечисленных переменных позволяет более полно представить наличие взаимосвязей анализируемого комплекса переменных.

При многомерной классификации лесничеств важно знать, какие из переменных для региона являются общими (типичными), а какие – специфическими, свойственными только какой-то определенной части таксонов. Для наглядности оценки переменных с позиций общности и специфичности по шести главным компонентам приведены на рисунке 2.5.

В факторном анализе сумма коэффициентов общности и специфичности равна единице. При изменении числа главных компонент соотношение доли общности и специфичности меняется. Так, специфичность переменных лучше проявляется при уменьшении числа главных компонент. В нашем случае оптимальным количеством следует считать шесть главных компонент.

Характеристика переменных, принятых для анализа с позиций общности и специфичности, приведена в таблице 2.2.

Большинство переменных, представленных в таблице, являются общими для лесничеств Брянской области. В ряде лесничеств проявляется специфичность переменных, представленных водными объектами, усадьбами, песками, продуктивностью твердолиственных пород и полнотой хвойных насаждений.

По оценкам переменных, специфичность водных объектов проявляется в Навлинском, Карачевском и Трубчевском лесничествах; специфичность усадеб и прочих земель – в Унечском и Дятьковском и в меньшей степени в Брянском, Трубчевском и Клетнянском лесничествах; специфичность песков – в двух лесничествах – Клинцовском и Жуковском.

Специфичность средневзвешенного класса бонитета твердолиственных пород, зависящего от воздействия хозяйственной деятельности на леса, проявляется в Жуковском, Выгоничском, Брянском и Дубровском лесничествах. Зависящей от хозяйственного воздействия на леса является также полнота хвойных пород, специфичность которой проявляется в Клетнянском и Клинцовском лесничествах.

Оценка переменных по общности и специфичности позволяет более объективно оценить особенности формирования главных компонент из представленного к анализу комплекса переменных.

Завершающим этапом факторизации является распределение факторных нагрузок после варимакс-вращения системы координат, позволяющее определить перечень переменных, сформировавших каждый главный компонент и дать ему семантическую интерпретацию. В таблице 2.3 приведены факторные нагрузки по шести главным компонентам после варимакс- вращения системы координат.

В таблице жирным шрифтом выделены максимальные факторные нагрузки, соответствующие переменным в разрезе шести главных компонент. Из них наиболее информативным является первый главный компонент, на который приходится 8,089 собственных значений фактора или 23,79% дисперсии из всех 34 переменных, включенных в анализ.

Автокорреляция переменных позволила объединить их в отдельные главные компоненты.

Таблица 2.2

**Характеристика переменных с позиций общности и специфичности при
6 главных компонентах**

Переменные		Общность	Специфичность	
Широта северная		0,765	0,235	
Долгота восточная		0,917	0,083	
Продуктивность почв	1 класс	0,970	0,030	
	2 класс	0,917	0,083	
	4 класс	0,980	0,020	
	5 класс	0,898	0,102	
	6 класс	0,896	0,104	
Суммарная обеспеченность теплом		0,968	0,032	
Весна	продолжительность	0,970	0,030	
	увлажнение	0,918	0,082	
Температура средняя, t°С	наиболее тёплого месяца	0,965	0,035	
	наиболее холодного месяца	0,981	0,019	
Лесные земли, %	всего покрытых лесом, %	0,965	0,035	
	фонд лесовосстановления, %	0,544	0,456	
	всего лесных земель, %	0,965	0,035	
Нелесные земли, %	сельхозугодья, %	0,797	0,203	
	водные объекты, %	0,463	0,537	
	протяжён. дорог и просек	0,637	0,363	
	усадьбы и пр., %	0,415	0,585	
	болота, %	0,876	0,124	
	пески, %	0,416	0,584	
	прочие земли, %	0,628	0,372	
	всего нелесных земель, %	0,965	0,035	
Структура площадей под типами лесов на покрытых лесом землях, %	светлохвойные, %	0,882	0,118	
	тёмнохвойные, %	0,818	0,182	
	твёрдолиственные, %	0,928	0,072	
	мягколиственные, %	0,842	0,158	
	кустарники, %	0,803	0,197	
Средневзвешенные таксационные показатели насаждений под типами лесов	бонитет	хвойные	0,683	0,317
		твёрдолиственные	0,432	0,568
		мягколиственные	0,825	0,175
	полнота	хвойные	0,460	0,540
		твёрдолиственные	0,714	0,286
		мягколиственные	0,820	0,180

Таблица 2.3

**Факторные нагрузки по шести главным компонентам после варимакс
вращения системы координат**

Переменные		Факторные нагрузки после вращения по номерам главных компонент						
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
Северная широта		-0,022	0,166	-0,655	0,524	0,155	0,101	
Восточная долгота		-0,832	-0,079	0,284	0,221	0,047	0,294	
Класс продуктивности почв	первый	0,951	0,043	-0,235	0,0209	0,001	0,096	
	второй	-0,692	-0,174	-0,455	-0,166	0,214	0,358	
	третий	0,941	0,046	-0,291	0,041	-0,017	-0,083	
	четвертый	0,509	0,045	-0,340	0,104	-0,081	-0,710	
	шестой	-0,369	0,115	0,841	0,092	-0,172	-0,045	
Суммарная обеспеченность теплом		0,871	0,121	0,331	0,062	-0,092	0,270	
Весна	продолжительность	0,951	0,043	-0,235	0,021	0,001	0,096	
	увлажнение	0,039	-0,129	-0,889	-0,068	0,149	-0,289	
Средняя температура	наиболее тёплого месяца	0,842	0,126	0,384	0,065	-0,099	0,282	
	наиболее холодного месяца	0,926	0,069	-0,222	0,075	-0,059	-0,248	
Структура лесных земель	всего покрытых лесом, %	0,102	0,941	0,052	0,191	0,100	-0,142	
	фонд лесовосстановления, %	0,151	-0,226	-0,141	-0,067	-0,019	0,668	
	всего лесных, %	0,097	0,938	0,120	0,240	0,059	0,003	
Структура нелесных земель	сельхозугодья, %	-0,126	-0,833	0,093	0,179	0,184	0,115	
	воды, %	-0,492	-0,077	-0,366	0,149	-0,219	0,102	
	протяжён. дорог и просек	-0,042	-0,229	-0,174	-0,094	-0,722	0,151	
	усадыбы и пр., %	-0,067	0,127	-0,107	0,110	0,601	0,099	
	болота, %	0,054	-0,830	0,059	-0,385	0,031	-0,176	
	пески, %	0,366	-0,056	-0,191	-0,469	-0,046	-0,146	
	прочие, %	0,080	-0,055	-0,507	-0,490	-0,345	0,054	
	всего нелесных, %	-0,097	-0,938	-0,120	-0,240	-0,059	-0,003	
Структура площадей по типам лесов	светлохвойные, %	-0,008	-0,047	-0,196	-0,831	-0,306	0,240	
	тёмнохвойные, %	0,158	0,198	-0,255	0,775	0,129	-0,266	
	твёрдолиствен. %	-0,148	0,036	0,913	-0,038	-0,125	-0,234	
	мелколиствен. %, %	0,003	-0,074	-0,099	0,784	0,457	-0,052	
	кустарники, %	-0,122	-0,813	-0,095	0,198	-0,091	0,266	
Средневзвешенные таксационные показатели насаждений по типам лесов	бонитет	хвойные	0,027	-0,095	-0,310	-0,213	0,726	0,076
		тв. листв.	-0,089	-0,010	-0,004	-0,507	0,036	0,406
		м. листв.	-0,312	-0,147	-0,028	-0,666	0,483	-0,169
	полнота	хвойные	-0,224	0,320	0,012	0,497	-0,247	0,002
		тв. листв.	0,179	0,358	0,248	-0,170	-0,681	-0,021
		м. листв.	0,031	0,169	-0,015	0,808	-0,273	0,250

В состав **первого главного компонента** вошли:

- классы продуктивности почв 1 (X_3), 2 (X_4), 4 (X_5), 5 (X_6);
- суммарная обеспеченность теплом (X_8);
- продолжительность весны (X_9);
- средняя температура наиболее теплого месяца (X_{11});
- средняя температура наиболее холодного месяца (X_{12}).

На **второй главный компонент** приходится 6,328 собственных значений фактора, охвативших 18,61% дисперсии переменных. В его состав вошли следующие переменные:

- земли, покрытые лесом (X_{13});
- всего лесных земель (X_{15});
- сельхозугодья (пашни, сенокосы, пастбища, сады, ягодн.) (X_{16});
- болота (X_{20});
- всего нелесных земель (X_{23});
- кустарники (X_{28}).

На **третий главный компонент** приходится 4,732 собственных значений фактора, охвативших 13,9% дисперсии переменных. Его составили следующие переменные:

- продуктивность почв 6 (X_7);
- увлажнение весной (X_{10});
- нелесные прочие земли (X_{22});
- площади под твердолиственными лесами (X_{26}).

На **четвертый главный компонент** приходится 3,371 собственных значений фактора, охвативших 9,9% дисперсии переменных. Его составили следующие переменные:

- площади под светлохвойными лесами (X_{24});
- площади под темнохвойными лесами (X_{25});
- площади под мягколиственными лесами (X_{27});

- средневзвешенный бонитет твердолиственных пород (X_{30});
- средневзвешенный бонитет мягколиственных пород (X_{31});
- средневзвешенная полнота мягколиственных пород (X_{34}).

На **пятый главный компонент** приходится 2,566 собственных значений фактора, охвативших 7,5% дисперсии. Его составили следующие переменные:

- протяженность дорог и просек на 1 км² лесного фонда (X_{18});
- усадьбы (X_{19});
- средневзвешенный бонитет хвойных пород (X_{29});
- средневзвешенная полнота твердолиственных пород (X_{33}).

На **шестой главный компонент** приходится 1,938 собственных значений фактора, охвативших 5,7% дисперсии. Его составили следующие переменные:

- площади с продуктивностью почв 5 (X_6);
- фонд лесовосстановления (X_{14}).

Итак, в результате проведения факторного анализа ликвидирована автокорреляция между переменными, что позволило освободиться от так называемых «шумов» и получить координаты объектов в системе факторов. При этом выполнено важное условие факторизации, при котором должны отсутствовать корреляции между главными компонентами. В нашем случае коэффициенты корреляции между факторами ниже 5 - процентного уровня значимости ($r_{05}=0,335$).

Таким образом, были получены координаты объектов в системе факторов, которые были использованы на следующем этапе решения классификационной задачи при проведении кластеризации.

1.5. Кластеризация лесничеств для составление карт-схем комплексного лесного районирования

Кластеризация лесничеств должна осуществляться в системе координат факторов. Оценка распределения объектов в проекциях полифакториальности при отсутствии автокорреляции является предварительной задачей самой классификации. При этом в результате кластеризации выбирается наиболее подходящая стратегия, ориентированная на объединение объектов (таксонов) в типичные группы либо их разделение. В нашем случае была выбрана разделяющая (дивизивная) стратегия. Эта стратегия позволяет представить проекции кластеров на плоскость первого и второго факторов, содержание которых изложено в предыдущем разделе.

Визуализация проекций семи кластеров на плоскость выбранных факторов представлена на рисунке 2.6. На рисунке наглядно представлено 7 кластеров со статистическим расстоянием от каждого лесничества до центроида. Достоверность выделения 7 групп лесничеств по шести главным компонентам подтверждается кластеризацией объектов, проведенной по координатам объектов в системе 5, 4 и 3-х главных компонент. По результатам кластерного анализа все лесничества Брянской области были сгруппированы в 7 кластеров:

- кластер № 1 представлен Дубровским и Клетнянским лесничествами;
- кластер № 2 – Дятьковским лесничеством;
- кластер № 3 – Выгоничским, Жуковским и Почепским лесничествами;
- кластер № 4 – Злынковским и Клинцовским лесничествами.
- кластер № 5 – Мглинским и Унечским лесничествами;
- кластер № 6 – Брянским, Карачевским, Навлинским, Суземским, Трубчевским и Учебно-опытным лесничествами;
- кластер № 7 – Брасовским и Севском лесничествами.

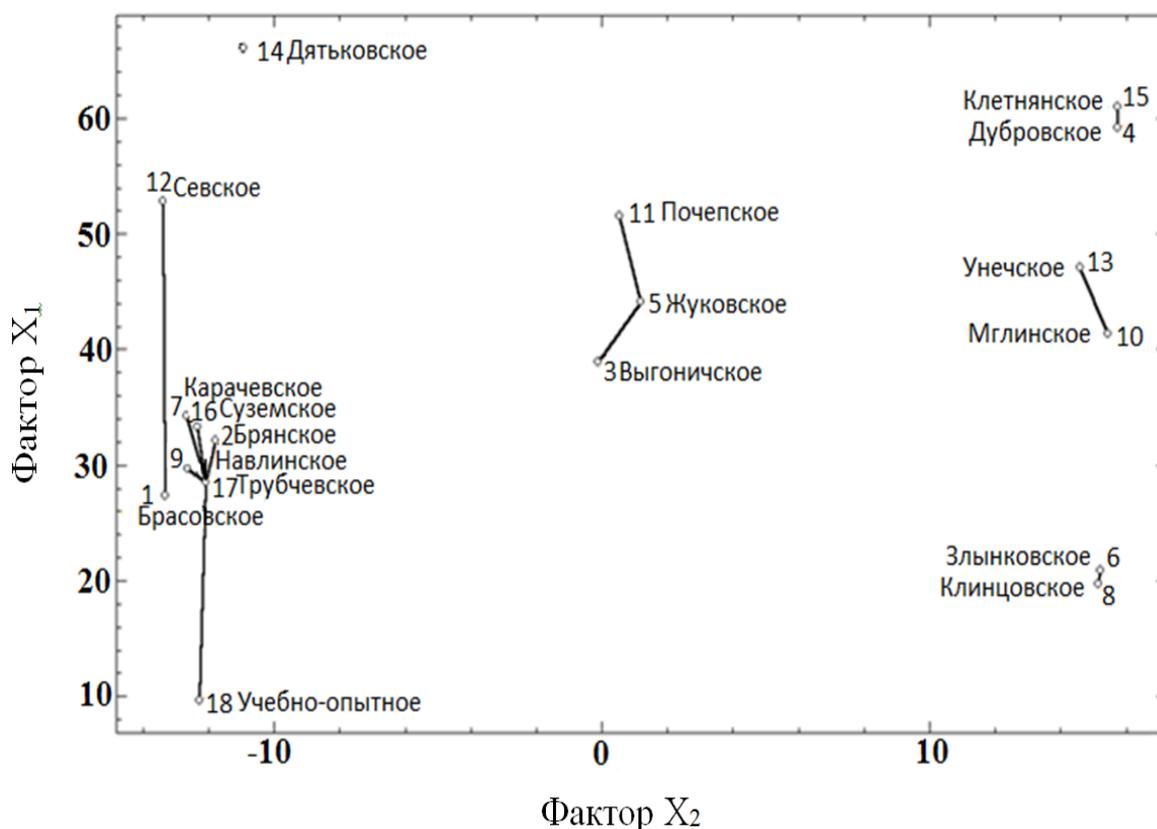


Рис. 2.6. Проекция семи кластеров на плоскость факторов X1 и X2 на основе 6 главных компонент

Таким образом, результатом кластеризации является определение количества кластеров и объектов (лесничеств), объединенных в отдельный кластер. Проведенная классификация таксонов позволяет выделить в действующей структуре управления лесами группы типичных лесничеств, представляющих отдельные ресурсно-экологические лесные районы:

Дубровско-Клетнянский лесной район (I РЭЛР) (включает Дубровское и Клетнянское лесничества); Дятьковский лесной район (II РЭЛР) (включает Дятьковское лесничество); Жуковско-Почепский лесной район (III РЭЛР) (включает Жуковское, Выгоничское и Почепское лесничества); Клинцовско-Злынковский лесной район (IV РЭЛР) (Клинцовское и Злынковское лесничества); Мглинско-Унечский лесной район (V РЭЛР) (включает Мглинское и Унечское лесничества); Карачево-Суземский лесной район (VI РЭЛР) (включает Карачевское, Брянское, Учебно-опытное, Навлинское, Трубчевское и Суземское лесничества); Брасово-Севский лесной район (VII РЭЛР)

РЭЛР) (включает Брасовское и Севское лесничества). При этом выявлено, что Суражское участковое лесничество Клинцовского лесничества, отнесенное к IV району, сходно с Мглинским лесничеством, отнесенным к V району. Аналогично этому Негинское участковое лесничество Суземского лесничества (VI район) сходно с Севским лесничеством (VII район).

Для сохранения целостности (контуров) лесных районов следует провести незначительную корректировку принадлежности лесничеств к однородному классу. Вариант карты-схемы, раскрашенной по районам, приведен на рисунке 2.7. Для сравнения вариант карты-схемы, раскрашенной по преобладающим породам, приведён на рисунке 2.8.

Таким образом, выделенные ресурсно-экологические лесные районы Брянской области имеют наименьшую изменчивость включенных в анализ показателей и потому соответствуют понятию типичности (однородности) по всему перечню задействованных показателей ГУЛФ. Разработанная схема районирования должна стать основой для проведения выборочной инвентаризации лесных ресурсов (ГИЛ), так как типичные районы выделены не субъективно, а на основе многомерных классификационных методов статистического анализа.

Аналогичным образом проведена классификация лесничеств субъектов РФ Северо-Западного федерального округа. Схемы районирования приведены на рисунках 2.9 – 2.13.

Итак, вполне очевиден тот факт, что для успешного ведения лесного хозяйства статистически доказанные (достоверные) схемы комплексного лесного районирования должны заменить, субъективно-интуитивные, «карандашные» и ущербные для лесной отрасли схемы.



Рис. 2.7. Карта-схема ресурсно-экологических лесных районов Брянской области



Рис. 2.8. Карта-схема ресурсно-экологических лесных районов Брянской области (с отображением преобладающих пород)

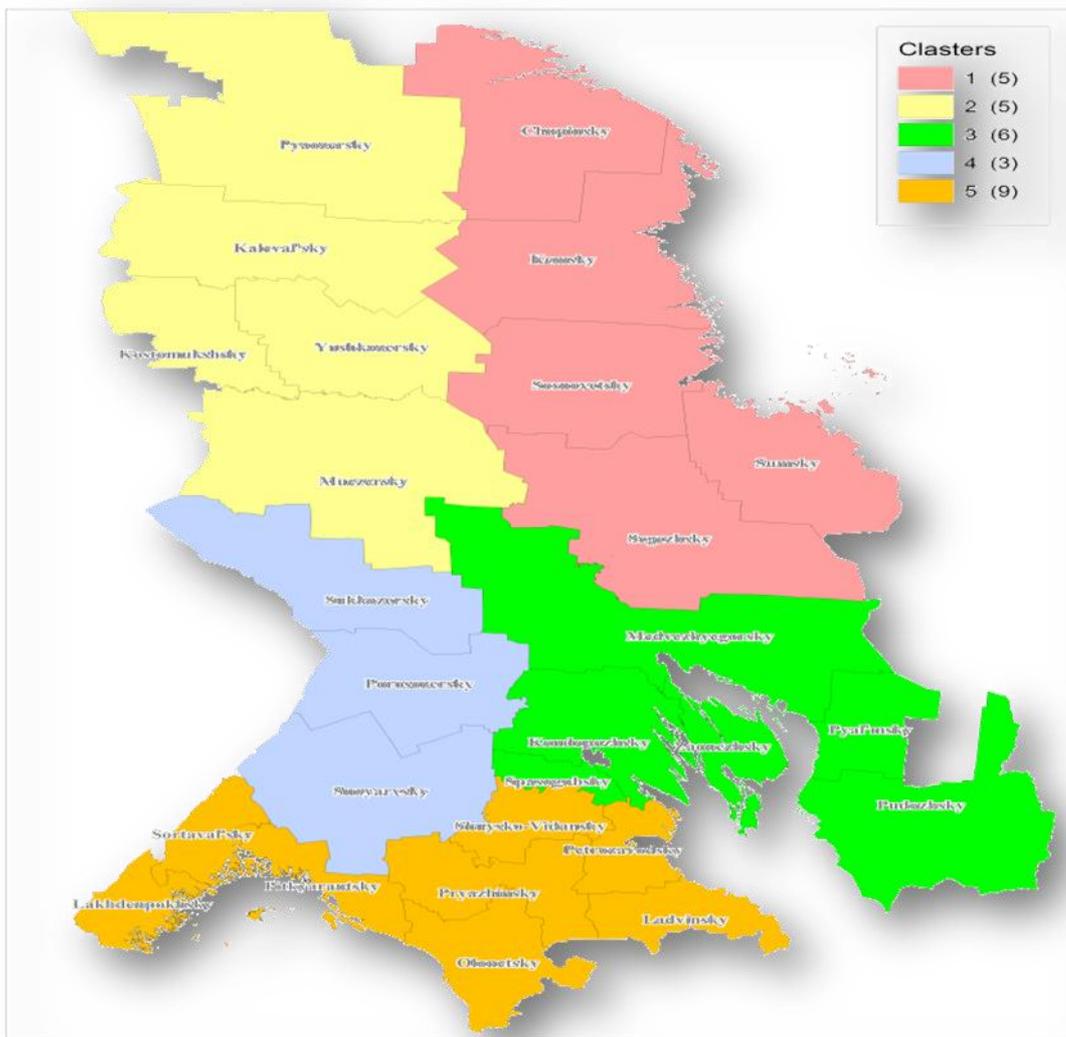


Рис. 2.9. Карта-схема ресурсно-экологического районирования Республики Карелия

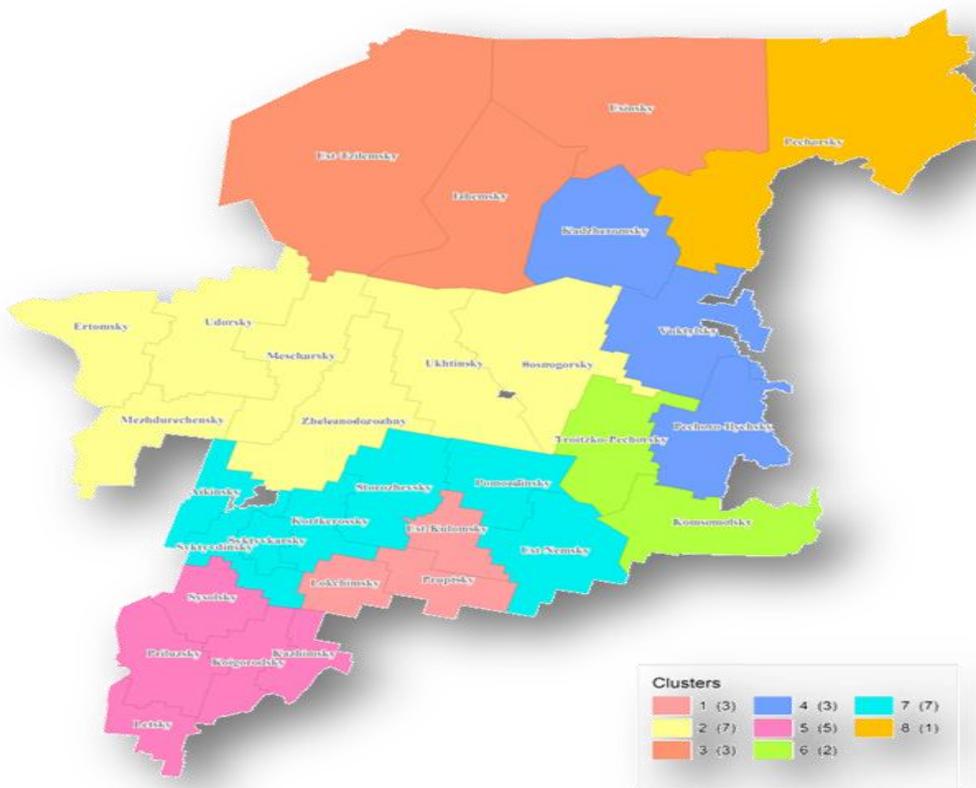


Рис. 2.10. Карта-схема ресурсно-экологического районирования Республики Коми



Рис. 2.11. Карта-схема ресурсно-экологического районирования Ленинградской области



Рис. 2.12. Карта-схема ресурсно-экологического районирования Вологодской области

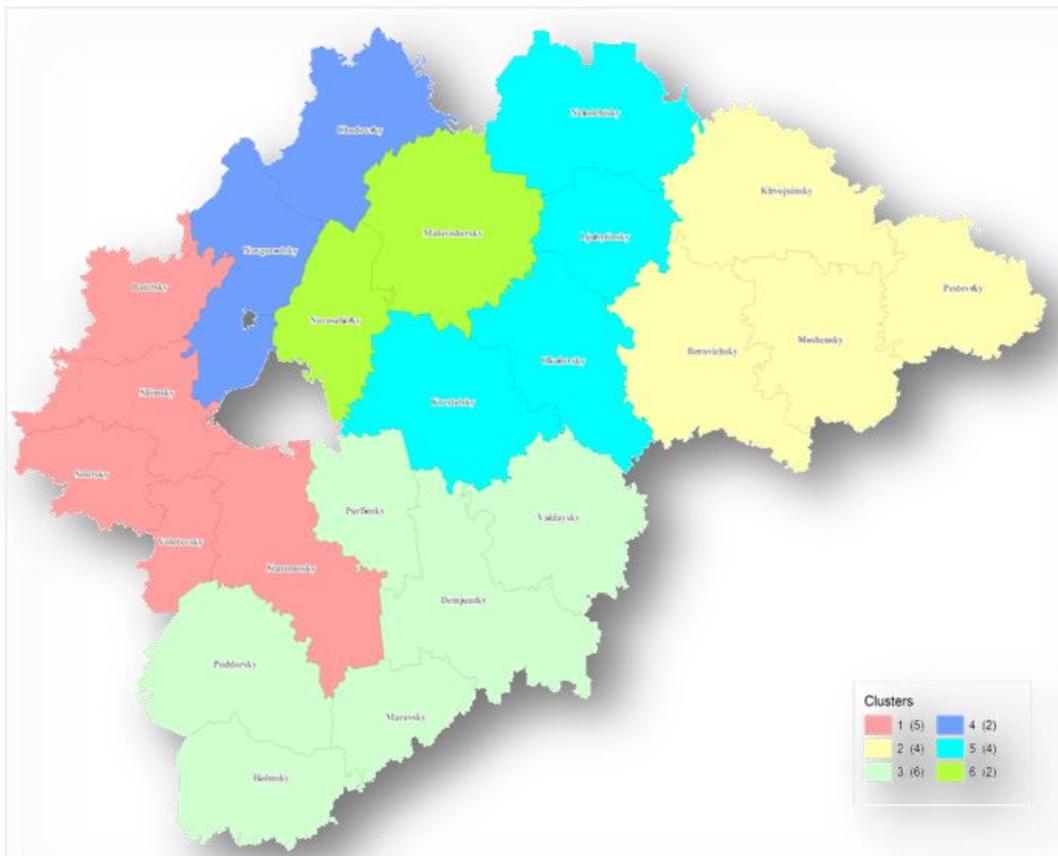


Рис. 2.13. Карта-схема ресурсно-экологического районирования Новгородской области

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА, СТРОЕНИЯ И ПРОДУКТИВНОСТИ ДРЕВОСТОЕВ

2.1. Лесотипологические модели хода роста и продуктивности древостоев

Информация о ходе роста древостоев является основой для проектирования лесохозяйственных мероприятий, обоснования возраста рубки и разных видов спелости леса, режима нормирования разреживаний древостоев величиной древесного прироста и отпада.

Моделирование хода роста сосновых древостоев по средней высоте (H , м) и среднему диаметру (D , см) проведено с использованием ростовой функции Корсуня-Бакмана:

$$T = \exp(a_0 + a_1 \ln A + a_2 \ln^2 A), \quad 3.1$$

где:

A – возраст древостоя, лет;

a_0, a_1, a_2 – численные коэффициенты уравнения.

Для построения лесотипологических моделей хода роста типы лесорастительных условий кодируются блоковыми фиктивными переменными представленными в виде матриц (табл. 3.1).

В сочетании с фиктивными переменными, кодирующими условия произрастания древостоев (влажность и трофность почв). Форма ростовой кривой определяется коэффициентами, стоящими перед логарифмом и квадратом логарифма от возраста древостоя, поэтому с целью учета влияния условий произрастания в уравнение вводится синергизм (произведение) логарифма и квадрата логарифма от возраста с фиктивными переменными. В общем виде уравнение записывается следующим образом:

$$T = \exp \left(\sum_{k=0}^2 \ln^k A \left(a_k + \sum_{i=1}^n b_{k,i} Z_i + \sum_{j=1}^m c_{k,j} X_j \right) \right), \quad (3.2)$$

где:

T – таксационный показатель (Н, м), (D, см) (M, куб.м/га);

A – возраст древостоя, лет;

X - фиктивные переменные, кодирующие тип лесорастительных условий - ТЛУ (A_{0-5} боры, В-субори, С-сложные субори, Д-дубравы);

Z – фиктивные переменные, кодирующие уровень увлажнения почв -ТЛУ (очень сухие-0, сухие-1, свежие-2, влажные-3, сырые-4, мокрые (болота)-5)

a, b, c – численные коэффициенты уравнения;

k, i, j – индексы. .

В развернутом виде уравнение представлено видом:

$$T = \exp (k_0 + k_1 Z_1 + k_2 Z_2 + k_3 X_1 + k_4 X_2 + k_5 X_3 + k_6 X_4 + k_7 \ln A + k_8 \ln^2 A + k_9 Z_1 \ln A + k_{10} Z_2 \ln A + k_{11} X_1 \ln A + k_{12} X_2 \ln A + k_{13} X_3 \ln A + k_{14} X_4 \ln A + k_{15} Z_1 \ln^2 A + k_{16} Z_2 \ln^2 A + k_{17} X_1 \ln^2 A + k_{18} X_2 \ln^2 A + k_{19} X_3 \ln^2 A + k_{20} X_4 \ln^2 A) \quad (3.3)$$

Переменным из блока Z соответствуют разные уровни трофности почв, а переменные из блока X разные уровни их влажности. Объединение фиктивных переменных блока Z и блока X позволяет получить закодированную характеристику почв как с учетом влажности, так и с учетом трофности: вектор (0, 0, 0, 0, 0, 0) соответствует бедным сухим почвам, а вектор (1, 0, 0, 0, 1, 0) – относительно бедным сырым почвам. Параметры уравнения (3.3) в логарифмическом преобразовании независимых переменных и результирующего признака получены методом наименьших квадратов.

В результате проведенного множественного регрессионного анализа получаем оценки параметров уравнений хода роста древостоев, которые приведены в таблице 3.1.

Для удобства работы с уравнениями численные коэффициенты по средней высоте и среднему диаметру, представленные в таблице 3.2, сводятся в таблицу 3.3.

Таблица 3.1

**Матрица блоковых фиктивных переменных, кодирующих типы
лесорастительных условий**

Характеристика условий произрастания древостоев			Блоковые фиктивные переменные					
трофность почв	влажность почв	ТЛУ	Z_1	Z_2	X_1	X_2	X_3	X_4
низкая (боры)	мезоксерофильные (сухие)	A_1	0	0	0	0	0	0
	мезофильные (свежие)	A_2	0	0	1	0	0	0
	мезогигрофильные (влажные)	A_3	0	0	0	1	0	0
	гигрофильные (сырые)	A_4	0	0	0	0	1	0
	ультрагигрофильные (мокрые)	A_5	0	0	0	0	0	1
относительно низкая (субори)	мезофильные (свежие)	B_2	1	0	1	0	0	0
	мезогигрофильные (влажные)	B_3	1	0	0	1	0	0
	гигрофильные (сырые)	B_4	1	0	0	0	1	0
	ультрагигрофильные (мокрые)	B_5	1	0	0	0	0	1
относительно высокая (сложные субори)	Мезофильные (свежие)	C_2	0	1	1	0	0	0
	мезогигрофильные (влажные)	C_3	0	1	0	1	0	0
	гигрофильные (сырые)	C_4	0	1	0	0	1	0
	ультрагигрофильные (мокрые)	C_5	0	1	0	0	0	1

Они позволяют проводить на практике довольно простые расчеты, используя, например, для этой цели программу Microsoft Excel. В функции Корсуня-Бакмана следует выделить две группы коэффициентов. К первой группе относится константа начального роста a_0 , которая отвечает за смещение начальных значений зависимой переменной относительно оси ординат в возрасте 1 год. Вторая группа коэффициентов отвечает за форму используемой кривой ростовой функции.

Таблица 3.2

Параметры и достоверность регрессионных уравнений хода роста древостоев

Коэффициент регрессии	Аргумент	Средняя высота, м				Средний диаметр, см			
		значение коэффициента	t-статистика	значимость <i>t</i>	R ²	коэффициент регрессии	t-статистика	значимость <i>t</i>	R ²
k_0		-3,40944	-7,16	0,00	0,982	-2,73643	-7,40	0,00	0,989
k_1	Z_1	0,36494	1,31	0,19		0,15286	0,63	0,53	
k_2	Z_2	0,41389	1,28	0,20		0,06635	0,22	0,82	
k_3	X_1	-0,56184	-1,01	0,32		-0,17126	-0,39	0,70	
k_4	X_2	-0,24043	-0,43	0,67		-0,21237	-0,47	0,64	
k_5	X_3	-0,05723	-0,10	0,92		-0,37426	-0,83	0,41	
k_6	X_4	-0,23562	-0,42	0,67		-0,85129	-1,82	0,07	
k_7	$\ln A$	2,28866	8,56	0,00		1,92417	9,39	0,00	
k_8	$\ln^2 A$	-0,19357	-5,29	0,00		-0,13587	-4,91	0,00	
k_9	$Z_1 \ln A$	-0,00405	-0,03	0,98		0,01061	0,08	0,93	
k_{10}	$Z_2 \ln A$	-0,00820	-0,05	0,96		0,13087	0,84	0,40	
k_{11}	$X_1 \ln A$	0,47381	1,53	0,13		0,14803	0,61	0,54	
k_{12}	$X_2 \ln A$	0,31702	1,02	0,31		0,15469	0,63	0,53	
k_{13}	$X_3 \ln A$	0,02491	0,08	0,94		0,11535	0,47	0,64	
k_{14}	$X_4 \ln A$	-0,10125	-0,33	0,74		0,17666	0,70	0,49	
k_{15}	$Z_1 \ln^2 A$	-0,01280	-0,65	0,52		-0,00651	-0,39	0,70	
k_{16}	$Z_2 \ln^2 A$	-0,01297	-0,58	0,56		-0,02791	-1,40	0,16	
k_{17}	$X_1 \ln^2 A$	-0,07015	-1,67	0,10		-0,01862	-0,57	0,57	
k_{18}	$X_2 \ln^2 A$	-0,05003	-1,19	0,24		-0,01723	-0,52	0,60	
k_{19}	$X_3 \ln^2 A$	-0,00587	-0,14	0,89		-0,01210	-0,37	0,71	
k_{20}	$X_4 \ln^2 A$	0,01929	0,46	0,64	-0,00937	-0,28	0,78		

Значения коэффициентов регрессии уравнений хода роста древостоев по средней высоте и среднему диаметру для разных ТЛУ

ТЛУ	Средняя высота, м			Средний диаметр, см		
	a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2
A ₁	-3,40944	2,28866	-0,19357	-2,73643	1,92417	-0,13587
A ₂	-3,97129	2,76247	-0,26372	-2,90768	2,07220	-0,15448
A ₃	-3,64987	2,60568	-0,24360	-2,94880	2,07886	-0,15310
A ₄	-3,46668	2,31357	-0,19943	-3,11068	2,03952	-0,14796
A ₅	-3,64506	2,18741	-0,17428	-3,58772	2,10083	-0,14523
B ₂	-3,60634	2,75842	-0,27652	-2,75482	2,0828	-0,16099
B ₃	-3,28493	2,60163	-0,25640	-2,79593	2,08947	-0,15961
B ₄	-3,10174	2,30952	-0,21223	-2,95782	2,05012	-0,15447
B ₅	-3,28012	2,18336	-0,18708	-3,43485	2,11143	-0,15175
C ₂	-3,55740	2,75427	-0,27668	-2,84134	2,20306	-0,18239
C ₃	-3,23598	2,59748	-0,25656	-2,88245	2,20973	-0,18100
C ₄	-3,05279	2,30537	-0,21240	-3,04434	2,17038	-0,17587
C ₅	-3,23118	2,17921	-0,18725	-3,52137	2,23169	-0,17314

Важным таксационным показателем древостоев является запас стволовой древесины. Для моделирования его величины, проведенного по данным стандартной таблицы для центрального лесотаксационного района, можно использовать регрессионное уравнение, сочетающее взаимосвязь запаса со средней высотой древостоя, его полнотой и долевым участием той или иной породы в составе:

$$M = \exp(-1,48427 + 2,09778 \ln H - 0,13332 \ln^2 H + \ln P + \ln K) \quad (3.4)$$

где: M – запас, м³/га; H – средняя высота, м; P – относительная полнота, ед.; K – доля участия породы в составе древостоя, ед. Для этого следует в данное уравнение ввести численные значения указанных независимых переменных. Модель запаса древостоя можно представить также в виде функции от возраста A , лет) для отдельно взятых типов лесорастительных условий, в которой независимыми переменными являются также коэффициент состава и

относительная полнота:

$$M = \exp(-1,48427 + 2,09778 (a_0 + a_1 \ln A + a_2 \ln^2 A) - 0,13332(a_0 + a_1 \ln A + a_2 \ln^2 A)^2 + \ln P + \ln K) \quad (3.5)$$

где:

M – запас, куб. м на 1 га;

H – средняя высота, м;

P – относительная полнота, ед.;

K – доля участия породы в составе древостоя, ед.

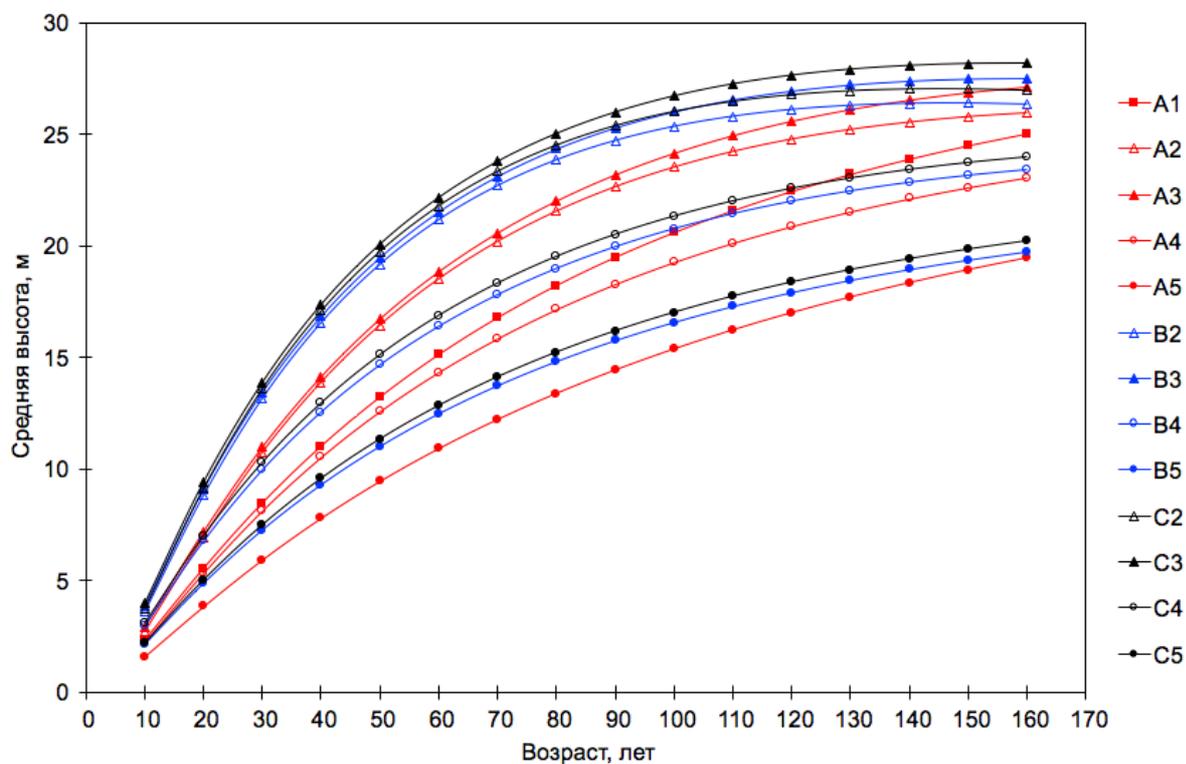


Рис. 3.1. Ход роста сосновых древостоев по средней высоте в разных типах лесорастительных условиях

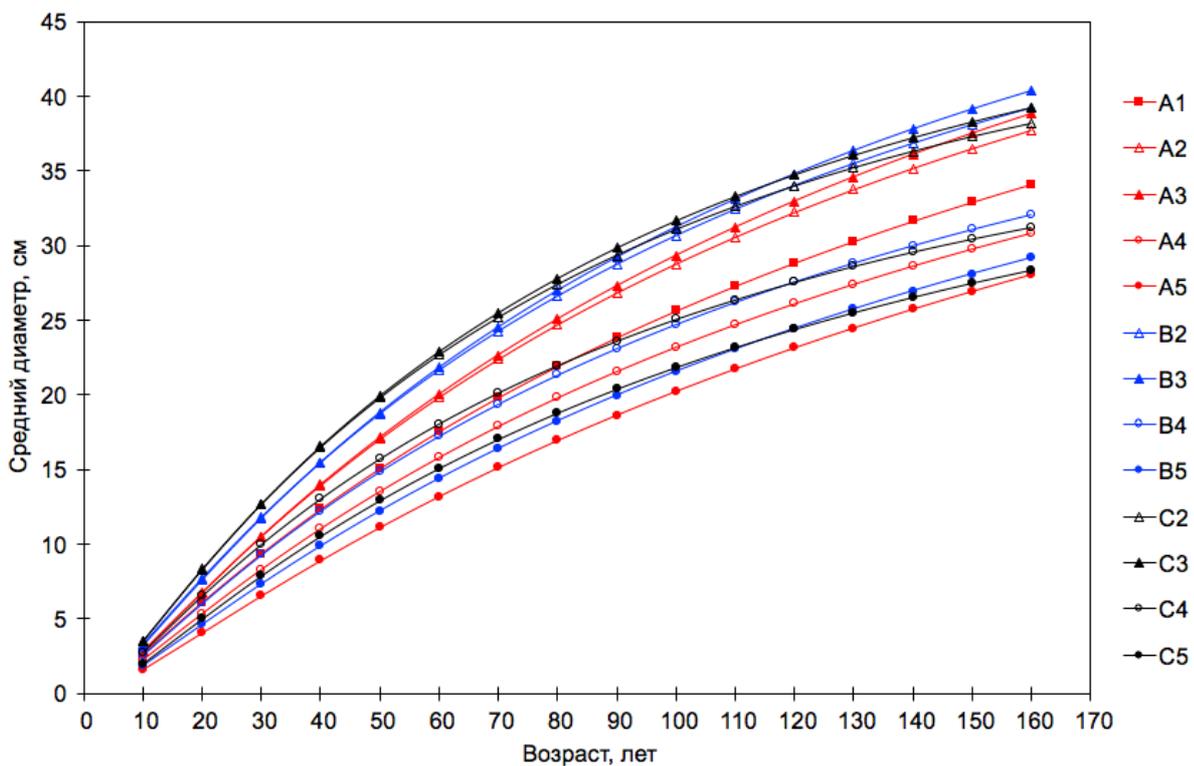


Рис. 3.2. Ход роста сосновых древостоев по среднему диаметру в разных типах лесорастительных условий

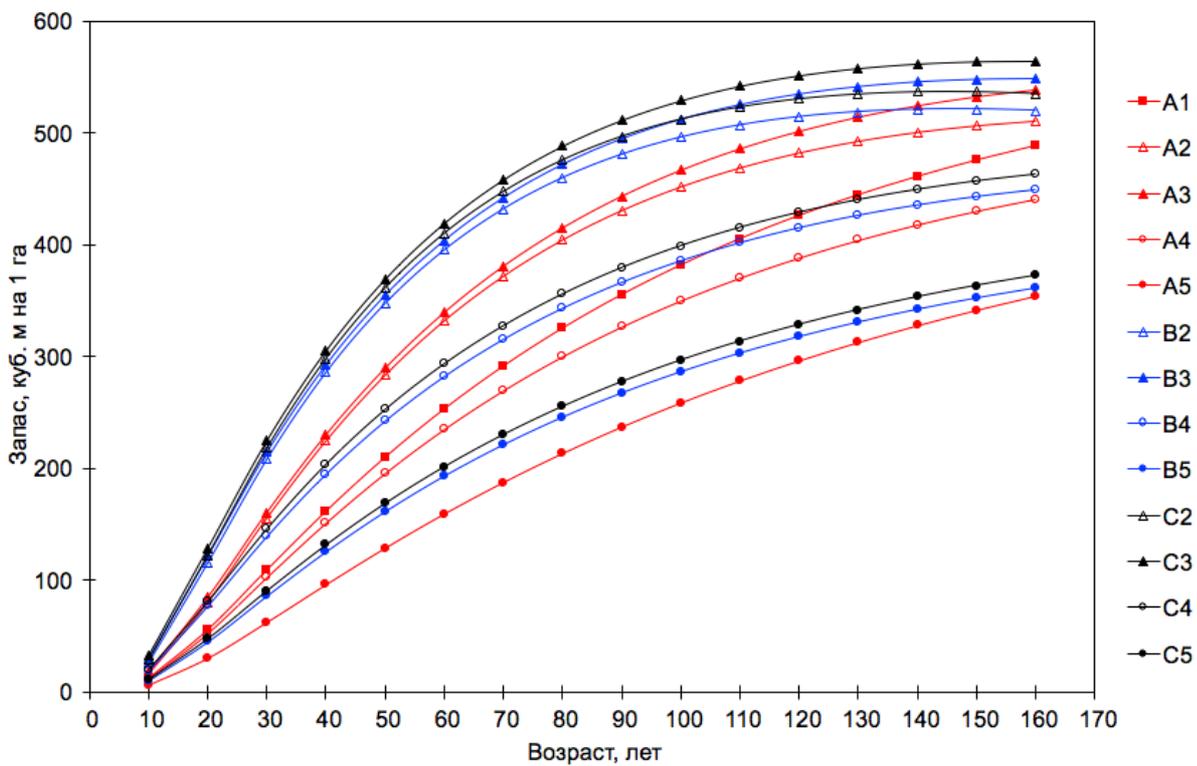


Рис. 3.3. Ход роста сосновых древостоев по запасу в разных типах лесорастительных условий

Таблица 3.1

Фрагмент таблиц хода роста сосновых древостоев в мезо-гигрофильных субориях (ТЛУ – В3)

Возраст, лет	Высота, м		Средний диаметр, см	Число деревьев, шт. га ⁻¹	Сумма площадей сечений, м ² ·га ⁻¹	Видовое число	Видовая высота, м	Объем ствола среднего дерева, м ³	Запас, м ³ ·га ⁻¹	Прирост по запасу, м ³ ·га ⁻¹ ·год ⁻¹		Общая продуктивность, м ³ ·га ⁻¹	Прирост по общей продуктивности, м ³ ·га ⁻¹ ·год ⁻¹		Отпад	
	средняя	верхняя								текущий	средний		текущий	средний	число стволов, шт. га ⁻¹ ·год ⁻¹	объем, м ³ ·га ⁻¹ ·год ⁻¹
10	3,8	5,8	3,2	10620	8,6	0,903	3,5	0,0028	30	6,9	3,0	33	7,1	3,3	1062	0,3
20	9,1	12,5	7,6	4538	20,7	0,645	5,9	0,0268	122	9,2	6,1	142	11,3	7,1	401	1,8
30	13,4	17,0	11,8	2592	28,1	0,567	7,6	0,0827	214	8,5	7,1	259	11,2	8,6	140	2,5
40	16,8	20,2	15,5	1744	32,8	0,529	8,9	0,1677	292	7,0	7,3	365	9,8	9,1	65	2,8
50	19,5	22,5	18,8	1293	36,0	0,506	9,8	0,2742	355	5,6	7,1	456	8,4	9,1	36	2,9
60	21,5	24,2	21,8	1022	38,3	0,490	10,5	0,3950	404	4,4	6,7	534	7,2	8,9	22	2,9
70	23,1	25,4	24,5	844	39,9	0,479	11,1	0,5237	442	3,4	6,3	601	6,2	8,6	15	2,8
80	24,3	26,3	27,0	719	41,1	0,471	11,5	0,6558	472	2,6	5,9	658	5,4	8,2	11	2,8
90	25,3	27,0	29,2	628	42,1	0,465	11,8	0,7876	495	2,0	5,5	708	4,7	7,9	8	2,7
100	26,0	27,5	31,2	559	42,8	0,460	12,0	0,9167	512	1,5	5,1	751	4,1	7,5	6	2,6
110	26,5	27,9	33,1	504	43,4	0,456	12,1	1,0414	525	1,1	4,8	789	3,6	7,2	5	2,5
120	26,9	28,1	34,8	461	43,8	0,453	12,2	1,1604	535	0,8	4,5	823	3,2	6,9	4	2,4
130	27,2	28,3	36,3	425	44,1	0,451	12,3	1,2730	541	0,5	4,2	853	2,8	6,6	3	2,3
140	27,4	28,4	37,8	396	44,4	0,449	12,3	1,3789	545	0,3	3,9	880	2,5	6,3	3	2,3
150	27,5	28,4	39,1	371	44,5	0,447	12,3	1,4778	548	0,1	3,7	904	2,3	6,0	2	2,2
160	27,5	28,4	40,3	349	44,7	0,446	12,3	1,5697	548	0,0	3,4	925	2,1	5,8	2	2,1

По уравнению (3.5) для отдельных типов лесорастительных условий получаем лесотипологическую шкалу хода роста по запасу чистых, максимально сомкнутых сосновых древостоев (рис. 3.3).

Так, на основании выявленных закономерностей хода роста и продуктивности чистых сосновых древостоев составлены таблицы хода роста для мезо-гигрофильных суборей В3 (таблица 3.1). Данные таблицы положены в условия задачи по оптимизации промежуточного и главного пользования, изложенной в разделе 4.2 учебного пособия.

Моделирование хода роста древостоев разного породного состава по типам леса в разных ТЛУ

В условиях мезофильных сложных суборей формируются три типа леса ельник и сосняк кисличный и ельник черничный. Эти условия благоприятны для произрастания 15 лесообразующих пород: берёзы, вяза, дуба черешчатого порослевого и семенного происхождения, ели, ивы древовидной и козьей, клёна остролистного, липы, ольхи серой и чёрной, осины, сосны и ясеня. Наряду с типами леса они закодированы бинарными переменными, представленными в матрице (табл. 3.3)

Конкретная комбинация сочетаний древесных пород в стадии молодняка позволяет проследить процесс естественного формирования с возрастом смешанных древостоев любого состава в начальном возрасте. Описать всё разнообразие комбинаций древесных пород по типам леса позволяет статистические модели синергического сочетания бинарных переменных (табл. 3.3) с полиноми-логарифмической функцией роста. Так были получены уравнения регрессии для средней высоты (3.6) и среднего диаметра (3.7) всей совокупности древесных пород, произрастающих в трёх типах леса. Всего получено 45 линий регрессии по каждому показателю. Для наглядности закономерностей изменения средних высот составляющих пород на рисунке 3.4 приведены линии регрессии, относящиеся к ельнику кисличному. Аналогичным образом показана возрастная динамика и ранжирование линий регрессии среднего диаметра древесных пород,

образующих элементы леса в ельниках кисличных (рис. 3.5). Ранжированный ряд древесных пород выглядит следующим образом: осина, дуб семенной, дуб порослевой, ель, клён, клён остролистный, берёза, ясень, сосна, ольха серая, липа, вяз, ольха чёрная, ива древовидная, ива козья.

Таким образом, в самых благоприятных лесорастительных условиях естественным образом формируются самые сложные по породному составу древостои. Не совпадение очередности древесных пород в ранжированных рядах роста по средней высоте и среднему диаметру указывает на необходимость учёта этого факта при разработке экологических лесотаксационных нормативов возрастной динамики роста и продуктивности смешанных древостоев.

$$\begin{aligned}
 H_{C3} = \exp & (-1,06093 + 1,27680 \ln A - 0,01410 \ln^3 A + \\
 & + 0,13958 \ln P + \ln A (0,01188 X_1 + 0,02801 X_2) - 0,01444 \ln^2 A X_1 + \\
 & + \ln^3 A (0,00229 X_1 - 0,00138 X_2) + \ln A (0,03492 Z_1 - 0,02804 Z_2 + \\
 & + 0,02731 Z_3 - 0,12990 Z_4 + 0,04694 Z_5 + 0,01806 Z_6 - 0,00035 Z_7 + \\
 & + 0,02996 Z_8 + 0,02117 Z_9 + 0,01604 Z_{10} + 0,02283 Z_{11} + \\
 & + 0,01801 Z_{12} - 0,02731 Z_{13} - 0,02711 Z_{14}) + \ln^3 A (-0,00308 Z_1 - \\
 & - 0,00008 Z_2 - 0,00354 Z_3 + 0,00538 Z_4 - 0,00542 Z_5 - 0,00602 Z_6 - \\
 & - 0,00163 Z_7 - 0,00264 Z_8 - 0,00248 Z_9 + 0,00297 Z_{10} - \\
 & - 0,00248 Z_{11} - 0,00060 Z_{12} + 0,00058 Z_{13} + 0,00159 Z_{14})
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 R^2 = 0,946; m_R = \pm 0,099; F = 8987,2; t = /54,9; 147,3; 54,7; 29,3; 0,4; 3,6; \\
 0,9; 1,1; 3,4; 1,8; 3,6; 0,9; 32,2; 9,1; 0,3; 0,5; 3,1; 4,1; 3,3; 5,6; 4,8; \\
 4,8; 1,4; 2,3; 2,4; 24,5; 12,7; 1,1; 3,6; 3,4; 6,9; 8,5; 10,1; 2,5; 1,9/
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{C3} = \exp & (-1,33995 + 1,36497 \ln A - 0,06915 \ln^2 A + \\
 & + 0,04898 \ln P + \ln A (-0,04653 X_1 + 0,04218 X_2) + 10,01059 \ln^2 A X_1 + \\
 & + \ln A (0,08520 Z_1 - 0,03889 Z_2 + 0,16471 Z_3 - 0,08887 Z_4 + \\
 & + 0,07827 Z_5 + 0,07186 Z_6 - 0,05199 Z_7 - 0,01315 Z_8 + \\
 & + 0,03070 Z_9 + 0,00442 Z_{10} + 0,07549 Z_{11} - 0,01797 Z_{12} + \\
 & + 0,033005 Z_{13} + 0,043525 Z_{14}) + \ln^2 A (-0,021293 Z_1 + \\
 & + 0,012360 Z_2 - 0,036992 Z_3 + 0,018262 Z_4 - 0,027292 Z_5 - \\
 & - 0,027377 Z_6 + 0,011341 Z_7 + 0,004308 Z_8 - 0,009967 Z_9 - \\
 & - 0,004451 Z_{10} - 0,020749 Z_{11} + 0,013957 Z_{12} - 0,006099 Z_{13} - \\
 & - 0,007200 Z_{14}))
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 R^2 = 0,940; m_R = \pm 0,131; F = 7797,4 \text{ при } P < 0,05; t = /39,4; 65,7; 21,8; \\
 7,8; 4,6; 2,2; 4,5; 2,1; 1,8; 0,6; 2,2; 9,2; 6,3; 0,6; 1,1; 0,5; 2,4; 0,4; \\
 7,8; 2,0; 2,4; 0,9; 1,7; 0,7; 2,3; 8,1; 7,5; 0,7; 0,8; 0,6; 3,0; 1,4; 8,7; 6,2; \\
 1,9; 0,6/
 \end{aligned}$$

Таблица 3.2

**Кодирование типов леса и древесных пород, произрастающих в
условиях мезофильных сложных суборей ТЛУ- С2**

Тип леса	Код породы	Блочные фиктивные переменные															
		X1	X2	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14
Ельник кисличный	Б	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	В	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Д	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	ДН	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Е	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	ИВД	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	ИВК	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	КЛ	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	КЛО	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	ЛП	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	ОЛС	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	ОЛЧ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	ОС	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	С	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Я	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
Ельник черничный	Б	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	В	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Д	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	ДН	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Е	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	ИВД	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	ИВК	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	КЛ	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	КЛО	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	ЛП	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	ОЛС	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	ОЛЧ	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	ОС	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	С	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Я	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
Сосняк кисличный	Б	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	В	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Д	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	ДН	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Е	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	ИВД	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	ИВК	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	КЛ	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	КЛО	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	ЛП	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	ОЛС	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	ОЛЧ	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	ОС	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	С	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Я	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	

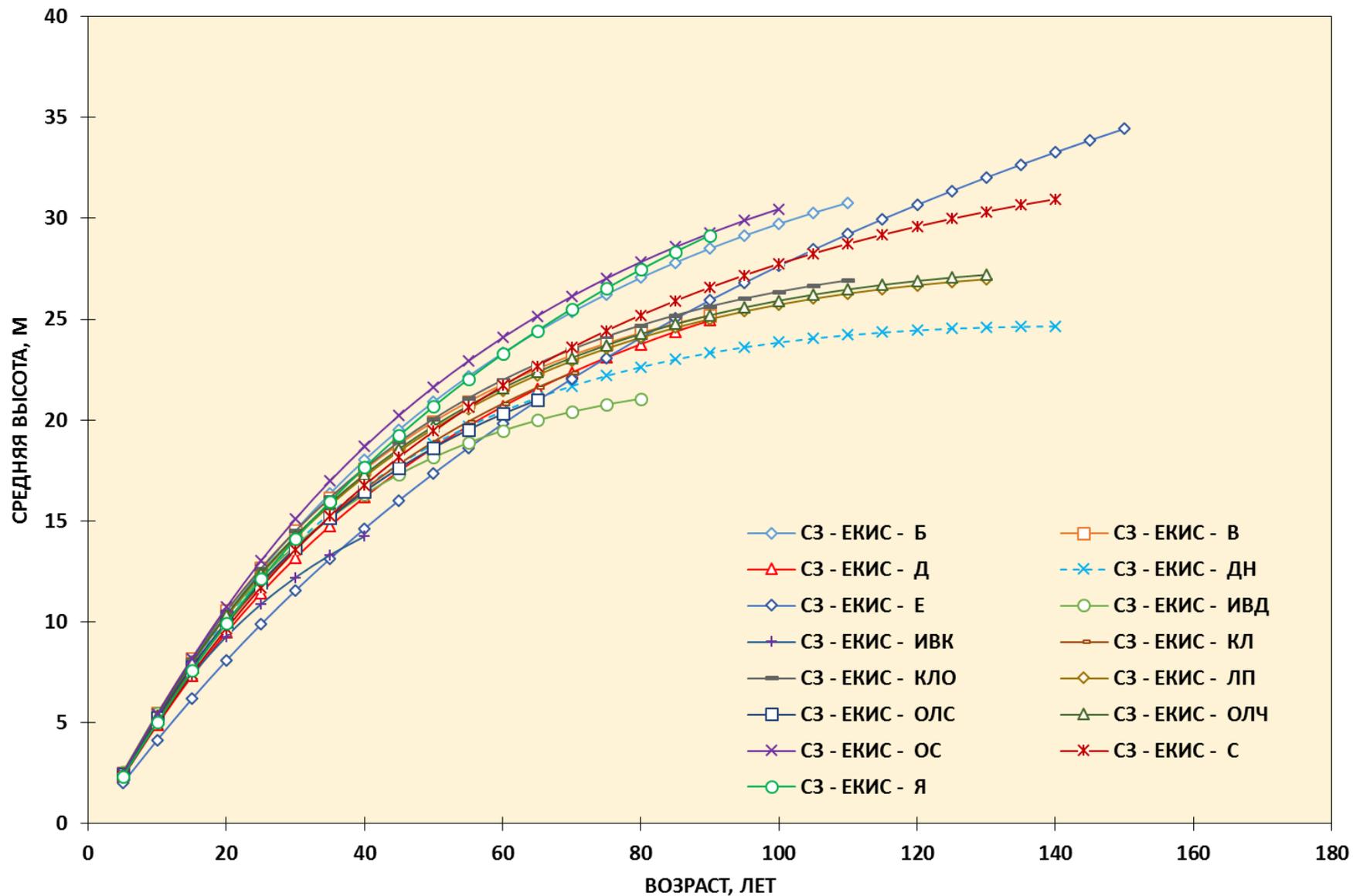


Рис. 3.4. Возрастная динамика средней высоты элементов леса в ельниках кисличных ТЛЮ С₃

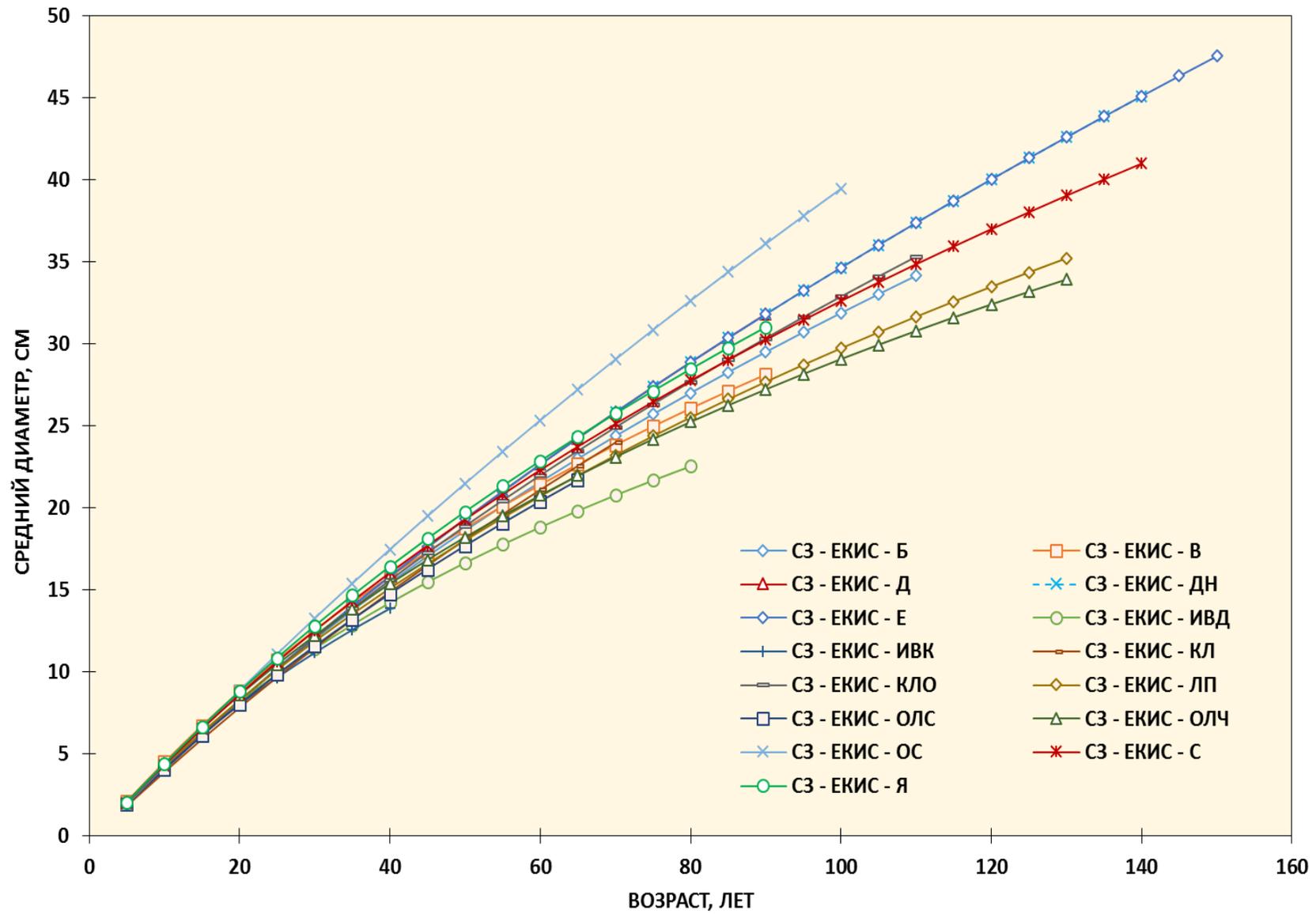


Рис. 3.5. Возрастная динамика среднего диаметра элементов леса в ельниках кисличных ТЛУ С₃

2.2. Распределение частот по классам толщины деревьев

Строение древостоев по диаметру в лесной таксации является ведущей темой при переходе от средних морфометрических показателей к их структуре, т.е. распределению частот по классам толщины деревьев от минимального до максимального диаметра.

Существующая теория строения базируется на параметрических и непараметрических методах сглаживания (аппроксимации) эмпирических распределений.

Параметрические распределения в вариационной статистике представлены двухпараметрическими кривыми нормального распределения (σ , X_{cp}) и четырех параметрическими кривыми Шарлье тип А (A_s , E , X_{cp} , σ) и более совершенными типами распределения К. Пирсона (r_3 , r_4 , X_{cp} , σ).

Непараметрические кривые представлены моделями, построенными на основе квантилей вариационного ряда.

Сложные математические интерпретации указанных распределений, хотя зачастую и демонстрирует положительные результаты аппроксимации эмпирических распределений назвать их вполне приемлемыми для прогнозирования нельзя. Существующие нормативы распределения частот оторваны от возрастной динамики древостоя, а, следовательно, не позволяют решать задачи, связанные с аппроксимацией товарной продуктивности древостоев в динамике. Теория лесной таксации располагает лишь фрагментами успешного решения этой задачи.

Поставленная задача была решена принципиально новыми методами моделирования при исполнении Государственных контрактов № МГ-06-06/63к от 3 июля 2007 года по теме: «Разработка методических рекомендаций и нормативов актуализации таксационных показателей древостоев для основных лесобразующих пород по лесным районам», а также в монографии В.К. Хлюстова (2015).

При решении этой научной задачи пришлось отказаться от параметрических методов моделирования строения древостоев и перейти на простые и более надежные оценки рядов по параметрам масштаба и формы. В качестве масштабной составляющей были приняты не ступени толщины, а средний (D), максимальный (d_{\max}) и минимальный (d_{\min}) диаметр древостоев, с заданным чётным количеством классовых промежутков 6, 8, 10, 12 и 14. Максимальное число классов -14 соответствует числу естественных ступеней толщины в теории строения древостоев по А.В. Тюрину и Н.В. Третьякову. Минимальное число классов – 6 или 8 существенно расширяет классовый интервал и огрубляет оценку формы кривой распределения. В дальнейшем, при моделировании строения древостоев будем использовать 10 классовых промежутков. Более подробную информацию о моделировании строения древостоев можно получить в двухтомной монографии В.К. Хлюстова «Комплексная оценка и управление древесными ресурсами: модели-нормативы-технологии» (2015).

Итак, при моделировании масштаба рядов распределения

Сосна

$$d_{\max}=3,8157D^{0,7766}; R^2=0,986 \quad (3.8)$$

$$d_{\min}=0,0896D^{1,323}; R^2=0,947 \quad (3.9)$$

Ель

$$d_{\max}=3,8678D^{0,7885}; R^2=0,986 \quad (3.10)$$

$$d_{\min}=0,1051D^{1,294}; R^2=0,947 \quad (3.11)$$

Дуб

$$d_{\max}=2,4914D^{0,927}; R^2=0,979 \quad (3.12)$$

$$d_{\min}=0,1415D^{1,1505}; R^2=0,739 \quad (3.13)$$

Береза

$$d_{\max}=4,20537D^{0,7565}; R^2=0,985 \quad (3.14)$$

$$d_{\min}=0,1063D^{1,2776}; R^2=0,932 \quad (3.15)$$

Осина

$$d_{\max}=3,4994D^{0,7963}; R^2=0,977 \quad (3.16)$$

$$d_{\min}=0,0760D^{1,3507}; R^2=0,906 \quad (3.17)$$

В качестве показателя формы были приняты не асимметрия (A_s или r_3) и не эксцесс (E или r_4), а процент накопленной частоты в 5-м классе толщины деревьев (R_V). Для определения показателя формы рядов распределения следует воспользоваться моделями вида:

Сосна

$$R_V = \exp(5,24472 + 0,17793 \ln d_{min} - 0,29143 \ln^2 D - 0,87059 \ln d_{max} + 0,33622 \ln^2 d_{max}) \quad (3.18)$$

$$R^2=0,995; t > t_{05}=2,0; F=632,0$$

Ель

$$R_V = \exp(4,83859 + 0,03206 \ln d_{min} - 0,17938 \ln d_{max}) \quad (3.19)$$

$$R^2=0,990; t > t_{05}=2,0; F=708,6$$

Дуб

$$R_V = \exp(2,77873 - 1,21244 \ln D - 0,07627 \ln^2 D + 0,03567 \ln d_{min} + 0,03996 \ln^2 d_{min} + 1,53294 \ln d_{max}) \quad (3.20)$$

$$R^2=0,999; t > t_{05}=2,0; F= 636,0$$

Береза

$$R_V = \exp(5,747898 - 0,27928 \ln^2 D + 0,187771 \ln d_{min} - 1,14912 \ln d_{max} + 0,363124 \ln^2 d_{max}) \quad (3.21)$$

$$R^2=0,997; t > t_{05}=2,0; F=2468,3$$

Осина

$$R_V = \exp(6,45514 + 1,53287 \ln D - 0,53886 \ln^2 D + 0,07286 \ln^2 d_{min} - 2,70621 \ln d_{max} + 0,57467 \ln^2 d_{max}) \quad (3.22)$$

$$R^2=0,994; t > t_{05} =2,0 F=718,9$$

где:

R_V – ранг деревьев в пятом классе, %;

D – средний диаметр древостоя, см;

d_{min} – минимальный диаметр древостоя, см;

d_{max} – максимальный диаметр древостоя, см.

Построением моделей изменения относительной накопленной частоты по классам толщины деревьев от ранга деревьев в 5-м классе были получены кривые изменения формы распределения (Рис. 3.8 – 3.17).

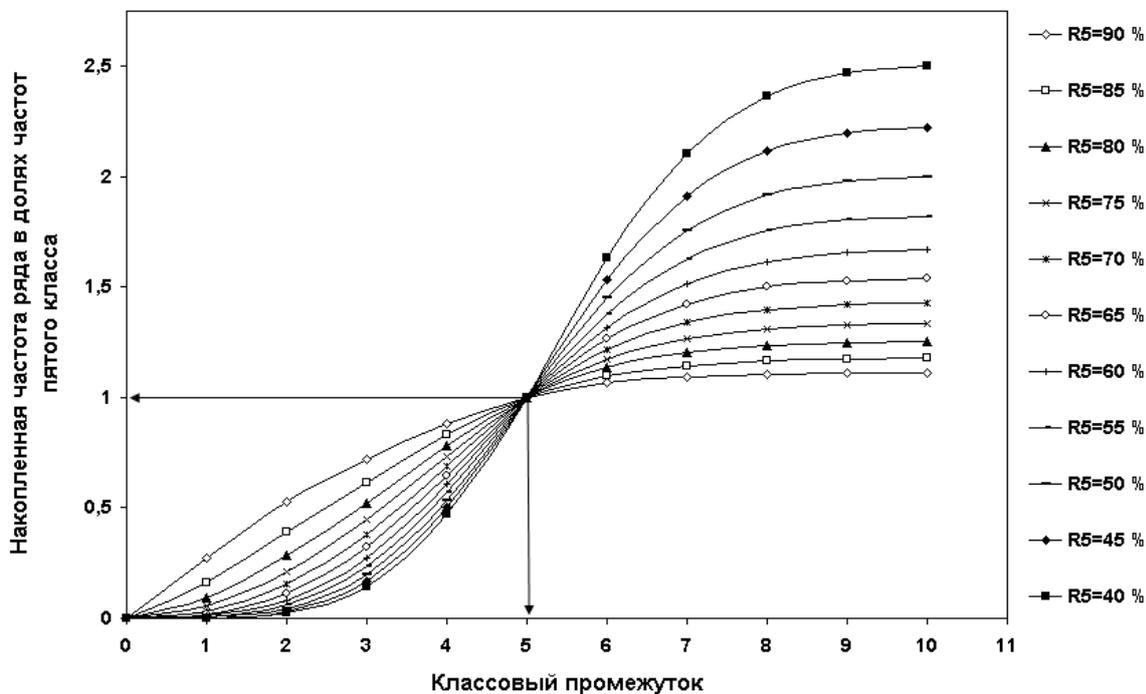


Рис. 3.8. Изменение относительной накопленной частоты по классам толщины деревьев (классовый промежуток) для различных рангов деревьев (R5) в пятом классе.

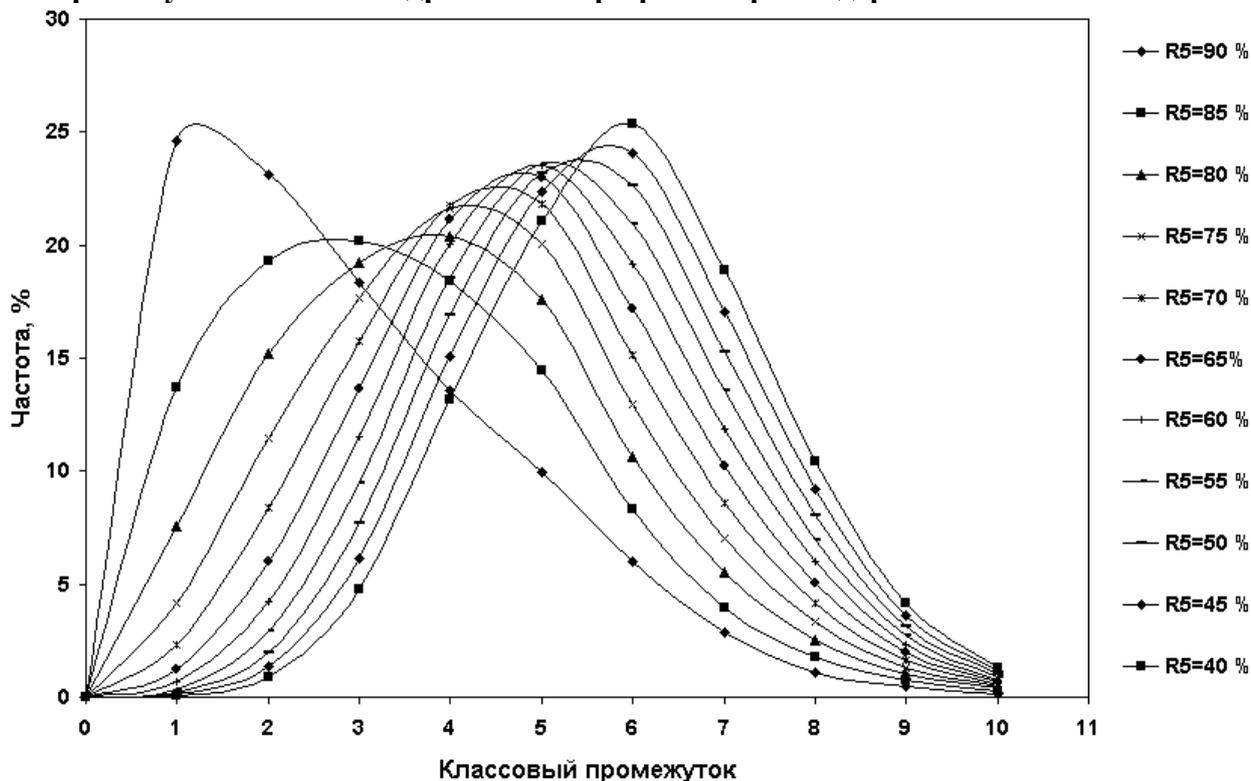


Рис. 3.9. Распределение частот по классам толщины деревьев (классовый промежуток) для различных рангов деревьев (R5) в пятом классе.

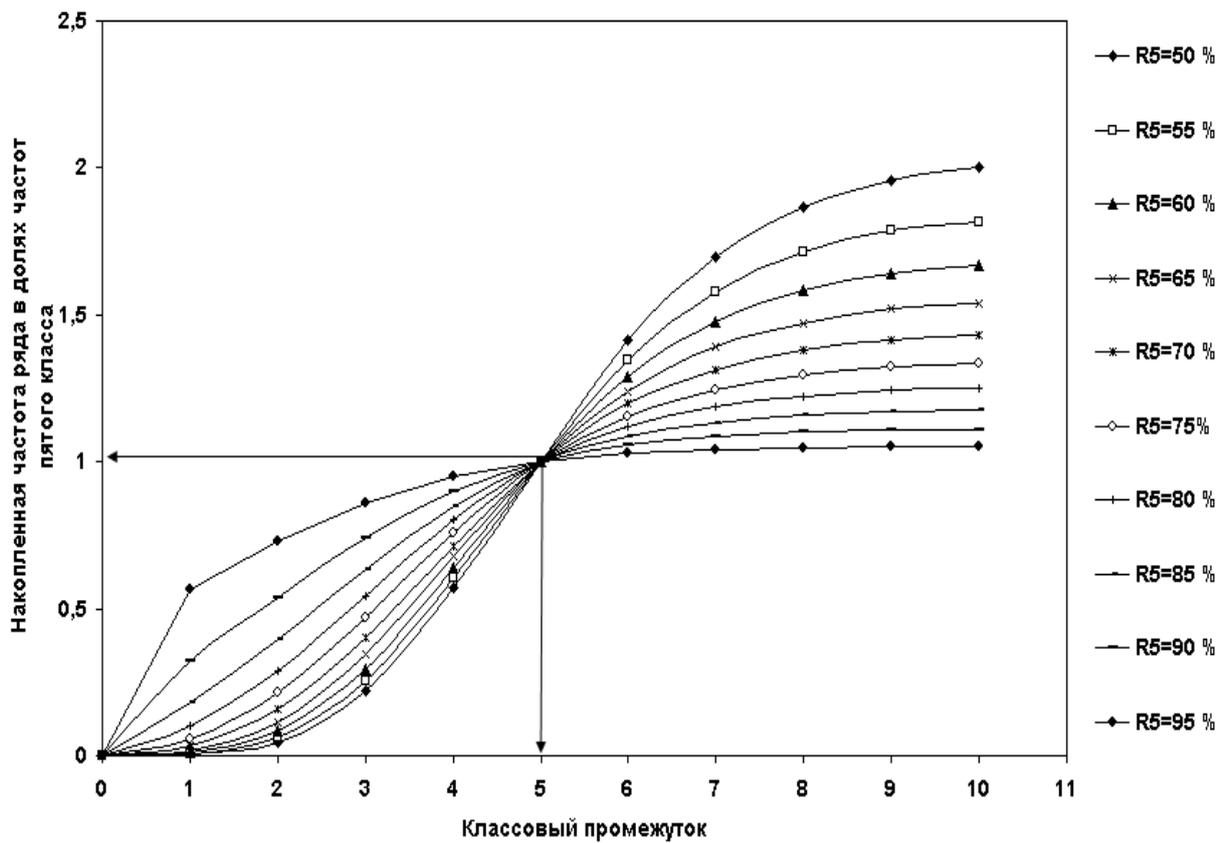


Рис. 3.10. Изменение относительной накопленной частоты по классовой промежуток еловых древостоев при разном ранге деревьев в пятом классе.

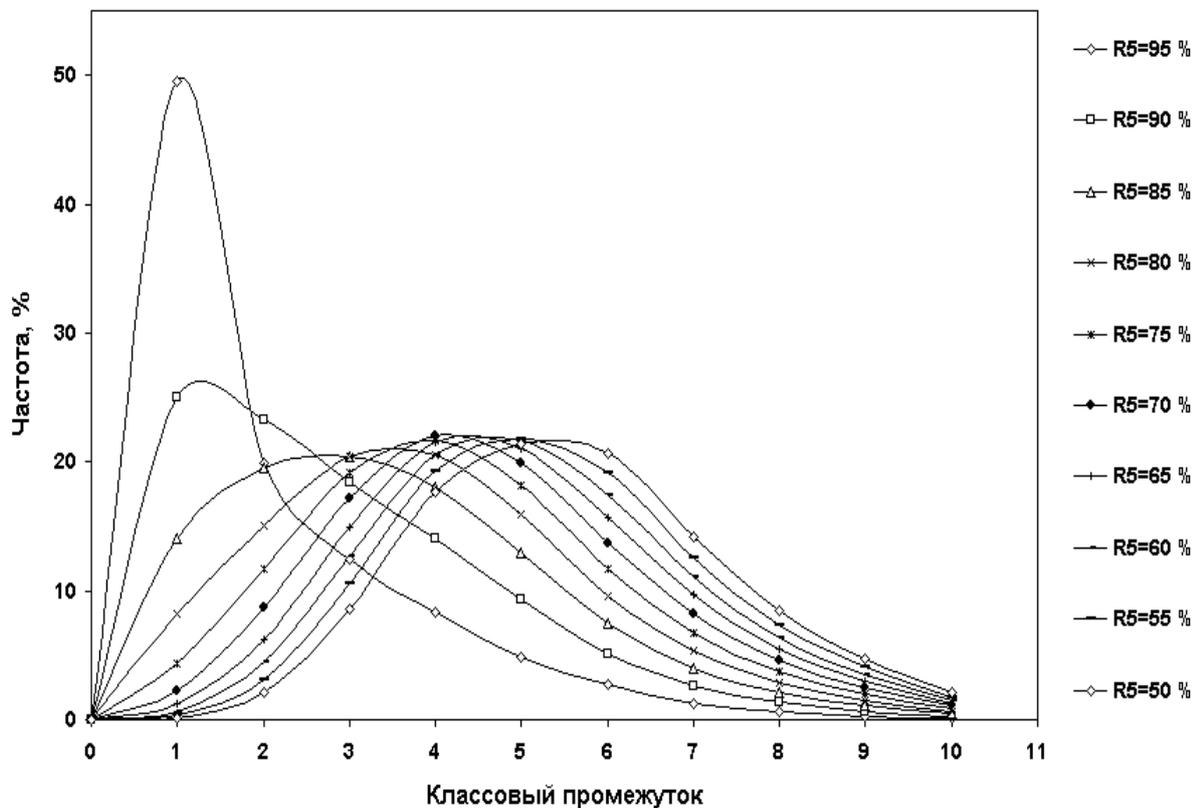


Рис. 3.11. Распределение частот по классовой промежуток еловых древостоев при разном ранге деревьев в пятом классе

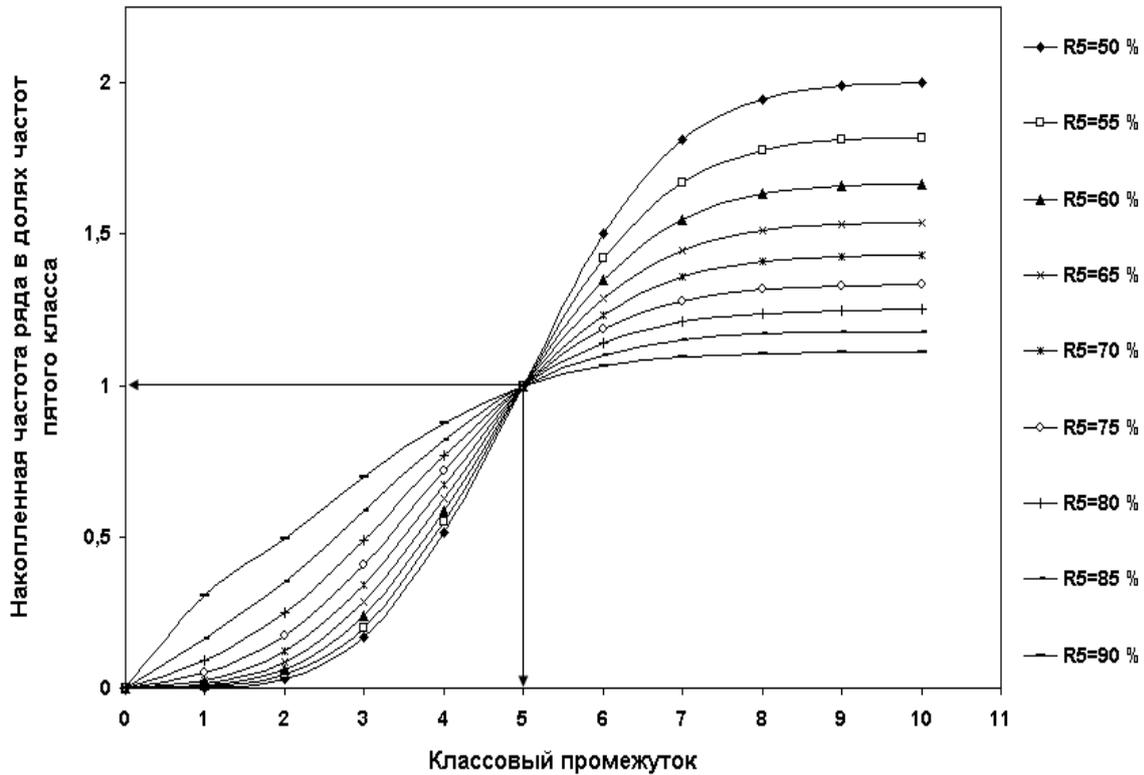


Рис. 3.12. Изменение относительной накопленной частоты по классовым промежуткам дубовых древостоев при разном ранге деревьев в пятом классе.

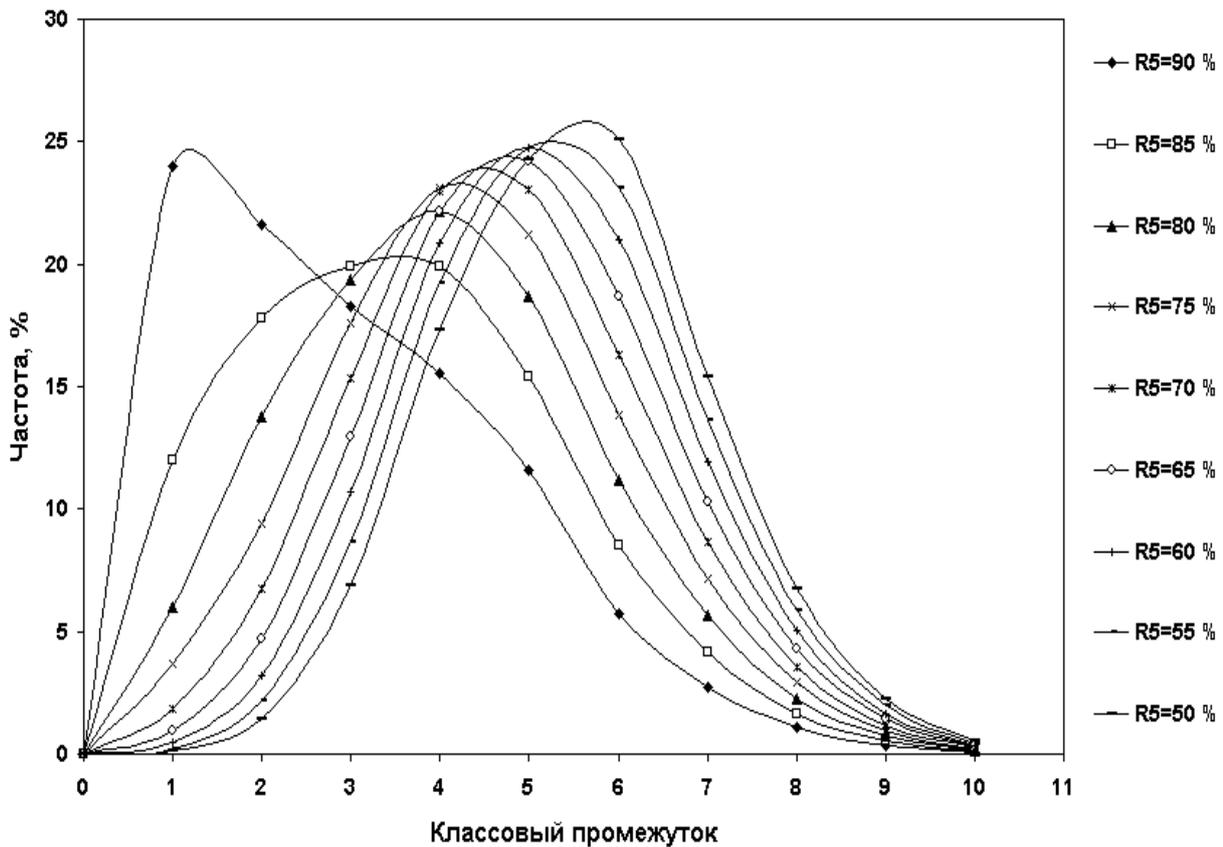


Рис. 3.13. Распределение частот по классовым промежуткам дубовых древостоев при разном ранге деревьев в пятом классе

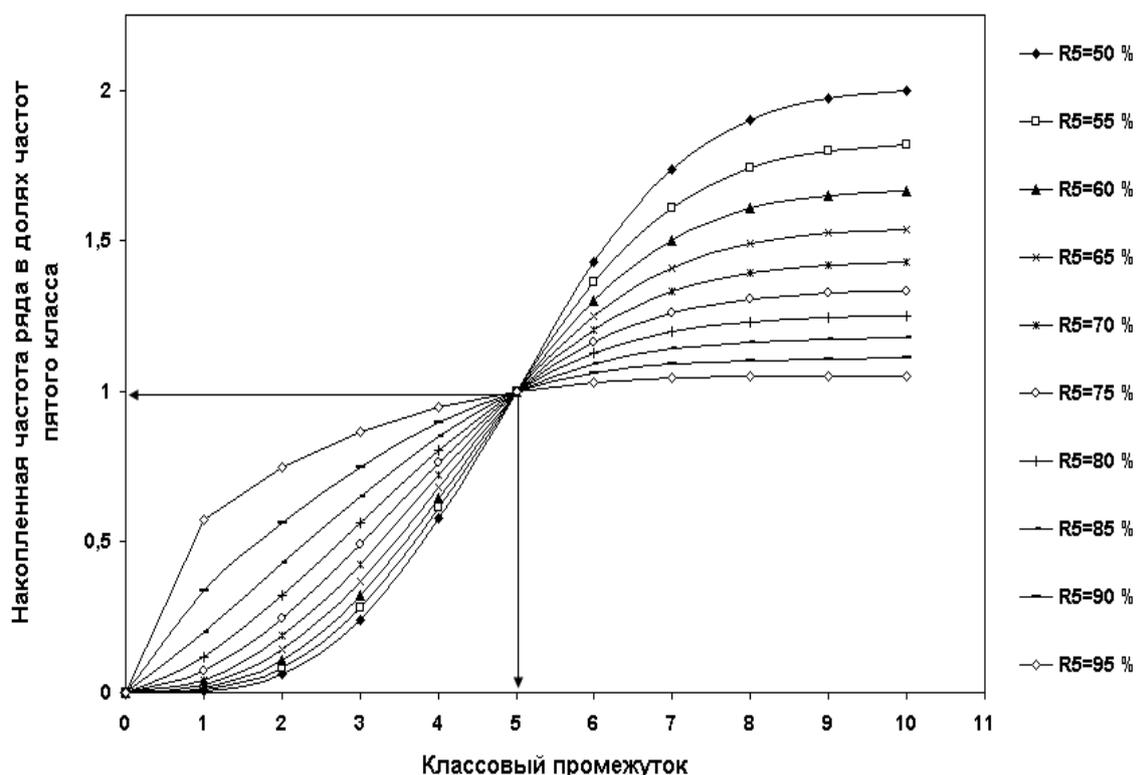


Рис. 3.14. Изменение относительной накопленной частоты по классовым промежуткам березовых древостоев при разном ранге деревьев в пятом классе

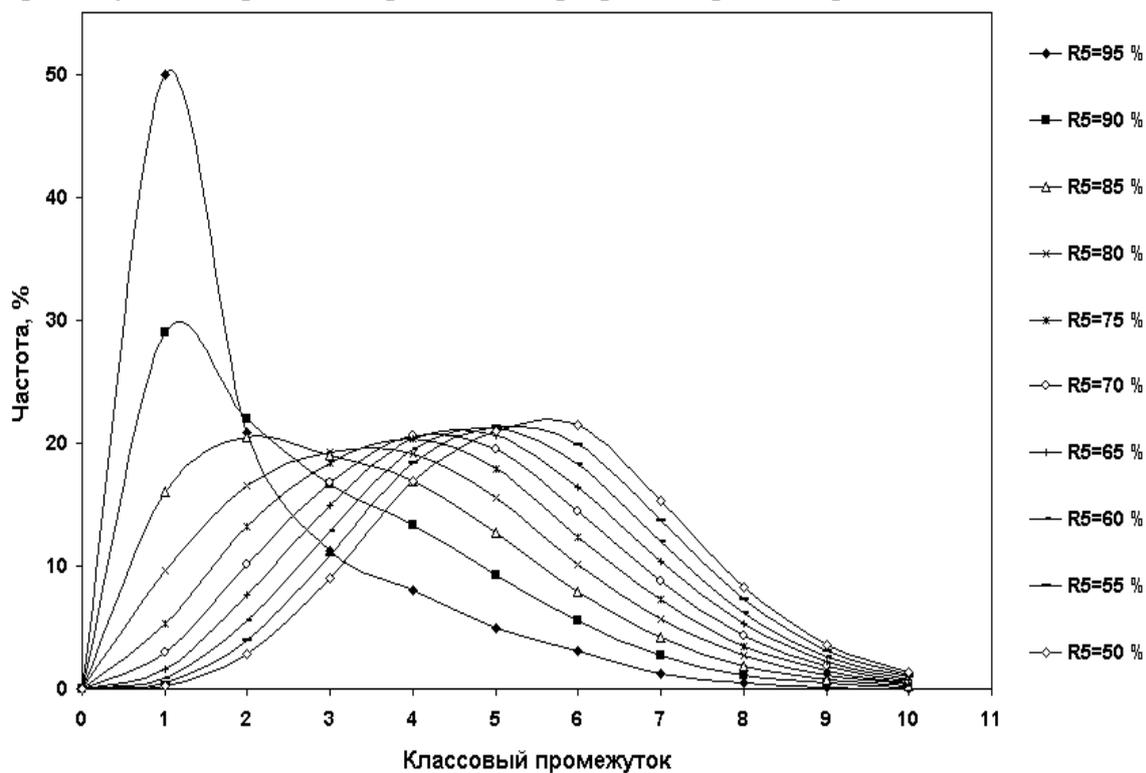


Рис. 3.15. Распределение частот по классовым промежуткам березовых древостоев при разном ранге деревьев в пятом классе

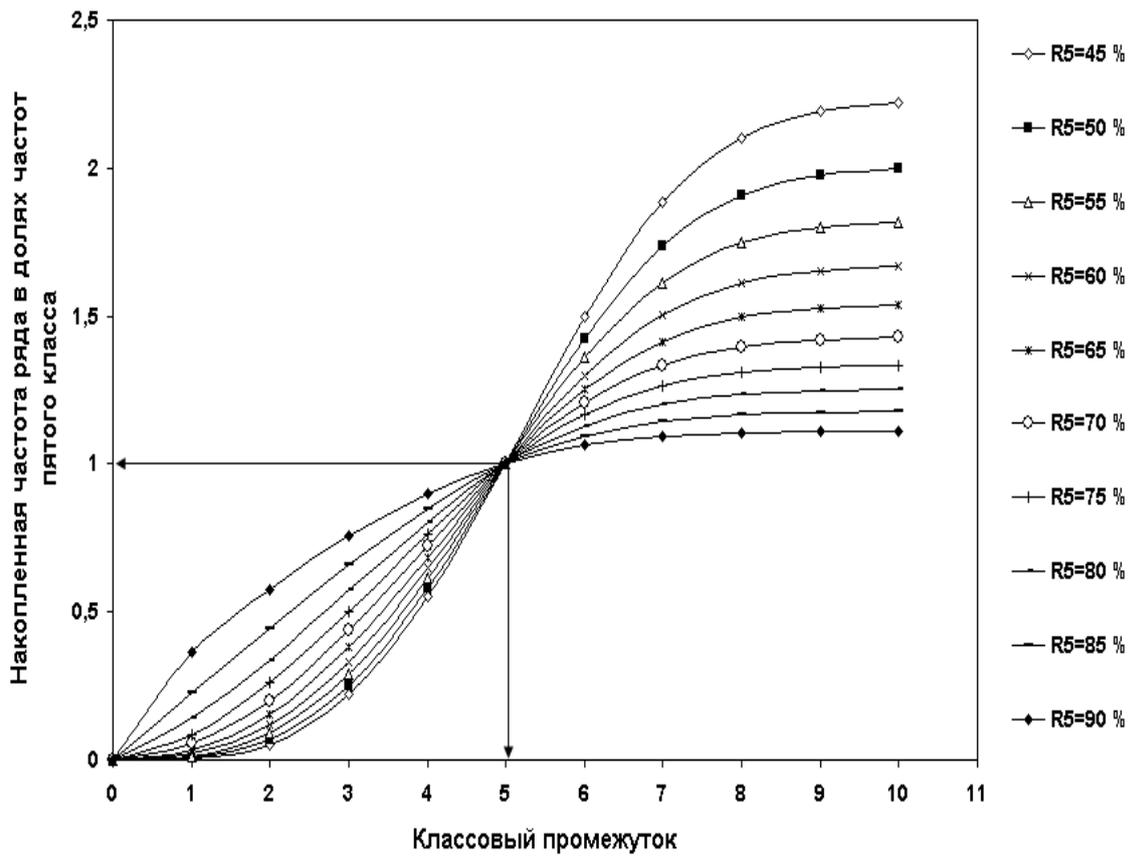


Рис. 3.16. Изменение относительной накопленной частоты по классовой промежуток осиновых древостоев при разном ранге деревьев в пятом классе

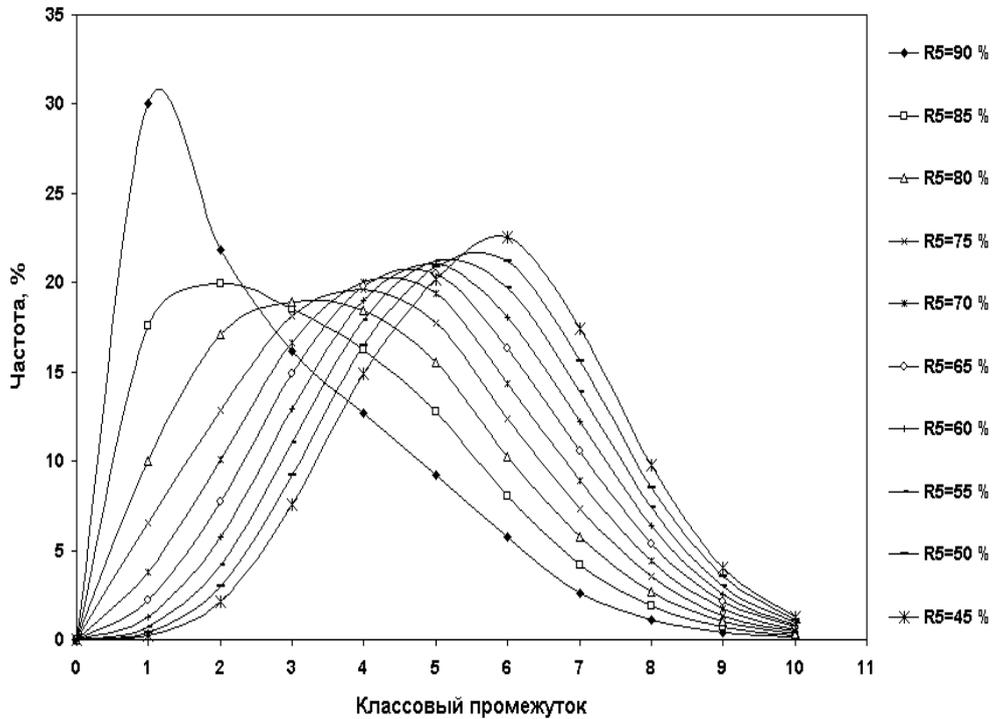


Рис. 3.17. Распределение частот по классовой промежуток осиновых древостоев при разном ранге деревьев в пятом классе

Далее, моделированием взаимосвязей d_{\min} , d_{\max} со средним диаметром ($D_{\text{ср}}$), а затем R_v с показателями масштаба рядов были получены кумуляты распределения частот в диапазоне 10 классов толщины деревьев.

Этот методический прием позволил состыковать модель, возрастной динамику среднего диаметра со строением по толщине во всем диапазоне продуктивности, полноты и возраста древостоев.

Надёжность методического решения по моделированию возрастной динамики строения древостоев должна опираться на главный критерий оценки достоверности распределения, который заключается в следующем. Запас древостоя, полученный по общеизвестной в лесной таксации формуле:

$$M = 0,0001 * \frac{\pi}{4} * D_{\text{ср}}^2 NHF \quad (3.23)$$

должен совпадать с запасом, полученным через сумму запасов, распределённых по классам или ступеням толщины. Добиться соблюдения этого принципа на основе параметрических методов распределения практически невозможно.

Решить поставленную задачу позволяет непараметрический метод, основанный на квантилях вариационного ряда. Для этого в качестве масштаба вариационного ряда следует использовать редуцированные числа минимального ($R_{d\min}$) и максимального ($R_{d\max}$) диаметров.

Минимальное редуцированное число определяется как отношение левой границы первого класса (ступени) толщины и среднеквадратического диаметра древостоя или элемента леса:

$$R_{d\min} = \frac{d_{\min}}{D_{\text{ср}}} \quad (3.24)$$

Максимальное редуцированное число диаметра определяется как отношение правой границы последнего класса (ступени) толщины и среднеквадратического диаметра древостоя или элемента леса:

$$R_{d\max} = \frac{d_{\max}}{D_{\text{ср}}} \quad (3.25)$$

Принципиально новое решение задачи представления формы кривой распределения сводится к следующему. Любой размах варьирования ряда распределения делится на две равные части. Так, при 10 классовых промежутках середина ряда соответствует пятому классу, при 12 - шестому, при 14 – седьмому и т. д. Затем накопленная частота распределения, названная в теории таксации рангом деревьев, выражается в долях частоты, соответствующей середине ряда.

Таким образом, при наличии совокупности рядов распределения получаем веер кривых. Так, на примере с 10 классовыми промежутками этот веер представлен на рисунке 3.18, внешне напоминающий «Крылья бабочки».

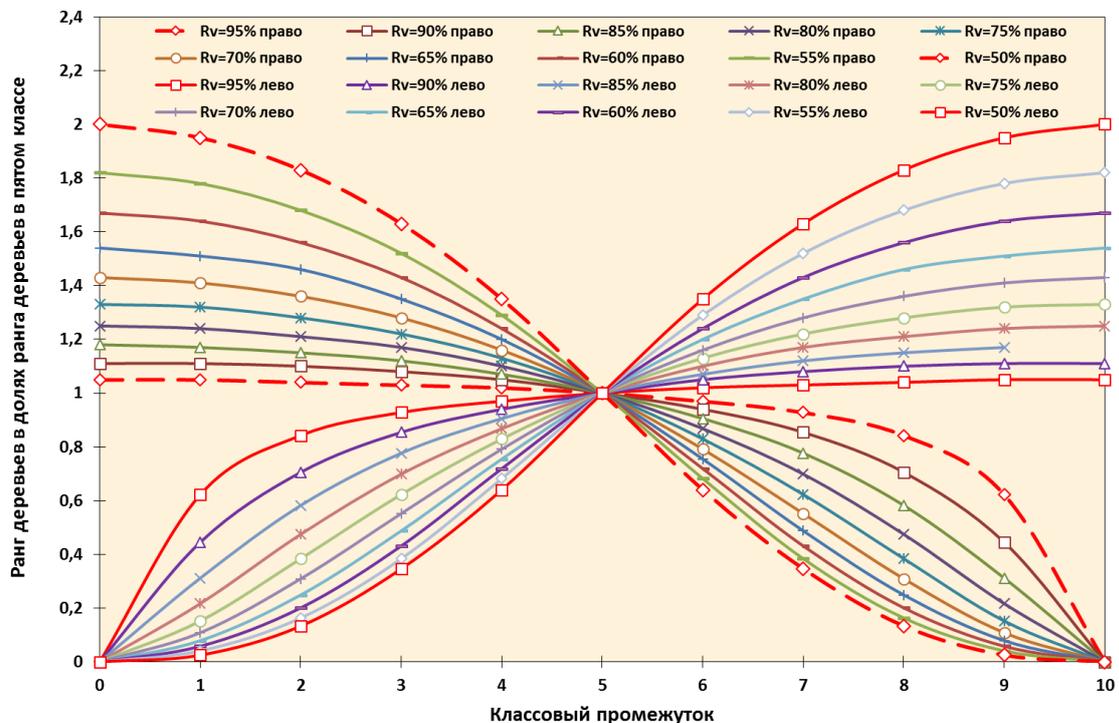


Рис. 3.18. Накопленное распределение частот в долях частот пятого класса по рангам деревьев в пятом классе от нормального распределения ($R_v=50\%$) до максимальной левосторонней ($R_v=95\%$ лево) и правосторонней ($R_v=95\%$ право) асимметрии.

Если ряд распределения имеет левостороннюю асимметрию, то накопление частот заканчивается правой границей 10 класса. В общей системе рядов распределения кривая нормального распределения

соответствует симметричной кривой с рангом деревьев в пятом классе (R_v), соответствующем 50%.

Кривые распределения с наличием правосторонней асимметрии представляются зеркальным отражением кривых с левосторонней асимметрией (рис. 3.17, 3.18).

При естественном формировании древостоев без ветровальных деревьев правосторонней асимметрии, как правило, не проявляется, поэтому ограничимся представлением кривых распределения с левосторонней асимметрией от J – образной кривой с максимальной частотой в первом классовой промежутке до кривой нормального распределения (рис. 3.20, 3.21).

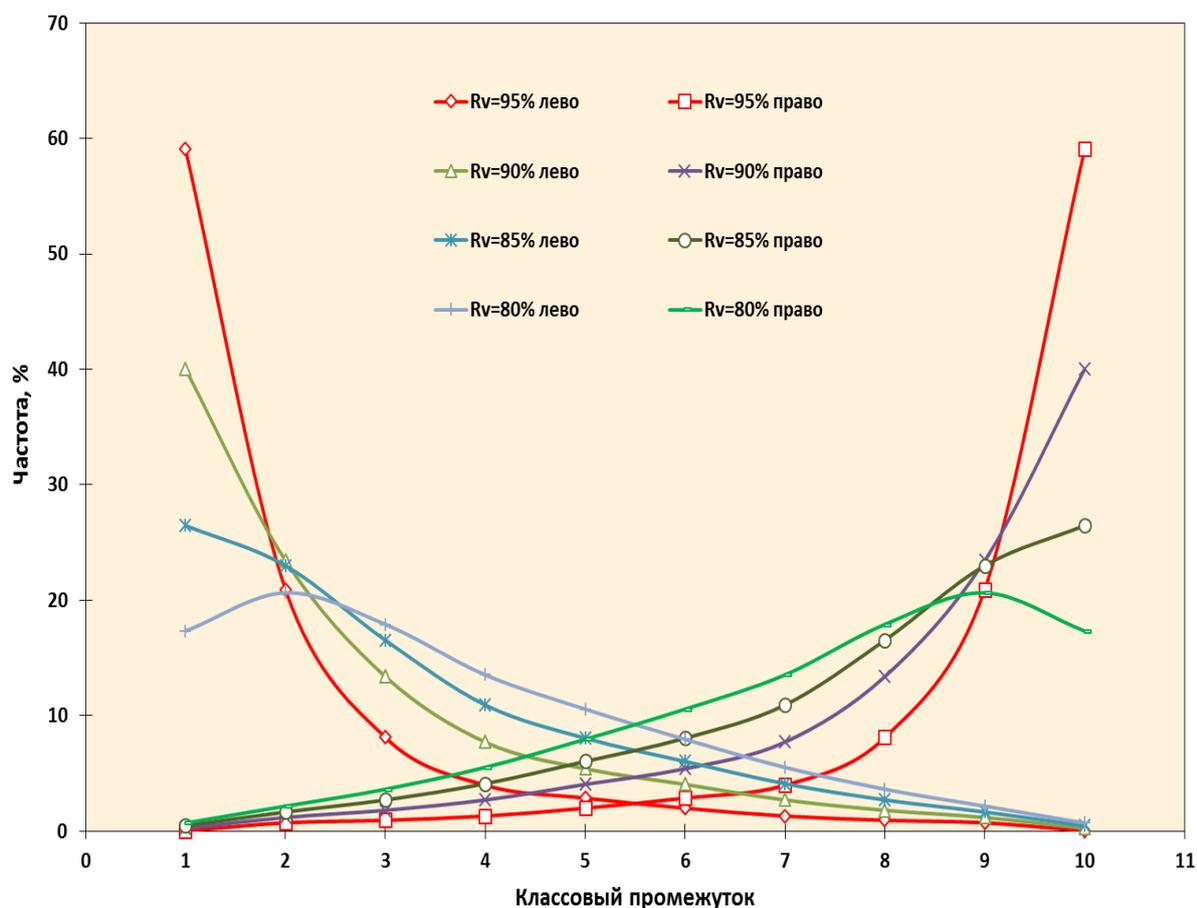


Рис. 3.19. Распределение частот с явно выраженной лево и правосторонней асимметрией по классам толщины деревьев

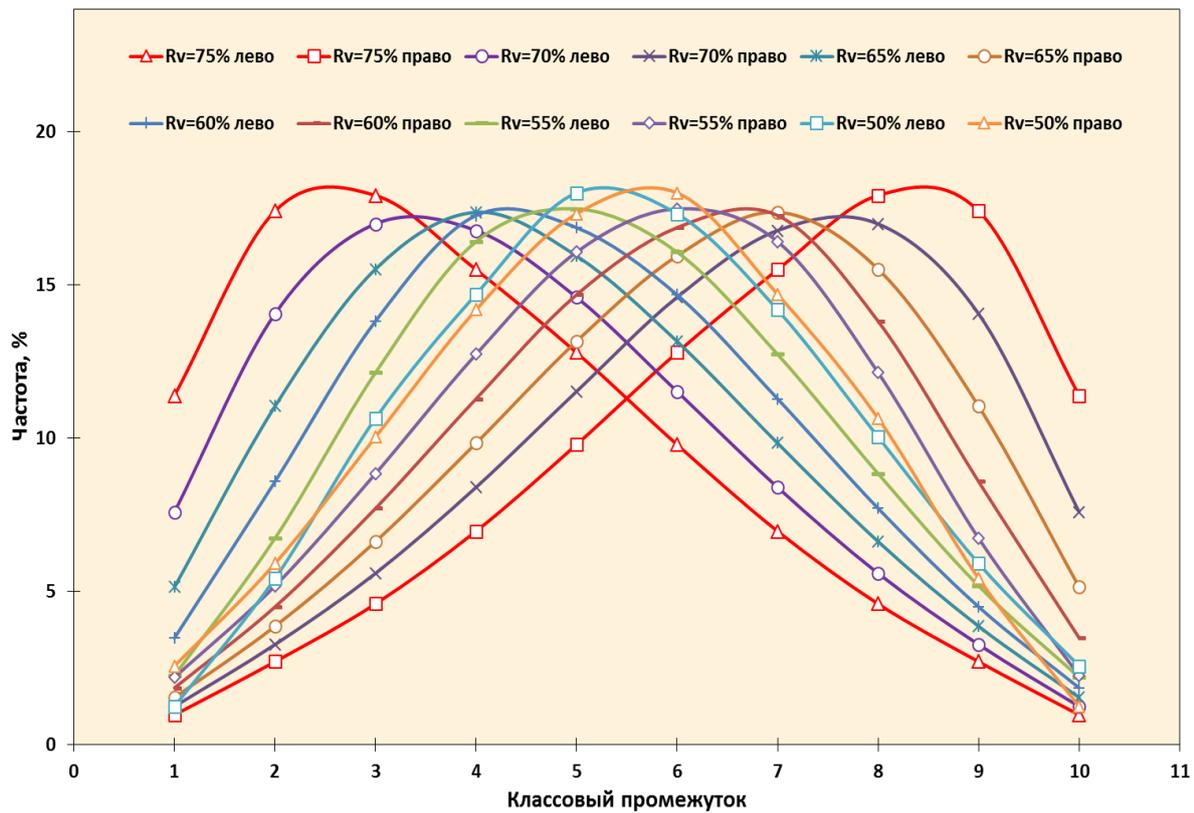


Рис. 3.20. Распределение частот с левосторонней и правосторонней асимметрией по классам толщины деревьев

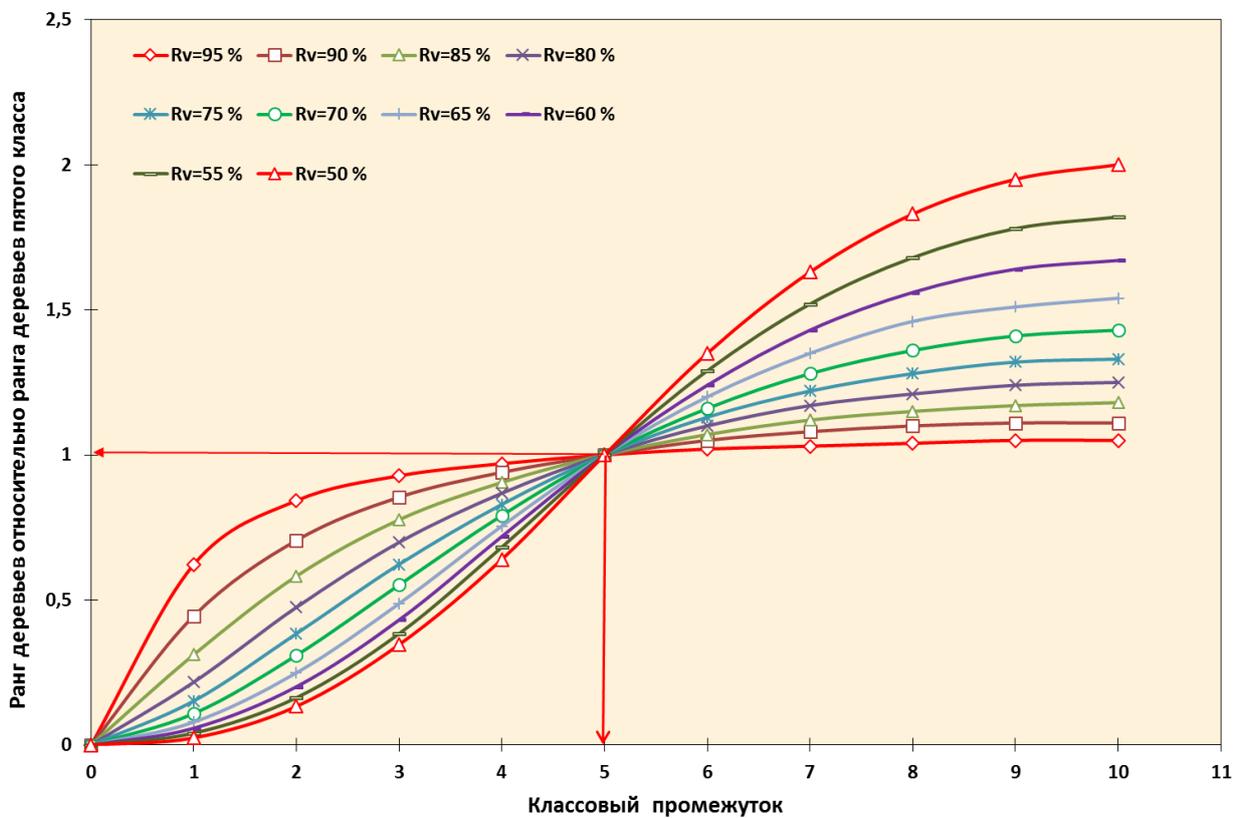


Рис. 3.21. Накопленное распределение частот в долях частот пятого класса по рангам деревьев в пятом классе от нормального распределения ($R_v=50\%$) до максимальной левосторонней ($R_v=95\%$) асимметрии

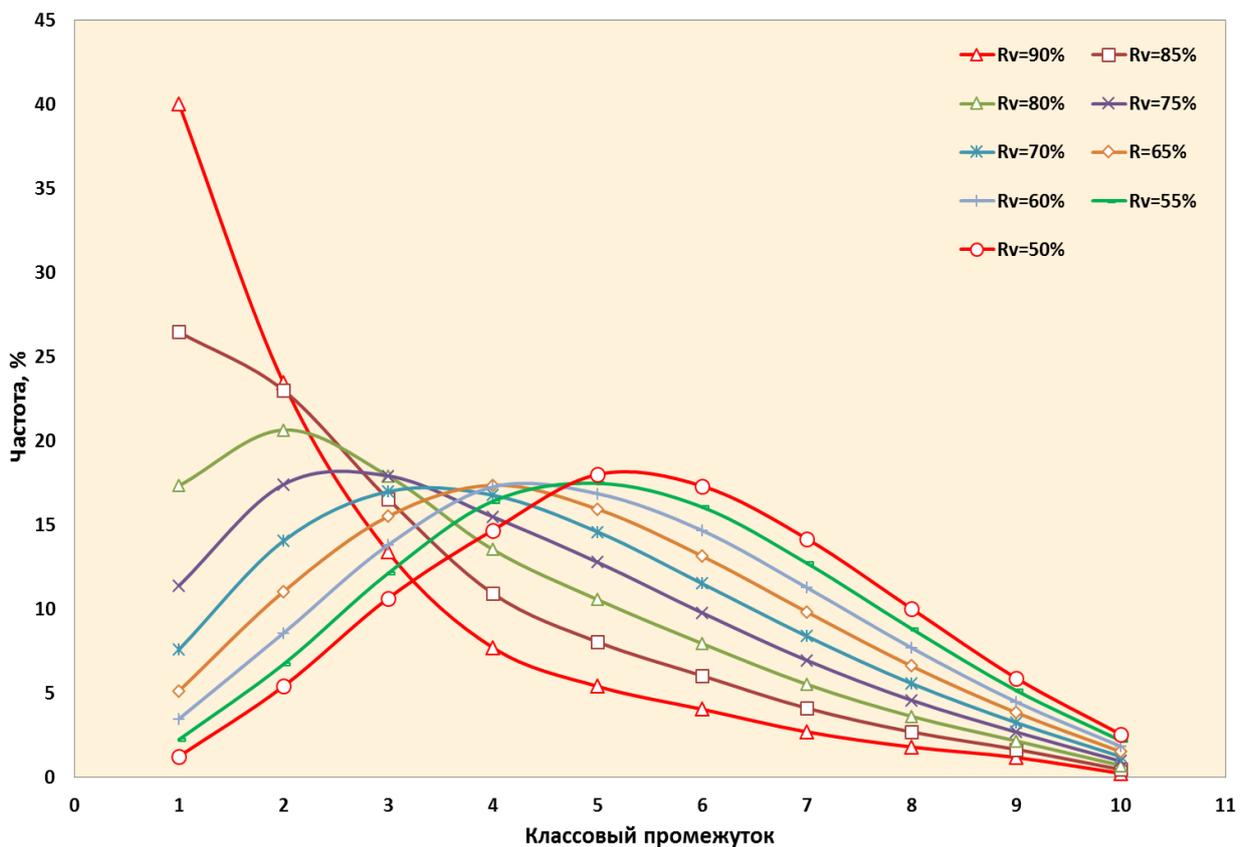


Рис. 3.22. Распределение частот с левосторонней асимметрией по классам толщины деревьев

Итак, математическая интерпретация графического представления всех форм распределения сводится к тому, чтобы описать взаимосвязь всего разнообразия форм распределения с масштабом рядов распределения. Математически она описывается взаимоувязанной системой уравнений. Так, первая часть системы представляется множественной регрессией ранга деревьев в пятом классе (R_V) вида:

$$\begin{aligned}
 R_V = & 100(-24,38823 + 12,34216 R_{dmin} + 0,01216 R_{dmin}^2 + \\
 & + 48,03800 R_{dmax} - 37,97773 R_{dmax}^2 + 15,35086 R_{dmax}^3 - \\
 & - 3,14207 R_{dmax}^4 + 0,25915 R_{dmax}^5 - 17,61762 R_{dmin} R_{dmax} + \\
 & + 9,96369 R_{dmin} R_{dmax}^2 - 2,57626 R_{dmin} R_{dmax}^3 + \\
 & + 0,25403 R_{dmin} R_{dmax}^4) \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R^2 = & 0,999; F = 773355,7 \text{ при } P < 0,05; t = |51,1; 27,5; 4,8; 45,1; \\
 & 40,2; 36,8; 34,2; 32,1; 20,7; 16,6; 13,9; 11,9|
 \end{aligned}$$

Вторая часть системы представлена в каждом классе вариационного ряда регрессией вида:

$$R_I = R_V \exp(-7175,51658 + 6699,23577 \ln R_V - 2344,83008 \ln^2 R_V + 364,29686 \ln^3 R_V - 21,18115 \ln^4 R_V) \quad (3.27)$$

$$R_{II} = R_V \exp(-834,11859 + 813,00029 \ln R_V - 297,87885 \ln^2 R_V + 48,38040 \ln^3 R_V - 2,92967 \ln^4 R_V) \quad (3.28)$$

$$R_{III} = R_V \exp(-257,60602 + 272,54728 \ln R_V - 107,67584 \ln^2 R_V + 18,70022 \ln^3 R_V - 1,20137 \ln^4 R_V) \quad (3.29)$$

$$R_{IV} = R_V \exp(-683,50001 + 647,09559 \ln R_V - 230,00555 \ln^2 R_V + 36,32788 \ln^3 R_V - 2,14908 \ln^4 R_V) \quad (3.30)$$

$$R_V = 1,0 \text{ V класс} \quad (3.31)$$

$$R_{VI} = R_V (7,2679 R_V^{-0,431}) \quad (3.32)$$

$$R_{VII} = R_V (26,0050 R_V^{-0,708}) \quad (3.33)$$

$$R_{VIII} = R_V (55,9130 R_V^{-0,874}) \quad (3.34)$$

$$R_{IX} = R_V (83,3250 R_V^{-0,960}) \quad (3.35)$$

$$R_X = R_V (100 R_V^{-1,000}) \quad (3.36)$$

Коэффициенты детерминации полученных регрессий близкие к 1,0 указывают на многомерную функциональность взаимосвязей, и, следовательно, на приближение системы к закону распределения.

Многokратная критериальная проверка изложенной системы на рядах распределения, относящихся к древостоям многих лесообразующих пород Евразии, подтвердила статистическую надёжность теоретического построения. А это в свою очередь даёт надёжный инструмент для выявления новых лесотаксационных закономерностей и разработки информационно-справочных систем нормативов роста строения и продуктивности древостоев по элементам леса.

Для того, чтобы получить возрастную динамику строения древостоев достаточно иметь линию регрессии среднего диаметра от возраста по классам высот $D = f(A)$ древостоев и размах варьирования диаметров, который аппроксимируется регрессиями аллометрического вида:

$$d_{min} = aD^b \text{ и } d_{max} = aD^b.$$

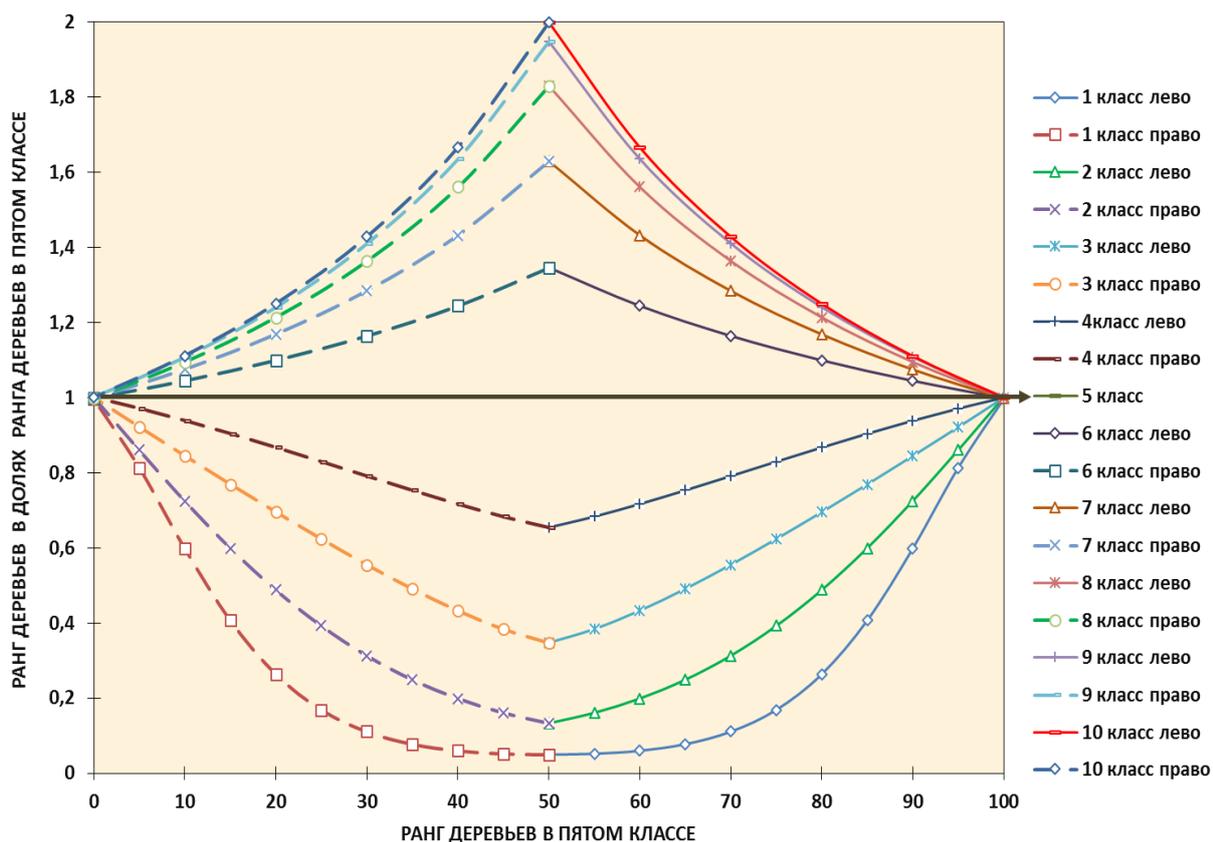


Рис. 3.23. Взаимосвязь ранга деревьев в долях ранга деревьев в пятом классе с рангом деревьев в пятом классе по классам толщины при лево и правосторонней асимметрии

В монографии В.К.Хлюстова, А.В.Лебедева (2017) «Товарно-денежный потенциал древостоев и оптимизация лесопользования» описано расширение **лишь теоретически допустимого** распределения частот за пределы реально существующих рядов при ранге деревьев в пятом классе в диапазоне от 5 до 50%.

При этом, как указано выше, форма кривой распределения определяется величиной накопленной частоты в пятом классовом промежутке. На рисунке 3.23 показана зависимость между накопленной частотой в пятом классовом промежутке и накопленными частотами в других классовых промежутках в диапазоне накопленной частоты в пятом классовом промежутке от 5% до 95%. Анализ большого количества экспериментальных материалов показывает, что этого достаточно для описания подавляющего большинства рядов распределения числа деревьев по таксационным

показателям в возрастных промежутках от молодняков до перестойных древостоев. Хотя общеизвестно, что распределение числа деревьев по толщине в спелых древостоях очень редко имеет правостороннюю асимметрию, кривые близки к закону нормального распределения, для которого ранг деревьев в пятом классе равен 50%.

Кривые накопленных частот в девятом, восьмом, седьмом и шестом классовых промежутках являются зеркальным отображением кривых накопленных частот в первом, втором, третьем и четвертом классовых промежутках соответственно относительно прямой $Y = X$. Таким образом, кривые зависимости накопленных частот в первом, втором, третьем и четвертом классовых промежутках являются вогнутыми, а в шестом, седьмом, восьмом и девятом – выпуклыми. Накопленная частота в десятом классовом промежутке равняется 100%.

На рисунке 3.23 показаны кривые накопленных частот по десяти классовым промежуткам, или кривые распределения частот в интегральном виде, в диапазоне накопленных частот в пятом классовом промежутке от 5% до 95% с шагом, равным 5%. Все представленные интегральные кривые являются возрастающими на промежутке $0 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{Z}$, и во всех случаях минимальное значение функции равно 0, а максимальное – 100%. Значения накопленных частот в классовых промежутках соответствуют значениям правых границ интервалов. От интегральных кривых был осуществлен переход к кривым в дифференциальном виде (рисунок 3.24).

Переход к кривым в дифференциальном виде был осуществлен в соответствии с правилами численного дифференцирования функций:

$$\begin{aligned} n_i &= N_i - N_{i-1}, \\ 1 \leq i \leq 10, i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где:

n – частота в классовом промежутке;

N – накопленная частота в классовом промежутке;

i – номер классового промежутка.

Полученные значения частот соответствуют серединам интервалов. Дифференциальные кривые имеют джей-образную форму при накопленной частоте в пятом классовом промежутке менее 10% (правосторонняя асимметрия) и более 90% (левосторонняя асимметрия). В случае, если накопленная частота в пятом классовом промежутке равняется 50%, то получаем симметричную кривую распределения относительно значения

$$x_{min} + 0,5(x_{max} - x_{min}).$$

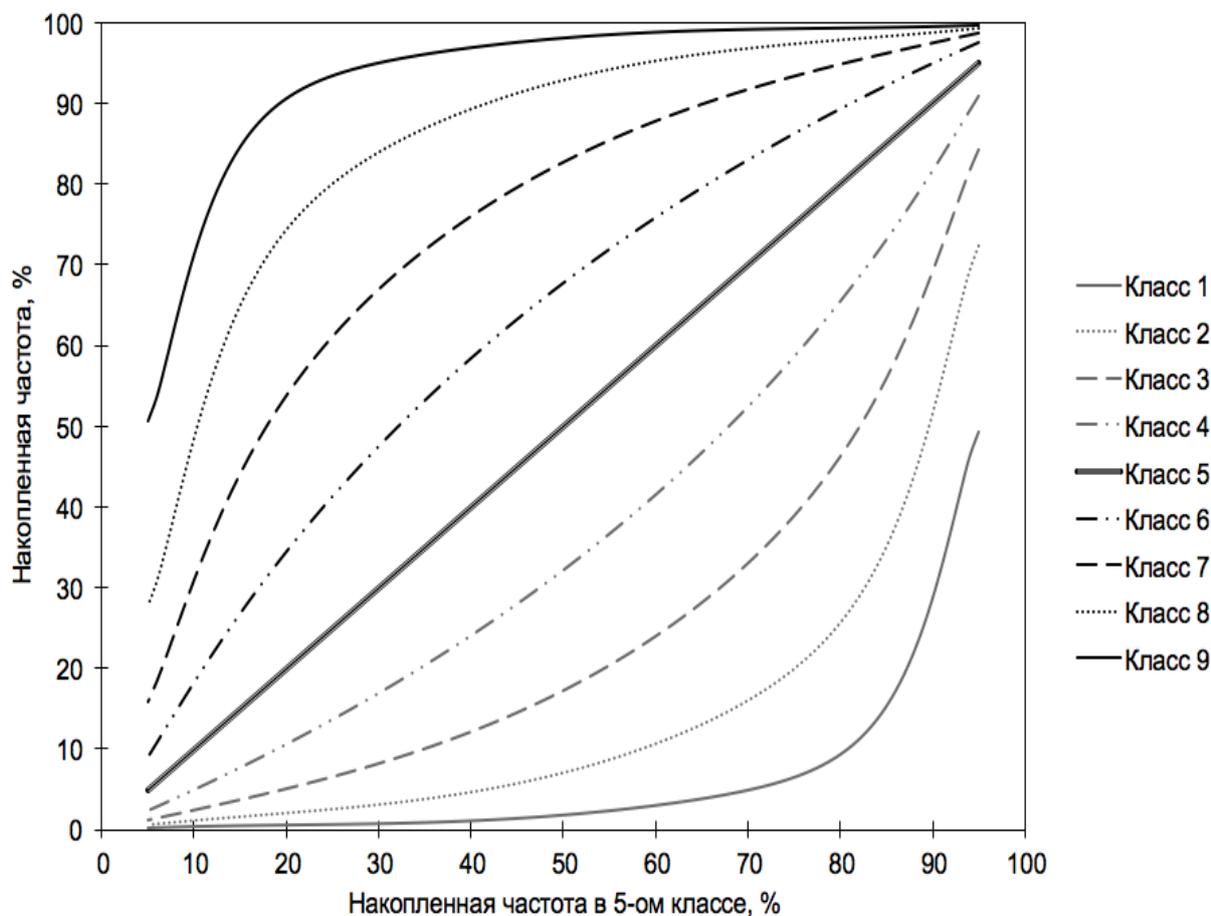


Рис. 3.23. Зависимость накопленных частот в классических промежутках от накопленной частоты в 5-ом классическом промежутке

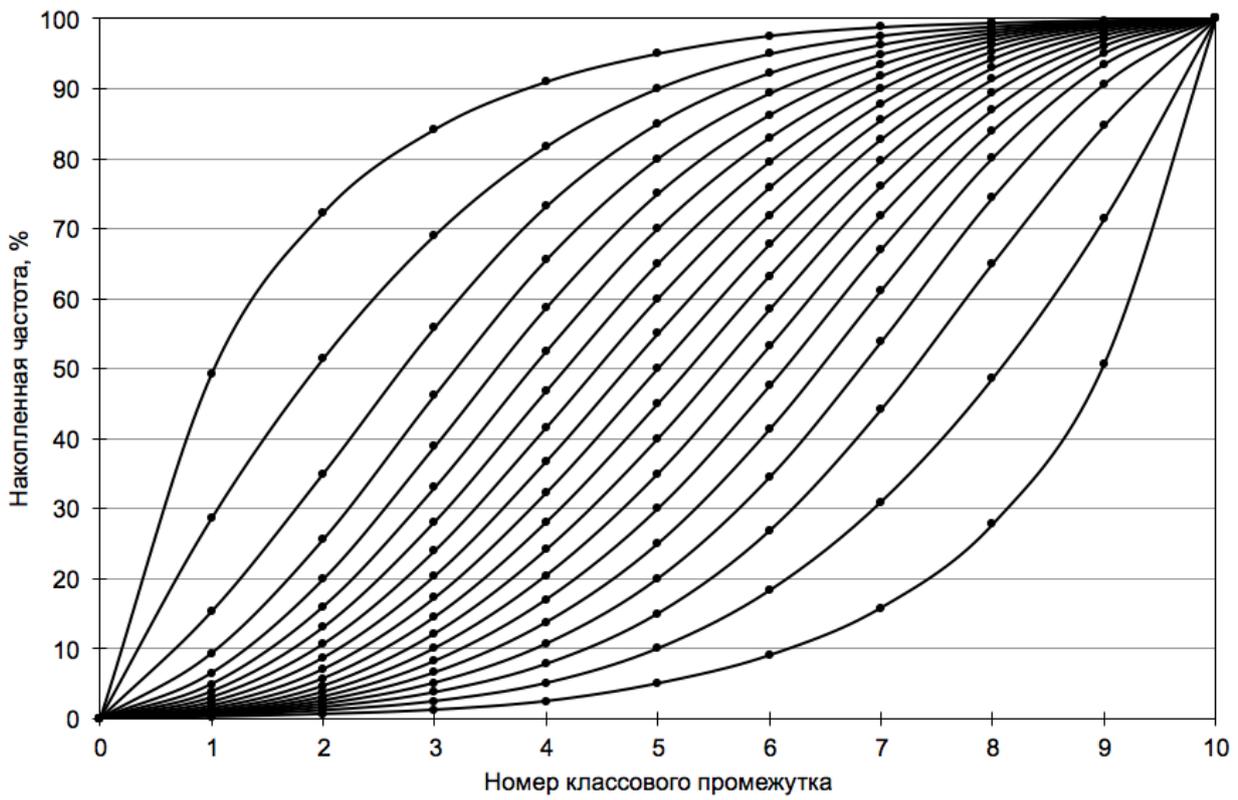


Рис. 3.24. Классово-ранговые кривые накопленных частот

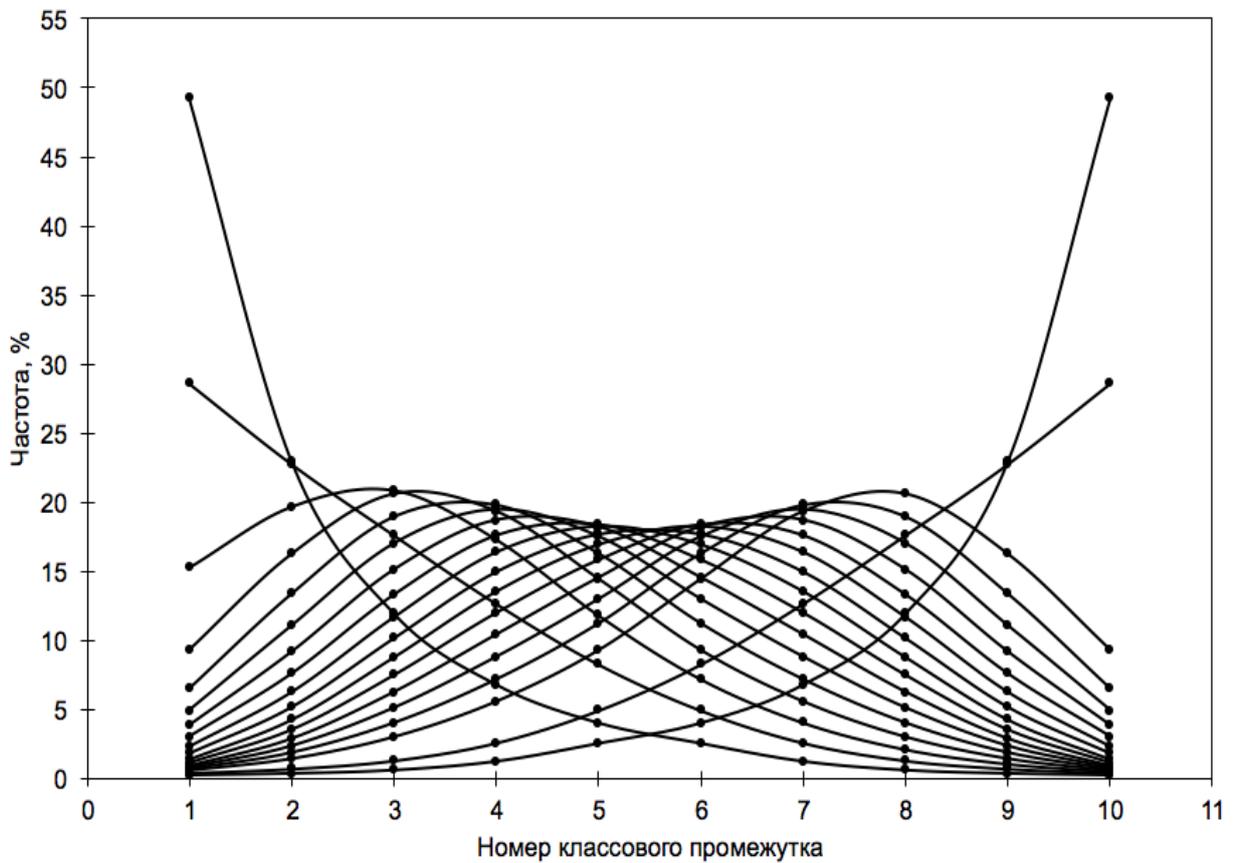


Рис. 3.25. Классово-ранговые кривые распределения частот

Изменение формы кривых распределения, как показано на рисунке 3.25, влечет за собой изменение места среднего дерева в ряду распределения и значения среднеквадратического отклонения. Например, если накопленная частота в пятом классовом промежутке составляет 95%, то ранг среднего дерева (квантиль) по данному показателю составляет 64%, если накопленная частота в пятом классовом промежутке - 70%, то ранг среднего дерева – 52%, а если накопленная частота в пятом классовом промежутке – 50%, то ранг среднего дерева – 50%.

Таким образом, предложенная система представления распределения частоты встречаемости деревьев по классам толщины позволяет решать большой спектр задач, связанных со структурой всех без исключения таксационных показателей древостоев. В следующем разделе показана возможность разработки нормативов возрастной динамики распределения числа деревьев, запаса и товарной продуктивности древостоев разной полноты и густоты по элементам леса. Для этого следует получить регрессионную модель взаимосвязи высоты деревьев от их толщины при известных значениях среднего диаметра и средней высоты древостоев, о чём подробно изложено в научном отчёте по Госконтракту № МГ-06-06/63к от 3 июля 2007 года и монографии В.К. Хлюстова (2015).

Возрастное изменение графиков высот для оценки динамики товарной продуктивности древостоев

Выделение категорий крупности древесины производят у разных древесных пород в разное время. Уже в стадии молодняка, а вернее жердняка у хвойных начинает появляться мелкая древесина. Далее в соответствии с увеличением размерами деревьев выделяется средняя, крупная древесина и соответствующие им дрова и отходы. Для определения объемов выхода категорий крупности древесины из древесных стволов разработаны сортиментные таблицы по разрядам высот. Условное выделение разрядов высот построено на закономерностях соотношения высот и диаметров

различных по величине деревьев древостоя. Однако сортиментные таблицы служат в основном для материальной оценки деревьев в приспевающих, спелых и перестойных древостоях. Основанием принадлежности древостоя к тому или иному разряду высот служит график высот или средний диаметр и средняя высота.

Графики высот для конкретного древостоя – это не нечто застывшее постоянное явление, а динамическое, изменяющееся с возрастом соотношение высот и диаметров деревьев. В разных условиях местообитания с возрастом это соотношение так же меняется и зависит от темпа прироста по диаметру и высоте деревьев. Увязать эти соотношения с возрастной динамикой средних высот и диаметров позволяют статистические методы моделирования. При этом следует соблюдать обязательные условия построения линий регрессии, а именно:

- 1) иметь в моделях графиков высот компонент начального роста равный 1,3 м;
- 2) иметь в графиках кривых высот пересечение средней высоты со средним диаметром древостоя.

Соблюдение этих требований обеспечивает построение графиков высот в возрастной динамике древостоя.

Таким образом, статистическое моделирование соотношения высот и диаметров деревьев позволило В.К. Хлюстову (2007) для основных лесообразующих пород получить регрессии вида:

Сосна

$$h_i = 1,3 + (H - 1,3) \exp(-1,63632 \ln D + 0,10761 \ln^2 D + 0,03318 \ln^3 D - 0,00583 \ln^4 D + 0,00041 \ln^5 D + 1,80933 \ln d_i - 0,35998 \ln^2 d_i + 0,09913 \ln^3 d_i - 0,02386 \ln^4 d_i + 0,002002 \ln^5 d_i) \quad (3.38)$$

Дуб

$$h_i = 1,3 + (H - 1,3) \exp(-0,870178 \ln D - 0,1236 \ln^2 D + 0,01079 \ln^3 D + 0,012371 \ln^4 D - 0,00157 \ln^5 D + 0,871933 \ln d_i + 0,120663 \ln^2 d_i - 0,00918 \ln^3 d_i - 0,012731 \ln^4 d_i + 0,001598 \ln^5 d_i) \quad (3.39)$$

Береза

$$h_i = 1,3 + (H - 1,3) \exp(-0,91797 \ln D + 0,05888 \ln^2 D + 0,00377 \ln^3 D + 0,91797 \ln d_i - 0,05888 \ln^2 d_i - 0,00377 \ln^3 d_i) \quad (3.40)$$

Осина

$$h_i = 1,3 + (H - 1,3) \exp(-1,06618 \ln D + 0,06619 \ln^2 D + 0,00845 \ln^3 D + 1,06618 \ln d_i - 0,06619 \ln^2 d_i - 0,00846 \ln^3 d_i) \quad (3.41)$$

где:

h_i - высота деревьев, м;

$H-1,3$ – средняя высота древостоя уменьшенная на высоту груди, м;

D – средний диаметр древостоя, см;

d_i – толщина деревьев на высоте груди, см.

Показатель детерминации имитационных построений ($R^2=1,0$), значимость численных коэффициентов ($t_p > t_{05}=2,0$) указывает на достаточно высокую точность моделей графиков высот во всем диапазоне продуктивности древостоев. Графическая интерпретация теоретических построений графиков высот (Рис. 3.22 – 3.26) указывает на различное соотношение этих показателей в разных условиях местообитания.

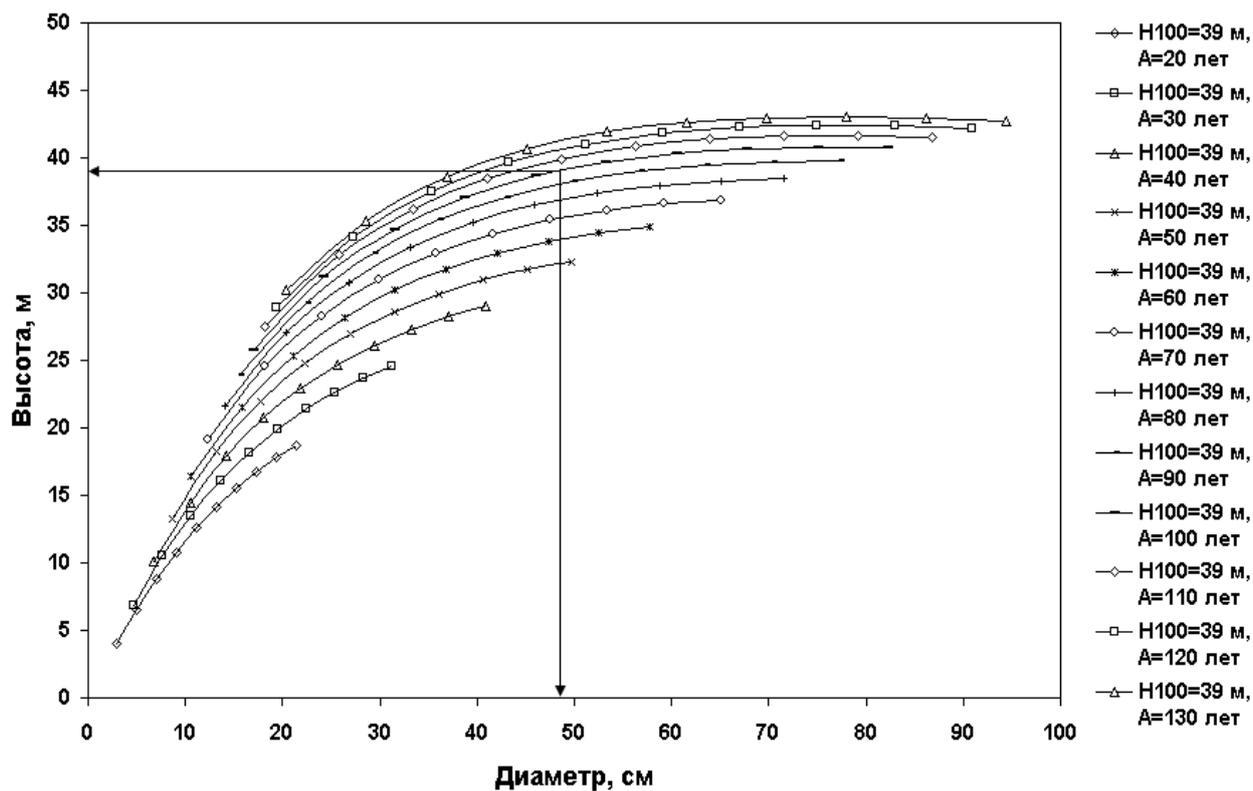


Рис. 3.22. Взаимосвязь высоты и диаметров деревьев в сосновых древостоях различного возраста при $H_{100}=39$ м

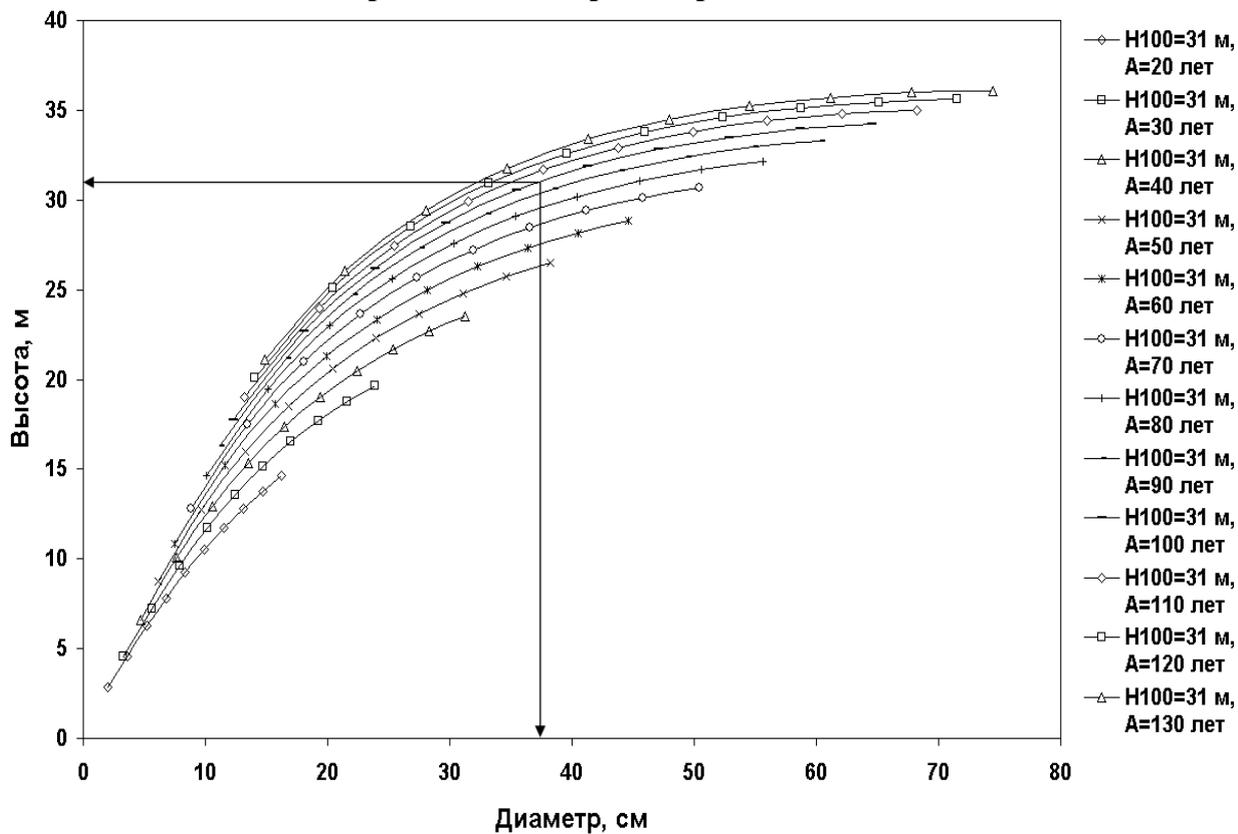


Рис. 3.23. Взаимосвязь высоты и диаметров деревьев в сосновых древостоях различного возраста при $H_{100}=31$ м

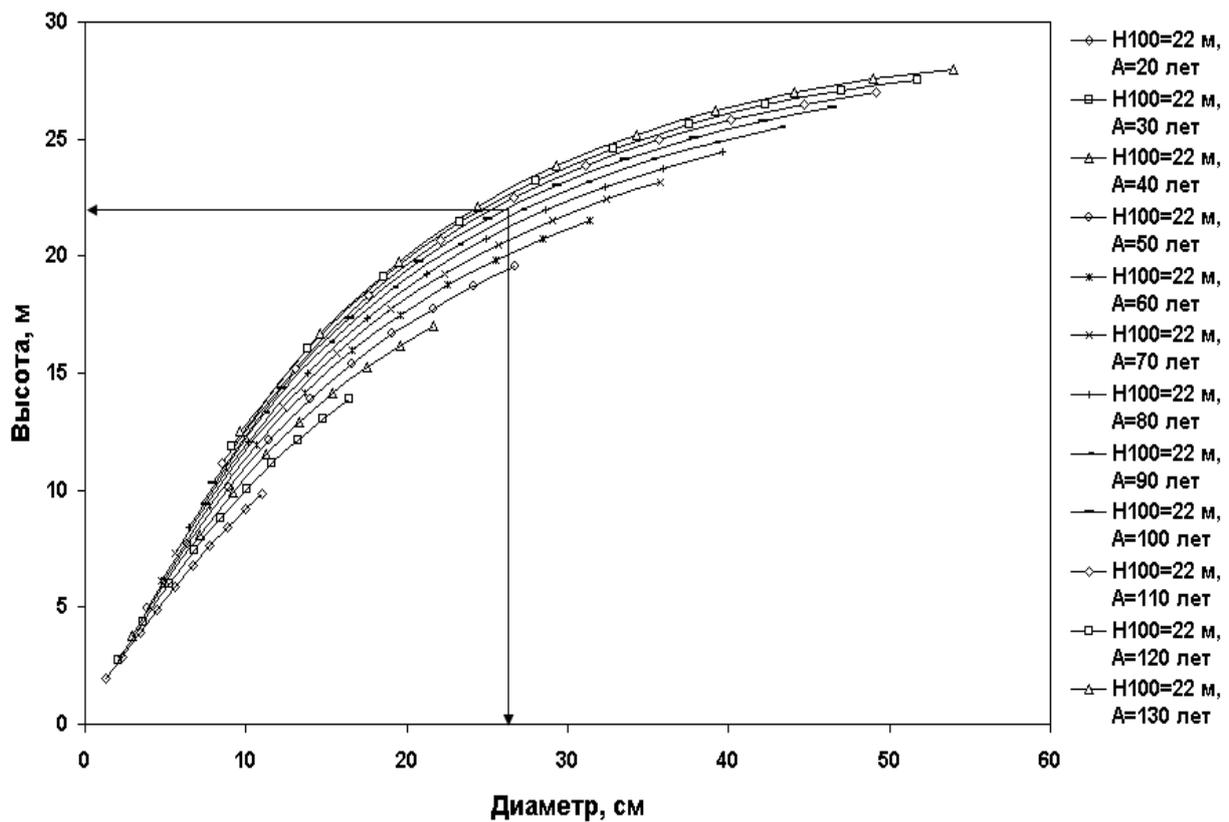


Рис. 3.24. Взаимосвязь высоты и диаметров деревьев в сосновых древостоях различного возраста при $H_{100}=22$ м

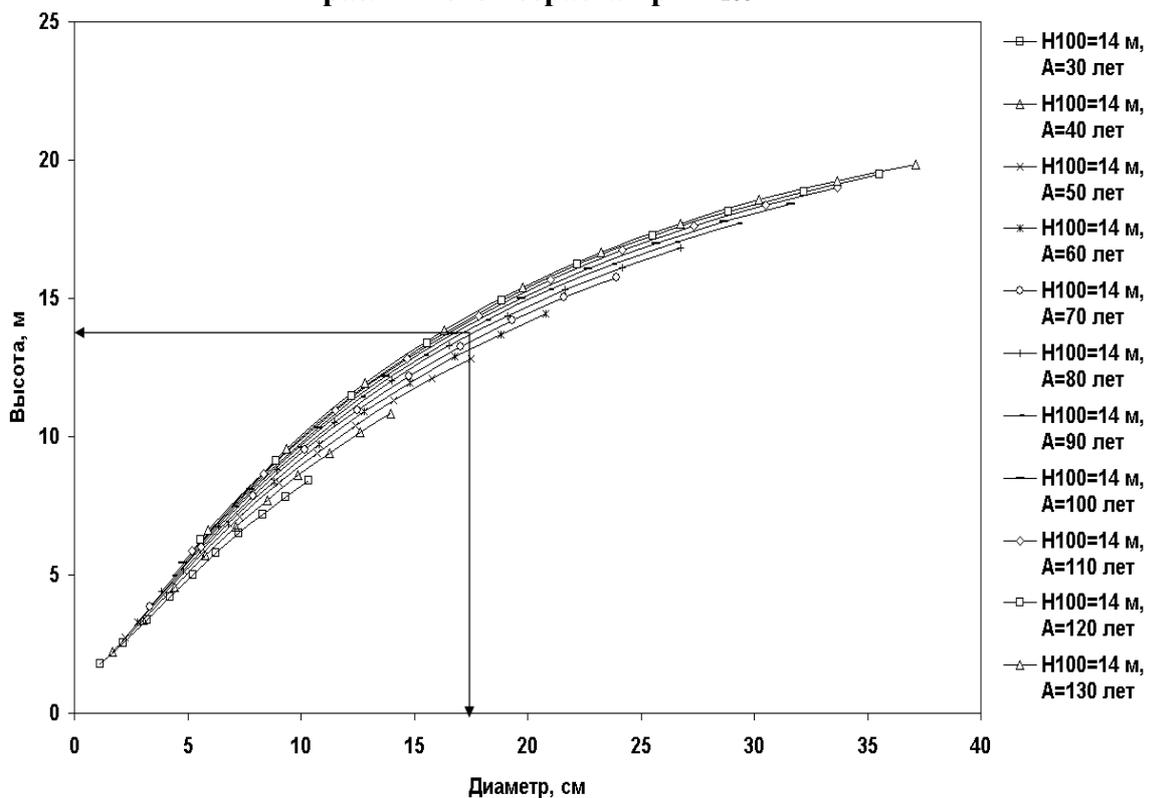


Рис. 3.25. Взаимосвязь высоты и диаметров деревьев в сосновых древостоях различного возраста при $H_{100}=14$ м

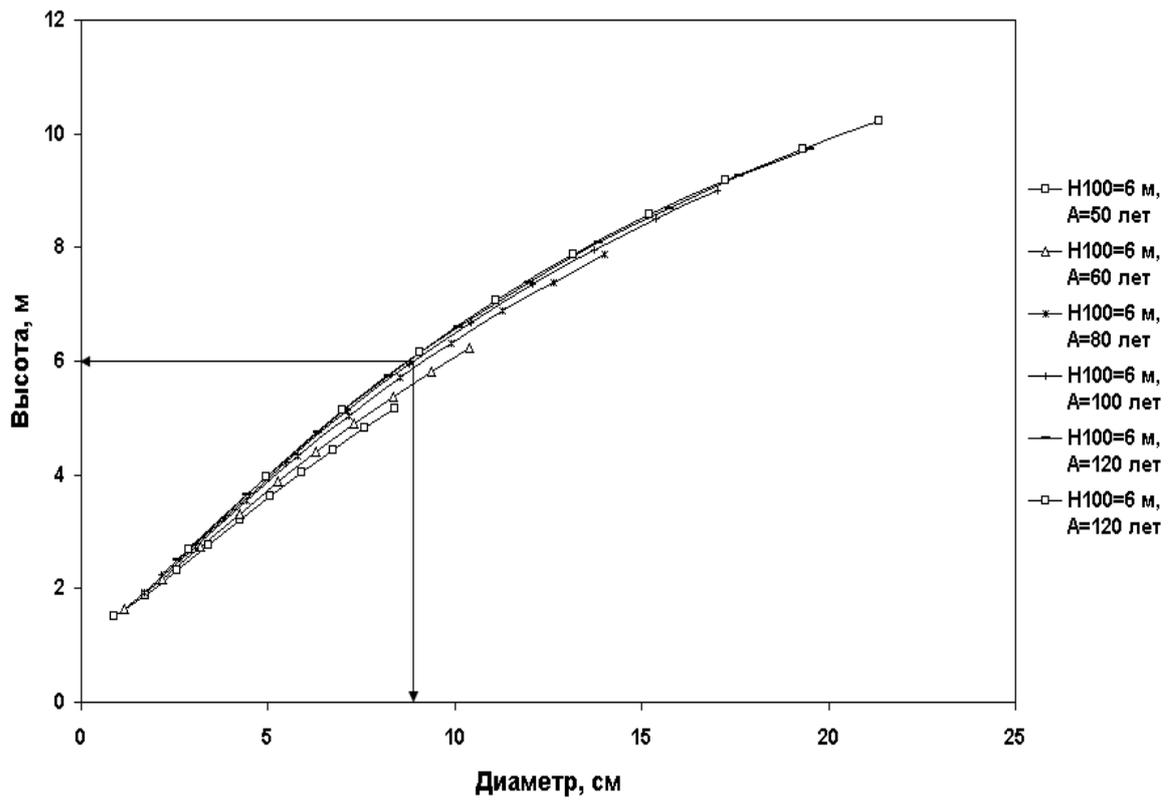


Рис. 3.26. Взаимосвязь высоты и диаметров деревьев в сосновых древостоях различного возраста с уровнем продуктивности $H_{100}=6$ м

3. МЕТОДЫ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ВОСПРОИЗВОДСТВА ЛЕСОВ

Главный недостаток лесовосстановления заключается в отсутствии правильного выбора схем смешения лесных культур. В массовом лесовосстановлении доминируют монокультуры, менее устойчивые к болезням, пожарам, энтомовам вредителям по сравнению со смешанными культурами.

Основатель учения о типах лесных насаждений Г.Ф. Морозов еще в конце XIX века указывал: «Задача лесоводов заключается в умении законы жизни леса превращать в принципы хозяйственной деятельности, учитывая и следя за всеми изменениями в жизни прежней стихии». В его учении красной нитью проходит важная мысль о том, что разведение лесных насаждений должно сочетаться с их экологическими и биологическими требованиями к почвенным и климатическим факторам. Выдвинутые им положения до сих пор служат руководством к выбору породного состава лесных культур.

В настоящее время в действующих рекомендациях производству отсутствуют экологически обоснованные технологические схемы создания лесных культур как на стадии подбора породного состава лесов будущего, стадии раннего возраста (до 6 лет) в условиях конкуренции сеянцев с травянистой растительностью, так и в культурах старших возрастов, когда при отсутствии рубок ухода идет острая конкуренция с самосевом лиственных пород за свет и почвенное питание.

На рисунке 5 приводится изменение высоты культур сосны, представителей напочвенного покрова, процента проективного покрытия по годам на конец периода вегетации растений в мезо-гигрофильных субориях. Наиболее интенсивным ростом в высоту характеризуются лесные культуры, создаваемые путем посадки сеянцев с закрытой корневой системой. На 5-ый год после посадки высота растений составляет 140 см с сохранностью лесных культур составляет 95%. При посадке сеянцев с открытой корневой системой высота растений на 5-ый год после посадки составляет 70 см, а сохранность

культур составляет 86%. Худшими показателями роста в первые годы жизни характеризуются лесные культуры, созданные путем посева 20 семян в одно посадочное место. На 5-ый год высота растений достигает 50 см при сохранности – 65%.

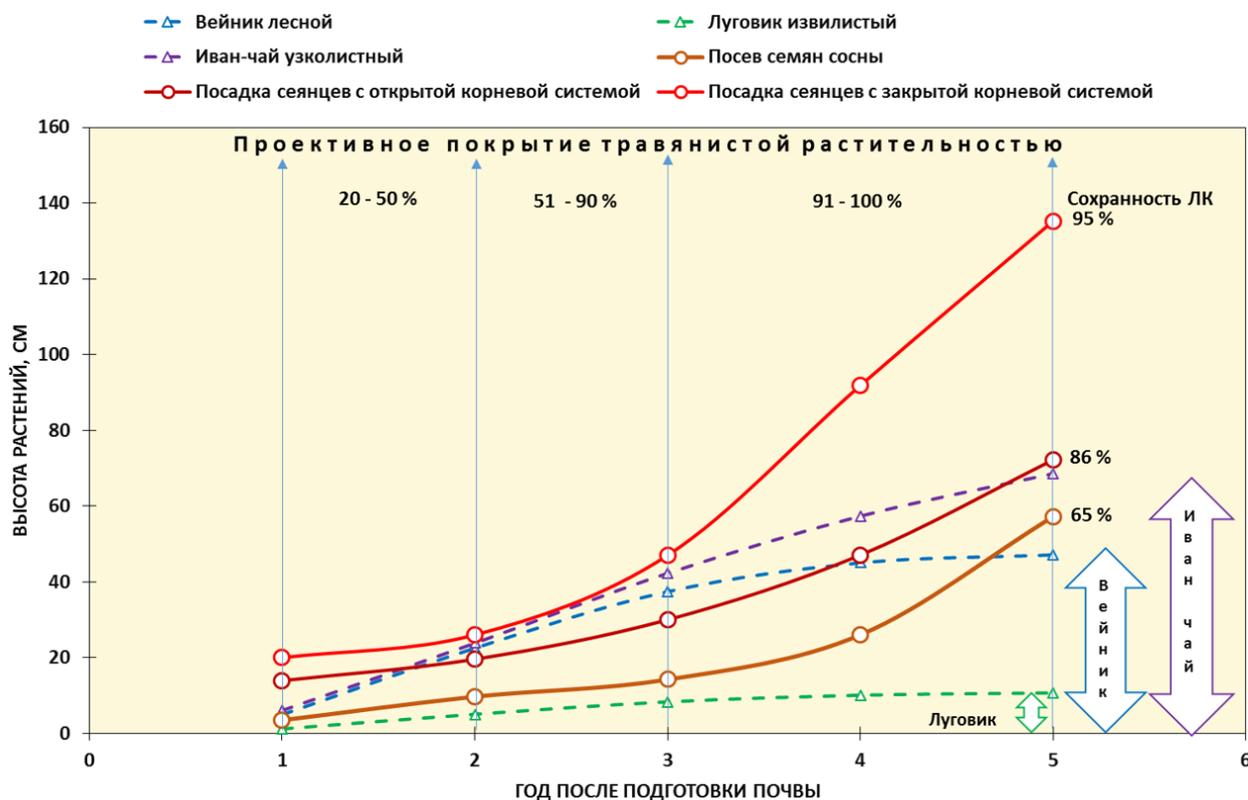


Рис. 3.1. Изменение высоты и сохранности культур сосны, созданных разными способами, представителей напочвенного покрова и процента проективного покрытия по годам после посадки в подготовленную почву

Формирование лесных культур необходимо рассматривать в едином комплексе с формированием травянистой растительности на подготовленной почве вырубок. Наибольшей высотой характеризуются кипрей и вейник лесной, которые в случае создания лесных культур путем посева семян и посадки сеянцев с открытой корневой системой на второй год создания лесных культур превышают высоту стволиков сосны. Продолжительное превышение высоты травостоя над стволиками сосны при быстром увеличении проективного покрытия создает неблагоприятные условия как в период вегетации растений, так и в зимне-весенний период, вызывая

повреждения стволиков и хвои от навала снежной массы на прошлогоднюю траву, покрывающую растения.

3.1. Оптимизация породного состава лесов будущего

Выявлению древесных пород, которые с хозяйственной точки зрения наиболее выгодно выращивать на тех или иных почвах, были посвящены многочисленные исследования. Однако при планировании и создании лесных культур в разных лесорастительных условиях практики допускали в прошлом и допускают в настоящее время грубые ошибки и нарушения теории биоэкоза.

Поэтому актуальной задачей частного лесоводства на современном этапе является научно-методические решения по обоснованию выбора породного состава лесных культур, наиболее соответствующего тому или иному типу лесорастительных условий.

Особое место при этом отводится правильному определению породного состава с точки зрения его соответствия в первую очередь гранулометрическому и химическому составу почв.

Почвенные условия вместе с климатическими показателями являются определяющими факторами для выбора главной и сопутствующей породы. Правильный выбор главной породы становится возможным лишь в том случае, если известны почвенные показатели, выраженные количественными величинами, изменение которых существенным образом сказывается на формировании компонентов того или иного лесного фитоценоза.

Поэтому на современном этапе развития науки в лесном хозяйстве во многих случаях необходимо переходить к более детальному анализу, основанному на численных значениях показателей требовательности древесных пород к условиям местопроизрастания и на этой основе оптимизировать это соответствие.

Следовательно, для создания устойчивых и высокопродуктивных культур в различных почвенно-климатических условиях необходимо знать те требования, которые предъявляют древесные породы на разных этапах роста к условиям внешней среды.

Слабой стороной предшествующих исследований в этом направлении является полная эмпиричность и оторванность от знания закономерных связей между требовательностью древесных пород к таким важным показателям среды как элементы почвенного плодородия, свет, влага и др.

Только выявление закономерностей динамики усвоения растениями питательных веществ, света и влаги, а также изменения этих факторов в течение всей жизни растений позволяет управлять продуктивностью насаждений, и вести экологически обоснованное воспроизводство лесов.

Факторы, влияющие на динамику формирования породного состава лесов будущего, следует подразделять на биологические - Б, климатические - К, почвенные - П, агротехнические - А, экономические - Э, а также необходимо оценивать непродуцируемые функции леса - Н.

Таким образом, породный состав наиболее продуктивных древостоев можно представить в виде функции:

$$Y = f(B, K, P, A, E, N),$$

где:

Y – породный состав оптимальных (максимально продуктивных) древостоев.

Вид и характер искомой функции сложен. Необходимо каждый из элементов Б, П, К, А, Э, Н численно выразить в виде математического выражения. Но, к сожалению, каждый из шести факторов, в свою очередь, является функцией нескольких вторичных элементов.

Так, биологические факторы (Б) обусловлены наследственностью, водным обменом растений, газообменом, элементами питания и др. Климатические условия (К) - средними температурами, количеством осадков,

притоком солнечной радиации и др. Почвенные (П) - средним размером почвенных частиц, плотностью, влажностью почвы, содержанием гумуса, химическим составом почвы, ее температурой, влагопроводностью и др.

Оптимальный вариант породного состава может быть получен только при включении в расчеты всего комплекса упомянутых факторов и элементов. Для этого требуется, в первую очередь, определить значение каждого фактора данной системы в численном выражении, а также установить его связь с оптимальным набором древесных пород в составе древостоев. Кроме этого необходимо сравнить древесные породы между собой по характеру проявления жизненно важных процессов и определить возраст, в котором эти процессы проявляются максимально, то есть найти возраст кульминации текущего прироста.

Для решения задачи по оптимизации породного состава в соответствии с требованиями к почвенным условиям требуется определение запаса элементов питания, необходимого для образования 1 куб. м текущего прироста (табл. 3.1).

Таблица 3.1.

Вынос из почвы элементов питания на образование 1 куб. м текущего прироста в возрасте его кульминации (по С.Х. Лямеборшай)

Элементы питания	Древесные породы						
	лиственница	сосна	ель	береза	дуб	осина	липа
Азот	1,3	1,7	2,1	3,8	6,7	3,2	5,9
Фосфор	1,1	0,6	1,1	1,0	1,4	0,8	0,8
Калий	0,8	1,1	1,8	1,5	4,4	1,8	3,4

Следовательно, для определения доли выноса элементов питания из почвы разными древесными породами можно применять количество элементов питания, которые древесные породы усваивают ежегодно из почвы. Например, для формирования 1 куб. м древесины сосны требуется вынос из почвы 1,7 кг азота, 0,6 кг фосфора и 1,1 кг калия.

Критерием оптимизации является максимум продуктивности древостоя, приходящейся на возраст кульминации текущего прироста, а функциональными ограничениями – требовательность древесных пород в элементах почвенного питания (N, P, K) и их наличие в почве.

Техническое решение задачи экологической оптимизации породного состава лесных культур по типам лесорастительных условий сводится к оценке требовательности и потребности древесных пород в зольных элементах (Морозов, 1971). Требовательность - это возможность произрастания той или иной древесной породы на какой-либо почве, а потребность - это необходимое количество тех или иных химических элементов в единице массы сухого органического вещества конкретной древесной породы.

Решение задачи выбора лучшего породного состава требует применения метода линейного программирования. В связи с большим количеством материалов рассмотрим пример решения задачи оптимизации породного состава в зависимости от почвенных факторов и транспирирующей способности древесных пород только на примере мезо-гигрофильных суборей (ТЛУ – В₃). Для решения задачи составляется биоэкологическая матрица, представленная на рисунке 6, в которой для соответствующих древесных пород указывается вынос элементов питания из почвы (азот, фосфор и калий) и указываются значения транспирационных коэффициентов.

№	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	И	Ж	К	Л
1	Решить	Изменить область задачи	Ограничение	Лиственница	Сосна	Ель	Береза	Найти XA		Суммы	Двойственные оценки	Статус ограничений
2							>=	<=				
3				x1	x2	x3	x4	min	max			
4	Вынос из почвы азота на прирост 1 куб.м/га древесины	y1	1,3	1,7	2,1	3,8	5,0	11,2	11,2	0,46	UB	
5	Вынос из почвы фосфора на прирост 1 куб.м/га древесины	y2	1,1	0,6	1,1	1,0	2,0	7,8	7,8	0,37	UB	
6	Вынос из почвы калия на прирост 1 куб.м/га древесины	y3	0,8	1,1	1,8	1,5	3,0	7,3	7,0		BS	
7	Транспирация на прирост 1 куб.м/га древесины	y4	10,8	14,3	13,0	28,5	31,0	94,4	93,4		BS	
8	Ручной труд, чел-дн	y5	0,075	0,090	0,140	0,080		1,4	0,6		BS	
9	Механизированный труд, маш-см	y6	0,09	0,070	0,090	0,050		1,1	0,68		BS	
10			max increment					X				
11			min									
12			cost	1	1	1	1					
13										Целевая функция		
14	Переменные		6,00	2,00					8,00	OPTIMAL SOLUTION	NORMAL COMPLETION	
15	Оценки переменных				-0,37	-1,11						
16	Статус переменных		BS	BS	LB	LB						
17												
18												
19												
20	Тип лесорастительных условий		Оптимальное смешение лесных культур									
21	Боры (бедные)		Л	С	Е	Б						
22	мезофильные (свежие) A2		7,5	2,5	0,0	0,0						

Рис. 3.2. Информационная биоэкологическая матрица для определения оптимального породного состава лесных культур в ТЛУ A₂

№	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	И	Ж	К	Л	М	Н
1	Решить	Изменить область задачи	Ограничение	Лиственница	Сосна	Ель	Береза	Дуб	Липа	Найти XA		Суммы	Двойственные оценки	Статус ограничений
2							>=	<=						
3				x1	x2	x3	x4	x5	x6	min	max			
4	Вынос из почвы азота на прирост 1 куб.м/га древесины	y1	1,3	1,7	2,1	3,8	6,7	5,9	12,1	41,9	35,7		BS	
5	Вынос из почвы фосфора на прирост 1 куб.м/га древесины	y2	1,1	0,6	1,1	1,0	1,4	0,8	4,2	11,1	11,1	0,43	UB	
6	Вынос из почвы калия на прирост 1 куб.м/га древесины	y3	0,8	1,1	1,8	1,5	4,4	3,4	6,3	25,5	23,0		BS	
7	Транспирация на прирост 1 куб.м/га древесины	y4	10,8	14,3	13,0	28,5	56,0	39,6	100,4	324,8	299,0		BS	
8	Ручной труд, чел-дн	y5	0,08	0,09	0,14	0,08	0,04	0,07		1,4	1,4	2,47	UB	
9	Механизированный труд, маш-см	y6	0,09	0,07	0,09	0,05	0,04	0,08		1,1	1,1	7,41	UB	
10			max increment							X				
11			min											
12			cost	1	1	1	1	1	1					
13										Целевая функция				
14	Переменные		14,74	0,17	1,49					16,40	OPTIMAL SOLUTION	NORMAL COMPLETION		
15	Оценки переменных		-0,34	-0,49						-0,11				
16	Статус переменных		LB	BS	LB	BS	BS	LB						
17														
18														
19														
20	Тип лесорастительных условий		Оптимальное смешение лесных культур											
21	Сугрудки (относительно богатые)		Л	С	Е	Б	Д	Л						
22	мезофильные (свежие) C2		0,0	9,0	0,0	0,1	0,9	0,0						

Рис. 3.3. Информационная биоэкологическая матрица для определения оптимального породного состава лесных культур в ТЛУ C₂

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Решить!	Изменить область задачи	Ограничение	Лиственница	Сосна	Ель	Береза	Найти XA		Суммы	Двойственные оценки	Статус ограничений
2								>=	<=			
3				x1	x2	x3	x4	min	max			
4	Вынос из почвы азота на прирост 1 куб.м/га древесины	y1	1,3	1,7	2,1	3,8	10,4	22,8	20,4			BS
5	Вынос из почвы фосфора на прирост 1 куб.м/га древесины	y2	1,1	0,6	1,1	1,0	5,0	11,2	11,2	0,38		UB
6	Вынос из почвы калия на прирост 1 куб.м/га древесины	y3	0,8	1,1	1,8	1,5	6,4	18,4	13,0			BS
7	Транспирация на прирост 1 куб.м/га древесины	y4	10,8	14,3	13,0	28,5	86,4	171,0	171,0	0,05		UB
8	Ручной труд, чел-дн	y5	0,08	0,09	0,14	0,08		1,4	1,2			BS
9	Механизированный труд, маш-см	y6	0,09	0,07	0,09	0,05		1,1	1,07			BS
10		max increment										
11		min cost										
12			1	1	1	1						
13												
14												
15	Переменные		6,22	7,26			13,48	OPTIMAL SOLUTION	NORMAL COMPLETION			
16	Оценки переменных				-0,12	-0,92						
17	Статус переменных		BS	BS	LB	LB						
18												
19												
20	Тип лесорастительных условий		Оптимальное смешение лесных культур									
21	субори (относительно бедные)		Л	С	Е	Б						
22	мезофильные (свежие) В2		4,6	5,4	0,0	0,0						

Рис. 3.4. Информационная биоэкологическая матрица для определения оптимального породного состава лесных культур в ТЛУ В2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Решить!	Изменить область задачи	Ограничение	Лиственница	Сосна	Ель	Береза	Найти XA		Суммы	Двойственные оценки	Статус ограничений
2								>=	<=			
3				x1	x2	x3	x4	min	max			
4	Вынос из почвы азота на прирост 1 куб.м/га древесины	y1	1,3	1,7	2,1	3,8	10,7	20,6	15,3			BS
5	Вынос из почвы фосфора на прирост 1 куб.м/га древесины	y2	1,1	0,6	1,1	1,0	4,2	10,8	10,8	0,38		UB
6	Вынос из почвы калия на прирост 1 куб.м/га древесины	y3	0,8	1,1	1,8	1,5	6,3	17,6	9,5			BS
7	Транспирация на прирост 1 куб.м/га древесины	y4	10,8	14,3	13,0	28,5	88,6	127,4	127,4	0,05		UB
8	Ручной труд, чел-дн	y5	0,08	0,09	0,14	0,08		1,40	0,9			BS
9	Механизированный труд, маш-см	y6	0,09	0,07	0,09	0,05		1,10	0,94			BS
10		max increment										
11		min cost										
12			1	1	1	1						
13												
14												
15	Переменные		8,43	2,54			10,97	OPTIMAL SOLUTION	NORMAL COMPLETION			
16	Оценки переменных				-0,12	-0,92						
17	Статус переменных		BS	BS	LB	LB						
18												
19												
20	Тип лесорастительных условий		Оптимальное смешение лесных культур									
21	Субори (относительно бедные)		Л	С	Е	Б						
22	мезо-гигрофильные (влажные) В3		7,7	2,3	0,0	0,0						

Рис. 3.5. Информационная биоэкологическая матрица для определения оптимального породного состава лесных культур в ТЛУ В3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Решить!	Изменить область задачи	Ограничение	Листо-ница	Сосна	Ель	Береза	Дуб	Липа	Найти XA		Суммы	Двойствен-ные оценки	Статус ограни-чений
2										>=	<=			
3				x1	x2	x3	x4	x5	x6	min	max			
4			y1	1,3	1,7	2,1	3,8	6,7	5,9	12,0	40,7	33,2		BS
5			y2	1,1	0,6	1,1	1,0	1,4	0,8	4,6	11,2	11,2	0,05	UB
6			y3	0,8	1,1	1,8	1,5	4,4	3,4	6,9	23,5	19,9		BS
7			y4	10,8	14,3	13,0	28,5	56,0	39,6	99,4	273,2	273,2	0,01	UB
8			y5	0,08	0,09	0,14	0,08	0,04	0,07		1,4	1,4	5,67	UB
9			y6	0,09	0,07	0,09	0,05	0,04	0,08		1,1	1,1	4,69	UB
10			max increment											
11			min cost	1	1	1	1	1	1					
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														

Целевая функция										
Переменные	0,85	13,14		1,66	0,51			16,17	OPTIMAL SOLUTION	NORMAL COMPLETION
Оценки переменных			-0,39					-0,18		
Статус переменных	BS	BS	LB	BS	BS	LB				

Тип лесорастительных условий	Оптимальное смешение лесных культур					
сугрудки (относительно богатые)	Лц	С	Е	Б	Д	Лп
мезо-гигрофильные (влажные) С3	0,5	8,1	0,0	1,0	0,3	0,0

Рис. 3.6. Информационная биоэкологическая матрица для определения оптимального породного состава лесных культур в ТЛУ С3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	Решить!	Изменить область задачи	yes	Ограничение	Дуб	Липа	Ель	Найти XA		Суммы	Двойствен-ные оценки	Статус ограни-чений
2										>=	<=	
3					x1	x2	x3	min	max			
4				y1	6,7	5,9	2,1	24,2	41,3	32,3		BS
5				y2	1,4	0,9	1,1	5,6	12,7	11,7		BS
6				y3	4,4	3,4	1,8	17,6	23,8	23,8	0,20	UB
7				y4	56,0	39,6	13,0	149,5	277,2	206,8		BS
8				y5	0,04	0,07	0,14		1,40	1,4	4,57	UB
9				y6	0,04	0,08	0,09		1,10	0,98		BS
10				max increment								
11				min cost	1	1	1					
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												

Целевая функция						
Переменные		2,32	8,84	11,16	OPTIMAL SOLUTION	NORMAL COMPLETION
Оценки переменных		-0,06				
Статус переменных		LB	BS	BS		

Тип лесорастительных условий	Оптимальное смешение лесных культур		
Дубравы (богатые)	Д	Лп	Е
мезофильные (свежие) Д2	0,0	2,1	7,9

Рис. 3.7. Информационная биоэкологическая матрица для определения оптимального породного состава лесных культур в ТЛУ Д2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Решить!	Изменить область задачи	Ограничение	Дуб	Липа	Найти XA		Суммы	Двойственные оценки	Статус ограничений
2						>=	<=			
3				x1	x2	min	max			
4	Вынос из почвы азота на прирост 1 куб. м/га древесины	y1	6,7	5,9	33,5	37,2	37,2	0,17	UB	
5	Вынос из почвы фосфора на прирост 1 куб. м/га древесины	y2	1,4	0,9	5,0	7,0	5,4		BS	
6	Вынос из почвы калия на прирост 1 куб. м/га древесины	y3	4,4	3,4	21,4	22,0	21,4		BS	
7	Транспирация на прирост 1 куб. м/га древесины	y4	56,0	39,6	249,5	280,0	249,7		BS	
8	Ручной труд	y5	0,04	0,07		1,40	0,4		BS	
9	Механизированный труд	y6	0,04	0,08		1,10	0,50		BS	
10		max increment								
11		min cost								
12			1	1						
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22										

Целевая функция	6,31	6,31	OPTIMAL SOLUTION	NORMAL COMPLETION
Переменные				
Оценки переменных	-0,14			
Статус переменных	LB	BS		

Тип лесорастительных условий	мальное смешение лесных кул	
дубравы (богатые)	Д	Лп
мезо-гигрофильные (влажные) ДЗ	0,0	10,0

Рис. 3.8. Информационная биоэкологическая матрица для определения оптимального породного состава лесных культур в ТЛУ Вз

Указанные в матрицах оптимизации ограничения по гарантированным для конкретного типа лесорастительных условий ресурсам показаны в графе максимального ($\leq \max$) и минимального ($\geq \min$) значений. Они выбирается для каждого конкретного вида ресурса (N, P, K или Tr.) по значению произведения $V \cdot Z_M$, в котором V - вынос из почвы элемента питания, приходящегося на прирост 1 куб. м/га древесины, Z_M – среднепериодический текущий прирост древесной породы по запасу, соответствующий возрасту его кульминации прироста.

Так, оптимальные варианты смешения древесных пород при проектировании лесных культур в наиболее благоприятных лесорастительных условиях ранжированы в следующем порядке:

- в свежих борах (**A₂**) оптимальный состав сомкнутого древостоя **7,5Лц2,5С** производит максимальный прирост $Z_M \max = 8,0$ куб. м/га;

- в свежих субориях (**B₂**) оптимальный состав сомкнутого древостоя **5,4С4,6ЛЦ** производит максимальный прирост $Z_M \max = 13,48$ куб. м/га;

- во влажных субориях (**B₃**) оптимальный состав сомкнутого древостоя **7,7Лц2,3С** производит максимальный прирост $Z_M \max = 10,97$ куб. м/га;

- в сложных свежих субориях (**C₂**) оптимальный состав сомкнутого древостоя **9,0С0,9Д0,1Б** производит максимальный прирост $Z_M \max = 16,4$ куб. м/га;

- в сложных влажных субориях (**C₃**) оптимальный состав сомкнутого древостоя **8,1С1,0Б0,5Лп0,3Д** производит максимальный прирост $Z_M \max = 16,17$ куб. м/га;

- в дубравах свежих (**D₂**) оптимальный состав сомкнутого древостоя **7,9Е2,1Лп** производит максимальный прирост $Z_M \max = 11,16$ куб. м/га;

- в дубравах влажных (**D₃**) оптимальный состав сомкнутого древостоя **10ЛП** производит максимальный прирост $Z_M \max = 6,31$ куб. м/га;

Таким образом, наличие значений кульминации текущего прироста по запасу древесных пород, нормативов потребности каждой породы в элементах питания (N, P, K) позволяет решать задачи экологической оптимизации породного состава лесных культур по типам лесорастительных условий.

Приведенный алгоритм формирования матрицы для решения оптимизационной задачи максимально продуктивной породной структуры искусственных древостоев позволяет при известных экологических условиях, рекомендовать оптимальный состав лесов будущего.

3.2. Оптимизация режима промежуточного и главного пользования лесом

Интенсификация лесохозяйственного производства невозможна без научно-обоснованных методов оптимизации объемов главного и промежуточного пользования древесиной за весь период выращивания конкретного древостоя. По лесоводственным соображениям в качестве критерия оптимальности принят максимум суммы промежуточного и главного пользования. При этом, постановка задачи оптимизации интенсивности сроков и повторяемости разреживаний за весь период выращивания конкретного древостоя сводится к следующему:

- в качестве целевой функции принимаем суммарный выход обезличенной (W_L) или деловой (W_D) древесины при промежуточном и главном пользовании;

- в качестве управляемых параметров принимается количество приемов разреживаний (m), их интенсивность, выраженная уровнем снижения полноты (Pr), и сроки их повторяемости (t);

- в качестве функциональных ограничений принимается условие непревышения восстанавливаемого после рубок запаса, соответствующего полноте древостоя перед первым приемом разреживаний (M_{P_0}).

В математической интерпретации задача может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} W_L \rightarrow \max \vee W_D \rightarrow \max \\ m_{min} \leq m \leq m_{max} \\ Pr_{min} \leq Pr \leq Pr_{max} \\ t_{min} \leq t \leq t_{max} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Целевая функция включает в себя две составляющие:

$$W_L = V_{\text{пп}} + V_{\text{гп}}, \quad (3.2)$$

$$W_D = V_{D_{\text{пп}}} + V_{D_{\text{гп}}}, \quad (3.3)$$

где:

V_{III} - объем промежуточного пользования по обезличенной древесине, м³/га;

$M_{ГП}$ - объем главного пользования по обезличенной древесине, м³/га;

$V_{D_{III}}$ - объем промежуточного пользования по деловой древесине, м³/га;

$V_{D_{ГП}}$ - объем главного пользования по деловой древесине, м³/га.

Объем промежуточного пользования определяется суммированием вырубленных запасов за каждый прием разреживаний в возрасте древостоя (t_i):

$$V_{III} = \sum_{i=1}^m V_{III i}, \quad (3.4)$$

$$V_{D_{III}} = \sum_{i=1}^m V_{D_{III} i}, \quad (3.5)$$

За каждый прием разреживания вырубаемый запас определяется по формуле:

$$V_{t_i} = M_{t_i}^{1,0} \left(\frac{M_{t_i}}{M_{t_i}^{1,0}} - Pr_{t_i} \right), \quad (3.6)$$

где:

M_{t_i} - запас древостоя в возрасте t_i , м³/га;

$M_{t_i}^{1,0}$ – запас из таблиц хода роста в возрасте t_i при полноте 1,0 ед., м³/га;

Pr_{t_i} - уровень снижения полны при разреживаниях, ед.

Составляющая $V_{ГП}$ формулы (12) соответствует запасу древостоя к возрасту главной рубки $t_{зр}$ (для сосны и ели - 100 лет, для березы – 60 лет):

$$V_{ГП} = M_{t_{зр}}, \quad (3.7)$$

$$V_{D_{ГП}} = M_{D_{t_{зр}}}, \quad (3.8)$$

где:

M – запас обезличенной древесины в возрасте главной рубки $t_{зр}$, м³/га;

M_D – запас деловой древесины в возрасте главной рубки $t_{зр}$, м³/га.

На управляемые параметры формулы (3.6) в соответствии с лесоводственными соображениями для сосны и ели накладываются следующие ограничения:

- по количеству приемов разреживаний: $2 \leq m \leq 7$;
- по интенсивности разреживаний: $0,5 \leq P < P_0$;
- по возрасту древостоя на момент проведения разреживаний: $21 \leq t \leq 81$.

Восстанавливаемый запас к моменту времени t_i определяется на основании зависимости:

$$M_{t_i} = M_{t_{i-1}} + 10Z(b, t_{i-1}) \left(\frac{M_{t_{i-1}}}{M^{1,0}(b, t_{i-1})} \right)^K, \quad (3.9)$$

где:

M_{t_i} - восстанавливаемый запас в момент времени t_i , м³/га;

$M_{t_{i-1}}$ - запас древостоев в предшествующем десятилетии, м³/га;

$Z(b, t_{i-1})$ - среднепериодический текущий прирост по запасу при соответствующих условиях произрастания и возрасте, м³/га;

$M^{1,0}(b, t_{i-1})$ - запас сомкнутого древостоя при соответствующих условиях произрастания и возрасте, м³/га;

K - численный коэффициент, учитывающий влияние полноты древостоя на величину почвенно-светового прироста, равный 0,784 [Хлюстов, 1985, 1987, 1992, 1993].

Запас древостоя при исходной полноте (P_0) в момент времени t_i определяется по формуле:

$$M_{t_i} = M_{t_i}^{1,0} P_0 \quad (3.10)$$

Проведение оптимизационных расчетов позволяет определиться с рациональным режимом промежуточного пользования по интенсивности и возрастам повторяемости разреживаний. Выше было показано, что рациональные варианты интенсивностей и сроков повторяемости

разреживаний должны выбираться по критерию – максимум суммы главного и промежуточного пользования по обезличенной и деловой древесине.

Проведение оптимизационных расчетов позволяет определиться с рациональным режимом промежуточного пользования по интенсивности и возрастам повторяемости разреживаний. Для решения задачи оптимизации использовался метод случайного поиска с отбором лучшей пробы. В работе реализован алгоритм случайного поиска с выбором значений переменных с учетом принятых ограничений из равномерного распределения. Достоинствами методов случайного поиска являются:

- повышенное быстродействие;
- высокая надежность и помехоустойчивость;
- малая чувствительность к нерегулярным поведением целевой функции, наличию случайных ошибок при вычислении целевой функции;
- сравнительно простая внутренняя реализация;
- малая чувствительность к росту размерности множества оптимизации.

Выше было показано, что рациональные варианты интенсивностей и сроков повторяемости разреживаний должны выбираться по критерию – максимум суммы главного и промежуточного пользования по обезличенной и деловой древесине. После определения количества и возрастов разреживаний с объемами промежуточного пользования необходимо приступить к расчету динамики таксационных показателей древостоя.

На первом этапе для прогнозирования динамики таксационных показателей необходимо выявить зависимость между долей выборки по числу стволов, долей среднего диаметра вырубаемых деревьев при низовом, комбинированном и верховом типах разреживаний от доли выборки по запасу. Для оценки текущих изменений в древостоях после проведения разреживаний использованы нормативы стандартизации рубок ухода, разработанные Г.В. Филипповым, Е.Г. Гладковым, Н.А. Пироговым и др. (1986). Указанные нормативы описаны регрессиями вида:

$$D_N, D_D = \exp(a_1 \ln P_M + a_2 \ln^2 P_M + a_3 \ln^3 P_M + a_4 \ln^4 P_M) \quad (3.11)$$

где:

D_N, D_D – доля выборки по числу стволов или доля среднего диаметра вырубаемых деревьев;

P_M – доля выборки по запасу;

a_i – коэффициенты уравнения.

Коэффициенты уравнений представлены в таблице 3.2. Для всех типов разреживаний уравнения регрессионных функционально отображают данные стандартизации рубок ухода ($R^2=1,0$).

Таблица 3.2

Коэффициенты регрессии доли среднего диаметра вырубаемых деревьев и доли выборки по числу деревьев с интенсивностью выборки по запасу при разных типах разреживаний

Показатель	Тип разреживания	Коэффициенты			
		a1	a2	a3	a4
Доля среднего диаметра вырубаемых деревьев	Низовой	0,21821	0,02596	0,00079	-
	Комбинированный	0,00000	-	-	-
	Верховой	-0,44052	-0,16180	-0,02989	-0,00204
Доля выборки по числу стволов	Низовой	0,35938	-0,22604	-0,05586	-0,00529
	Комбинированный	1,00000	-	-	-
	Верховой	2,12446	0,48145	0,08721	0,00595

Графическая визуализация зависимостей показана на рисунке 3.9. При комбинированном типе разреживания средний диаметр вырубаемых деревьев равен среднему диаметру древостоя, а доля выборки по числу деревьев совпадает с долей выборки по запасу.

При низовом типе разреживания вырубается отстающие в росте, малогабаритные деревья, которые являются главными претендентами в отпад, поэтому их средний диаметр ниже среднего, а доля выборки по числу деревьев превышает долю выборки при комбинированном типе разреживания. При верховом типе разреживания вырубается наиболее крупные деревья, поэтому их средний диаметр выше среднего диаметра

древостоя, а доля вырубаемых деревьев меньше, чем при комбинированном типе.

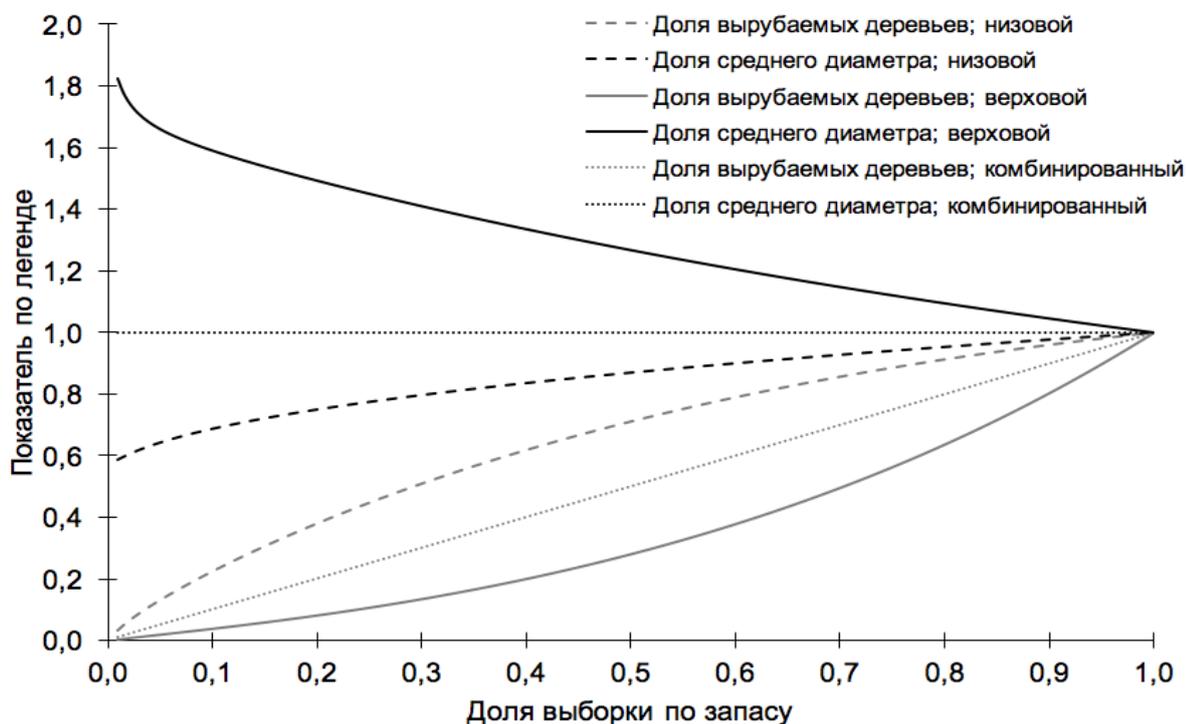


Рис. 3.9. Взаимосвязь доли выборки числа деревьев и доли среднего диаметра вырубаемых деревьев с интенсивностью выборки по запасу при разных типах разреживаний

При низовом типе разреживания вырубаются отстающие в росте, малогабаритные деревья, которые являются главными претендентами в отпад, поэтому их средний диаметр ниже среднего, а доля выборки по числу деревьев превышает долю выборки при комбинированном типе разреживания. При верховом типе разреживания вырубаются наиболее крупные деревья, поэтому их средний диаметр выше среднего диаметра древостоя, а доля вырубаемых деревьев меньше, чем при комбинированном типе.

Выявив связь доли вырубемого запаса с долей среднего диаметра вырубаемых деревьев и с долей выборки по числу деревьев, можно перейти к расчету таксационных показателей вырубаемой и остающейся части древостоя. Расчет таксационных показателей вырубаемой и остающейся

части древостоев не зависимо от типа разреживания производится по методике, изложенной ниже.

Средний диаметр вырубаемых деревьев:

$$D_f = D_g * P_D \quad (3.12)$$

где:

D_f – средний диаметр вырубаемых деревьев, см;

D_g - средний диаметр растущих деревьев до рубки, см;

P_D - доля среднего диаметра вырубаемых деревьев.

Число вырубаемых деревьев:

$$N_f = N_g * P_N \quad (3.13)$$

где:

N_f – число вырубаемых деревьев, шт. на 1 га;

N_g - число растущих деревьев до рубки, см;

P_N - доля выборки по числу деревьев.

Сумма площадей сечений вырубаемых деревьев:

$$G = 0,0000785 * D^2 * N_f \quad (3.14)$$

где:

G_f – сумма площадей сечений вырубаемых деревьев, кв. м на 1 га;

D_f – средний диаметр вырубаемых деревьев, см;

N_f – число вырубаемых деревьев, шт. на 1 га.

Объем среднего дерева вырубаемой части:

$$V_f = M_f / N_f \quad (3.15)$$

где:

V_f - объем среднего дерева вырубаемой части, куб. м;

M_f - запас вырубаемой части, куб. м на 1 га;

N_f - число вырубаемых деревьев, шт. на 1 га.

Таксационные показатели после рубки (запас, сумма площадей сечений, число деревьев):

$$T_o = T_g - T_f \quad (3.16)$$

где:

T_o - таксационный показатель, характеризующий растущую часть после рубки;

T_g - таксационный показатель, характеризующий растущую часть до рубки;

T_f - таксационный показатель, характеризующий вырубаемую часть.

Средний диаметр деревьев, оставшихся после рубки:

$$D_o = \sqrt{\frac{G_o \cdot 10000}{N_o \cdot \frac{\pi}{4}}}, \quad (3.17)$$

где:

D_o - средний диаметр деревьев, оставшихся после рубки, см;

G_o - сумма площадей сечений деревьев, оставшихся после рубки, кв. м на 1 га;

N_o - число деревьев, оставшихся после рубки, шт. на 1 га.

Следующий элемент методики предусматривает прогнозирование динамики среднего диаметра растущей части древостоя и числа растущих деревьев. Прогнозирование среднего диаметра, например, для сосновых древостоев Костромской области, произрастающих в мезо-гигрофильных субориях, по десятилетиям производится по авторегрессионной модели вида:

$$D_{A+10} = 0,9084D_A + 4,7463, \quad (3.18)$$

где:

D_A - средний диаметр в возрасте A лет, см;

D_{A+10} - средний диаметр в возрасте $(A+10)$ лет, см.

Как неоднократно отмечалось в литературных источниках [Кузьмичев, 1977; 2013; Хлюстов, 1992, 1993; Rogozin, Razin, 2015], изреживание в конкретных древостоях происходит не так, как это показано в таблицах хода роста. Поэтому, по прогностическим моделям В.К. Хлюстова (1992, 1993),

полученным на основании данных многолетних перечетов на постоянных пробных площадях в сосновых древостоях (A. Schwappach, 1908) было получено прогностическое уравнение динамики числа деревьев по десятилетиям:

$$\begin{aligned}
 N_{A+10} = N_A & (1 - \exp (-\exp (41,56004 - 4,20707 \ln A + \\
 & + 1,89504 \ln^2 A - 0,22177 \ln^3 A - 5,75779 \ln H_{\text{top}} - \\
 & - 4,45353 \ln N_A - 0,50500 \ln^2 N_A + 0,08133 \ln^3 N_A - \\
 & - 0,00268 \ln^4 N_A - 0,39499 \ln A \ln H_{\text{top}} + 0,05752 \ln A \ln^2 H_{\text{top}} \\
 & + 0,66601 \ln N_A \ln H_{\text{top}}))), /
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

где:

N_{A+10} - число деревьев в возрасте $A+10$ лет, шт. на 1 га;

N_A - число деревьев в возрасте A лет, шт. на 1 га;

A - возраст древостоя, лет;

H_{top} - верхняя высота, м.

Проведение расчетов по изложенной методике позволило получить оптимальные программы рубок ухода древостоев и проследить возрастное изменение среднего диаметра, числа деревьев, суммы площадей сечений под воздействием оптимального режима разреживаний (Рис. 3.11 - Рис. 3.13, Рис. 3.15 - 3.17).

4.2. Оптимальные режимы интенсивности и повторяемости разреживаний древостоя

Поиск оптимальных режимов промежуточного и главного пользования древесными ресурсами производится по 25000 итераций. Перед первым разреживанием принята таксационная характеристика древостоев из таблиц хода роста (табл. 2.1). Дальнейшие изменения запаса предусмотрены снижением полноты до 0,5 ед. с шагом 0,1 ед. при разных сроках повторяемости разреживаний в диапазоне от 21 до 81 с шагом 10 лет. Первый

вариант решения задачи предусматривает разный уровень интенсивности первого разреживания от 10 до 40% при возрасте древостоя 21 год.

В таблице 3.2 приведены параметры, в соответствии с которыми решалась оптимизационная задача, и объем древесины, которая может быть заготовлена путем реализации рубок ухода и рубок спелых и перестойных насаждений. Максимальный эффект от проведения рубок ухода и рубок спелых и перестойных насаждений наблюдается при интенсивности первого разреживания 10% и 20% и составляет 674 куб. м на 1 га. При этом 30-31% запаса древесины приходится на промежуточное пользование.

С увеличением интенсивности первого приема разреживания до 40% происходит снижение объемов заготавливаемой древесины. Общий запас заготавливаемой древесины снижается до 646 куб. м на 1 га и происходит снижение доли запаса древесины до 28%, приходящейся на рубки промежуточного пользования.

Таким образом, без проведения рубок ухода запас к возрасту 100 лет составляет 512 куб. м на 1 га, а проведение рубок ухода увеличивает запас заготавливаемой древесины за весь период выращивания древостоя на 152 куб. м на 1 га (+ 30%).

Таблица 3.2

Параметры оптимизации и объемы промежуточного и главного пользования древесными ресурсами при разной интенсивности первого разреживания

Показатель		Режим 1	Режим 2	Режим 3	Режим 4
Полнота древостоя		1,0	1,0	1,0	1,0
Возраст древостоя при первом разреживании		21	21	21	21
Минимальный возраст древостоя при втором разреживании		31	31	31	31
Максимальный возраст при последнем разреживании		81	81	81	81
Возраст главного пользования		101	101	101	101
Предельно допустимый уровень снижения полноты		0,5	0,5	0,5	0,5
Минимальное число разреживаний		2	2	2	2
Максимальное число разреживаний		7	7	7	7
Интенсивность первого разреживания		10	20	30	40
Промежуточное пользование	куб. м	206	199	196	182
	%	31	30	29	28
Главное пользование	куб. м	467	475	473	465
	%	69	70	71	72
Итого	куб. м	674	674	669	646
	%	100	100	100	100

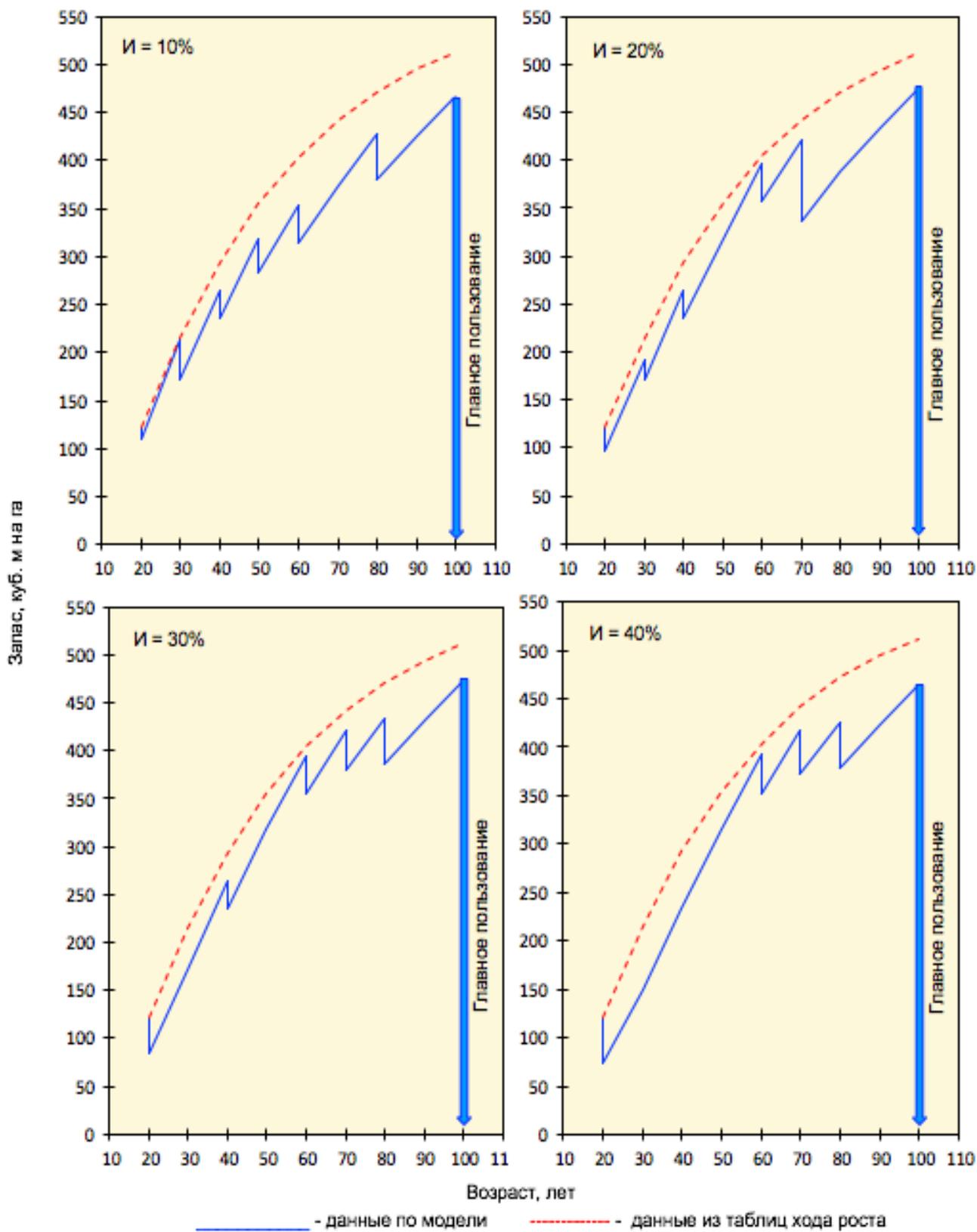


Рис. 3.10. Программа оптимального режима рубок ухода в сомкнутых сосновых древостоях, произрастающих в мезо-гигрофильных субориях при интенсивности первого приема рубки в 21 год от 10 до 40 % по запасу

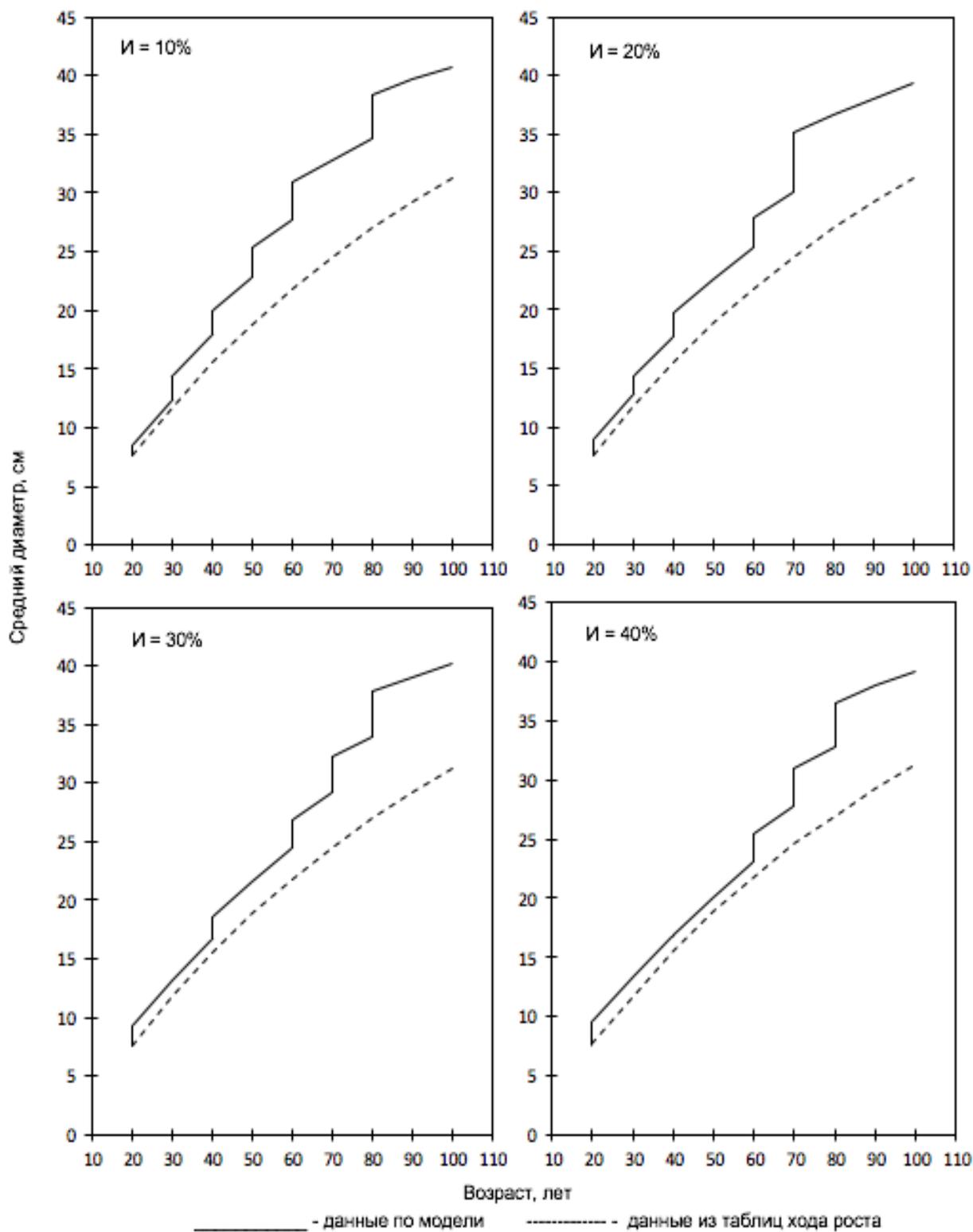


Рис. 3.11. Ход роста древостоев по среднему диаметру в соответствии с оптимальной программой рубок ухода при интенсивности первого приема рубки в 21 год от 10 до 40% по запасу

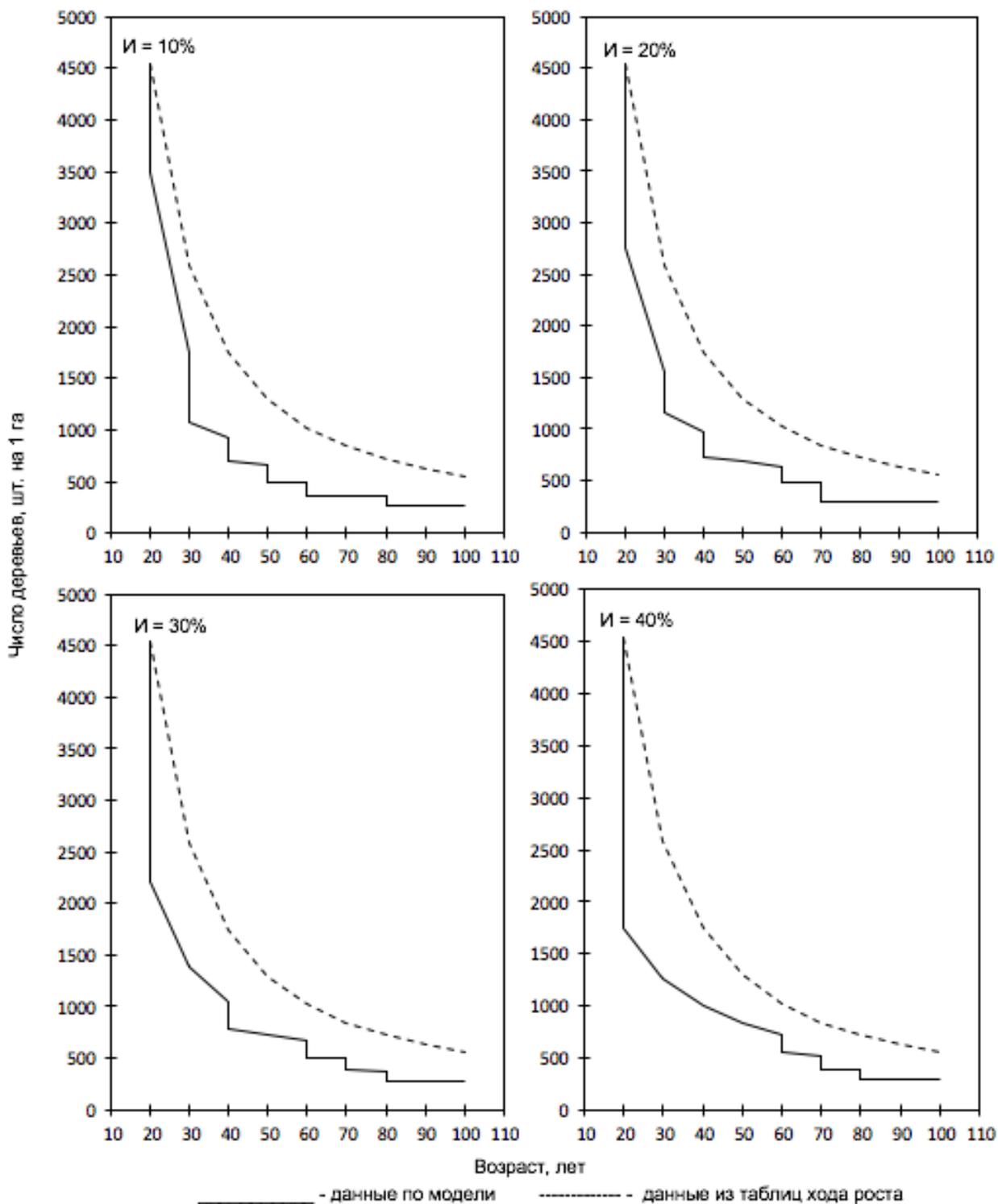


Рис. 3.12. Изменение с возрастом числа деревьев в соответствии с оптимальной программой рубок ухода при интенсивности первого приема рубки в 21 год от 10 до 40% по запасу

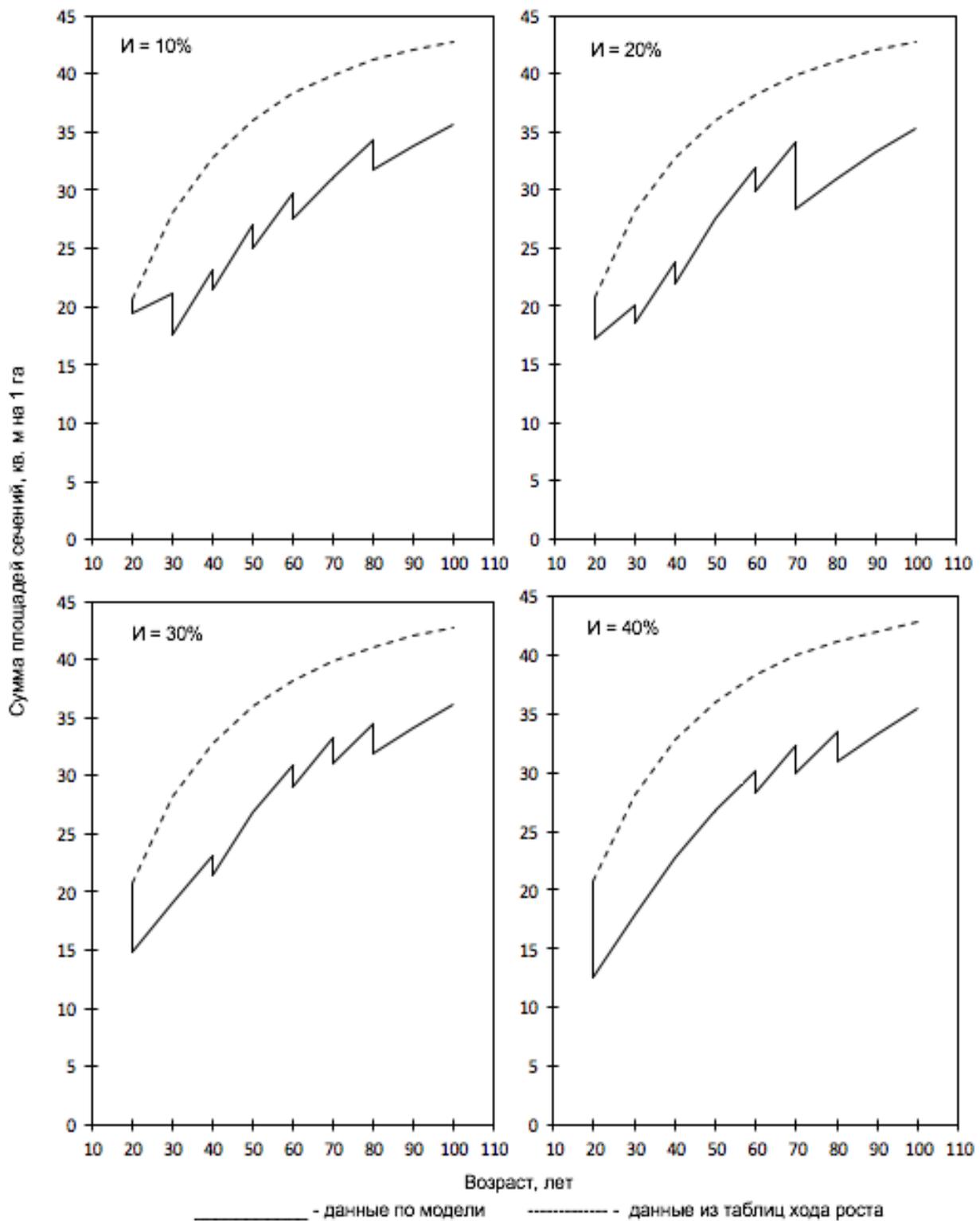


Рис. 3.13. Изменение с возрастом суммы площадей сечений в соответствии с оптимальной программой рубок ухода при интенсивности первого приема рубки в 21 год от 10 до 40% по запасу

На рисунке 3.10 показана динамика восстановления запаса древостоя в оптимальном режиме разреживаний при условиях вырубки за первый прием

коммерческой рубки (в 21 год) от 10 до 40 % запаса. Максимальным количеством проводимых разреживаний (6 приемов) характеризуется режим с интенсивностью первого разреживания 10%. С увеличением интенсивности первого разреживания происходит уменьшение количество разреживаний до 4 при интенсивности первого разреживания 40%.

Второй вариант решения задачи предусматривает разный возраст проведения первого разреживания от 21 года до 51 года с шагом 10 лет. В таблице 4 приведены параметры, в соответствии с которыми решалась оптимизационная задача, и объем древесины, которая может быть заготовлена путем реализации рубок ухода и рубок спелых и перестойных насаждений.

Максимальный эффект от проведения рубок ухода прослеживается в случае проведения первого режима разреживания в возрасте от 21 до 41 лет, общий запас древесины, полученной при проведении рубок ухода и рубок в спелых и перестойных насаждениях, составляет 669-673 куб. м на 1 га. При этом доля древесины, заготовленной при рубках ухода находится в диапазоне 29-31%. Суммарный объем древесины, полученный от проведения рубок ухода, составляет 195-209 куб. м на 1 га.

На рисунке 3.14 показана графическая визуализация изменения с возрастом запаса с оптимальным режимом разреживаний сомкнутых сосновых древостоев, произрастающих в мезо-гигрофильных субориях Костромской области, при возрасте первого разреживания 21, 31, 41 и 51 год. Во всех рассматриваемых случаях для достижения максимума пользования древесными ресурсами необходимо провести 4 приема разреживаний, кроме случая с возрастом первого разреживания 41 год, где для достижения максимума целевой функции необходимо проведение 5 приемов разреживаний.

Таблица 3.3

Параметры оптимизации и объемы промежуточного и главного пользования древесной при разном возрасте первого разреживания

Показатель		Режим 1	Режим 2	Режим 3	Режим 4
Полнота древостоя		1,0	1,0	1,0	1,0
Возраст древостоя при первом разреживании		21	31	41	51
Минимальный возраст древостоя при втором разреживании		31	41	51	61
Максимальный возраст при последнем разреживании		81	81	81	81
Возраст главного пользования		101	101	101	101
Предельно допустимый уровень снижения полноты		0,5	0,5	0,5	0,5
Минимальное число разреживаний		2	2	2	2
Максимальное число разреживаний		7	6	5	4
Промежуточное пользование	куб. м	209	197	195	166
	%	31	29	29	26
Главное пользование	куб. м	461	477	474	475
	%	69	71	71	74
Итого	куб. м	670	673	669	641
	%	100	100	100	100

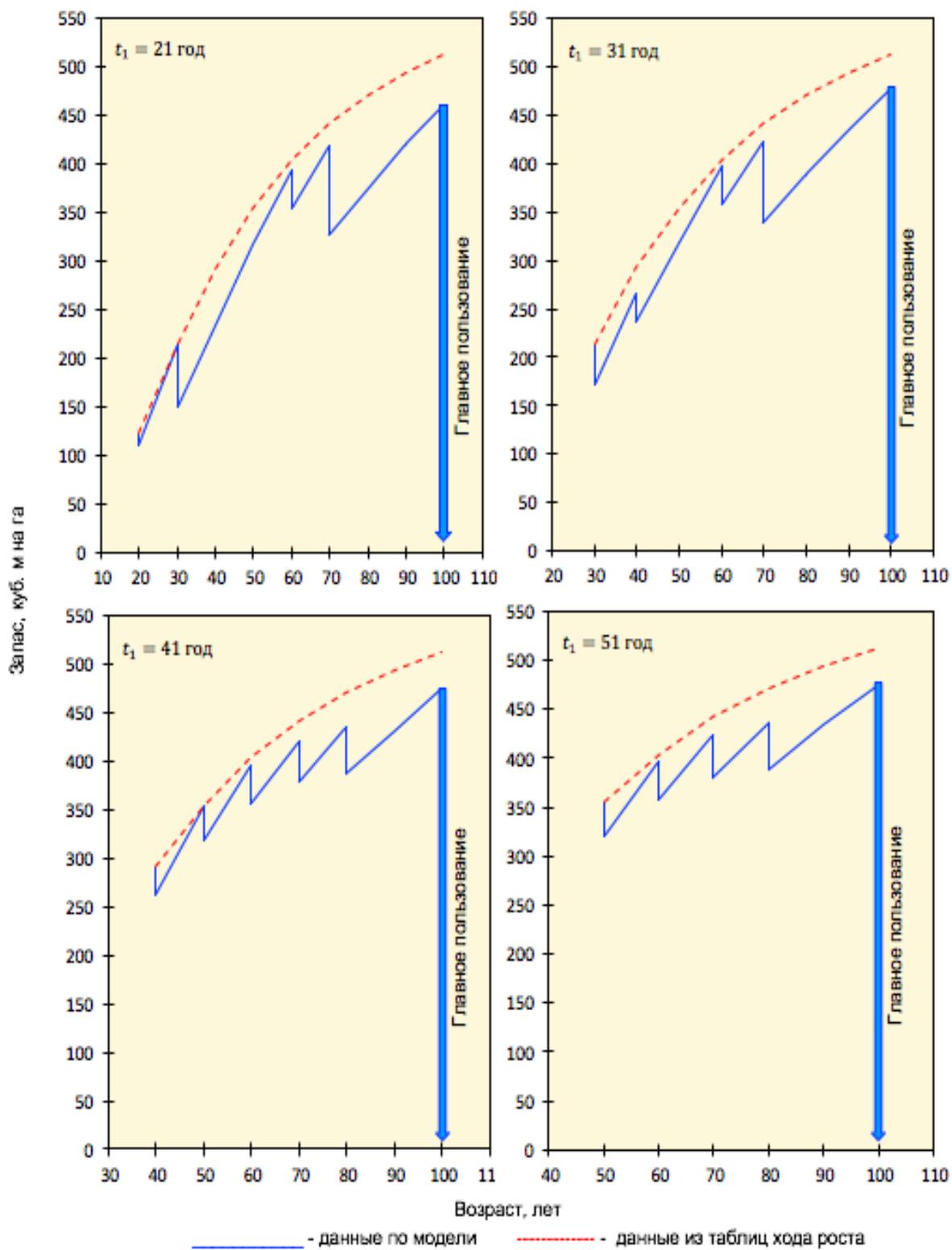


Рис. 3.14. Программа оптимального режима рубок ухода в сомкнутых сосновых древостоях, произрастающих в мезо-гигрофильных субориях при возрасте первого разреживания в 21, 31, 41 и 51 год

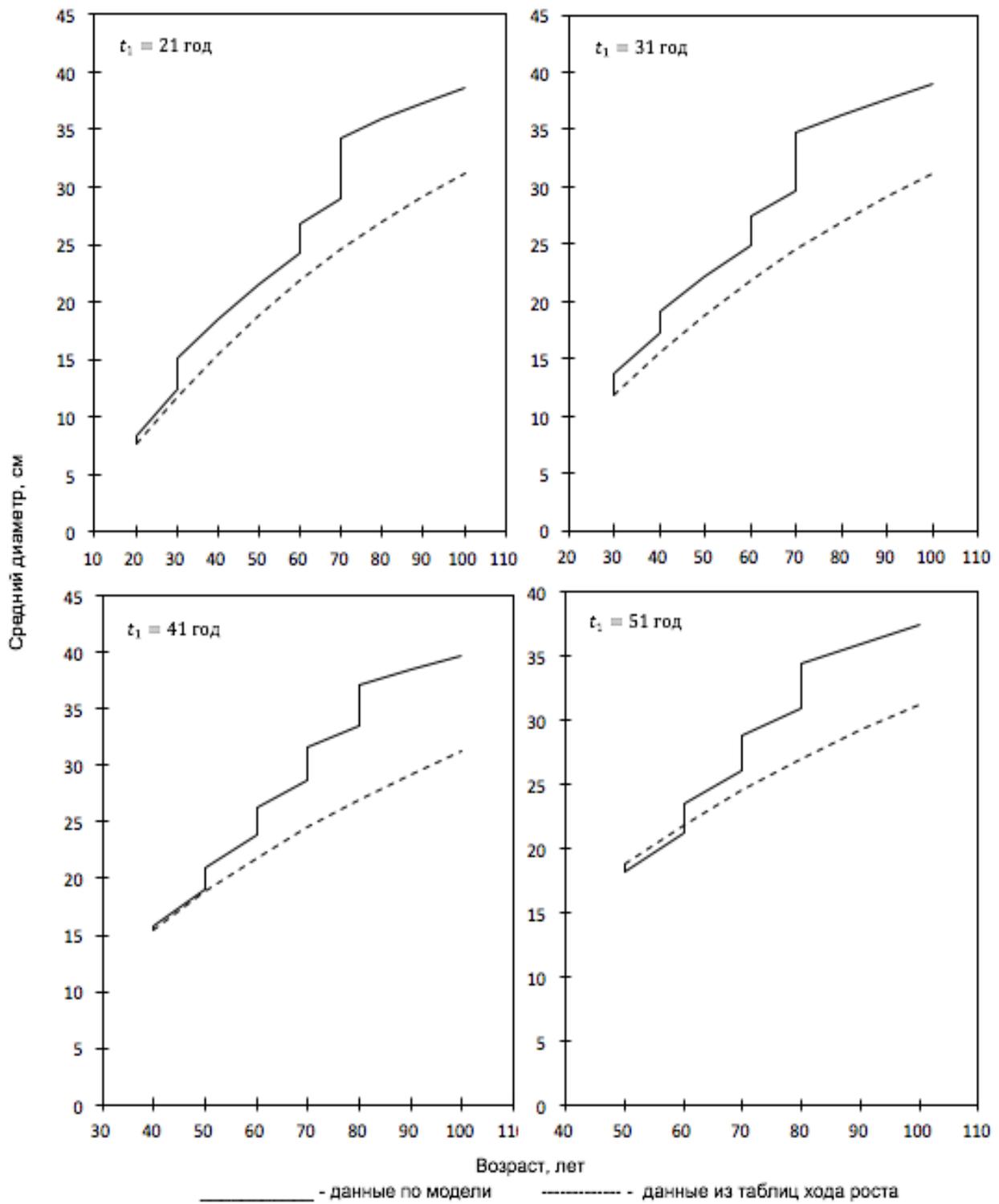


Рис. 3.15. Ход роста древостоев по среднему диаметру в соответствии с оптимальной программой рубок ухода при возрасте первого приема рубки в 21 - 51 год

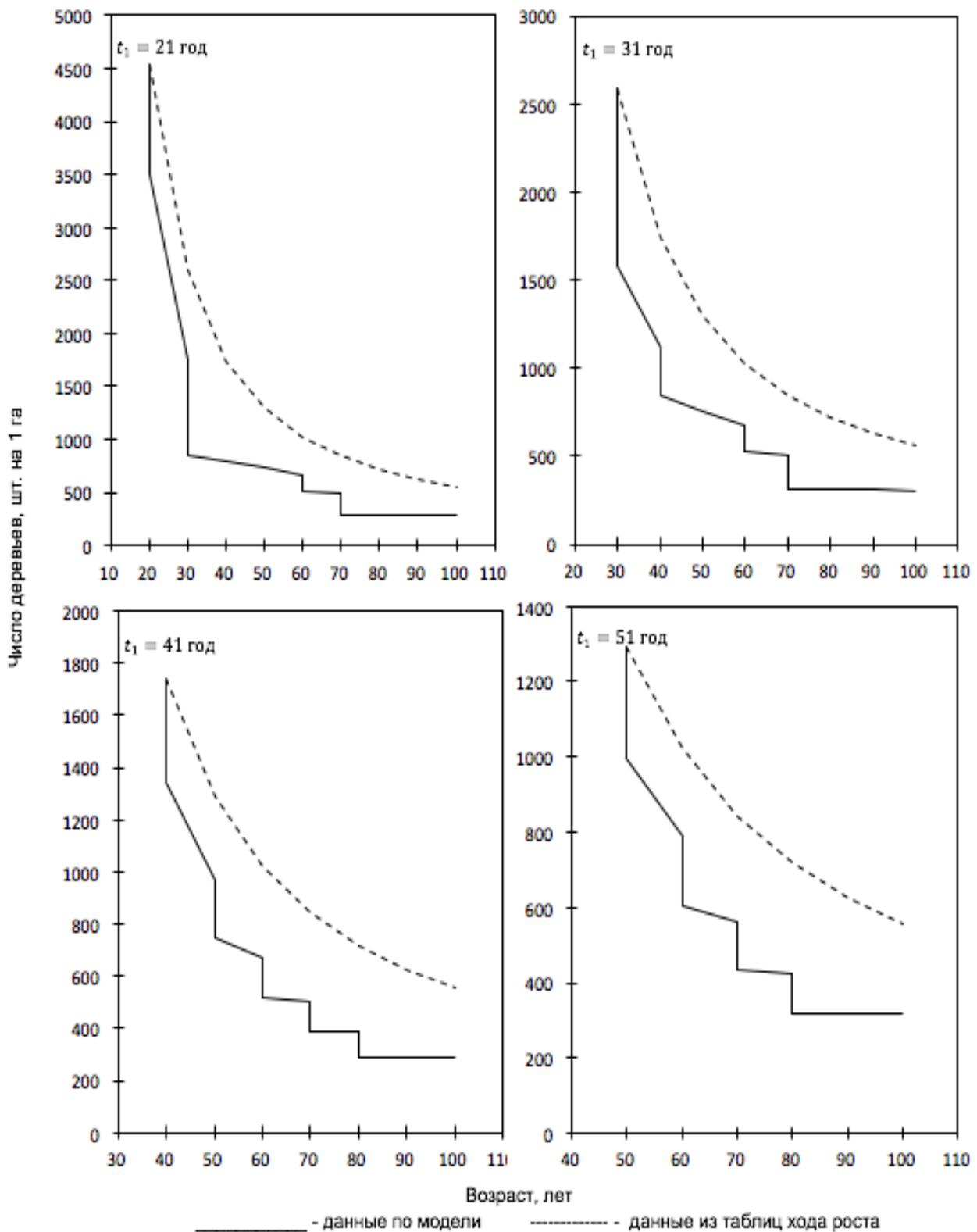


Рис. 3.16. Изменение с возрастом числа деревьев в соответствии с оптимальной программой рубок ухода при возрасте первого приема рубки в 21 - 51 год

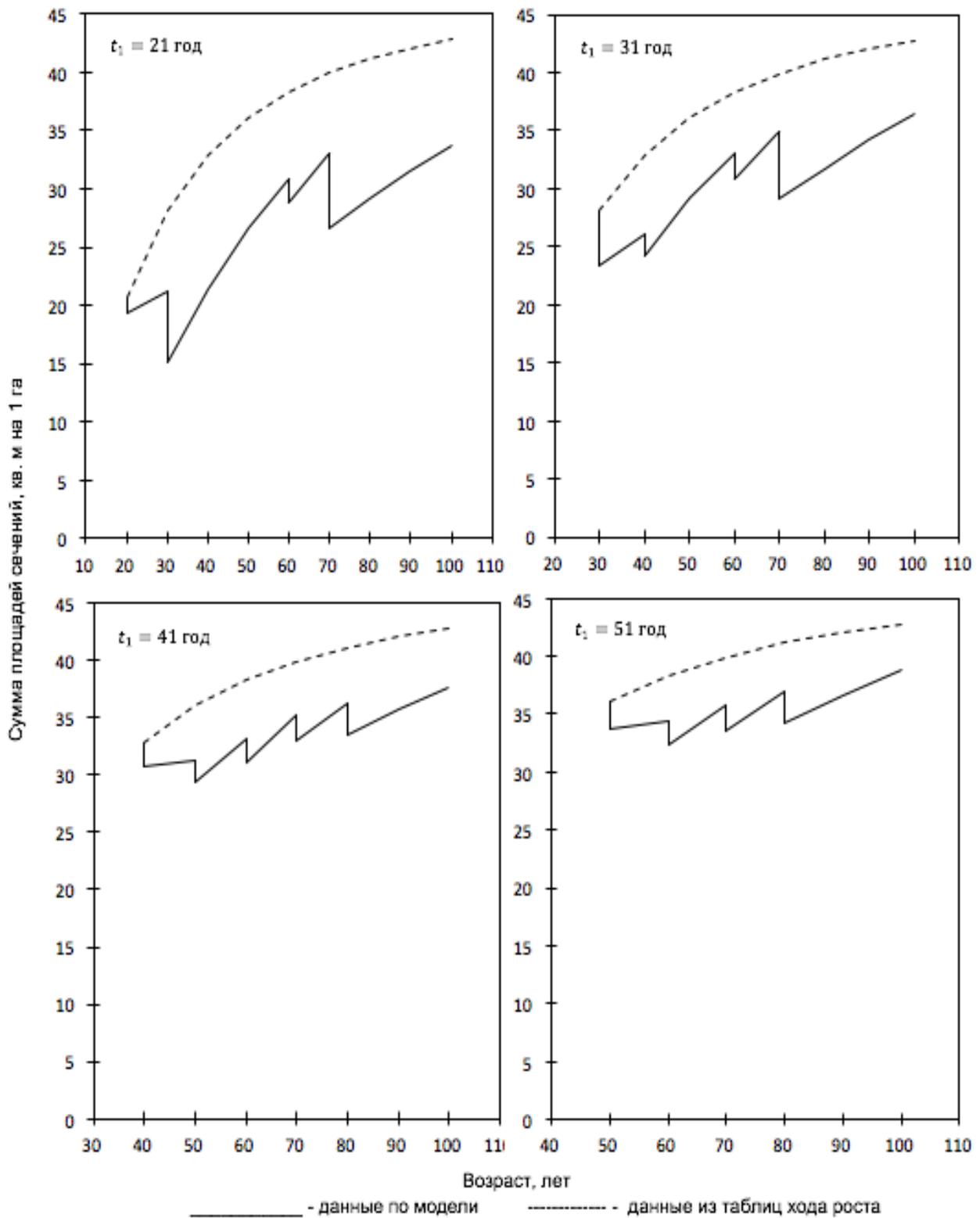


Рис. 3.17. Изменение с возрастом суммы площадей сечения в соответствии с оптимальной программой рубок ухода при возрасте первого приема рубки в 21 - 51 год

4. ИНФОРМАЦИОННО - СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ТАКСАЦИИ ЛЕСА

В настоящее время существует проблема снижения инвестиционной привлекательности сырьевого потенциала лесов. Она вызвана отсутствием на значительной части территории лесного фонда страны материалов лесоустройства. Причиной тому является устаревшая, малоинформативная и не отвечающая современным требованиям нормативно-справочная база в виде лесотаксационных справочников, изданных в 70-80 годах прошлого столетия. На современном этапе развития учения о лесе и необходимостью оптимизации управления лесными ресурсами востребованы принципиально новые информационно-справочные системы экологических нормативов, обеспечивающие автоматизацию комплексной оценки лесных ресурсов.

4.1. Системный комплекс электронных нормативов для таксации насаждений

Целью разработки первой версии информационно-справочной системы (ИСС) является усовершенствование лесотаксационных нормативов хода роста, строения и товарной продуктивности сосновых, еловых, дубовых, березовых и осиновых древостоев путем стыковки таблиц хода роста, сортиментных таблиц и таблиц распределения числа деревьев по толщине для получения выхода деловой, крупной, средней, мелкой древесины, дров и отходов.

Информационной основой при разработке первой версии новых нормативов являлись многомерные статистические модели, разработанные на основе данных региональных таблиц хода роста, сортиментных таблиц Н.П. Анучина, приведенных к единой форме, а также моделей распределения числа деревьев по толщине, предложенных В.К. Хлюстовым (2007, 2015).

Зона действия разработанных нормативов относится к центральному лесотаксационному району. Новые нормативы отображают закономерности формирования как отдельных деревьев, так и древостоев в целом. Одним из

главных элементов нормативов являются закономерности изменения объемов стволов деревьев, выхода объема деловой древесины, категорий крупности, дров и отходов от размеров и возраста деревьев. Их сочетание с закономерностями распределения числа деревьев по толщине позволило получить распределения обезличенной и товарной древесины в древостоях разного возраста, полноты и средней высоты в 100-летнем возрасте.

Информационно-справочные системы нормативов включает в себя:

1) ход роста древостоев разных уровней продуктивности, выраженных средней высотой в 100-летнем возрасте древостоев с преобладанием сосны, ели и дуба и в 50 -летнем возрасте с преобладанием березы и осины;

2) относительную полноту древостоев;

3) распределение числа деревьев, суммы площадей сечения, обезличенного запаса, запаса деловой древесины и выхода древесины по категориям крупности, дровам и отходам.

Команда «Загрузка» (Рис.4.1, Рис. 4.2) открывает окно для набора следующих показателей:

- древесная порода;
- средняя высота древостоя в 100- или 50-летнем возрасте (H_{100} и H_{50});
- относительная таксационная полнота;
- текущий возраст - возраст на данный момент времени;
- возраст актуализации.

Активирование каждой закладки позволяет получить таблицу значений таксационных показателей по десяти классам в диапазоне от минимального до максимальных диаметров в текущем и актуализируемом возрасте древостоев. Для наглядного представления табличных данных в справочнике имеется функция «График», активирование которой выводит рисунки 4.3, 4.4, 4.5 и 4.6 - распределения для выбранных возрастов.

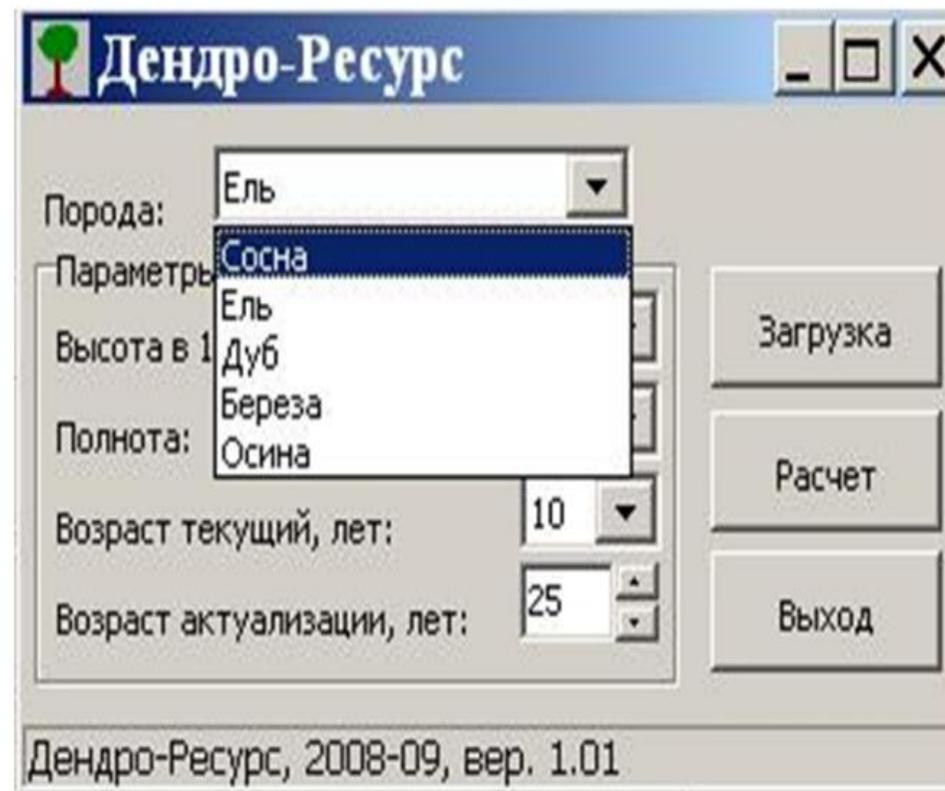
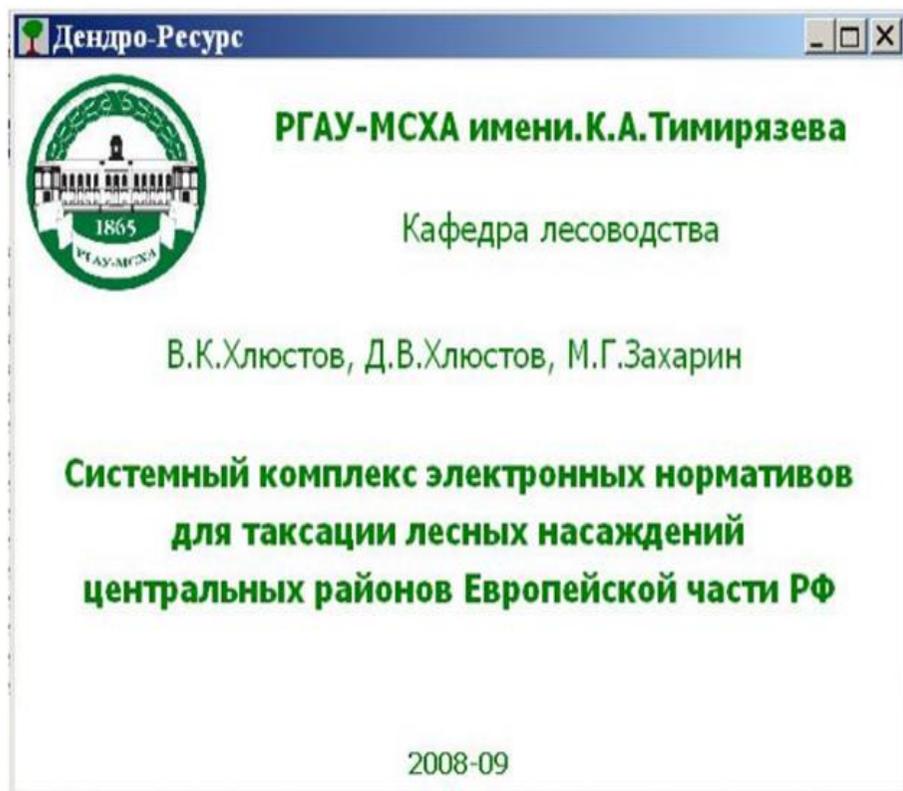


Рис.4.1. Титульный лист и загрузочная панель справочника

Порода: Высота в 100 лет, м: Полнота:

Основное	Диаметр	Число	Сумма пл.сечен.	Высота	Запас древостоя	Деловая др.	Крупная др.	Средн.и мелк. др	Дрова и отход									
Возраст	Верх.высота	Сред.высот	Сред. диаме	Видовое чис	Видовая вы	Число дерев	Сумма сечен	Объем ср. др	Запас, куб.м	Сред. измен	Тек. изменен	Парам.маш	Парам.маш	Парам.маш	Итого дел. д	Итого круп.	Итого сред.	Итого дров
A	Hb	H	D	F	HF	N	G	V	M	Zcp.	Zтек.	Дмин.	Дмакс.	Rv				
25(прогноз)	15,65	10,60	8,90	0,5585	5,85	5413,00	29,75	0,0430	179,00	6,95	10,25	1,92	18,85	76,33	161,60	0,10	161,55	62,95
10	5,90	3,70	2,60	0,8610	3,20	22430,00	11,80	0,0020	37,00	3,70	0,00	0,29	6,87	85,91	11,10	0,00	11,10	44,30
20	12,60	8,00	6,50	0,5940	4,80	7354,00	24,40	0,0160	116,00	5,80	7,90	1,16	14,62	78,43	95,60	0,00	95,60	61,50
30	18,70	13,20	11,30	0,5230	6,90	3472,00	35,10	0,0700	242,00	8,10	12,60	2,68	23,08	74,22	227,60	0,20	227,50	64,40
40	23,50	18,20	16,70	0,4940	9,00	1983,00	43,60	0,1980	393,00	9,80	15,10	4,79	31,75	71,42	369,50	14,10	355,20	69,90
50	27,40	22,80	22,30	0,4800	10,90	1287,00	50,30	0,4270	549,00	11,00	15,60	7,38	40,19	69,42	508,80	84,90	424,10	77,80
60	30,60	26,70	27,80	0,4710	12,60	916,00	55,50	0,7630	699,00	11,60	14,90	10,25	48,12	67,92	642,80	223,10	419,70	84,80
70	33,30	30,00	33,00	0,4660	14,00	700,00	59,70	1,1930	835,00	11,90	13,60	13,25	55,35	66,78	768,30	398,70	369,80	89,10
80	35,50	32,80	37,70	0,4620	15,10	564,00	63,00	1,6920	954,00	11,90	12,00	16,22	61,82	65,90	883,70	575,50	308,50	90,30
90	37,30	35,00	42,00	0,4600	16,10	474,00	65,60	2,2290	1057,00	11,70	10,30	19,05	67,51	65,20	987,20	731,60	255,80	89,10
100	38,70	37,00	45,80	0,4580	16,90	412,00	67,80	2,7780	1144,00	11,40	8,70	21,68	72,45	64,65	1078,20	861,40	217,10	86,10
110	39,90	38,40	49,10	0,4560	17,50	367,00	69,50	3,3140	1217,00	11,10	7,30	24,07	76,72	64,20	1157,40	966,80	190,50	82,20
120	40,90	39,60	51,90	0,4550	18,00	334,00	70,80	3,8190	1277,00	10,60	6,00	26,21	80,36	63,84	1224,50	1052,00	172,60	77,90
130	41,70	40,60	54,40	0,4540	18,40	310,00	71,90	4,2840	1326,00	10,20	4,90	28,09	83,46	63,55	1280,80	1120,80	160,00	73,60
140	42,30	41,40	56,50	0,4530	18,80	291,00	72,80	4,7020	1366,00	9,80	4,00	29,72	86,08	63,32	1327,70	1176,50	150,90	69,60
150	42,80	42,00	58,30	0,4530	19,00	276,00	73,50	5,0700	1398,00	9,30	3,20	31,13	88,29	63,12	1366,00	1221,80	144,00	66,10
160	43,20	42,50	59,70	0,4520	19,20	264,00	74,00	5,3900	1424,00	8,90	2,50	32,33	90,13	62,97	1397,00	1258,00	139,00	63,10

Рис. 4.2. Параметры еловых древостоев из раздела «Основное» с закладками классов диаметра, теоретических частот распределения деревьев по классам толщины и другим таксационным показателям

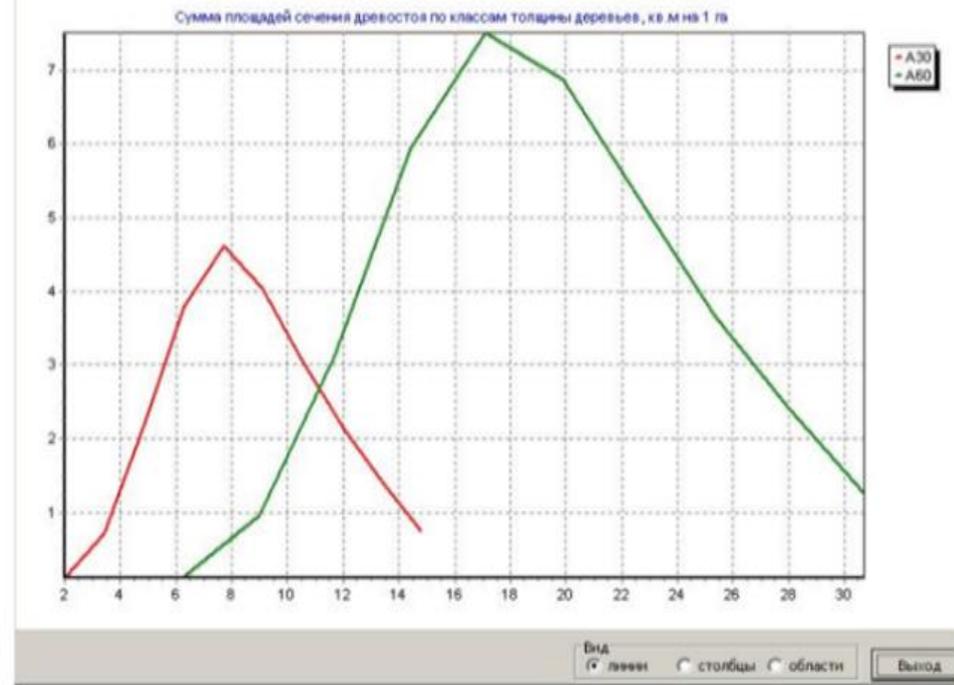
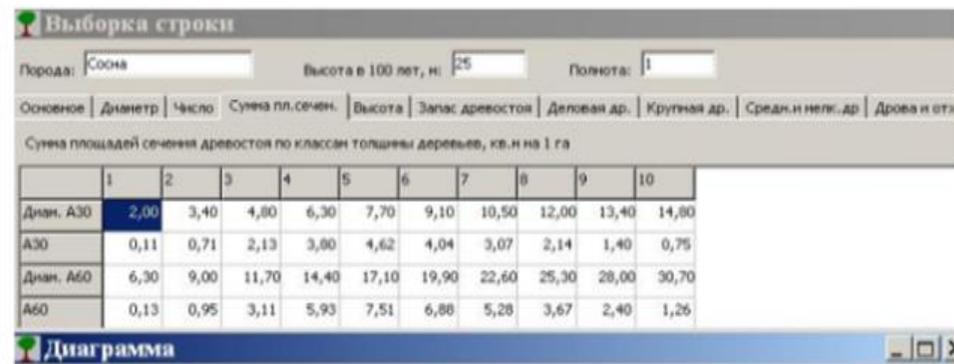
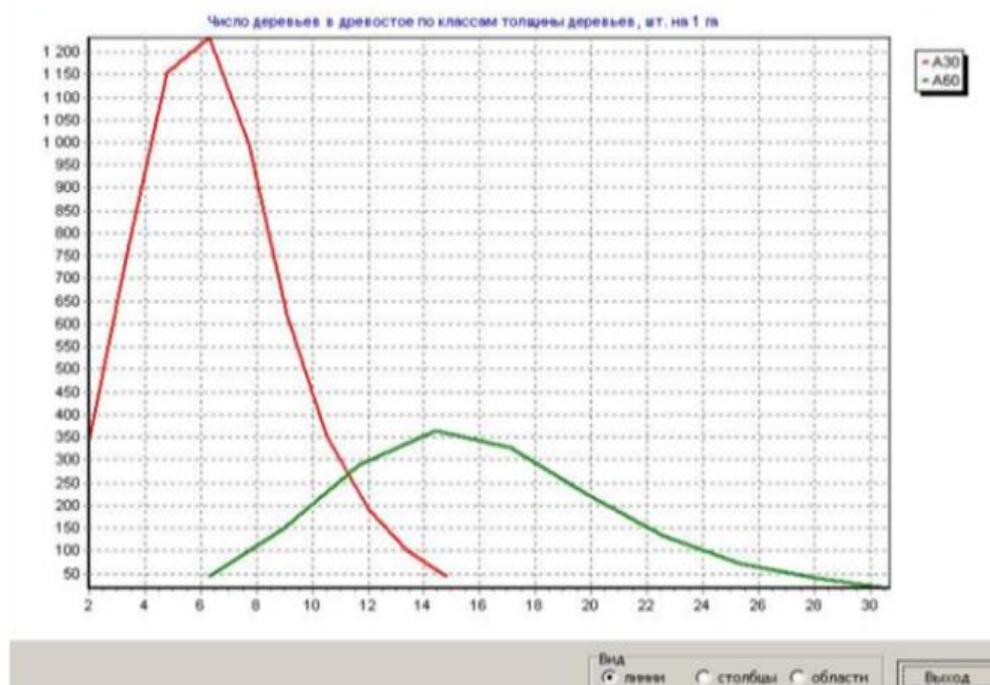
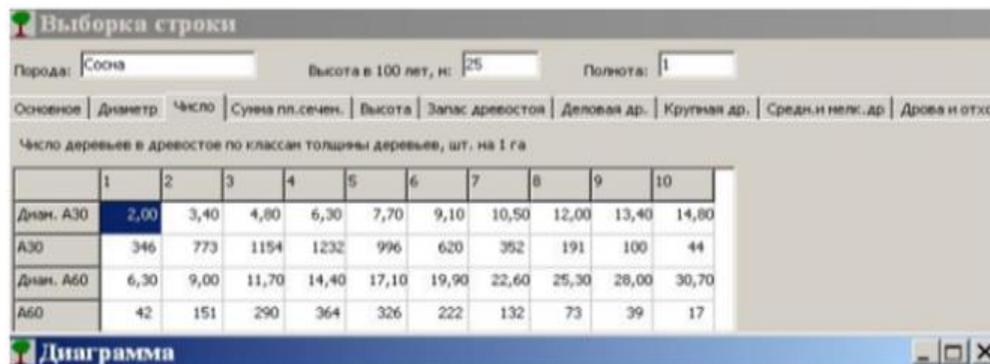


Рис. 4.3. Диаграммы распределения числа деревьев (слева) и сумм площадей сечения (справа) по классам толщины деревьев при $H_{100}=25$ м и $P=1,0$ сосновых древостоев

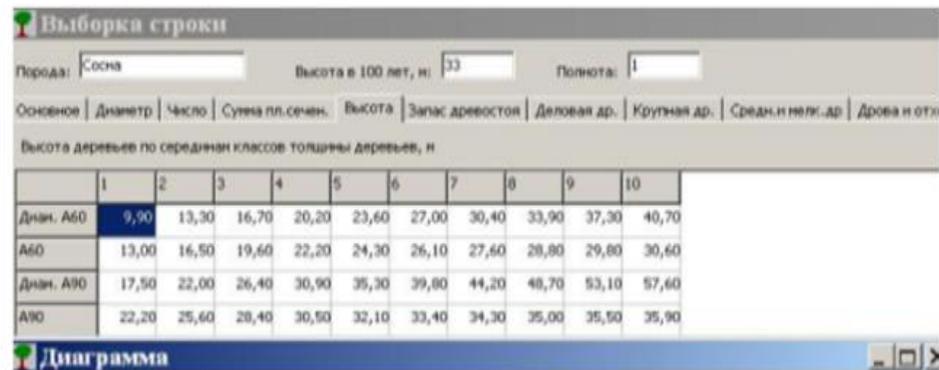
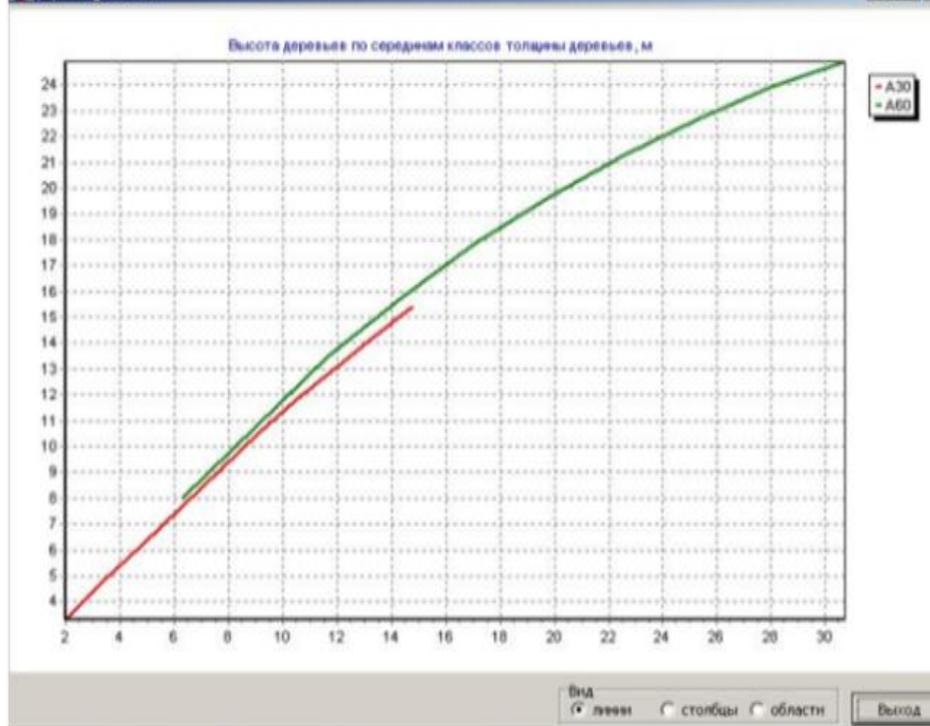
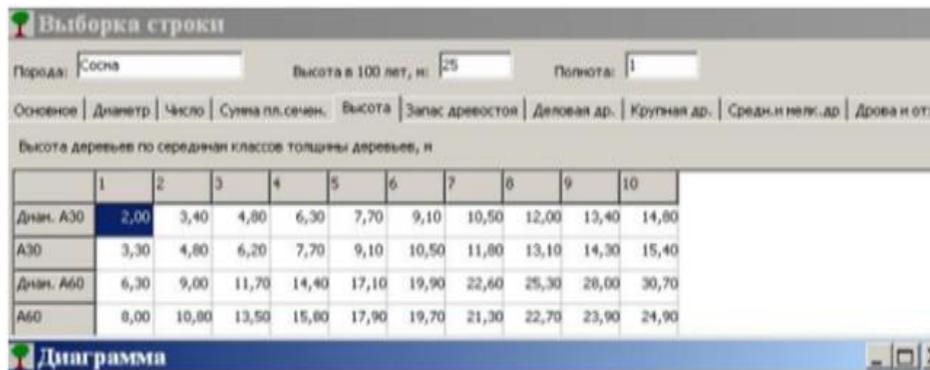


Рис. 4.4. Изменение графиков высот в текущем и актуализируемом возрасте для 30 и 60 лет при $N_{100}=25$ м (слева) и в 60 и 90 лет при $N_{100}=33$ м (справа) в сосновых древостоях при $P=1$

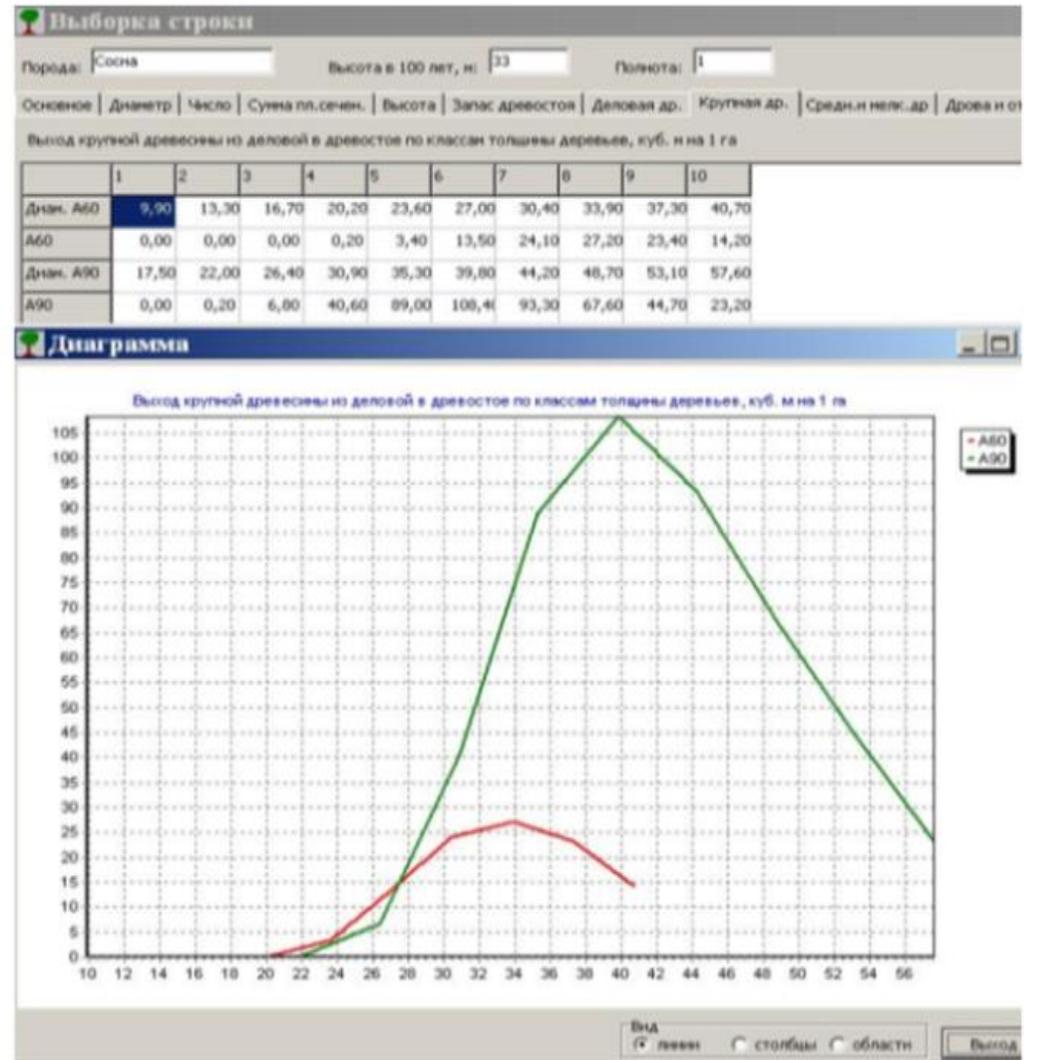
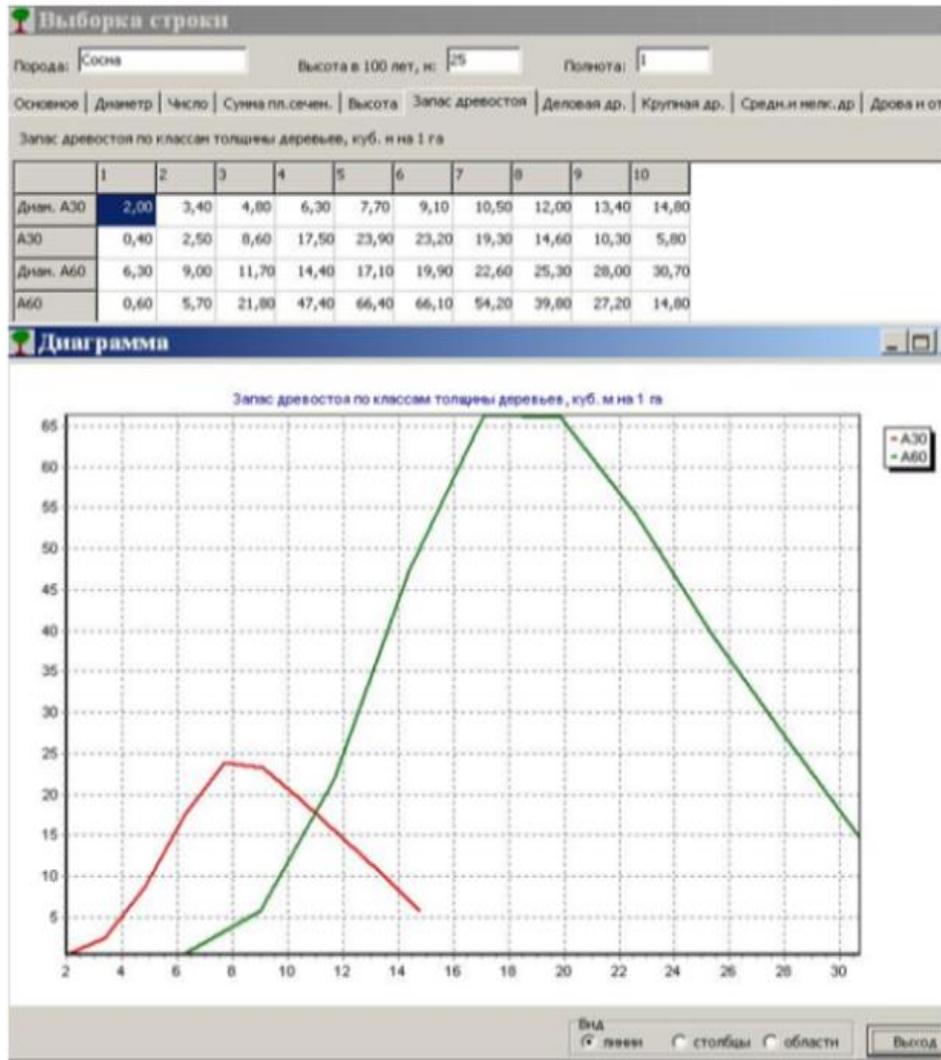


Рис. 4.5. Кривые распределения запаса сосновых древостоев в возрасте 30 и 60 лет при $H_{100}=25$ м и $P=1,0$ и выхода крупной древесины в возрасте 60 и 90 лет

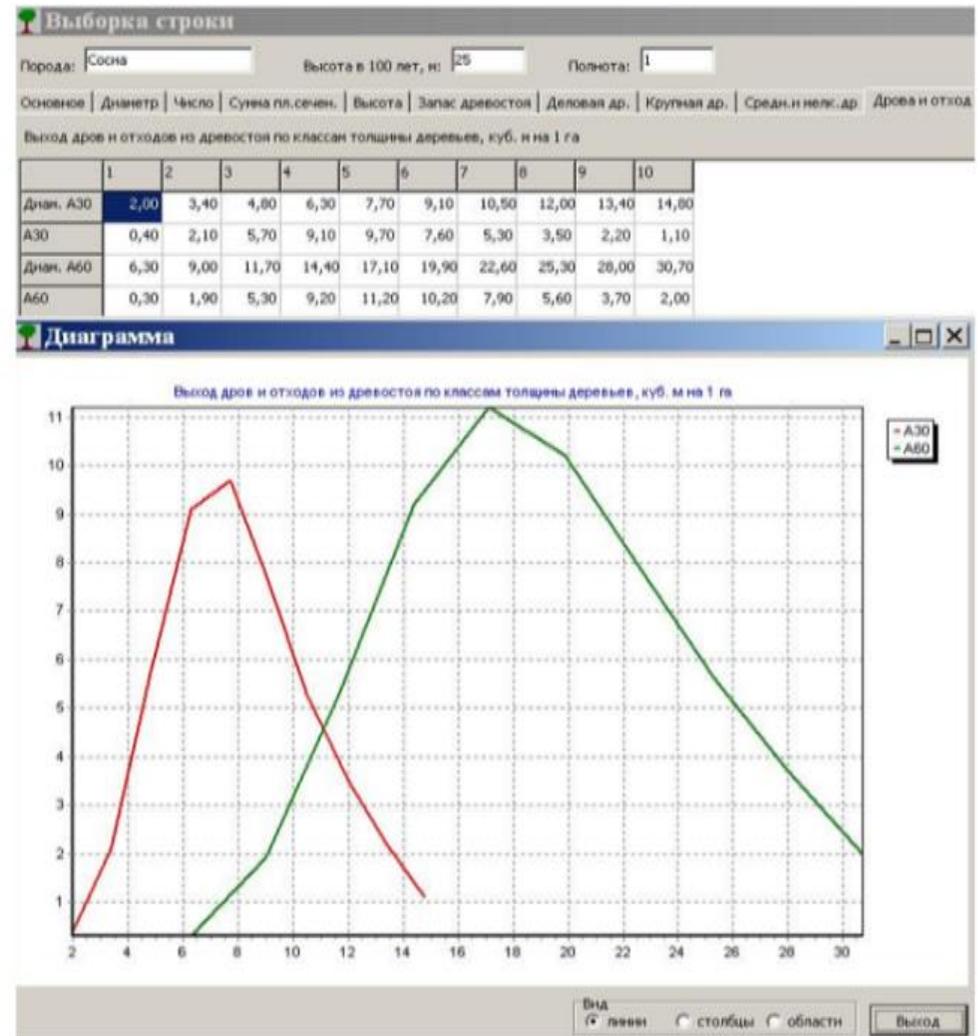
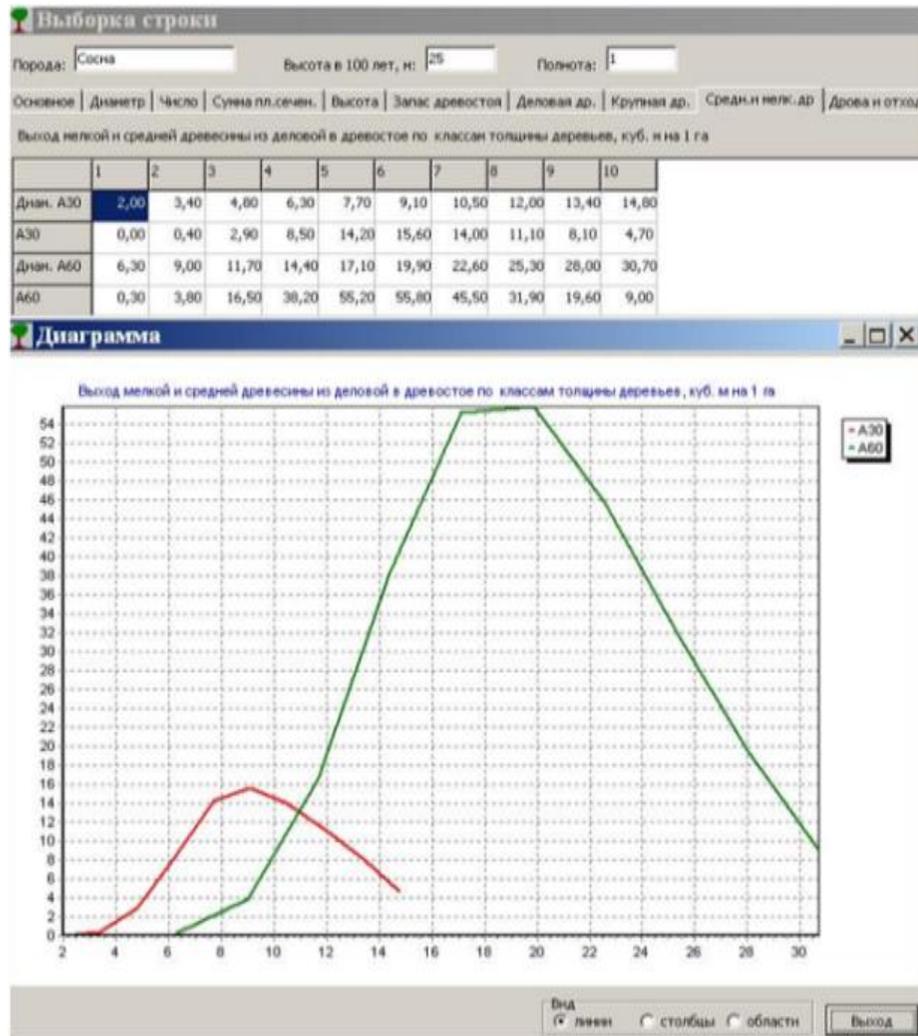


Рис. 4.6. Кривые распределения выхода мелкой и средней древесины (слева), выхода дров и отходов (справа) в сосновых древостоях в возрасте 30 и 60 лет при $H_{100}=25$ м и $\Pi=1,0$

4.2. Информационно-справочная система нормативов комплексной оценки древесных ресурсов

Наряду с первой версией электронного справочника, изложенной в первой книге, представлена принципиально новая информационно-справочная система лесотаксационных нормативов комплексной оценки древесных ресурсов насаждений разного породного состава, возраста, полноты, бонитета древостоев и типов лесорастительных условий.

Повсеместно применяемые лесотаксационные нормативы в виде таблиц хода роста сомкнутых (полных) чистых по составу древостоев, стандартных, сортиментных, товарных таблиц и таблиц распределения числа деревьев по ступеням толщины не имеют экологической основы, так как составлены без учёта условий местообитания. А ведь именно они являются определяющим фактором всего многообразия комбинаций породного состава, пространственной и возрастной структуры древостоев. Устранить эти недостатки позволяет единый системный комплекс электронных лесотаксационных нормативов текущей актуализации таксационных показателей древостоев.

Текущая актуализация таксационных показателей осуществляется на момент проведения инвентаризации древостоя и служит основой для прогнозирования прироста показателей элементов леса на заданный период упреждения от начального (текущего) возраста. Информационно-справочная система включает в себя многомерные статистические модели роста, строения, общей древесной, товарной и биологической продуктивности древостоев по элементам леса и позволяет имитировать возможную характеристику древостоев по 45 показателям при наличии пяти элементов леса. Входом в систему являются следующие показатели: тип лесорастительных условий, бонитет, полнота, доля породы в составе древостоя, возраст деревьев по элементам леса.

Многообразие комбинаций сочетания исходных данных конкретного насаждения на текущий момент времени невозможно без применения программных продуктов в виде информационных-справочных систем лесотаксационных нормативов, разработанных В.К. Хлюстовым, М.М. Устиновым, Д.В. Хлюстовым (Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2011615418 от 12.06.2011 г.; №2012613879 от 25.04.2012 г.)

Интерфейс системы прост в управлении и позволяет получить полную таксационную характеристику конкретного древостоя в табличной форме, а также визуализировать по элементам леса многомерные закономерности объем образующих показателей деревьев, категорий крупности древесины от толщины деревьев. Представить взаимосвязи средних значений показателей роста от пространственной, породной и возрастной структуры древостоев. Важным элементом системы является табличное представление и визуализация распределения числа деревьев, суммы площадей сечений, обезличенного запаса и запаса по категориям крупности древесины, дров, отходов, показателей биомассы стволов деревьев, ветвей, коры, хвои (листьев) по 10 классам толщины деревьев.

Методические указания по составлению электронных лесоводственно-таксационных нормативов текущей актуализации таксационных показателей древостоев по элементам леса сведены к постановке задачи, основанию для разработки, назначению разработки, требованию к функциональным характеристикам, требованию к надёжности, условиям эксплуатации, требованию к составу и параметрам технических средств, требованию к информационной и программной совместимости, требованию к программной документации. Приведена концептуальная модель системы, архитектура программной системы, конструирование пользовательского интерфейса. На современном этапе развития учения о комплексной оценке лесных ресурсов, повышении продуктивности насаждений и оптимизации лесопользования

актуальной задачей становится усовершенствование лесотаксационных нормативов инвентаризации лесов на основе современных информационных технологий. Ведущая роль при этом отводится принципиально новым информационно-справочным системам единого комплекса лесотаксационных нормативов, разработанных на экологической основе, учитывающей условия местопроизрастания насаждений, их пространственную, возрастную и породную структуру.

В монографии изложена подсистема нормативов текущей актуализации таксационных показателей роста, строения, товарной, биологической продуктивности древостоев на примере лесов Московской области.

В отличие от действующих нормативов новая система таксационных нормативов основана на построении многомерных статистических моделей, логически связанных между собой и обеспечивающих достоверность инвентаризации древостоев по всему комплексу таксационных показателей как отдельных деревьев, так и древостоев в целом. Система обеспечивает как графическую визуализацию анализируемых взаимосвязей, так и экспорт результатов для проведения расчётно-графических работ при решении практических задач.

Актуализация текущего состояния таксационных показателей и распределений по толщине деревьев осуществляется вводом в систему **пяти показателей:**

- a) типа лесорастительных условий;
- b) бонитета;
- c) полноты, ед.;
- d) возраста элемента леса, лет;
- e) доли участия породы в составе древостоя.

На выходе №1 по элементам леса получаем графическую интерпретацию взаимосвязей таксационных показателей отдельных деревьев с размерами деревьев:

- a) зависимость высот деревьев от толщины деревьев (графика высот);
- b) зависимость объёма стволов деревьев от толщины и высоты деревьев;
- c) зависимость выхода деловой древесины (в процентах) из объёма стволовой древесины от толщины и высоты деревьев;
- d) зависимость выхода крупной древесины (в процентах) из объёма деловой древесины от толщины и высоты деревьев;
- e) зависимость объёма крупной древесины от толщины и высоты деревьев;
- f) зависимость объёма средней и мелкой древесины от толщины и высоты деревьев;
- g) зависимость объёма дровяной древесины и отходов из деловых стволов от толщины и высоты деревьев;
- h) зависимость биомассы стволовой древесины (в кг) от толщины и высоты деревьев;
- i) зависимость биомассы коры (в кг) из стволов деревьев от толщины и высоты деревьев;
- j) зависимость биомассы ветвей (в кг) от толщины и высоты деревьев;
- k) зависимость биомассы хвои (листвы) (в кг) от толщины и высоты деревьев;
- l) зависимость биомассы корней (кг) от толщины и высоты деревьев.

На выходе №2 по элементам леса получаем распределения таксационных показателей древостоя по 10 классам толщины деревьев:

- a) числа деревьев, шт./га;
- b) суммы площадей сечения, м²/га;
- c) обезличенного запаса, м³/га;

- d) запаса деловой древесины, м³/га;
- e) запаса крупной древесины, м³/га;
- f) запаса средней и мелкой древесины, м³/га;
- g) запаса дровяной древесины и отходов, м³/га;
- h) биомассы стволовой древесины, кг/га;
- i) биомассы коры, кг/га;
- j) биомассы ветвей, кг/га;
- k) биомассы корней, кг/га;
- l) биомассы хвои (листвы), кг/га.

На выходе №3 для каждого элемента леса получаем средние и итоговые таксационные показатели:

- a) средний диаметр по умолчанию (имеется возможность его корректировки), см;
- b) среднюю высоту, м;
- c) верхнюю высоту, м;
- d) число деревьев, шт./га;
- e) сумму площадей сечения, м²/га;
- f) запас обезличенный, м³/га;
- g) запас деловой древесины, м³/га;
- h) запас по категориям крупности древесины, м³/га;
- i) запас дров и отходов, м³/га;
- j) биомассу стволов, кг/га;
- k) биомассу коры, кг/га;
- l) биомассу ветвей, кг/га;
- m) биомассу хвои (листвы), кг/га.

Инвентаризация всего многообразия древостоев по породной, возрастной, пространственной (вертикальной и горизонтальной) структуре, произрастающих в различных типах лесорастительных условий, требует знания широкого спектра многомерных закономерностей формирования

насаждений. Просуществовавшая более 150 лет теория хода роста древостоев уже по многим лесоводственно-таксационным и экологическим критериям не отвечает современным требованиям инвентаризации лесов.

Очевидным является и то, что возрастная динамика таксационных показателей конкретных древостоев не описывается принятой в таксации теорией хода роста. Каждый конкретный древостой в зависимости от исходной таксационной характеристики в начальном возрасте имеет на интересующий нас период упреждения присущие лишь ему изменения таксационных показателей. Это подтверждается многолетними наблюдениями за постоянными пробными площадями, заложенными А. Шваппахом в Германии, М.К. Турским, В.Т. Собичевским, В.П. Тимофеевым на Лесной опытной даче РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, материалами постоянных пробных площадей Санкт-Петербургского НИИ лесного хозяйства и др.

Совершенствование экологических лесоводственно-таксационных нормативов прогнозирования роста, строения, общей, товарной и биологической продуктивности должно базироваться на достоверной информации об исходном состоянии древостоев в начальном возрасте каждого элемента леса. Получить такую информацию позволяет электронно-справочная система, разработанная и адаптированная для конкретного региона или субъекта РФ. Так, впервые была разработана электронно-справочная система лесотаксационных нормативов инвентаризации древостоев по элементам леса.

Запуск системы расчёта таксационных показателей, отображающих состояние отдельных элементов леса древостоя на текущий момент времени, осуществляется после заполнения загрузочной панели. После выбора региона (Московская область) в систему подгружаются зональные многомерные модели, позволяющие имитировать взаимосвязи 43 расчётных таксационных показателей с пятью значениями независимых переменных, а именно:

бонитетом (II); типом лесорастительных условий (ТЛУ) (С3); полнотой (1,0); возрастом (40 лет) и долевым участием древесной породы в составе древостоя (2С2Е2Лп2Б2Ос) (рис. 4.7).

Правильное заполнение загрузочной панели контролируется записью: «Данные верны».

Введённая в панели исходная таксационная характеристика древостоя после нажатия кнопки «Рассчитать» указывается в окне «Основные таксационные показатели» (рис. 4.8).

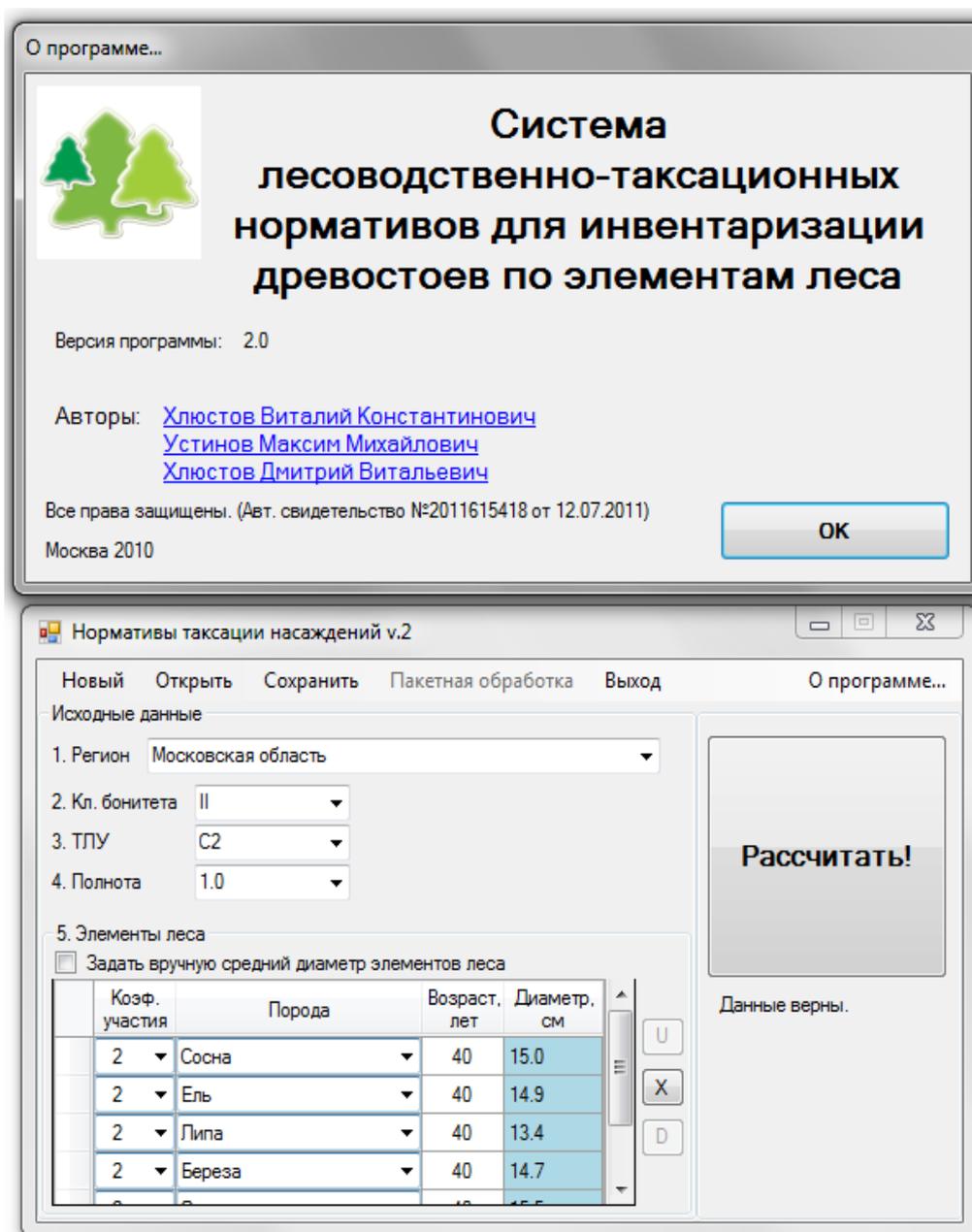


Рис. 4.7. Титульный лист и загрузочная панель

Основные таксационные показатели

Экспорт | Строки | Столбцы | Графики

Древостой
 Регион: Московская область
 Характеристика участка: Кл. бонитета - II; ТПУ - С2; Полнота - 1
 Состав: 2 Сосна (A=40, D=15) 2 Ель (A=40, D=14,9) 2 Липа (A=40, D=13,4) 2 Береза (A=40, D=14,7) 2 Осина (A=40, D=15,5)

Кэф. состава	Порода	Возраст, лет	Класс толщины	Мин. диаметр, см	Ср. диаметр, см	Макс. диаметр, см	Высота, м	Кол-во стволов, шт./га	Сумма площ. сечений, кв.м/га
2	Сосна	40	по элементу леса	3,2	15,0	31,2	15,7	325	5,71
2	Ель	40	по элементу леса	3,5	14,9	32,5	15,9	320	5,57
2	Липа	40	по элементу леса	2,9	13,4	29,9	15,4	441	6,19
2	Береза	40	по элементу леса	3,3	14,7	32,2	17,5	324	5,51
2	Осина	40	по элементу леса	3,1	15,5	31,0	17,6	287	5,38

Порода	Возраст, лет	Класс толщины	Объем ствола, куб.м	Запас, куб.м/га	% деловой	% крупной из деловой	% средней и мелкой	% дров и отходов
Сосна	40	по элементу леса	0,1368	44,51	77,21	1,13	76,09	21,91
Ель	40	по элементу леса	0,1392	44,51	80,83	2,84	78,00	18,94
Липа	40	по элементу леса	0,1010	44,51	75,79	0,90	74,89	24,69
Береза	40	по элементу леса	0,1375	44,51	68,94	2,33	66,61	30,25
Осина	40	по элементу леса	0,1552	44,51	53,60	1,34	52,26	45,85

Порода	Возраст, лет	Класс толщины	Объем ствола, куб.м	Запас, куб.м/га	Деловая, куб.м	Крупная из деловой, куб.м	Средняя и мелкая, куб.м	Дрова и отходы, куб.м
Сосна	40	по элементу леса	0,1368	44,51	0,1057	0,0015	0,1041	0,0300
Ель	40	по элементу леса	0,1392	44,51	0,1125	0,0040	0,1086	0,0264
Липа	40	по элементу леса	0,1010	44,51	0,0765	0,0009	0,0756	0,0249
Береза	40	по элементу леса	0,1375	44,51	0,0948	0,0032	0,0916	0,0416
Осина	40	по элементу леса	0,1552	44,51	0,0832	0,0021	0,0811	0,0712

Порода	Возраст, лет	Класс толщины	Запас деловой, куб.м/га	Запас крупной, куб.м/га	Запас средней и мелкой, куб.м/га	Запас дров и отходов, куб.м/га	Масса ствола, кг	Запас биомассы стволов, кг/га
Сосна	40	по элементу леса	34,370	0,501	33,869	9,755	59,78	19 445,1
Ель	40	по элементу леса	35,982	1,263	34,719	8,433	67,37	21 544,3
Липа	40	по элементу леса	33,735	0,401	33,335	10,993	52,04	22 944,8
Береза	40	по элементу леса	30,687	1,037	29,650	13,466	71,96	23 302,9
Осина	40	по элементу леса	23,860	0,595	23,265	20,411	72,95	20 919,8

Порода	Возраст, лет	Класс толщины	Масса коры, кг	Запас биомассы коры, кг/га	Масса хвои/листвы, кг	Запас биомассы хвои/листвы, кг/га	Масса ветвей, кг	Запас биомассы ветвей, кг/га
Сосна	40	по элементу леса	4,94	1 606,1	3,21	1 043,5	7,59	2 469,0
Ель	40	по элементу леса	5,78	1 848,8	8,47	2 707,8	10,57	3 380,3
Липа	40	по элементу леса	11,14	4 913,4	1,50	661,5	10,82	4 772,5
Береза	40	по элементу леса	8,66	2 804,0	2,36	765,6	10,25	3 318,0
Осина	40	по элементу леса	11,13	3 190,8	1,86	532,7	8,37	2 398,9

Порода	Возраст, лет	Класс толщины	Масса корней, кг	Запас биомассы корней, кг/га	Верхняя высота, м	Содержание углерода в стволе, кг	Содержание углерода в коре, кг	Содержание углерода в листьях/хвое, кг
Сосна	40	по элементу леса	18,04	5 869,7	19,2	29,89	2,47	1,44
Ель	40	по элементу леса	18,41	5 887,7	21,1	33,68	2,89	3,81
Липа	40	по элементу леса	25,65	11 308,1	18,9	26,02	5,57	0,68
Береза	40	по элементу леса	15,76	5 102,2	20,2	35,98	4,33	1,06
Осина	40	по элементу леса	22,40	6 423,6	20,2	36,47	5,56	0,84

Порода	Возраст, лет	Класс толщины	Содержание углерода в ветвях, кг	Содержание углерода в корнях, кг	Запас углерода в стволе, кг/га	Запас углерода в коре, кг/га	Запас углерода в листьях/хвое, кг/га	Запас углерода в ветвях, кг/га	Запас углерода в корнях, кг/га
Сосна	40	по элементу леса	3,42	9,02	9 722,6	803,0	469,6	1 111,1	2 934,9
Ель	40	по элементу леса	4,76	9,21	10 772,1	924,4	1 218,5	1 521,1	2 943,9
Липа	40	по элементу леса	4,87	12,82	11 472,4	2 456,7	297,7	2 147,6	5 654,1
Береза	40	по элементу леса	4,61	7,88	11 651,5	1 402,0	344,5	1 493,1	2 551,1
Осина	40	по элементу леса	3,76	11,20	10 459,9	1 595,4	239,7	1 079,5	3 211,8

Рис. 4.8. Результат расчёта таксационных показателей по элементам леса

Основные таксационные показатели									
Экспорт ▾ Строки ▾ Столбцы ▾ Графики ▾									
Древостой									
Регион: Московская область									
Характеристика участка: Кл. бонитета - II; ТПУ - С2; Полнота - 1									
Состав: 2 Сосна (A=40, D=15) 2 Ель (A=40, D=14,9) 2 Липа (A=40, D=13,4) 2 Береза (A=40, D=14,7) 2 Осина (A=40, D=15,5)									
Коэф. состава	Порода	Возраст, лет	Класс толшины	Мин. диаметр, см	Ср. диаметр, см	Макс. диаметр, см	Высота, м	Кол-во стволов, шт./га	Сумма площ. сечений, кв.м/га
2	Сосна	40	по элементу леса	3,2	15,0	31,2	15,7	325	5,71
			класс 1	3,2	4,6	6,0	6,2	13	0,021
			класс 2	6,0	7,4	8,8	9,4	37	0,157
			класс 3	8,8	10,2	11,6	12,1	58	0,474
			класс 4	11,6	13,0	14,4	14,3	69	0,915
			класс 5	14,4	15,8	17,2	16,2	66	1,293
			класс 6	17,2	18,6	20,0	17,8	43	1,165
			класс 7	20,0	21,4	22,8	19,2	23	0,843
			класс 8	22,8	24,2	25,6	20,4	11	0,512
			класс 9	25,6	27,0	28,4	21,3	4	0,256
			класс 10	28,4	29,8	31,2	22,2	1	0,081
2	Ель	40	по элементу леса	3,5	14,9	32,5	15,9	320	5,57
			класс 1	3,5	4,9	6,4	6,4	23	0,044
			класс 2	6,4	7,8	9,3	9,5	46	0,221
			класс 3	9,3	10,7	12,2	12,3	65	0,585
			класс 4	12,2	13,6	15,1	14,9	66	0,970
			класс 5	15,1	16,5	18,0	17,2	52	1,125
			класс 6	18,0	19,4	20,9	19,1	32	0,950
			класс 7	20,9	22,4	23,8	20,8	18	0,701
			класс 8	23,8	25,3	26,7	22,3	10	0,490
			класс 9	26,7	28,2	29,6	23,5	5	0,314
			класс 10	29,6	31,1	32,5	24,5	2	0,168
2	Липа	40	по элементу леса	2,9	13,4	29,9	15,4	441	6,19
			класс 1	2,9	4,3	5,6	8,1	37	0,053
			класс 2	5,6	7,0	8,3	10,9	69	0,265
			класс 3	8,3	9,7	11,0	13,0	84	0,619
			класс 4	11,0	12,4	13,7	14,8	86	1,030
			класс 5	13,7	15,1	16,4	16,3	71	1,268
			класс 6	16,4	17,8	19,1	17,6	47	1,160
			класс 7	19,1	20,5	21,8	18,7	27	0,873
			класс 8	21,8	23,2	24,5	19,7	13	0,532
			класс 9	24,5	25,9	27,2	20,6	5	0,273
			класс 10	27,2	28,6	29,9	21,4	2	0,118
2	Береза	40	по элементу леса	3,3	14,7	32,2	17,5	324	5,51
			класс 1	3,3	4,7	6,2	9,4	23	0,041

Продолжение строк

			класс 2	6,2	7,6	9,1	12,4	48	0,221
			класс 3	9,1	10,5	12,0	14,7	61	0,533
			класс 4	12,0	13,4	14,8	16,7	64	0,905
			класс 5	14,8	16,3	17,7	18,3	54	1,130
			класс 6	17,7	19,2	20,6	19,7	36	1,046
			класс 7	20,6	22,1	23,5	21,0	21	0,795
			класс 8	23,5	24,9	26,4	22,0	10	0,487
			класс 9	26,4	27,8	29,3	23,0	4	0,250
			класс 10	29,3	30,7	32,2	23,9	1	0,108
2	Осина	40	по элементу леса	3,1	15,5	31,0	17,6	287	5,38
			класс 1	3,1	4,5	5,9	6,6	10	0,015
			класс 2	5,9	7,3	8,6	10,0	28	0,114
			класс 3	8,6	10,0	11,4	13,0	47	0,371
			класс 4	11,4	12,8	14,2	15,6	58	0,753
			класс 5	14,2	15,6	17,0	17,7	55	1,062
			класс 6	17,0	18,4	19,8	19,5	42	1,126
			класс 7	19,8	21,2	22,6	21,0	26	0,933
			класс 8	22,6	24,0	25,4	22,3	13	0,597
			класс 9	25,4	26,8	28,2	23,4	5	0,292
			класс 10	28,2	29,6	31,0	24,3	2	0,115

Рис. 4.9. Вывод результатов

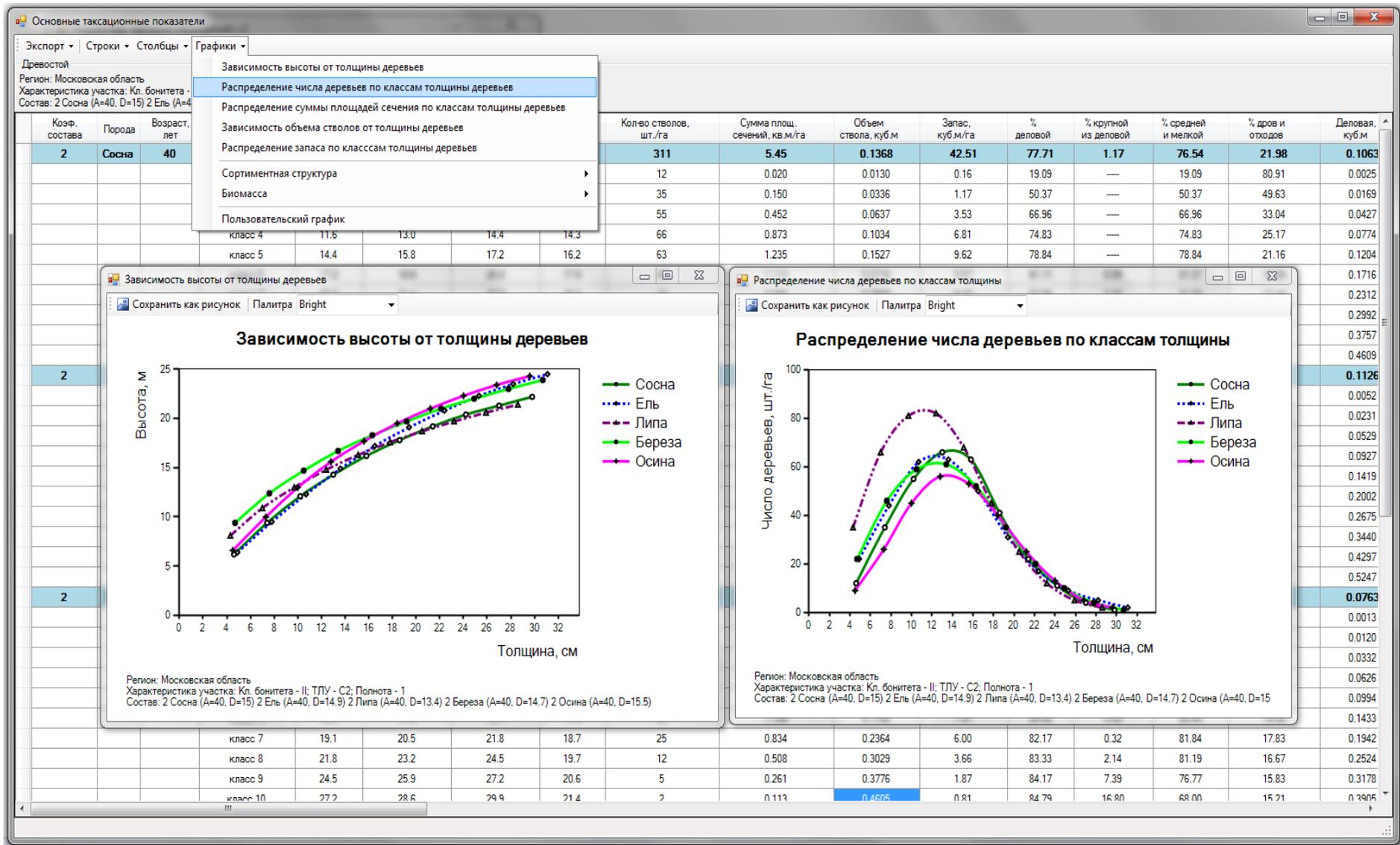


Рис. 4.10. Пример графического представления взаимосвязей высоты от толщины деревьев и распределения числа деревьев по толщине деревьев

Основные таксационные показатели																
Древостой																
Регион: Московская область																
Характеристика участка: Кл. бонитета -																
Состав: 2 Сосна (A=40, D=15) 2 Ель (A=40, D=15)																
Коеф. состава	Порода	Возраст, лет														
2	Сосна	40														
<ul style="list-style-type: none"> Зависимость высоты от толщины деревьев Распределение числа деревьев по классам толщины деревьев Распределение суммы площадей сечения по классам толщины деревьев Зависимость объема стволов от толщины деревьев Распределение запаса по классам толщины деревьев Сортиментная структура Биомасса Пользовательский график 																
			класс 4	11.6	13.0	14.4	14.3									
			класс 5	14.4	15.8	17.2	16.2									
			класс 6	17.2	18.6	20.0	17.8									
			класс 7	20.0	21.4	22.8	19.2									
			класс 8	22.8	24.2	25.6	20.4									
			класс 9	25.6	27.0	28.4	21.3									
			класс 10	28.4	29.8	31.2	22.2									
2	Ель	40	по элементу леса	3.5	14.9	32.5	15.9									
			класс 1	3.5	4.9	6.4	6.4									
			класс 2	6.4	7.8	9.3	9.5									
			класс 3	9.3	10.7	12.2	12.3	62	0.558	0.0723	4.47	73.17				
			класс 4	12.2	13.6	15.1	14.9	63	0.927	0.1167	7.41	79.44				
			класс 5	15.1	16.5	18.0	17.2	50	1.075	0.1718	8.60	82.60				
			класс 6	18.0	19.4	20.9	19.1	31	0.907	0.2375	7.26	84.29	0.13	84.16	15.71	0.2002
			класс 7	20.9	22.4	23.8	20.8	17	0.669	0.3138	5.35	85.25	1.58	83.67	14.75	0.2675
			класс 8	23.8	25.3	26.7	22.3	9	0.468	0.4007	3.74	85.84	7.30	78.54	14.16	0.3440
			класс 9	26.7	28.2	29.6	23.5	5	0.300	0.4983	2.40	86.24	18.71	67.53	13.76	0.4297
			класс 10	29.6	31.1	32.5	24.5	2	0.160	0.6064	1.28	86.53	33.46	53.07	13.47	0.5247
2	Липа	40	по элементу леса	2.9	13.4	29.9	15.4	421	5.91	0.1010	42.51	75.56	0.92	74.63	24.66	0.0763
			класс 1	2.9	4.3	5.6	8.1	35	0.051	0.0103	0.36	13.02		13.02	86.98	0.0013
			класс 2	5.6	7.0	8.3	10.9	66	0.253	0.0274	1.82	43.81		43.81	56.19	0.0120
			класс 3	8.3	9.7	11.0	13.0	81	0.591	0.0528	4.25	62.87		62.87	37.13	0.0332
			класс 4	11.0	12.4	13.7	14.8	82	0.984	0.0863	7.08	72.53		72.53	27.47	0.0626
			класс 5	13.7	15.1	16.4	16.3	68	1.211	0.1281	8.71	77.57		77.57	22.43	0.0994
			класс 6	16.4	17.8	19.1	17.6	45	1.108	0.1782	7.97	80.42	0.02	80.40	19.58	0.1433
			класс 7	19.1	20.5	21.8	18.7	25	0.834	0.2364	6.00	82.17	0.32	81.84	17.83	0.1942
			класс 8	21.8	23.2	24.5	19.7	12	0.508	0.3029	3.66	83.33	2.14	81.19	16.67	0.2524
			класс 9	24.5	25.9	27.2	20.6	5	0.261	0.3776	1.87	84.17	7.39	76.77	15.83	0.3178
			класс 10	27.2	28.6	29.9	21.4	2	0.113	0.4605	0.81	84.79	16.80	68.00	15.71	0.3905

Рис. 4.11. Представление перечня закладок графических построений сортиментации деревьев и товарной продуктивности древостоев по элементам леса

Основные таксационные показатели

Экспорт | Строки | Столбцы | Графики

Древостой
 Регион: Московская область
 Характеристика участка: Кл. бонитета - Состав: 2 Сосна (A=40, D=15) 2 Ель (A=40, D=15)

Козф. состава	Порода	Возраст, лет	Графики				Кол-во стволов, шт./га	Сумма площ. сечений, кв.м/га	Объем ствола, куб.м	Запас, куб.м/га	% деловой	% крупной из деловой	% средней и мелкой	% дров и отходов	Деловая, куб.м					
2	Сосна	40	<ul style="list-style-type: none"> Зависимость высоты от толщины деревьев Распределение числа деревьев по классам толщины деревьев Распределение суммы площадей сечения по классам толщины деревьев Зависимость объема стволов от толщины деревьев Распределение запаса по классам толщины деревьев Сортиментная структура Биомасса Пользовательский график 				311	5.45	0.1368	42.51	77.71	1.17	76.54	21.98	0.1063					
			класс 4	11.6	13.0	14.4	14.3	12	0.020	0.0130	0.16	19.09	----	19.09	80.91	0.0025				
			класс 5	14.4	15.8	17.2	16.2					50.37	----	50.37	49.63	0.0169				
			класс 6	17.2	18.6	20.0	17.8					66.96	----	66.96	33.04	0.0427				
			класс 7	20.0	21.4	22.8	19.2					74.83	----	74.83	25.17	0.0774				
			класс 8	22.8	24.2	25.6	20.4					78.84	----	78.84	21.16	0.1204				
			класс 9	25.6	27.0	28.4	21.3					81.11	0.05	81.07	18.89	0.1716				
			класс 10	28.4	29.8	31.2	22.2					82.56	0.68	81.88	17.44	0.2312				
2	Ель	40	по элементу леса	3.5	14.9	32.5	15.9					83.56	3.62	79.94	16.44	0.2992				
			класс 1	3.5	4.9	6.4	6.4					84.31	10.74	73.57	15.69	0.3757				
			класс 2	6.4	7.8	9.3	9.5					84.90	21.92	62.97	15.10	0.4609				
			класс 3	9.3	10.7	12.2	12.3					80.91	2.89	78.02	18.96	0.1126				
			класс 4	12.2	13.6	15.1	14.9					88.90	0.34	88.56	65.83	0.0052				
			класс 5	15.1	16.5	18.0	17.2					22	0.042	0.0152	0.34	34.17	----	34.17	65.83	0.0052
			класс 6	18.0	19.4	20.9	19.1					44	0.211	0.0384	1.69	60.24	----	60.24	39.76	0.0231
			класс 7	20.9	22.4	23.8	20.8					62	0.558	0.0723	4.47	73.17	----	73.17	26.83	0.0529
			класс 8	23.8	25.3	26.7	22.3					63	0.927	0.1167	7.41	79.44	----	79.44	20.56	0.0927
			класс 9	26.7	28.2	29.6	23.5					50	1.075	0.1718	8.60	82.60	----	82.60	17.40	0.1419
			класс 10	29.6	31.1	32.5	24.5					31	0.907	0.2375	7.26	84.29	0.13	84.16	15.71	0.2002
2	Липа	40	по элементу леса	2.9	13.4	29.9	15.4	421	5.91	0.1010	42.51	75.56	0.92	74.63	24.66	0.0763				
			класс 1	2.9	4.3	5.6	8.1	35	0.051	0.0103	0.36	13.02	----	13.02	86.98	0.0013				
			класс 2	5.6	7.0	8.3	10.9	66	0.253	0.0274	1.82	43.81	----	43.81	56.19	0.0120				
			класс 3	8.3	9.7	11.0	13.0	81	0.591	0.0528	4.25	62.87	----	62.87	37.13	0.0332				
			класс 4	11.0	12.4	13.7	14.8	82	0.984	0.0863	7.08	72.53	----	72.53	27.47	0.0626				
			класс 5	13.7	15.1	16.4	16.3	68	1.211	0.1281	8.71	77.57	----	77.57	22.43	0.0994				
			класс 6	16.4	17.8	19.1	17.6	45	1.108	0.1782	7.97	80.42	0.02	80.40	19.58	0.1433				
			класс 7	19.1	20.5	21.8	18.7	25	0.834	0.2364	6.00	82.17	0.32	81.84	17.83	0.1942				
			класс 8	21.8	23.2	24.5	19.7	12	0.508	0.3029	3.66	83.33	2.14	81.19	16.67	0.2524				
			класс 9	24.5	25.9	27.2	20.6	5	0.261	0.3776	1.87	84.17	7.39	76.77	15.83	0.3178				
			класс 10	27.2	28.6	29.9	21.4	2	0.113	0.4605	0.81	84.79	16.80	68.00	15.21	0.3905				

Рис. 4.12. Представление перечня закладок графических построений взаимосвязей и распределений биомассы по фракциям

5. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

5.1. Форма записи задачи линейного программирования

Задачами линейного программирования могут быть задачи нахождения оптимального сочетания отраслей, оптимальной структуры производства, оптимального рациона кормления животных, оптимального состава машинно-тракторного парка, оптимального размещения производства и другие.

Математическая запись задачи линейного программирования содержит основные переменные (неизвестные), которые обозначаются X_j , где $j = 1, 2, \dots, n$ (или $j = 1 \div n$). Переменные величины могут произвольно изменяться в условиях рассматриваемой задачи.

Задача математического программирования состоит из целевой функции, системы ограничений и условий неотрицательности переменных.

Целевой функцией называется математическое выражение, для которого требуется найти экстремальное (то есть максимальное или минимальное) значение, например,

$$\max Z = \sum_{j=1}^n C_j \cdot X_j,$$

где C_j - коэффициент целевой функции.

Целевую функцию называют также функционалом, линеалом. Целевая функция математически записывает критерий оптимальности, критерий качества.

От задачи на максимум можно перейти к задаче на минимум, умножив целевую функцию на минус единицу (-1).

Ограничение - это математическое выражение, связывающее переменные в виде равенств или неравенств. Все ограничения образуют систему ограничений задачи. Ограничения бывают трех типов: равенства (=),

неравенства типа меньше либо равно \leq , неравенства типа больше или равно \geq .

Например, при $i = 1, 2, \dots, m$.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq a_{i0},$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = a_{i0},$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq a_{i0}.$$

Коэффициенты при переменных обозначаются a_{ij} , где индекс i - номер ограничения, индекс j - номер переменной, свободные члены обозначаются a_{i0} , индекс i - номер ограничения, индекс o - признак свободного члена.

Условия неотрицательности переменных записываются в виде

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{или } j = 1 \div n).$$

Задача математического программирования является задачей линейного программирования, если целевая функция и система ограничений - линейные выражения:

$$\begin{cases} \max Z = C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 + \dots + C_n \cdot x_n \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = a_{10} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = a_{20} \\ \dots \\ a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n \leq a_{k0} \\ a_{k+1,1} x_1 + a_{k+1,2} x_2 + \dots + a_{k+1,n} x_n \leq a_{k+1,0} \\ a_{k+2,1} x_1 + a_{k+2,2} x_2 + \dots + a_{k+2,n} x_n \leq a_{k+2,0} \\ \dots \\ a_{r-1,1} x_1 + a_{r-1,2} x_2 + \dots + a_{r-1,n} x_n \leq a_{r-1,0} \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rn} x_n \geq a_{r0} \\ a_{r+1,1} x_1 + a_{r+1,2} x_2 + \dots + a_{r+1,n} x_n \geq a_{r+1,0} \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq a_{m0} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1 \div n. \end{cases} \quad (2.1)$$

или

$$\begin{cases} \max Z = \sum_{j=1}^n C_j \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} a_{io}, i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.1')$$

Задача линейного программирования имеет бесчисленное множество решений. Система (2.1'- система ограничений и условия неотрицательности переменных задачи) должна быть совместной и неопределенной, т. е. должна иметь бесчисленное множество решений. Определенная система имеет только одно решение, а несовместная система не имеет ни одного решения.

Если условие задачи представлено в математической записи, содержащей целевую функцию, систему ограничений и условия неотрицательности, причем ограничения записаны как в виде равенств, так и в виде неравенств, то такая запись называется исходной формой записи задачи линейного программирования.

Например,

$$\begin{cases} \max Z = 75 \cdot x_1 + 32 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 \\ -9,1 \cdot x_1 + 2,2 \cdot x_2 + 6,4 \cdot x_3 = 2,7 \\ 4,2 \cdot x_1 - 0,1x_3 \leq 9,0 \\ -2,8 \cdot x_1 + 6,3 \cdot x_2 + 8,7 \cdot x_3 \geq 0 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

5.2. Программирование в приложении *MS Excel*: «Поиск решения»

Процедура **Поиск решения** представляет собой мощный инструмент для выполнения сложных вычислений. Она позволяет находить значения переменных, удовлетворяющих указанным критериям оптимальности, при условии выполнения заданных ограничений.

Наилучшие результаты она позволяет получить для задач выпуклого (в том числе линейного) программирования при условии отсутствия ограничений типа «равно».

Поиск решения можно использовать и для решения задач математического программирования других типов, но в этом случае процедура поиска часто заканчивается неудачей, а при благоприятном исходе находит лишь один из локальных оптимумов. Поэтому решение таких задач с помощью данной процедуры следует предварять их аналитическим исследованием на предмет свойств области допустимых решений, чтобы выбрать подходящие начальные значения и сделать правильное заключение о качестве и практической применимости полученного решения.

Результаты оптимизации оформляются в виде отчетов трёх типов:

Результаты. Отражаются исходное (до оптимизации) и оптимальное значения целевой функции, значения переменных до и после оптимизации, а также формулы ограничений и дополнительные сведения об ограничениях.

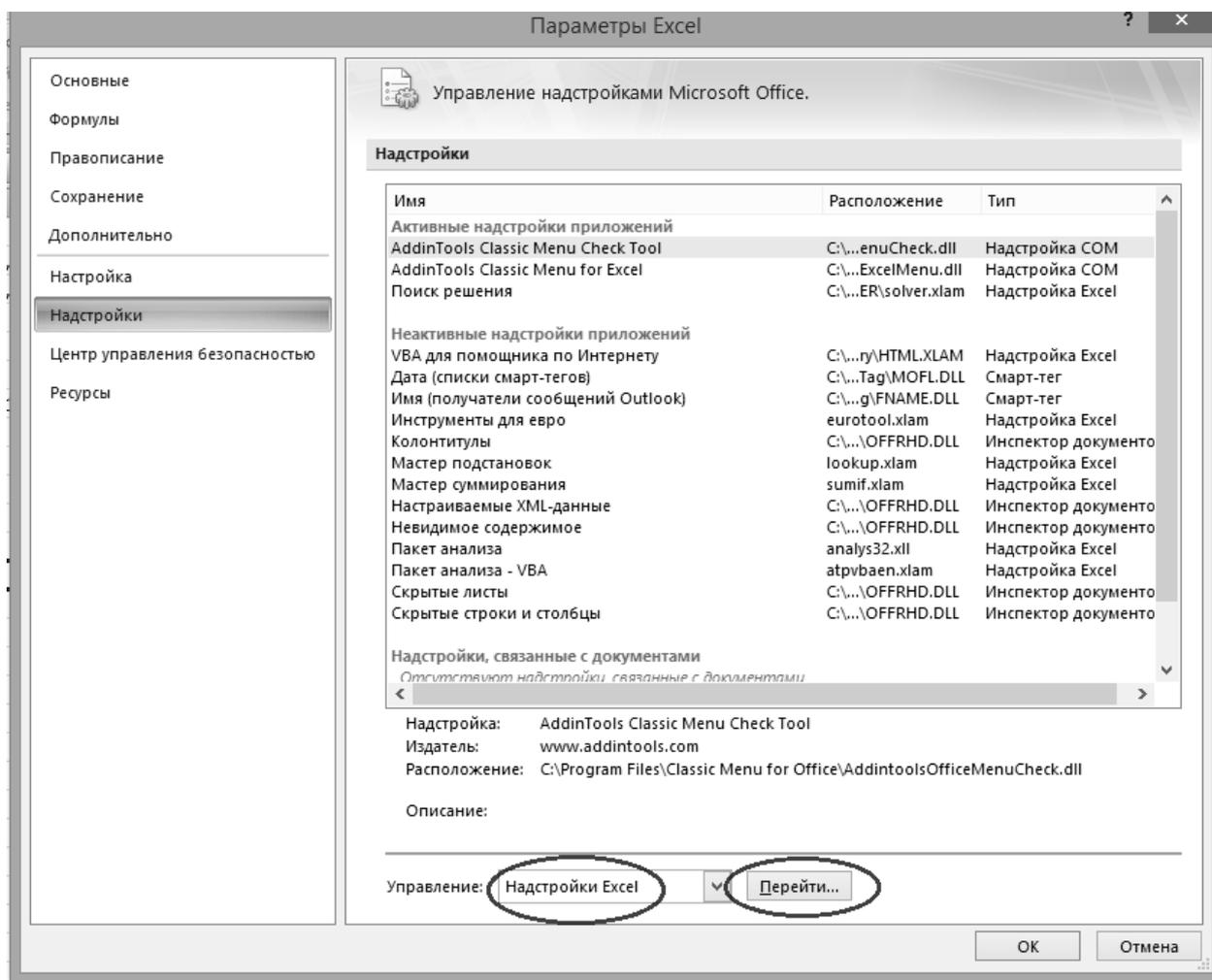
Устойчивость. Содержит сведения о чувствительности решения к малым изменениям в формуле целевой функции или в формулах ограничений. Отчет не создается для моделей, значения переменных в которых ограничены множеством целых чисел.

Пределы (Ограничения). Состоит из верхнего и нижнего значения целевой функции и списка переменных, влияющих на нее, их нижних и верхних границ. Отчет не создается для моделей, значения переменных в которых ограничены множеством целых чисел. Нижней границей является наименьшее значение, которое может принимать переменная (влияющая ячейка) при условии, что значения других переменных (влияющих ячеек) фиксированы и удовлетворяют заданным ограничениям.

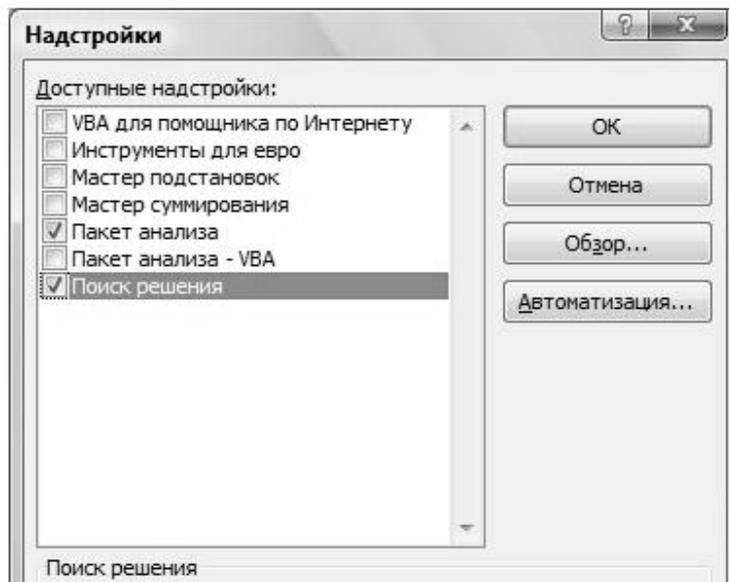
Для решения задачи оптимизации необходимо:

Загрузить надстройку в офисе 2007, 2010. Для этого следует в меню «Office» (Файл) выбрать кнопку *Параметры Excel*, откроется окно *Параметры*

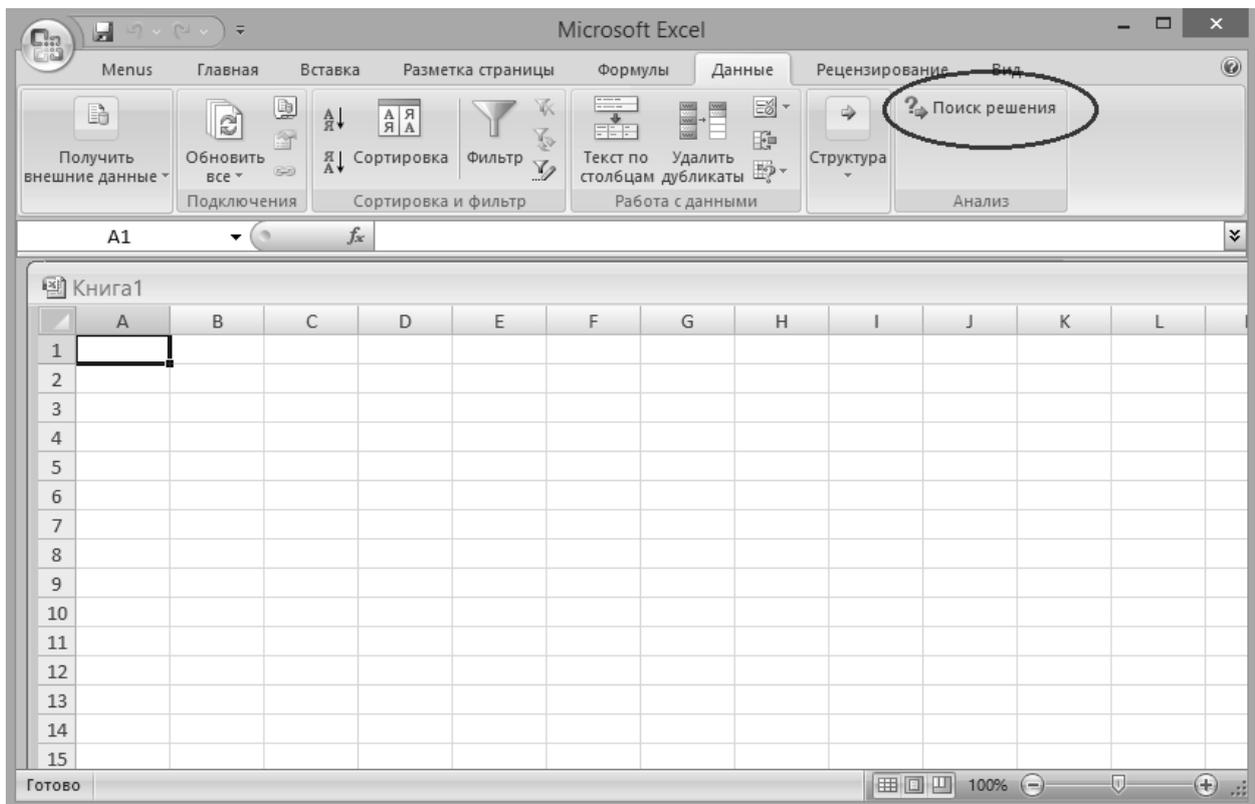
Excel, в нем выделить вкладку *Настройки* и на панели *Управление настройками* установить *Настройки Excel*, затем нажать на кнопку *Перейти*.



В окне *Настройки* установить флажок *Поиск решения* и нажать кнопку *ОК*.

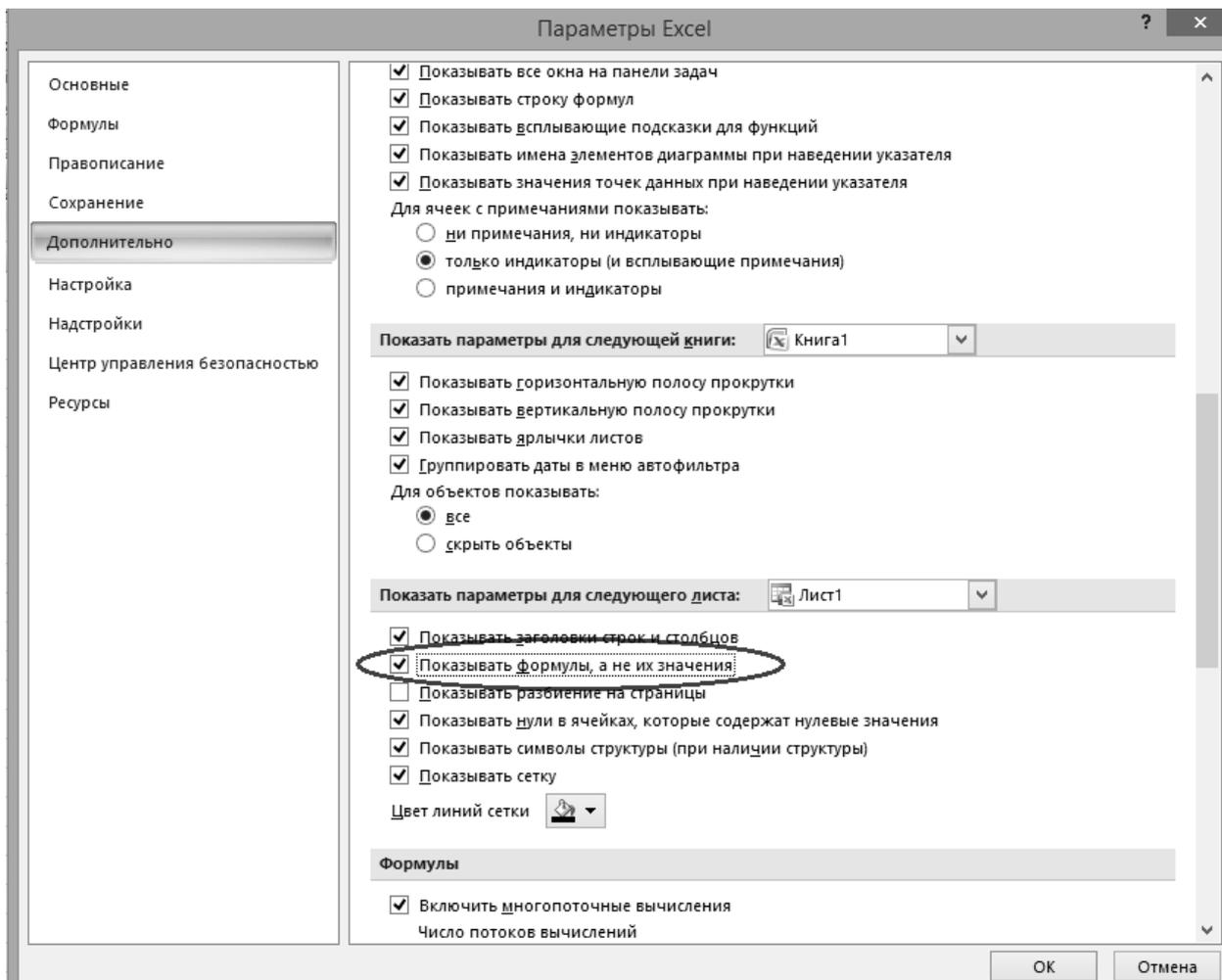


После загрузки надстройки на вкладке *Данные* становится доступна процедура *Поиск решения*.



На рабочем листе Excel создать таблицу исходных данных, в которой должны отображаться формулы.

Для этого необходимо предварительно нажать кнопку «Office» вызвать **Параметры Excel**, выбрать вкладку **Дополнительно** и установить флажок **Показывать формулы, а не значения**.



Запустить процедуру поиска решения, дав команду **Данные/Поиск решения**, и в появившемся диалоговом окне **Поиск решения** заполнить поля:

Установить целевую ячейку:

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Целевая ячейка — ячейка на рабочем листе с таблицей исходных данных, куда занесена формула целевой функции.

Изменяемые ячейки — ячейки из таблицы исходных данных, отражающие значения переменных, которые необходимо найти в результате оптимизации. Ячейки не должны содержать формулы, их значения должны влиять на значение целевой ячейки¹.

Ограничения - задаются посредством кнопки *Добавить* и отражают связь формул ограничений с их свободными членами. Ограничения могут быть как скалярными (например, $A1 \leq 3$; $A2 \leq A3$, где $A1, A2, A3$ — имена ячеек MS Excel), так и векторными (например, $A1:A10 \geq B1:B10$, где $A1:A10, B1:B10$ — диапазоны ячеек).

Получить отчеты оптимизации и провести их анализ.

Общая постановка задачи

Площадь лесопитомника 12 га. В питомнике работают 15 рабочих по двум технологиям производства: 1) работает 1 работник и производит 200 тыс. семян на 1 га ежегодно; 2) работают 2 работника и производят 300 тыс. семян на 1 га ежегодно. Разделить площадь питомника по технологиям таким образом, чтобы производство семян питомником за год было максимальным.

Переменные задачи:

x_1 - площадь питомника для 1 технологии, га

x_2 - площадь питомника для 2 технологии, га

Система ограничений:

$x_1 + x_2 \leq 12$ – баланс площади питомника (га)

$x_1 + 2x_2 \leq 15$ – баланс работников (чел.)

Целевая функция:

$\max Z = 200x_1 + 300x_2$ – максимум производства семян, тыс. шт.

Пример выполнения работы

¹Рекомендуется перед началом оптимизации вводить в эти ячейки начальные значения, максимально близкие к предполагаемому оптимальному значению - это ускоряет поиск решения и повышает шансы на его успешное завершение.

Оформить исходные данные на рабочем листе1:

	A	B	C	D	E
1		x1	x2	Формула	Константа (правая часть ограничения)
2	Баланс площади, га	1	1	=СУММПРОИЗВ(B2:C2,\$B\$5:\$C\$5)	12
3	Баланс работников, чел.	1	2	=СУММПРОИЗВ(B3:C3,\$B\$5:\$C\$5)	15
4	Целевая функция (максимум сеянцев, тыс. шт.)	200	300	=СУММПРОИЗВ(B4:C4,\$B\$5:\$C\$5)	
5	Значения по решению	9	3		

Рис. 5.1. Исходные данные на рабочем листе

В ячейки B2 и C2 вводятся коэффициенты при переменных из ограничения баланс площади питомника. В ячейки B3 и C3 вводятся коэффициенты при переменных из ограничения баланс работников. В ячейки B4 и C4 вводятся коэффициенты целевой функции.

В ячейку D2 вводится формула расчета левой части ограничения «баланс площади питомника»: *Формулы – Математические – СУММПРОИЗВ.*

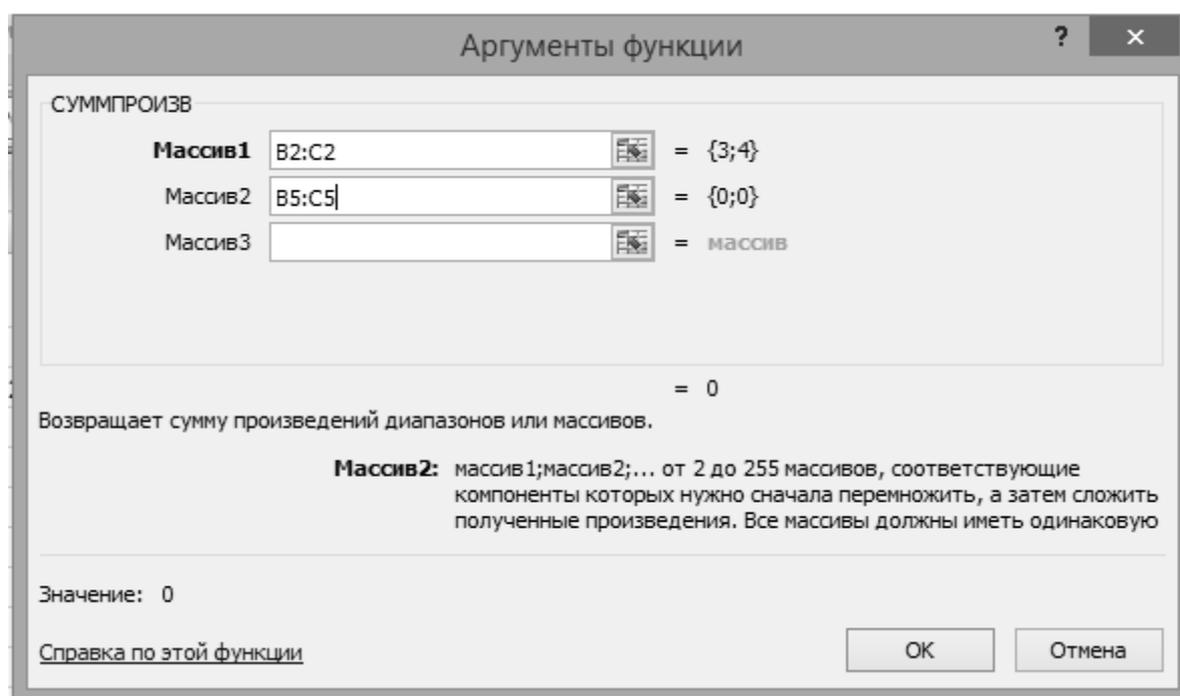


Рис.5.2. Вид окна «Аргументы функции»

В ячейку E2 вводится числовое значение правой части ограничения (константы), то есть 12.

В ячейку D3 вводится формула расчета левой части ограничения «баланс работников». В ячейку E3 вводится числовое значение константы ограничения, то есть 15.

В ячейку D4 вводится формула расчета целевой функции. В этой ячейке будет определяться значение целевой функции по решению.

Решим задачу с помощью команды меню **Данные – Поиск решения**. В диалоговом окне *Поиск решения* в поле *Оптимизировать целевую функцию* укажем ячейку D4:

выполняем щелчок левой клавишей мыши в поле;

выполняем щелчок левой клавишей мыши по ячейке D4;

проверяем правильность заполнения.

Выбираем флажок *До*: максимум, что соответствует выбранной целевой функции (тах производства сеянцев).

в поле *Изменяя ячейки переменных* указываем ячейки, соответствующие значению переменных по решению, т.е. в нашем случае B5:C5. Это выполняется методом выделения блока ячеек B5:C5 путем протягивания левой клавишей мыши.

В поле *В соответствии с ограничениями*:

нажать кнопку *Добавить*

в поле *Ссылка на ячейки* вводим D2

Выбрать тип ограничения <=

В поле *Ограничение* вводим E2

Нажать кнопку *Добавить*

Аналогично повторить для ограничения «баланс работников», нажать кнопку *OK*.

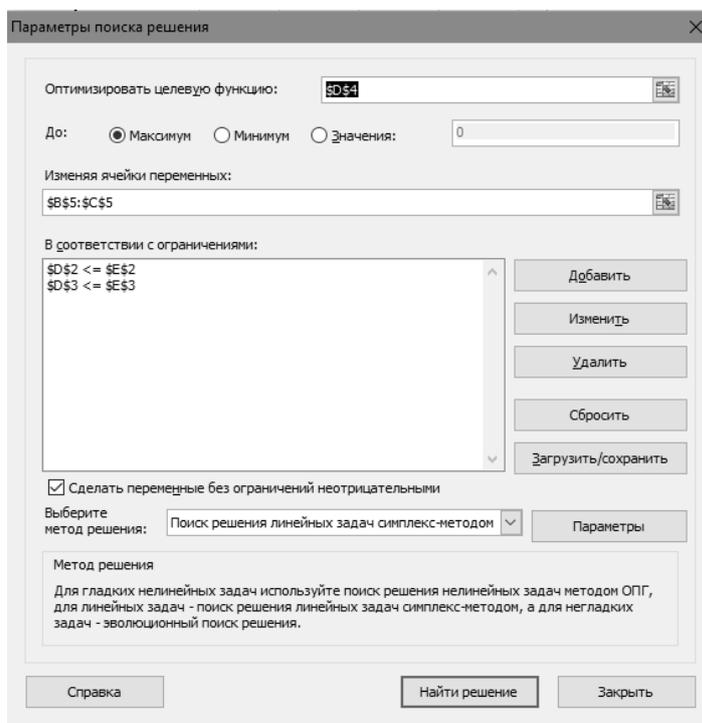


Рис. 5.3. Вид окна «Параметры поиска решения»

Выбираем метод решения **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**, нажимаем кнопку *Параметры* и делаем настройку убирая флажок *Игнорировать целочисленные ограничения*, в поле *Целочисленная оптимальность(%)* задаем 1. Запускаем поиск оптимального решения кнопкой *Найти решение*.

В диалоговом окне *Результаты поиска решения* установить переключатель *Сохранить найденное решение*, выбрать все 3 типа отчетов, щелкая по их названиям левой кнопкой мыши, и нажать кнопку **ОК**.

На *Листе1* (исходные данные) в строке 5 (Значения по решению) выводятся значения соответствующих переменных, в ячейке D4 - значение целевой функции, в ячейках D2:D3 – значения выполнения ограничений. Так баланс площади задавался ≤ 12 , выполняется ограничение как $= 12$. Аналогично по балансу работников.

	A	B	C	D	E
1		x1	x2	Формула	Константа (правая часть ограничения)
2	Баланс площади, га	1	1	12	12
3	Баланс работников, чел.	1	2	15	15
4	Целевая функция (максимум сеянцев, тыс. шт.	200	300	2700	
5	Значения по решению	9	3		

Рис. 5.4. Результаты решения задачи на рабочем листе

Результаты решения выводятся на лист *Отчет о результатах1*.

Анализируя полученное решение, следует принимать во внимание факторы, влияющие на целевую функцию и, соответственно, снижающие или увеличивающие ее значение. Питомник может произвести максимально 2700 тыс. сеянцев при условии полного использования площади питомника и всех работников. На 9 га питомника будут трудиться 9 работников, а оставшиеся 3 га следует обрабатывать по второй технологии 6 работниками.

A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах					
2	Лист: [Задачи из учебника Лямеборшай.xlsx]Лист3					
3	Отчет создан: 28.11.2017 20:28:52					
4	Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.					
5	Модуль поиска решения					
6	Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом					
7	Время решения: 0.016 секунд.					
8	Число итераций: 2 Число подзадач: 0					
9	Параметры поиска решения					
10	Максимальное время 100 с, Число итераций 100, Precision 0.000001					
11	Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 5%, Решение без целочисленных ограничений, Считать неотрицательными					
12						
13						
14	Ячейка целевой функции (Максимум)					
15	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение		
16	\$D\$4	Целевая функция (максимум сеянцев, тыс. шт. Формула	2700	2700		
17						
18						
19	Ячейки переменных					
20	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное	
21	\$B\$5	Значения по решению x1	9	9	Продолжить	
22	\$C\$5	Значения по решению x2	3	3	Продолжить	
23						
24						
25	Ограничения					
26	Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
27	\$D\$2	Баланс площади, га Формула	12	\$D\$2<= \$E\$2	Привязка	0
28	\$D\$3	Баланс работников, чел. Формула	15	\$D\$3<= \$E\$3	Привязка	0
29						

Рис. 5.5. Лист *Отчет о результатах1*

Если у питомника имеется договор на поставку сеянцев, то задача может быть решена по другому критерию – минимум работников для производства определенного количества сеянцев либо минимум площади питомника для выполнения договора.

Задание. Решить задачи по индивидуальным вариантам в приложении «Поиск решения», проанализировать полученное решение.

1. Определить оптимальный состав лесонасаждений исходя из климатических и прочвенно-грунтовых условий, удовлетворяющий критерию - максимум прироста древесины в м³ на 1 га.

В качестве основных факторов, влияющих на состав лесонасаждений предлагаются следующие: элементы питания (азот, фосфор, калий) используемые различными породами деревьев; расход воды; почвоулучшающая роль породы; устойчивость к болезням; пожароустойчивость; санитарно-гигиеническая роль; газоустойчивость; себестоимость выращивания; обрабатываемость древесины; ландшафтно-эстетическая роль породы. Коэффициенты, описывающие факторы по породам деревьев, а также их ресурсы в 1 га почвы представлены в таблице 5.1.

2. Используя данные задачи 1 построить и решить экономико-математическую модель по критерию – максимум ландшафтно-эстетической роли.

3. Используя данные задачи 1 построить и решить экономико-математическую модель по критерию – минимум себестоимости выращивания деревьев.

4. Используя данные задачи 1 построить и решить экономико-математическую модель по критерию – максимум пожароустойчивости.

5. Используя данные задачи 1 построить и решить экономико-математическую модель по критерию – максимум газоустойчивости.

Таблица 5.1

**Факторы, определяющие сочетание древесных пород на дерновых
слабоподзолистых свежесочувственных почвах с прожилками глины на
песках**

Факторы	Основные переменные							Ресурсы
	Сосна	Ель	Береза	Дуб	Осина	Липа	Лиственница	
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
<i>Ограничения</i>	1,7	2,1	1,8	9,3	3,5	5,9	3,9	21
<i>Азот</i>								
<i>Фосфор</i>	0,75	1,11	1,0	3,45	1,81	3,1	1,32	11
<i>Калий</i>	1,43	1,82	1,17	5,7	1,31	5,6	2,96	17
<i>Водные ресурсы</i>	14,3	13,0	28,5	56,0	25,0	39,6	10,8	173
<i>Почвоулучшающая роль</i>	1,4	1,4	1,2	1,1	1,2	1	1,4	15
<i>Устойчивость к болезням</i>	1,0	1,6	1,1	1,5	1,4	1,2	1,6	16
<i>Пожароустойчивость</i>	1,4	1,4	1	1	1	1	1,3	14
<i>Санитарно-гигиеническая роль</i>	28	34	19	36	26	40	16	363
<i>Газоустойчивость</i>	3,2	3,1	2,2	2,3	1,0	2,4	2,1	28
<i>Себестоимость выращивания</i>	1,3	1,3	0,95	1,97	0,9	0,95	1,3	14
<i>Обрабатываемость древесины</i>	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0	1,3	14
<i>Ландшафтно-эстетическая роль</i>	4,30	3,15	4,20	4,33	3,33	4,30	4,00	X

6. Используя данные задачи 1 построить и решить экономико-математическую модель по критерию – минимум использования водных ресурсов.

7. Используя данные задачи 1 построить и решить экономико-математическую модель по критерию – минимум выноса питательных веществ из почвы. Каждый вид питательных веществ рассматривается отдельным критерием.

8. Используя данные задачи 1 построить и решить экономико-математическую модель по критерию – максимум почвоулучшения.

9. Используя данные задачи 1 построить и решить экономико-математическую модель по критерию – максимум устойчивости к болезням.

10. Используя данные задачи 1 построить и решить экономико-математическую модель по критерию – максимум санитарно-гигиенических условий.

5.3. Транспортная задача

Транспортная задача – одна из распространенных задач линейного программирования, позволяет определить оптимальный план перевозок груза.

В общем виде задачу можно представить следующим образом: в m пунктах производства A_1, A_2, \dots, A_m имеется однородный груз в количестве a_1, a_2, \dots, a_m . Этот груз необходимо доставить в n пункты назначения B_1, B_2, \dots, B_n в количестве b_1, b_2, \dots, b_n . Стоимость перевозки единицы груза (тариф или расстояния) из пункта A_i в пункт B_j равна C_{ij} . Требуется найти план перевозки, обеспечивающий минимальную стоимость перевозки. При этом весь груз должен быть вывезен и все потребности удовлетворены.

В общем (структурном) виде математическая постановка задачи выглядит следующим образом:

найти

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Всякое неотрицательное решение систем уравнений (1) - (2), определяемое матрицей $X=(x_{ij})$, называют опорным планом транспортной задачи, а план $X^*=(x_{ij})$, при котором функция Z принимает минимальное значение - называется **оптимальным планом** транспортной задачи.

Особенность транспортной задачи:

- система ограничений есть система уравнений (т.е. транспортная задача задана в канонической форме);
- коэффициенты при переменных системы ограничений равны единице или нулю;
- каждая переменная входит в систему ограничений два раза: один раз – в первую группу ограничений (1) и второй раз – во вторую группу ограничений (2).

Задача. Имеются три пункта хранения пиломатериалов, из которых затем произведенную продукцию распределяют между тремя пунктами потребления так, чтобы общие затраты на транспортировку были минимальными. Известны объемы хранения в каждом пункте, потребности в продукции и затраты на транспортировку единицы продукции (ден. ед.) (табл. 5.2). Найти оптимальный план грузоперевозок.

Таблица 5.2

**Затраты на производство и транспортировку единицы продукции,
ден. ед.**

Поставщики	Объемы хранения, ед.	Потребители		
		а	б	в
		Потребности		
		50	100	150
А	100	4	3	3
Б	150	2	1	1
В	50	6	7	5

Запишем исходные данные на рабочем листе MS Excel и зададим матрицу перевозок:

	A	B	C	D
1				
2	матрица перевозок			
3		0		
4		0		
5		0		
6		0	0	0
7				
8	Потребности Ресурсы	50	100	150
9	100	4	3	3
10	150	2	1	1
11	50	6	7	5
12				
13				
14	min Z	0		

Рис. 5.6. Исходные данные

Введем в ячейки необходимые для модели формулы:

	A	B	C	D
1				
2	матрица перевозок			
3	=СУММ(B3:D3)			
4	=СУММ(B4:D4)			
5	=СУММ(B5:D5)			
6		=СУММ(B3:B5)	=СУММ(C3:C5)	=СУММ(D3:D5)
7				
8	Потребности Ресурсы	50	100	150
9	100	4	3	3
10	150	2	1	1
11	50	6	7	5
12				
13				
14	min Z	=СУММПРОИЗВ(B3:D5;B9:D11)		

Рис. 5.7. Формульное представление матрицы перевозок

Решим задачу с помощью команды меню **Данные / Поиск решения**. Делаем активной ячейку B14. Выполняем команду **Данные / Поиск решения**.

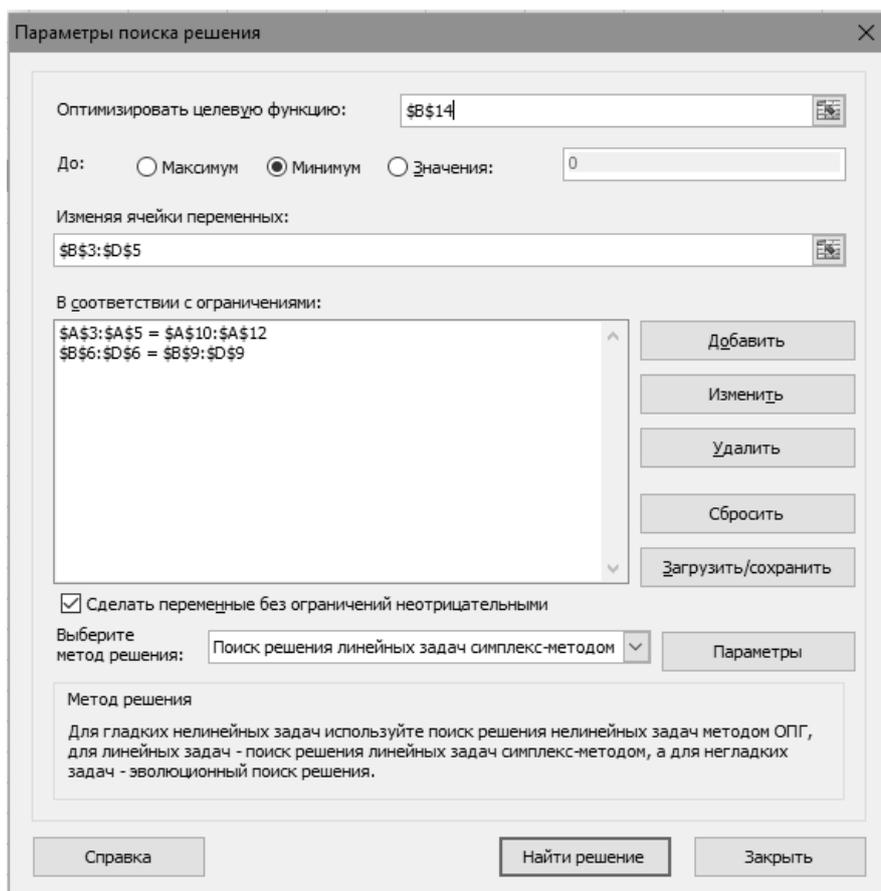


Рис. 5.8. Окно процедуры «Параметры поиска решения»

Прописав ячейку целевой функции, критерий оптимальности, искомые переменные и условия, накладываемые на них в системе ограничений (суммы по столбцам матрицы перевозок должны быть равны объемам перевозок, суммы по строкам матрицы перевозок должны быть равны объемам поставок) включая условие неотрицательности запускаем поиск оптимального решения кнопкой *Найти решение*.

В диалоговом окне *Результаты поиска решения* установить переключатель *Сохранить найденное решение*, выбрать все 3 типа отчетов, щелкая по их названиям левой кнопкой мыши, и нажать кнопку **ОК**.

Получаем решение на рабочем листе:

	A	B	C	D
1				
2	матрица перевозок			
3	100	0	0	100
4	150	50	100	0
5	50	0	0	50
6		50	100	150
7				
8	Потребности			
9	Ресурсы	50	100	150
10	100	4	3	3
11	150	2	1	1
12	50	6	7	5
13				
14	min Z	750		

Рис. 5.9. Результаты решения

Оптимальное решение: $\min Z = 750$ (ден. ед.)

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Задание. Найти оптимальный план перевозки однородного груза от поставщиков к потребителям, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Таблица 5.3

Исходные данные

Поставщики	Ресурсы	Потребители						
		а	б	в	г	д	е	ж
		Потребности						
		50	100	70	80	50	120	150
А	100	4	3	5	6	2	1	8
Б	150	2	1	8	3	7	6	4
В	50	7	3	9	10	8	4	7
Г	20	3	4	1	5	10	9	6
Д	50	6	7	2	3	4	8	5
Е	180	5	9	4	6	7	2	3

Список индивидуальных заданий

Номер варианта	Поставщики	Потребители	Номер варианта	Поставщики	Потребители
1	А, Б, В	а, б, в, г	6	В, Г, Д, Е	б, г, е
2	Б, В, Г	а, б, в	7	А, Б, В	б, г, е
3	Б, В, Д	б, в, г	8	А, Б, В	б, д, ж
4	В, Г, Д, Е	а, б, в, г	9	В, Г, Д, Е	б, д, ж
5	А, В, Г, Д	а, б, в	10	В, Г, Д, Е	в, г, ж

5.4. Задача о назначении

Сформулируем задачу о назначениях в общем виде на примере. Имеется n кандидатов (работников) для выполнения n работ. Известны затраты каждого i -го кандидата ($i = 1 \div n$) на выполнение каждой j -ой работы ($j = 1 \div n$). Обозначим эти затраты через c_{ij} . Они задаются квадратной

матрицей.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Требуется распределить кандидатов на работы (найти назначение) так, чтобы суммарные затраты на выполнение работ были бы минимальные. При этом учитываются условия, что каждый кандидат может быть назначен только на одну работу, и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом.

Пусть X_{ij} – переменная. Она может:

- равняться 1, если i -й кандидат назначается на выполнение j -ой работы,
- равняться 0 в противном случае.

Условие, что каждый кандидат выполняет только одну работу, записывается так: $\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1, (i = 1 \div n)$

Условие, что каждая работа может выполняться одним кандидатом, записывается так: $\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1, (j = 1 \div n)$

Целевая функция задачи имеет вид: $Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min .$

В целевую функцию будут входить только те значения c_{ij} ($i = 1 \div n, j = 1 \div n$), для которых $X_{ij} = 1$. Это означает, что при определении значения целевой функции должны суммироваться только затраты по полученным оптимальным назначениям i -го кандидата на j -ую работу.

В качестве кандидатов могут выступать любые виды ресурсов, а в качестве работ – объекты, на которые эти ресурсы могут быть распределены. Задачи могут решаться не только на минимум целевой функции, но и на максимум.

Задача. Фирма, имеющая четыре складских помещения, получила четыре заказа по доставке пиломатериалов различным потребителям. Наличие товаров на складе позволяет выполнить любой из заказов. Известны расстояния от склада до каждого потребителя (таблица 5.5). Определить оптимальный план перевозок, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной.

Таблица 5.5

Расстояния от складских помещений до потребителей, км

№ склада	Потребители			
	1	2	3	4
1	25	15	18	14
2	15	17	15	20
3	21	14	22	29
4	13	28	16	17

Условную задачу решим на компьютере с помощью приложения MS Excel «Поиск решения». Для этого оформим исходные данные на *Листе 1*.

	A	B	C	D	E
1	Исходные данные				
2					
3	1	25	15	18	14
4	1	15	17	15	20
5	1	21	14	22	29
6	1	13	28	16	17
7		1	1	1	1
8					
9	Матрица перевозо				
10	=СУММ(B10:E10)				
11	=СУММ(B11:E11)				
12	=СУММ(B12:E12)				
13	=СУММ(B13:E13)				
14		=СУММ(B10:B13)	=СУММ(C10:C13)	=СУММ(D10:D13)	=СУММ(E10:E13)
15					
16	min Z	=СУММПРОИЗВ(B10:E13;B3:E6)			

Рис. 6.10. Исходные данные

Далее вызываем *Данные – Поиск решения*.

- в поле *Оптимизировать целевую функцию*: указываем ячейку B6;
- выбираем флажок *До*: Минимум;
- в поле *Изменяя ячейки переменных*: указываем ячейки, соответствующие значению переменных по решению (B10:E13);
- в поле *В соответствии с ограничениями*: добавляем ограничения условной задачи.

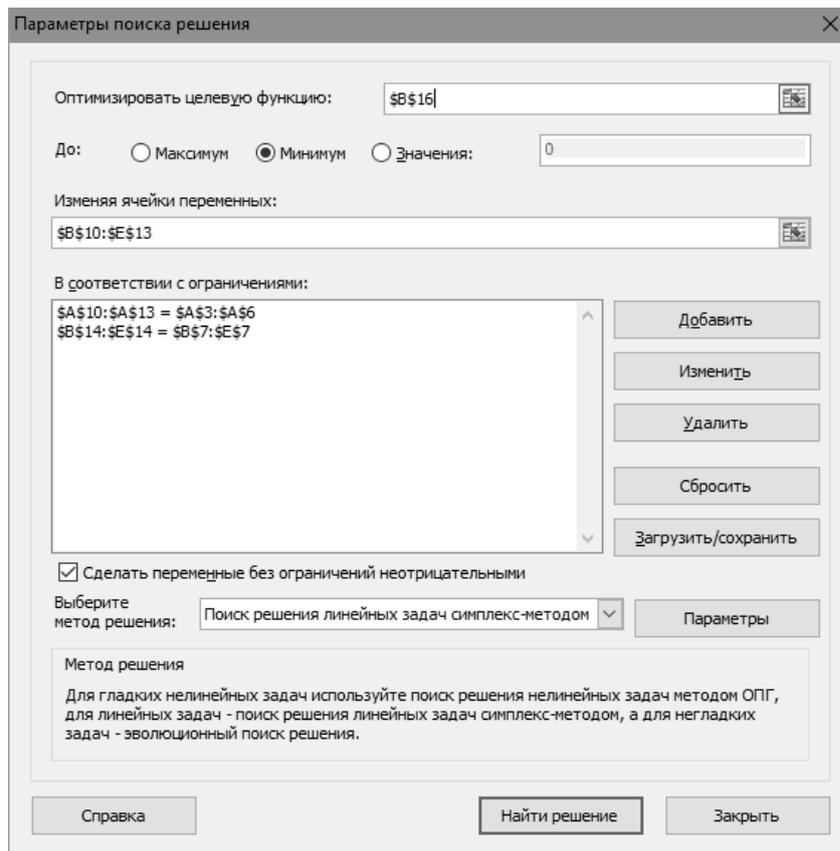


Рис. 5.11. Вид окна «Параметры поиска решения»

Нажимаем кнопку *Найти решение* и получаем оптимальное решение, представленное на рисунке 5.12.

	A	B	C	D	E
1	Исходные данные				
2					
3	1	25	15	18	14
4	1	15	17	15	20
5	1	21	14	22	29
6	1	13	28	16	17
7		1	1	1	1
8					
9	Матрица перевозок				
10	1	0	0	0	1
11	1	0	0	1	0
12	1	0	1	0	0
13	1	1	0	0	0
14		1	1	1	1
15					
16	min Z	56			
17					

Рис. 5.12. Результаты решения задачи на рабочем листе

Анализируя полученное решение, можно сделать вывод о том, что суммарная минимальная дальность транспортировки составила 56 км, при этом со склада №1 везут груз четвертому потребителю, со склада №2 - третьему, со склада №3 - второму потребителю, а со склада №4 - первому потребителю.

Задача 2. Леспромхоз имеет пять бригад, каждая из которых выполняет различные операции по переработке продукции. Известна производительность каждой бригады при выполнении отдельной работы, представленная матрицей.

Распределить операции по бригадам так, чтобы суммарная производительность была максимальной при условии, что за каждой бригадой может быть закреплена только одна работа.

Индивидуальные варианты

1.

$$\begin{pmatrix} 8 & 11 & 15 & 13 & 14 \\ 12 & 12 & 10 & 9 & 8 \\ 10 & 9 & 9 & 7 & 8 \\ 12 & 13 & 9 & 10 & 8 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 19 & 20 & 19 & 20 & 18 \\ 21 & 21 & 19 & 18 & 17 \\ 21 & 22 & 18 & 19 & 17 \\ 17 & 20 & 24 & 22 & 23 \\ 19 & 18 & 18 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 10 & 17 & 2 \\ 3 & 9 & 7 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 15 & 18 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 5 & 17 \\ 11 & 11 & 8 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 14 & 13 & 12 & 10 & 17 \\ 10 & 3 & 12 & 7 & 5 \\ 10 & 7 & 9 & 15 & 18 \\ 9 & 4 & 6 & 6 & 5 \\ 3 & 11 & 10 & 8 & 17 \end{pmatrix}$$

5.5. Задача выбора

Задача выбора является одной из разновидностей задачи о назначении учитывающей в процессе выбора имеющиеся у объекта ограничивающие ресурсы, позволяющие определить наиболее выгодные с точки зрения выбранного критерия оптимальности варианты вложений.

Задача. Фирме представлены пять проектов совершенствования производства. Свободные денежные средства на счету организации не позволяют финансировать все проекты в полном объеме. Выделенный объем денежных средств для инвестиций, потребности проектов и прибыль по ним приведены в таблице 5.6.

Таблица 5.6

Проекты совершенствования фирмы

Проект	Прибыль, ден. ед.	Требуемые вложения, ден. ед.			
		1-й период	2-й период	3-й период	4-й период
А	50	10	12	10	8
В	48	15	11	18	9
С	52	12	11	9	9
Д	45	9	9	22	6
Е	47	15	10	17	8
Ресурс фирмы, ден. ед.		52	44	63	45

При выборе проектов следует учитывать, что оставшиеся денежные средства в каком-либо периоде не могут быть перенесены на следующие периоды.

Требуется определить, какие проекты следует финансировать и какое количество денежных средств необходимо израсходовать, чтобы получить максимальную прибыль.

Решение.

Переменные:

x_1 – доля вложений в проект А, ден. ед.;

x_2 – доля вложений в проект В, ден. ед.;

x_3 – доля вложений в проект С, ден. ед.;

x_4 – доля вложений в проект Д, ден. ед.;

x_5 – доля вложений в проект Е, ден. ед.

Система ограничений:

$10x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 9x_4 + 15x_5 \leq 52$ – использование денежных средств в 1-ом периоде, ден. ед.;

$12x_1 + 11x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 10x_5 \leq 44$ – использование денежных средств во 2-ом периоде, ден. ед.;

$10x_1 + 18x_2 + 9x_3 + 22x_4 + 17x_5 \leq 63$ – использование денежных средств в 3-м периоде, ден. ед.;

$8x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 8x_5 \leq 45$ – использование денежных средств в 4-ом периоде, ден. ед.;

Целевая функция:

$$\max Z = 50x_1 + 48x_2 + 52x_3 + 45x_4 + 47x_5$$

Условную задачу решим на компьютере с помощью приложения MS Excel «Поиск решения».

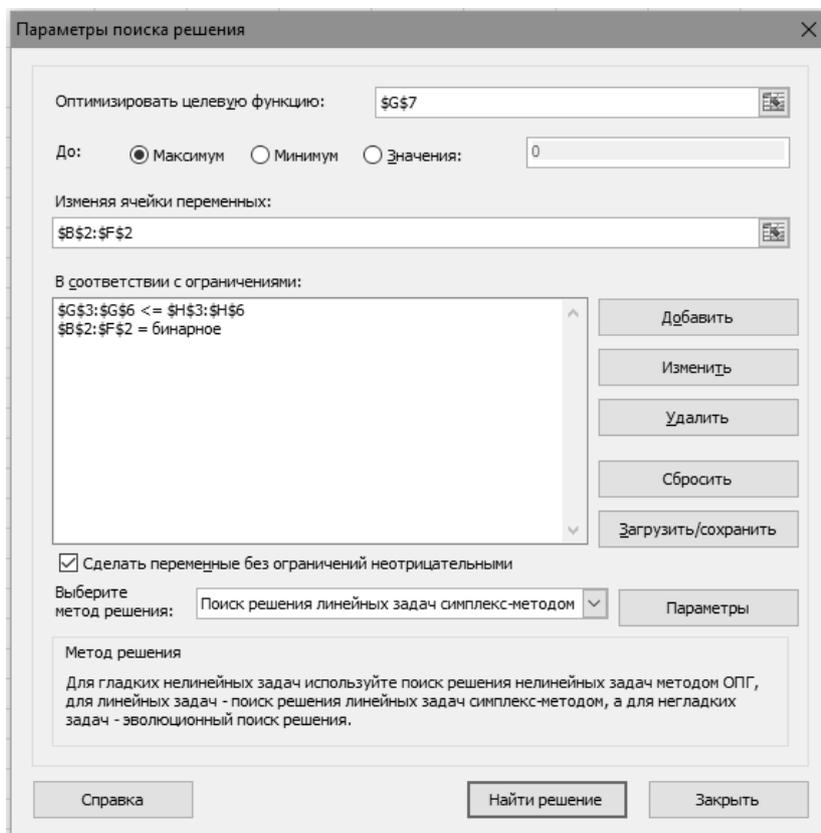


Рис. 5.13. Вид окна «Параметры поиска решения»

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	сумма	Правая часть
2	Значения по решению	1	0	1	1	1		
3	Использование денежных средств в 1-м периоде	10	15	12	9	15	46	52
4	Использование денежных средств во 2-м периоде	12	11	11	9	10	42	44
5	Использование денежных средств в 3-м периоде	10	18	9	22	17	58	63
6	Использование денежных средств в 4-м периоде	8	9	9	6	8	31	45
7	Целевая функция	50	48	52	45	47	194	

Рис. 5.14. Результаты решения задачи на рабочем листе

В результате решения получаем $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$, $x_2 = 0$, т.е. необходимо финансировать 1, 3, 4 и 5-ый проекты. На все проекты потребуется 177 ден. ед. в течение четырех периодов при возможном выделенном объеме 204 ден. ед. Сумма прибыли, которую сельскохозяйственная организация может получить от внедрения проектов, составит 194 ден. ед.

Задача. Леспромхоз может использовать пять видов рекламоносителей. Исследования показали, что виды рекламной деятельности приносят различную прибыль и требуют определенные денежные вложения по кварталам. Доступная наличность производителя не позволяет использовать все виды рекламы.

Определить какие виды рекламной деятельности использовать и сколько производителю вкладывать денежных средств, чтобы получить максимум прибыли от рекламы.

Таблица 5.7

Доступная наличность производителя, потребность рекламной деятельности в денежных средствах и прибыль по ней (тыс. ден. ед.)

Виды рекламной деятельности	Прибыль	Требуемые вложения по периодам									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. Реклама в прессе	35	12	15	14	16	11	17	13	10	19	18
2. Реклама на радио	39	18	17	21	23	16	22	19	16	24	26
3. Телевизионная реклама	47	24	27	25	29	21	24	28	22	30	32
4. Наружная реклама	45	15	19	17	21	18	20	25	17	26	28
5. Реклама в интернете	51	10	13	12	14	8	15	9	7	18	16
Выделенный объем денежных средств		55	58	54	60	65	57	52	67	70	75

Таблица 5.8

Варианты заданий

№ варианта	Периоды вложения средств	№ варианта	Периоды вложения средств
1	1, 2, 3, 4	6	1, 3, 4, 5
2	2, 4, 6, 8	7	4, 6, 8, 10
3	3, 5, 7, 9	8	1, 7, 8, 9
4	5, 6, 7, 8	9	5, 7, 8, 9
5	1, 4, 5, 6	10	2, 4, 8, 10

5.6. Целочисленное программирование

Целочисленным (иногда его называют также дискретным) программированием называется раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых на искомые переменные накладывается условие целочисленности (то есть значения переменных должны быть целыми числами).

Огромное число экономических задач носят целочисленный характер, что связано, прежде всего, с физической неделимостью многих расчетов: нельзя построить 2,5 завода, купить 1,5 трактора, задействовать на работу 3,3

человека, построить 100,7 скотомест и т.п. В большинстве случаев практическую задачу решают обычным симплексным методом, а затем округляют до целых чисел. Это оправдано в том случае, если дробная часть составляет очень малую часть от целого. Но иногда такой подход может внести большие изменения. Например, довольно существенно выбрать покупку одного или двух тракторов, если в результате решения без условия целочисленности переменная приняла значение 1,5.

Математическая запись задачи целочисленного программирования.

$$\text{Найти } \max(\min)Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq a_{i0}, i = 1 \div m \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; j = 1 \div n \quad (3)$$

$$x_j - \text{целые числа} \quad (4)$$

Процедура «Поиск решения» для решения задач целочисленного программирования

Задание. Предприятие выпускает два вида продукции А и В измеряемые в единицах. На изготовление единицы продукции А требуется затратить 2 кг сырья первого типа, 3 кг сырья второго типа, 5 кг сырья третьего типа.

На изготовление единицы продукции В требуется затратить 7 кг сырья первого типа, 3 кг сырья второго типа, 1 кг сырья третьего типа.

Производство обеспечено сырьем каждого типа в количестве 420 кг, 310 кг, 330 кг соответственно.

Рыночная цена единицы продукции А составляет 55 ден. ед., а единицы продукции В - 35 ден. ед.

Сколько единиц продукции А и В следует выпускать, чтобы выручка была максимальной.

Переменные задачи:

x_1 - количество продукции типа А, ед.

x_2 - количество продукции типа В, ед.

Система ограничений:

$2x_1+7x_2 \leq 420$ – баланс сырья 1 типа (ед.)

$3x_1+3x_2 \leq 310$ – баланс сырья 2 типа (ед.)

$5x_1+1x_2 \leq 330$ – баланс сырья 3 типа (ед.)

Целевая функция:

$\max Z = 55x_1+35x_2$ –максимум выручки, ден. ед.

Последовательность выполнения

Оформить исходные данные на рабочем листе 1.

	A	B	C	D	E	F
1		Продукция				
2		A	B			
3	Наименование ограничения	X1	X2	Формулы	Правая часть ограничения	Тип ограничения
4	Баланс сырья 1	2	7	=СУММПРОИЗВ(B4:C4;\$B\$8:\$C\$8)	420	≤
5	Баланс сырья 2	3	3	=СУММПРОИЗВ(B5:C5;\$B\$8:\$C\$8)	310	≤
6	Баланс сырья 3	5	1	=СУММПРОИЗВ(B6:C6;\$B\$8:\$C\$8)	330	≤
7	Целевая функция(максимум выручки)	55	35	=СУММПРОИЗВ(B7:C7;\$B\$8:\$C\$8)		
8	Значения по решению					

Рис. 5.15. Исходные данные на рабочем листе

Здесь ячейки:

B8:C8 – результат (оптимальное количество продукции каждого вида);

B7:C7 – коэффициенты целевой функции;

D7 – значение целевой функции;

B4:C6 – коэффициенты ограничений;

E4:E6 – правая часть ограничений;

D4:D6 – вычисляемые (фактические) значения левой части ограничений.

Решим задачу с помощью команды меню **Данные / Поиск решения**. Делаем активной ячейку D7. Выполняем команду **Данные / Поиск решения**. На экране появляется диалоговое окно *Поиск решения*.

Прописываем ячейку целевой функции, критерий оптимальности, искомые переменные и условия, накладываемые на них в системе ограничений включая условия неотрицательности и целочисленности.

Условие целочисленности вводится через окно *Добавление ограничений*

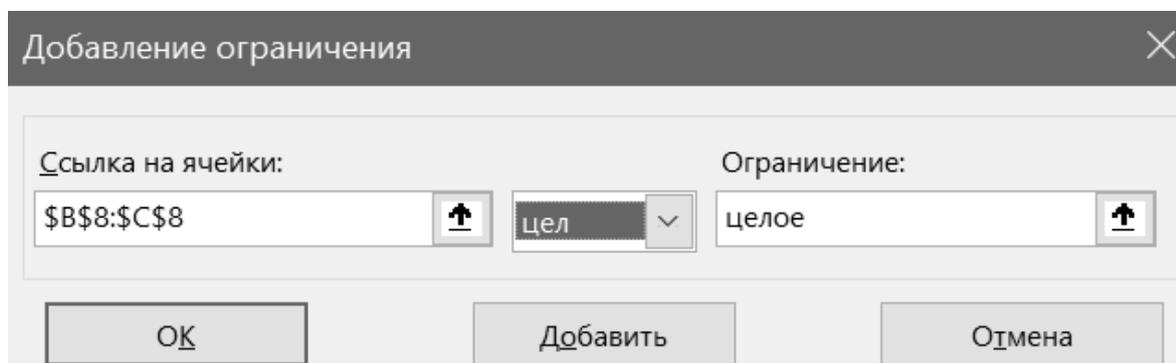


Рис. 5.16. Вид окна «Добавление ограничений» с условием целочисленности

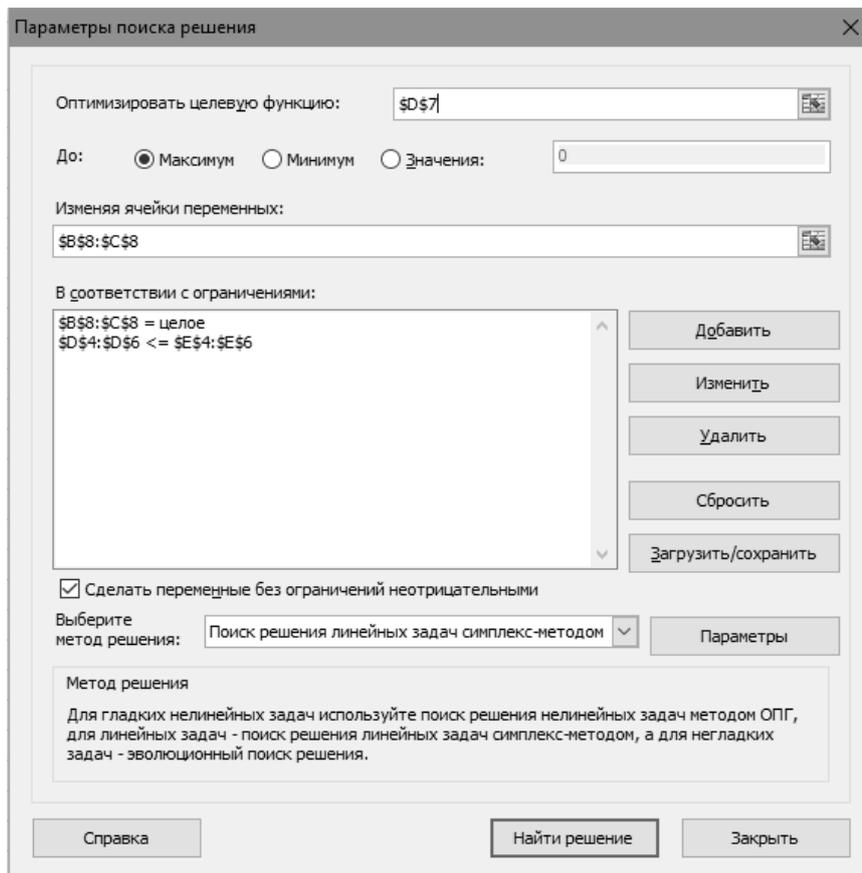


Рис. 5.17. Вид окна «Параметры поиска решения» с условием целочисленности

Выбираем метод решения **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**, нажимаем кнопку *Параметры* и делаем настройку убирая флажок *Игнорировать целочисленные ограничения*, в поле *Целочисленная оптимальность(%)* задаем 1. Запускаем поиск оптимального решения кнопкой *Найти решение*.

В диалоговом окне *Результаты поиска решения* установить переключатель *Сохранить найденное решение*, выбрать все 3 типа отчетов, щелкая по их названиям левой кнопкой мыши, и нажать кнопку **ОК**.

На *Листе1* (исходные данные) в строке 8 (Значения по решению) выводятся значения соответствующих переменных, в ячейке D7 - значение целевой функции, в ячейках D4:D6 – значения выполнения ограничений.

	A	B	C	D	E	F
1		Продукция				
2		A	B			
3	Наименование ограничения	X1	X2	Формулы	Правая часть ограничения	Тип ограничения
4	Баланс сырья 1	2	7	415	420	\leq
5	Баланс сырья 2	3	3	300	310	\leq
6	Баланс сырья 3	5	1	328	330	\leq
7	Целевая функция (максимум выручки)	55	35	4640		
8	Значение по решению	57	43			

Рис. 5.18. Результаты решения задачи на рабочем листе

Получено следующее решение: предприятие выпустит продукции А – 57 ед., продукции В – 43 ед. с общей суммой выручки в 4620 ден. ед.

Для получения оптимального целочисленного решения в процедуре «Поиск решения» используется метод Ветвей и границ.

Задание. Найти оптимальные целочисленные решения задач по вариантам в приложении MS Excel «Поиск решений».

<p>1. $\max Z = x_1 + 2x_2$ $1,5x_1 + 2x_2 \leq 3$ $2x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 + x_2 \leq 4$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ x_1, x_2-целые</p>	<p>2. $\max Z = x_1 + x_2$ $-1x_1 + 2x_2 \leq 3$ $2x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 + 1,5x_2 \leq 4$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ x_1, x_2-целые</p>	<p>3. $\max Z = 2x_1 + 3x_2$ $x_1 + 2x_2 \leq 3$ $-x_1 + 2x_2 \leq 2$ $x_1 - x_2 \leq 1$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ x_1, x_2-целые</p>
<p>4. $\max Z = 2x_1 + x_2$ $1,5x_1 + 2x_2 \leq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ x_1, x_2-целые</p>	<p>5. $\max Z = x_1 + x_2$ $3x_1 + x_2 \leq 5$ $x_1 + x_2 \leq 4$ $x_2 \leq 4$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0;$ x_1, x_2; -целые</p>	<p>6. $\max Z = x_1 + x_2$ $1,5x_1 + 2x_2 \leq 5$ $2x_1 + x_2 \leq 2$ $-5x_1 + 1,5x_2 \leq 2$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ x_1, x_2-целые</p>

5.7. Задачи о раскрое

Большинство материалов поступает на производство в виде стандартных форм. Непосредственное использование таких материалов, как правило, невозможно. Предварительно их разделяют на заготовки необходимых размеров. Это можно сделать, используя различные способы раскроя материала.

Задача оптимального раскроя состоит в том, чтобы выбрать один или несколько способов раскроя материала и определить, какое количество материала следует раскраивать, применяя каждый из выбранных способов. В задачах о раскрое применяются следующие критерии оптимальности: минимум отходов, максимум произведенных комплектов, минимальное количество используемого материала.

В зависимости от постановки задачи может быть предложено два варианта моделирования раскроя приводимых в задачах описываемых далее.

Задача 1. Служба снабжения завода получила от поставщиков 500 досок длиной 5 м. Их необходимо разрезать на детали А и В длиной соответственно 2 и 1,5 м, из которых затем составляются комплекты. В каждый комплект входят 3 детали А и 2 детали В. Характеристики возможных вариантов раскроя досок представлены в табл.5.9.

Постройте математическую модель задачи, позволяющую найти план раскроя досок, минимизирующий количество отходов.

Таблица 5.9

Характеристики возможных вариантов раскроя прутков

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./доска		Отходы, м/доска
	А	В	
1	2	0	1
2	1	2	0
3	0	3	0,5
Комплектность, шт./компл.	3	2	х

Переменные задачи:

x_1 - количество досок, идущих на 1 вариант раскроя, шт.

x_2 - количество досок, идущих на 2 вариант раскроя, шт.

x_3 - количество досок, идущих на 3 вариант раскроя, шт.

Система ограничений:

$2x_1+x_2$ – количество деталей типа А, производимых по всем раскройам
(шт.)

$2x_2+3x_3$ – количество деталей типа В, производимых по всем раскройам
(шт.)

$(2x_1+x_2)/3 = (2x_2+3x_3)/2$ – количество деталей типа А и типа В образующих комплект (шт.)

$x_1+ x_2 + x_3 = 500$ – баланс сырья (досок) (шт.)

Целевая функция:

$\min Z = x_1 + 0,5x_3$ –минимум отходов, м.

Последовательность выполнения

Оформить исходные данные на рабочем листе 1.

	A	B	C	D	E	F	G
1		x1	x2	x3	Формула	Комплект	Константа
2	Деталь А(2)	2	1		=СУММПРОИЗВ(В2:D2,\$B\$7:\$D\$7)	3	=E2/F2
3	Деталь В(1,5)	0	2	3	=СУММПРОИЗВ(В3:D3,\$B\$7:\$D\$7)	2	=E3/F3
4		1	1	1	=СУММПРОИЗВ(В4:D4,\$B\$7:\$D\$7)		500
5							
6	ЦФ (минимум отходов, м)	1	0	0.5	=СУММПРОИЗВ(В6:D6,\$B\$7:\$D\$7)		
7	переменные						

Рис. 5.19. Исходные данные на рабочем листе

В7:D7 – результат (оптимальное количество досок для каждого варианта раскроя);

В6:D6– коэффициенты целевой функции;

Е6 – значение целевой функции;

В2:D4 – коэффициенты ограничений;

Г2:G3 – количество деталей типа А и типа В образующих комплект;

Г4 – правая часть ограничения по балансу сырья;

E2:E4 – вычисляемые (фактические) значения левой части ограничений.

Решим задачу с помощью команды меню **Данные / Поиск решения**. Делаем активной ячейку E6. Выполняем команду **Данные / Поиск решения**. На экране появляется диалоговое окно *Поиск решения*.

Прописываем ячейку целевой функции, критерий оптимальности, искомые переменные и условия, накладываемые на них в системе ограничений включая условия неотрицательности и целочисленности. Условие целочисленности вводится через окно *Добавление ограничений*.

Выбираем метод решения **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**, нажимаем кнопку *Параметры* и делаем настройку убирая флажок *Игнорировать целочисленные ограничения*, в поле *Целочисленная оптимальность(%)* задаем 1. Запускаем поиск оптимального решения кнопкой *Найти решение*.

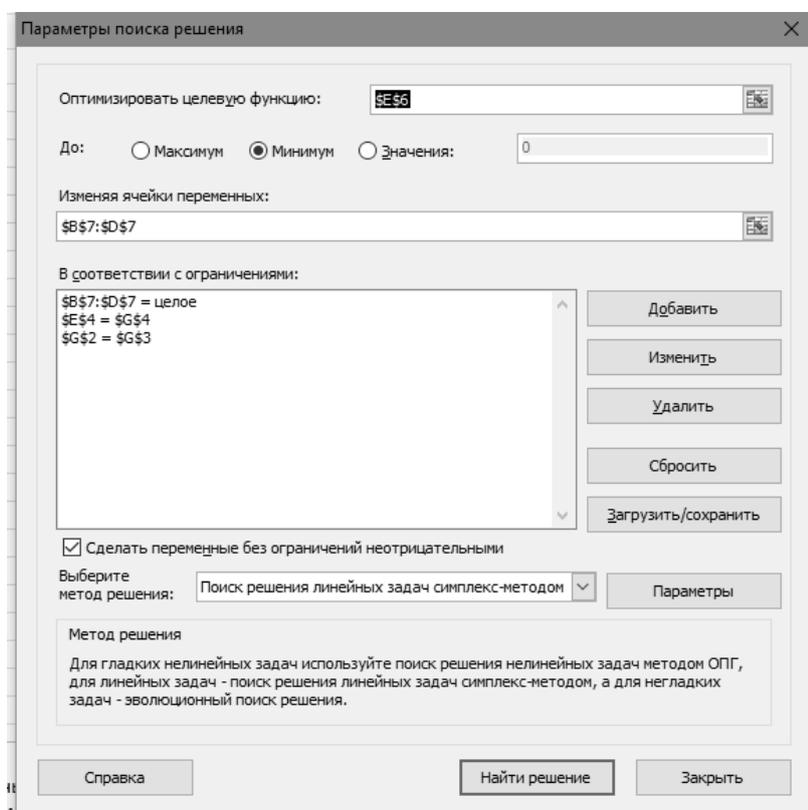


Рис. 5.20. Вид окна «Параметры поиска решения» с условием целочисленности

В диалоговом окне *Результаты поиска решения* установить переключатель *Сохранить найденное решение*, выбрать все 3 типа отчетов, щелкая по их названиям левой кнопкой мыши, и нажать кнопку **ОК**.

На *Листе1* (исходные данные) в строке 7 (переменные) выводятся значения соответствующих переменных, в ячейке Е6 - значение целевой функции, в ячейках G2:G4– значения выполнения ограничений.

В данном примере получено следующее решение: по 1 варианту будут раскроены 250 досок, по 2 варианту – 250, по 3 варианту – 0. Минимальный объем отходов составит – 250 м.

	A	B	C	D	E	F	G
1		x1	x2	x3	Формула	Комплект	Константа
2	Деталь А(2)	2	1		750	3	250
3	Деталь В(1,5)	0	2	3	500	2	250
4		1	1	1	500		500
5							
6	ЦФ (минимум)	1	0	0.5	250		
7	переменные	250	250	0			

Рис. 5.21. Результаты решения задачи на рабочем листе

Задача 2. В леспромхозе производится раскряжевка хлыстов на сортименты. Требуется получить сортименты трех видов - длиной 6, 2,2 и 1,5 м. Длина среднего хлыста 31 м, средний диаметр 0,3 м. План поставки сортиментов, соответственно, 30000 м³, 86000 м³ и 40000 м³. Используя карту раскряжки хлыстов без учета толщины пропила и сбега (табл. 5.10) определить оптимальный план раскряжки.

Таблица 5.10

Варианты раскряжки хлыстов на сортименты разной длины

Сортимент, м	Варианты раскряжки хлыстов										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6	5	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0
2,2	0	2	1	5	0	4	1	9	2	10	1
1,5	0	1	3	1	8	6	11	3	13	6	19
Отходы	1	1,1	0,3	0,5	1,0	1,2	0,3	0,7	1,1	0	0,3

Переменные задачи:

x_1 - количество хлыстов, идущих на 1 вариант раскроя, шт.

x_2 - количество хлыстов, идущих на 2 вариант раскроя, шт.

x_3 - количество хлыстов, идущих на 3 вариант раскроя, шт.

x_4 - количество хлыстов, идущих на 4 вариант раскроя, шт.

x_5 - количество хлыстов, идущих на 5 вариант раскроя, шт.

x_6 - количество хлыстов, идущих на 6 вариант раскроя, шт.

x_7 - количество хлыстов, идущих на 7 вариант раскроя, шт.

x_8 - количество хлыстов, идущих на 8 вариант раскроя, шт.

x_9 - количество хлыстов, идущих на 9 вариант раскроя, шт.

x_{10} - количество хлыстов, идущих на 10 вариант раскроя, шт.

x_{11} - количество хлыстов, идущих на 11 вариант раскроя, шт.

Система ограничений:

$5x_1+4x_2+4x_3+3x_4+3x_5+2x_6+2x_7+x_8+x_9 \geq 70735,53$ – выполнение плана поставки сортимента длиной 6м (шт.), где

70735,53 – количество сортиментов длиной 6м, полученное переводом плана по сортименту из м³ в штуки по формуле: $=30000/(6*\text{ПИ}()*0,15^2)$.

$2x_2+1x_3+5x_4+0x_5+4x_6+x_7+9x_8+2x_9+10x_{10}+x_{11} \geq 553023,24$ – выполнение плана поставки сортимента длиной 2,2м (шт.), где:

553023,24 – количество сортиментов длиной 2,2м, полученное переводом плана по сортименту из м³ в штуки по формуле: $=86000/(2,2*\text{ПИ}()*0,15^2)$.

$1x_2+3x_3+1x_4+8x_5+6x_6+11x_7+3x_8+13x_9+6x_{10}+19x_{11} \geq 377256,16$

– выполнение плана поставки сортимента длиной 1,5м (шт.), где

377256,16 – количество сортиментов длиной 1,5м, полученное переводом плана по сортименту из м³ в штуки по формуле: $=40000/(1,5*\text{ПИ}()*0,15^2)$.

Целевая функция:

$\min Z = 1x_2+1,1x_2+0,3x_3+0,5x_4+1x_5+1,2x_6+0,3x_7+0,7x_8+1,1x_9+0,3x_{11}-$

МИНИМУМ ОТХОДОВ, м.

Последовательность выполнения

Оформить исходные данные на рабочем листе 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	Формула	Константа
2	6м	5	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0	0	70735.53
3	2,2м	0	2	1	5	0	4	1	9	2	10	1	0	553023.24
4	1,5м	0	1	3	1	8	6	11	3	13	6	19	0	377256.16
5	Отходы, м	1	1.1	0.3	0.5	1	1.2	0.3	0.7	1.1	0	0.3	0	
6	Переменные													

Рис. 5.22. Исходные данные на рабочем листе

B6:L6 – результат (оптимальное количество хлыстов для каждого варианта раскроя);

B5:L5 – коэффициенты целевой функции;

M5 – значение целевой функции;

B2:L4 – коэффициенты ограничений;

N2:N4 – правая часть ограничений;

M2:M4 – вычисляемые (фактические) значения левой части ограничений.

Решим задачу с помощью команды меню **Данные / Поиск решения**. Делаем активной ячейку M5. Выполняем команду **Данные / Поиск решения**. На экране появляется диалоговое окно *Поиск решения*.

Прописываем ячейку целевой функции, критерий оптимальности, искомые переменные и условия, накладываемые на них в системе ограничений включая условия неотрицательности и целочисленности. Условие целочисленности вводится через окно *Добавление ограничений*.

Выбираем метод решения **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**, нажимаем кнопку *Параметры* и делаем настройку убирая флажок *Игнорировать целочисленные ограничения*, в поле *Целочисленная оптимальность(%)* задаем 1. Запускаем поиск оптимального решения кнопкой *Найти решение*.

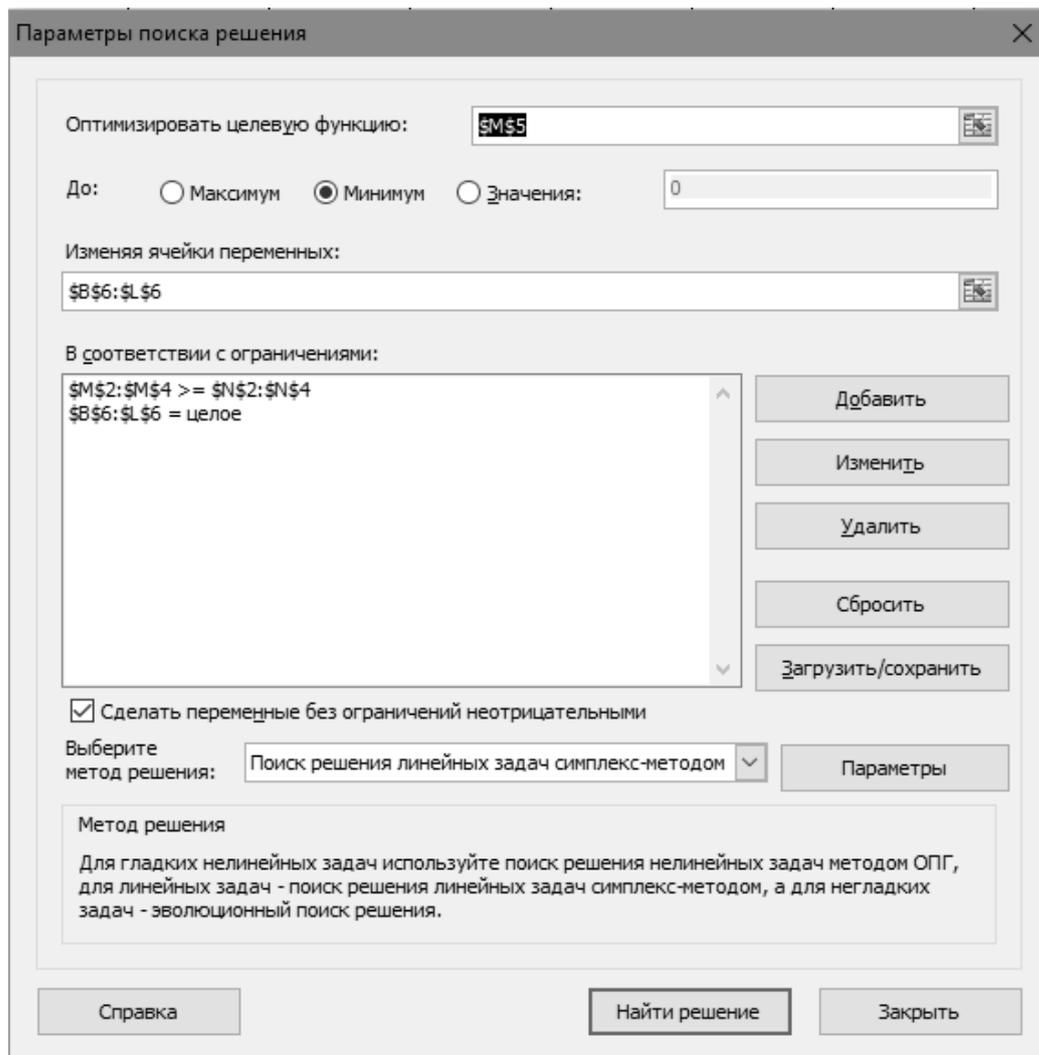


Рис. 5.23. Вид окна «Параметры поиска решения» с условием целочисленности

В диалоговом окне *Результаты поиска решения* установить переключатель *Сохранить найденное решение*, выбрать все 3 типа отчетов, щелкая по их названиям левой кнопкой мыши, и нажать кнопку **ОК**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	Формула	Константа
2	6м	5	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0	70736	70735.53
3	2,2м	0	2	1	5	0	4	1	9	2	10	1	558034	553023.24
4	1,5м	0	1	3	1	8	6	11	3	13	6	19	377262	377256.16
5	Отходы, м	1	1.1	0.3	0.5	1	1.2	0.3	0.7	1.1	0	0.3	5305.2	
6	Переменные	0	0	17684	0	0	0	0	0	0	54035	0		

Рис. 5.24. Результаты решения задачи на рабочем листе

На *Листе1* (исходные данные) в строке 6 (переменные) выводятся значения соответствующих переменных, в ячейке М5 - значение целевой функции, в ячейках М2:М4– значения выполнения ограничений.

По оптимальному решению с учетом целочисленности получено, что для выполнения плана поставки сортиментов по 3 варианту будут раскроены 17684 хлыста, по 10 варианту – 54035. Минимальный объем отходов составит – 5305,2 м.

Задание. Решить задачи в приложении «Поиск решения», проанализировать полученное решение.

1. В деревообрабатывающий цех завода поступил заказ вырезать из фанеры заготовки двух видов для 1000 изделий. Известно, что на одно изделие идет 2 заготовки первого вида и 3 - второго. Существуют три способа раскроя: при первом способе из листа фанеры получается 5 заготовок первого вида и 2 заготовки второго вида, при втором: 1 заготовка первого вида и 2 заготовки второго и при третьем - соответственно 3 и 4. Сколько листов фанеры следует раскроить по каждому способу, чтобы выполнить заказ и свести расход фанеры до минимума?

2. Имеется 50 шт. брусев длиной 6,5 м, необходимо изготовить наибольшее число комплектов, в состав каждого из которых входит 2 шт. детали длиной 2 м и 3 шт. детали длиной 1,25 м. Варианты раскроя подобрать самостоятельно.

5.8. Динамическое программирование

Задачи динамического программирования - это задачи, у которых целевая функция обладает свойством аддитивности, то есть может быть представлена в виде суммы слагаемых функций, зависящих от ограниченного числа переменных, или задачи с сепарабельной целевой функцией, у которой каждое слагаемое зависит лишь от одной переменной. Например, $Z=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\dots+f_n(x_n)$ или $Z=x_1^2+3x_2^3+6,8x_3^4+9x_4^3+3,5x^{3/2}$. В большинстве

практических задач, решаемых методом динамического программирования, целевая функция является аддитивной. Если в первоначальной постановке задачи целевая функция не обладает этим свойством, то изменяют либо постановку задачи, либо преобразуют целевую функцию.

В задачах динамического программирования может быть несколько локальных экстремумов, но при решении находят абсолютный максимум или минимум.

Задачи динамического программирования могут быть одномерными, двумерными или k - мерными. Размерность задачи определяется по числу переменных, от которых зависит каждое слагаемое целевой функции. Например, задача (1)

$$Z=f_1(x_1)+ f_2(x_2)+\dots+ f_n(x_n)\rightarrow\max$$

$$x_1+ x_2+\dots+ x_n \leq R; \quad (1) \text{ - одномерная;}$$

$$x_j \geq 0, j=1 \div n$$

задача (2)

$$Z=f_1(x_1, y_1)+ f_2(x_2, y_2)+\dots+ f_n(x_n, y_n)\rightarrow\max$$

$$x_1+ x_2+\dots+ x_n \leq R;$$

$$y_1+ y_2+\dots+ y_n \leq T; \quad (2) \text{ - двумерная;}$$

$$x_j \geq 0, j=1 \div n, y_j \geq 0, j=1 \div n,$$

а задача (3)

$$Z=f_1(x_1, y_1, v_1)+ f_2(x_2, y_2, v_2)+\dots+ f_n(x_n, y_n, v_n)\rightarrow\max$$

$$x_1+ x_2+\dots+ x_n \leq R;$$

$$y_1+ y_2+\dots+ y_n \leq T;$$

$$v_1+ v_2+\dots+ v_n \leq D; \quad (3) \text{ - трехмерная;}$$

$$x_j \geq 0, j=1 \div n, y_j \geq 0, j=1 \div n, v_j \geq 0, j=1 \div n.$$

В задачах динамического программирования должно отсутствовать последствие, то есть решение, принятое на предыдущем этапе, не должно

оказывать параметрического влияния на решение на последующем этапе, а должно влиять явным образом.

Динамическое программирование - метод оптимизации, который предусматривает разбиение процесса принятия решения и управления на последовательные этапы (шаги), т. е. этот процесс является многошаговым или многоэтапным. В задачах, в которых этапами, как правило, являются отрезки времени, например, в линейно-динамических задачах этапами служат годы.

Под управлением понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход развития процесса.

Метод динамического программирования может использоваться для решения таких, например, задач как:

- распределение капитальных вложений (инвестиций) между возможными направлениями использования;
- распределение ресурсов между предприятиями;
- выбор оптимальной стратегии замены оборудования;
- нахождение оптимальных маршрутов транспортировки груза по заданной сети и др.

Постановка задачи динамического программирования.

Общая постановка задачи сформулируем так: определить такое допустимое управление X , переводящее систему S из состояния S_0 в состояние S_n , при котором целевая функция Z принимает наибольшее (наименьшее) значение.

Принцип оптимальности Беллмана

Универсального способа, каким в линейном программировании является симплексный метод, в динамическом программировании нет. Но можно определить основной подход (вычислительную схему) к решению задач такого рода. Впервые он был сформулирован американским математиком Р. Беллманом.

Принцип оптимальности Беллмана формулируется следующим образом: каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге управление надо выбирать так, чтобы оптимальной была сумма выигрышей на всех оставшихся до конца процесса шагах, включая выигрыш на данном шаге или оптимальное поведение обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальное состояние и первоначальное решение, последующее решение должно определить оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.

Исходя из принципа оптимальности, оптимизацию следует проводить от конца процесса к началу, т. к. на последнем шаге принимается управление X_n без учета выигрышей на последующих шагах, т. к. эти шаги просто отсутствуют.

Математический аппарат динамического программирования может быть использован для решения задач по выбору оптимального маршрута перевозки грузов с учетом кратчайших расстояний (или наименьших затрат на транспортировку) по заданной сети.

Общая постановка задачи

Возможные маршруты перевозки груза из п.1 в п.10 представлены в виде сети. Найти оптимальный маршрут, обеспечивающий наименьшее расстояние перевозки из начального в конечные пункты транспортировки. Расстояния между пунктами указаны на рисунке 5.25.

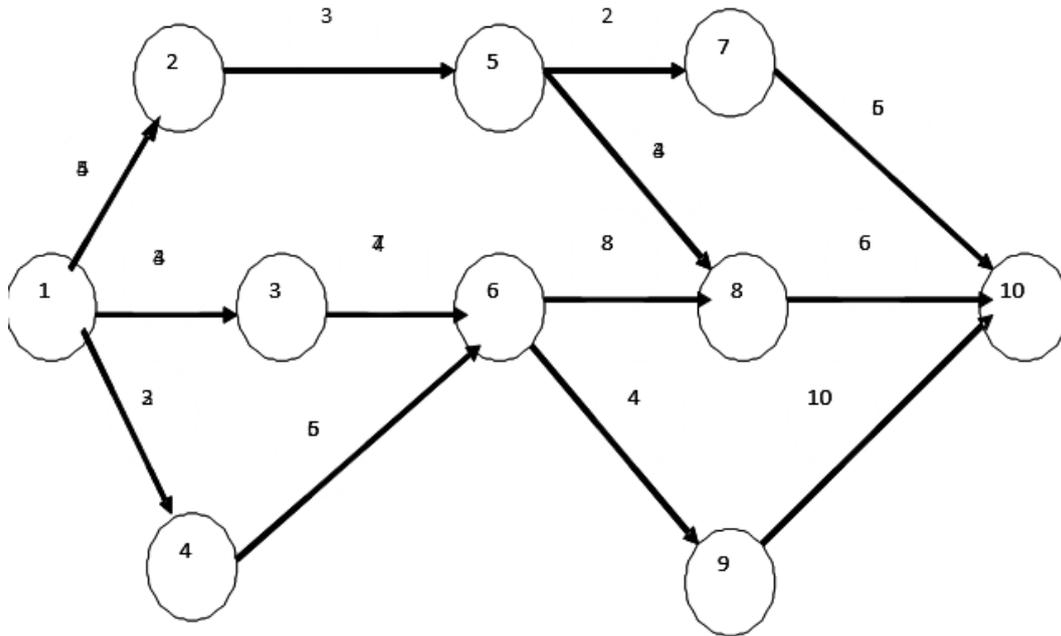


Рис. 5.25. Возможные маршруты перевозки груза

Переменные задачи: характеризуют коэффициенты вхождения расстояния между двумя пунктами в кратчайший путь

x_1 - коэффициент между пунктами 1-2

x_2 - коэффициент между пунктами 1-3

x_3 - коэффициент между пунктами 1-4

x_4 - коэффициент между пунктами 2-5

x_5 - коэффициент между пунктами 3-6

x_6 - коэффициент между пунктами 4-6

x_7 - коэффициент между пунктами 5-7

x_8 - коэффициент между пунктами 5-8

x_9 - коэффициент между пунктами 6-8

x_{10} - коэффициент между пунктами 6-9

x_{11} - коэффициент между пунктами 7-10

x_{12} - коэффициент между пунктами 8-10

x_{13} - коэффициент между пунктами 9-10

Общая постановка задачи

Пусть дан направленный граф (V, A) , где V — множество вершин и A — множество ребер, с начальной вершиной обхода s , конечной t и весами w_{ij} для каждого ребра (i, j) в A . Вес каждого ребра соответствует переменной программы x_{ij} .

Тогда задача ставится следующим образом: найти минимум функции

$$F = \sum_{ij \in A} w_{ij} x_{ij}$$

И, где $x_{ij} \geq 0$ и принимает значения либо 0, либо 1, при условии

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = s; \\ -1, & \text{if } i = t; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Последовательность выполнения

Оформить исходные данные на рабочем листе 1 в две таблицы.

В первой таблице в ячейках C2:C14 описываем отрезки расстояний на пути, далее в столбцах D и E описываем начало и конец расстояния по номерам пунктов. В ячейках F2:F14 отображаем расстояние в километрах, а в ячейки G2:G14 будут выведены коэффициенты вхождения расстояния между двумя пунктами в кратчайший путь по оптимальному решению.

Во второй таблице число строк равно количеству пунктов на пути. Столбцы таблицы «Входят» и «Выходят» описывают расстояния между пунктами через коэффициенты, начало пути в ячейку D20 столбца «Входят» проставляется 0, конец пути ячейка E29 столбца «Выходят» отмечается так же 0.

В столбце «Входят» описывают коэффициентами из столбца предыдущей таблицы «На пути» со знаком «+», в столбце «Выходят» указывают те направления, которые выходят из данного пункта со знаком «-». Если в пункт попадают по разным дорогам, то дороги входящие и

выходящие суммируются. Результаты записываются с ответствующими знаками в столбцы таблицы.

Например:

В пункт 2 попадают из пункта 1, соответственно в ячейку D21 занесем коэффициент, описывающий отрезок пути 1-2: =G2.

Из пункта 2 можно попасть в пункт 5, в ячейку E21 занесем коэффициент, описывающий отрезок пути 2-5: = - G5.

Дальнейшие формулы заполнения таблицы представлены на рисунке 5.26.

	A	B	C	D	E	F	G
1				начало	конец	расстояние	на пути
2			1-2	1	2	5	
3			1-3	1	3	4	
4			1-4	1	4	3	
5			2-5	2	5	3	
6			3-6	3	6	4	
7			4-6	4	6	5	
8			5-7	5	7	2	
9			5-8	5	8	4	
10			6-8	6	8	8	
11			6-9	6	9	4	
12			7-10	7	10	5	
13			8-10	8	10	6	
14			9-10	9	10	10	
15			Кратчайший путь			=СУММПРОИЗВ(F2:	
16							
17							
18				Пути			
19			Пункты	Входят	Выходят	Сумма	Ограничение
20			1	0	=(G2+G3+G4)	=СУММ(D20:E20)	-1
21			2	=G2	=-G5	=СУММ(D21:E21)	0
22			3	=G3	=-G6	=СУММ(D22:E22)	0
23			4	=G4	=-G7	=СУММ(D23:E23)	0
24			5	=G5	=(G8+G9)	=СУММ(D24:E24)	0
25			6	=G6+G7	=(G10+G11)	=СУММ(D25:E25)	0
26			7	=G8	=-G12	=СУММ(D26:E26)	0
27			8	=G9+G10	=-G13	=СУММ(D27:E27)	0
28			9	=G11	=-G14	=СУММ(D28:E28)	0
29			10	=G12+G13+G14	0	=СУММ(D29:E29)	1
30							

Рис. 5.26. Исходные данные на рабочем листе

Ячейки столбца «Сумма» представляют собой сумму двух ячеек столбцов «Входят» и «Выходят».

Столбец «Ограничения» заполняется, так как описан на рисунке 5.26. Он используется для сравнения со столбцом «Сумма» в том случае, если решение не будет оптимальным.

В условиях задачи задаем столбец «Сумма» = столбец «Ограничение».

Ячейка F15 – значение целевой функции, которое определяется по формуле =СУММПРОИЗВ(F44:F56;G44:G56).

Решим задачу с помощью команды меню **Данные / Поиск решения**. Делаем активной ячейку F15. Выполняем команду **Данные / Поиск решения**.

На экране появляется диалоговое окно *Поиск решения*.

Прописываем ячейку целевой функции, критерий оптимальности, искомые переменные и условия, накладываемые на них в системе ограничений включая условия неотрицательности и целочисленности. Условие целочисленности вводится через окно *Добавление ограничений*.

Выбираем метод **решения Поиск решения линейных задач симплекс-методом**, нажимаем кнопку *Параметры* и делаем настройку убирая флажок *Игнорировать целочисленные ограничения*, в поле *Целочисленная оптимальность (%)* задаем 1. Запускаем поиск оптимального решения кнопкой *Найти решение*.

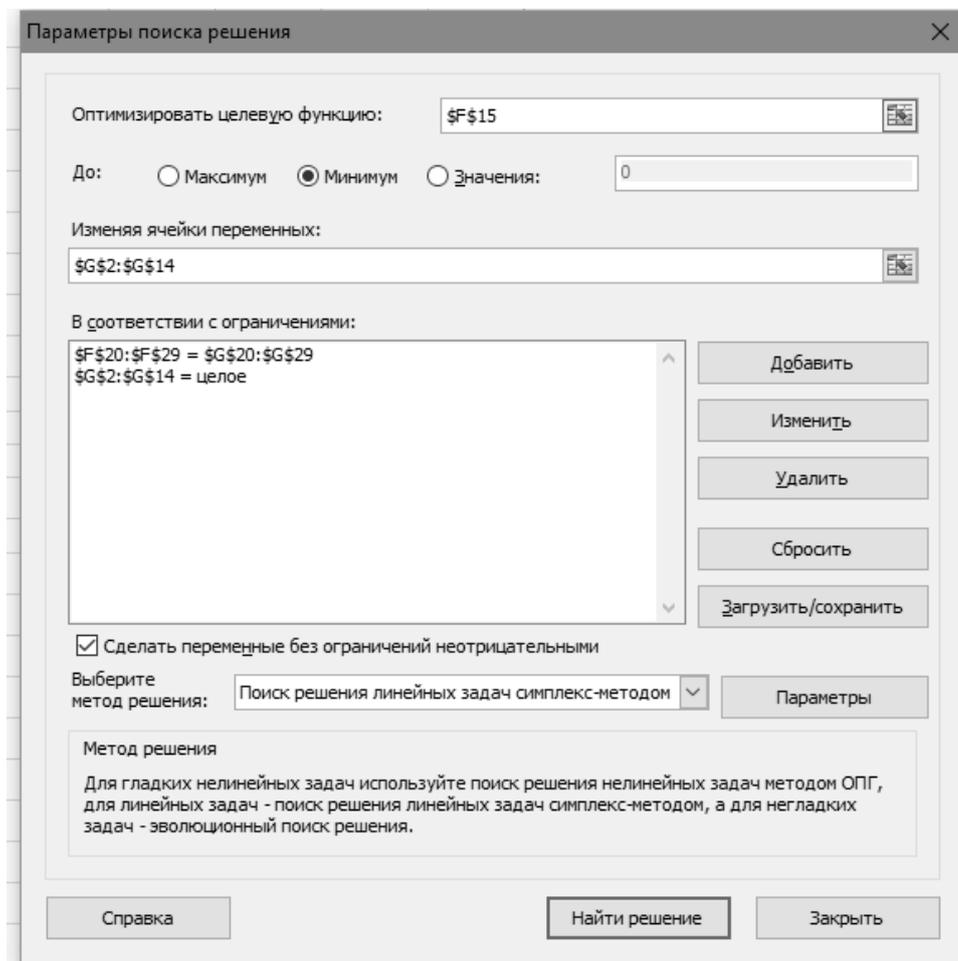


Рис. 5.27. Вид окна «Параметры поиска решения»

В диалоговом окне *Результаты поиска решения* установить переключатель *Сохранить найденное решение*, выбрать все 3 типа отчетов, щелкая по их названиям левой кнопкой мыши, и нажать кнопку **ОК**.

На *Листе1* (исходные данные) в строке 7 (переменные) выводятся значения соответствующих переменных, в ячейке Е6 - значение целевой функции, в ячейках G2:G4– значения выполнения ограничений.

	AB	C	D	E	F	G
1			начало	конец	расстояние	на пути
2		1-2	1	2	5	1
3		1-3	1	3	4	0
4		1-4	1	4	3	0
5		2-5	2	5	3	1
6		3-6	3	6	4	0
7		4-6	4	6	5	0
8		5-7	5	7	2	1
9		5-8	5	8	4	0
10		6-8	6	8	8	0
11		6-9	6	9	4	0
12		7-10	7	10	5	1
13		8-10	8	10	6	0
14		9-10	9	10	10	0
15	Кратчайший путь				15	
16						
17						
18	Пути					
19	Пункты	Входят	Выходят	Сумма	Ограничение	
20	1	0	-1	-1	-1	
21	2	1	-1	0	0	
22	3	0	0	0	0	
23	4	0	0	0	0	
24	5	1	-1	0	0	
25	6	0	0	0	0	
26	7	1	-1	0	0	
27	8	0	0	0	0	
28	9	0	0	0	0	
29	10	1	0	1	1	
30						

Рис. 5.28. Результаты решения задачи на рабочем листе

В данном примере получено следующее решение: кратчайшее расстояние между 1 и 10 пунктами получается при прохождении через пункты 1-2-5-7-10. Кратчайший путь составит – 15 км.

5.9. Решение задачи оптимального распределения инвестиций

В задачах о распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия этапом целесообразно считать временной период. В задачах о распределении средств между предприятиями этапом целесообразно считать номер очередного предприятия.

Задание. Инвестор выделяет средства в размере S усл. ден.ед., которые должны быть распределены между n предприятиями. Каждое k -ое предприятие ($k = 1, 2, \dots, n$) при инвестировании в него средств X_k приносит в конце года прибыль $f_k(x)$ усл. ден. ед. Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы обеспечить максимум суммарной прибыли. При этом учитывается, что прибыль $f_k(x)$ не зависит от вложения средств в другие предприятия, и общая прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Последовательность выполнения

1. Ввести исходные данные задачи на рабочий лист Excel (рис.5.29):

✓ в ячейки A2:A6 ввести размеры возможных вложений денежных средств в предприятия;

✓ в ячейки B2:E6 ввести величину прибыли предприятий от вложенных в них средств;

✓ ячейки B10:E14 зарезервировать (оставить пустыми) для отображения значений переменных, которые могут равняться либо «1» - указанная в строке величина вложений направляется в предприятие, или «0» - в противном случае. B10:E14 являются изменяемыми ячейками. В диалоговом окне «Поиск решения» они характеризуются как двоичные.

✓ в ячейки B15:E15 ввести формулы расчета суммы значений переменных по соответствующему столбцу матрицы распределения (например, =СУММ(B10:B14)). Каждая сумма должна равняться «1», т.к. можно сделать только одно вложение в предприятие из представленных в ячейках A10:A14 величин. Это условие будет отражаться в ограничениях;

✓ в ячейки F10:F14 ввести формулы расчета суммы значений переменных по соответствующей строке матрицы распределения (например, =СУММ(B10:E10));

✓ в F16 ввести формулу подсчета общего количества распределенных денежных средств, которая представляет собой сумму произведений значений в ячейках F10:F14 и A10:A14. Для ввода формулы использовать функцию СУММПРОИЗВ из раздела *Математические функции*. В ограничениях будет отражаться условие, что сумма всех вложений не должна превышать выделенных средств.

✓ в ячейку F18 ввести формулу расчета целевой функции (целевая ячейка), что представляет собой сумму произведений значений переменных (значений ячеек B10:E14) на величину прибыли от предприятий (содержимое ячеек B2:E6).

	A	B	C	D	E	F
1	Размеры вложений в предприятия, ден.ед., X	Прибыль предприятий от инвестиций, ден.ед.				
2	1	1,8	1,7	2	1,7	
3	2	2	2	2,1	2,4	
4	3	2,1	2,2	2,3	2,6	
5	4	2,5	2,8	3,3	3,2	
6	5	2,9	3,5	4	3,6	
7						
8		Матрица распределения вложений				
9	Размеры вложений в предприятия, ден.ед.	в первое предприятие	во второе предприятие	в третье предприятие	в четвертое предприятие	Сумма по строкам
10	1					=СУММ(B10:E10)
11	2					=СУММ(B11:E11)
12	3					=СУММ(B12:E12)
13	4					=СУММ(B13:E13)
14	5					=СУММ(B14:E14)
15	Сумма по столбцам	=СУММ(B10:B14)	=СУММ(C10:C14)	=СУММ(D10:D14)	=СУММ(E10:E14)	
16		Общее количество распределенных средств, ден.ед.				=СУММПРОИЗВ(A10:A14;F10:F14)
17						
18	Целевая функция:	максимальная прибыль, ден.ед.				=СУММПРОИЗВ(B2:E6;B10:E14)
19						

Рис. 5.29. Исходные данные задачи на рабочем листе Excel с визуализацией формул расчетов

Исходные данные задачи без визуализации формул расчетов представлены на рис. 5.30.

2. Загрузить надстройку *Поиск решения* и выбрать команду *Поиск решения* в меню *Данные*.

3. В диалоговом окне *Параметры поиска решения* заполнить поля так, как представлено на рис. 5.31.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Размеры вложений в предприятия, ден.ед., X	Прибыль предприятий от инвестиций, ден.ед.					
2	1	1,8	1,7	2,0	1,7		
3	2	2,0	2,0	2,1	2,4		
4	3	2,1	2,2	2,3	2,6		
5	4	2,5	2,8	3,3	3,2		
6	5	2,9	3,5	4,0	3,6		
7							
8		Матрица распределения вложений					
9	Размеры вложений в предприятия, ден.ед.	в первое предприятие	во второе предприятие	в третье предприятие	в четвертое предприятие	Сумма по строкам	
10	1					0	
11	2					0	
12	3					0	
13	4					0	
14	5					0	
15	Сумма по столбцам	0	0	0	0		
16	Общее количество распределенных средств, ден.ед.					0	
17							
18	Целевая функция:	максимальная прибыль, ден.ед.				0	

Рис. 5.30. Исходные данные задачи на рабочем листе MS Excel без визуализации формул расчетов

4. Нажимаем кнопку *Параметры* и при необходимости делаем настройку.
5. Нажать кнопку *Найти решение*.
6. Просмотреть полученные результаты решения модели на рабочем листе (рис.5.32).

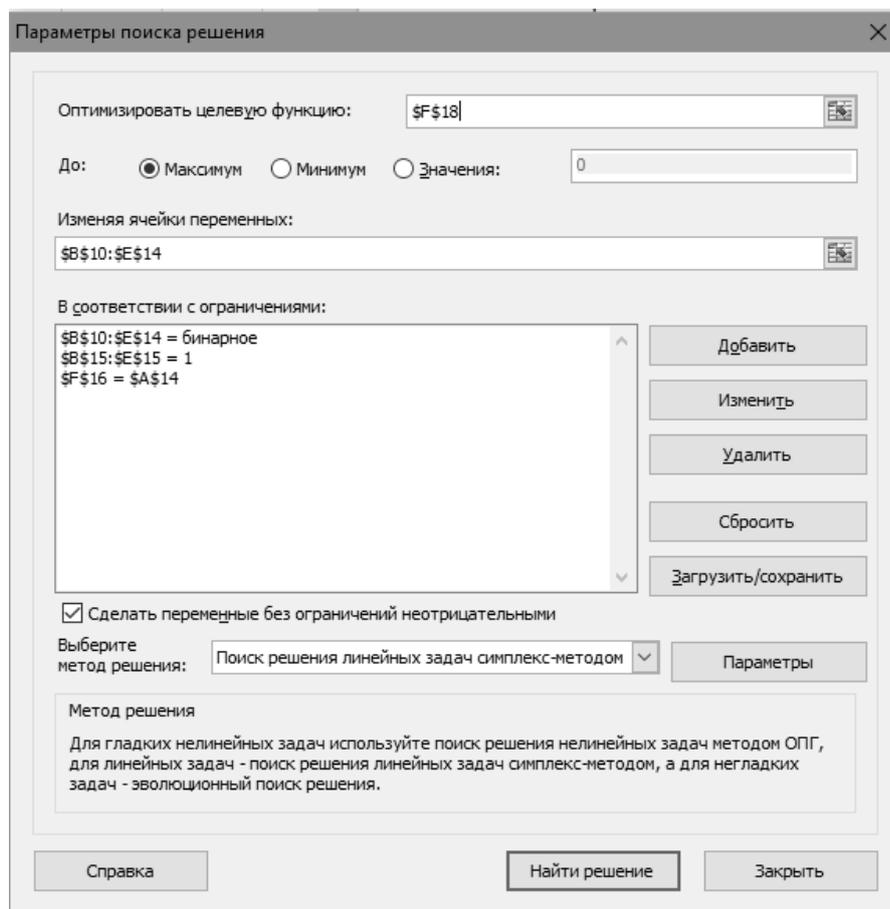


Рис.5.31. Окно «Параметры поиска решения» с описанием условий задачи

Таким образом, в результате решения было определено, что для получения максимальной прибыли в размере 7,9 усл. ден. ед. следует инвестировать в первое предприятие 1 усл. ден. ед., во второе - 1 усл. ден. ед., в третье - 1 усл. ден. ед., в четвертое - 2 усл. ден. ед. При этом от предприятий будет получено прибыли соответственно 1,8; 1,7; 2,0; 2,4 усл. ден. ед.

	A	B	C	D	E	F
1	Размеры вложений в предприятия, ден.ед., X	Прибыль предприятий от инвестиций, ден.ед.				
2	1	1,8	1,7	2,0	1,7	
3	2	2,0	2,0	2,1	2,4	
4	3	2,1	2,2	2,3	2,6	
5	4	2,5	2,8	3,3	3,2	
6	5	2,9	3,5	4,0	3,6	
7						
8	Матрица распределения вложений					
9	Размеры вложений в предприятия, ден.ед.	в первое предприятие	во второе предприятие	в третье предприятие	в четвертое предприятие	Сумма по строкам
10	1	1	1	1	0	3
11	2	0	0	0	1	1
12	3	0	0	0	0	0
13	4	0	0	0	0	0
14	5	0	0	0	0	0
15	Сумма по столбцам	1	1	1	1	
16	Общее количество распределенных средств, ден.ед.					5
17						
18	Целевая функция:	максимальная прибыль, ден.ед.				7,9

Рис.5.32. Результаты решения задачи

Задание 1.

Найти оптимальное распределение 5 тыс. ден. ед. между 4 предприятиями, чтобы получить максимальную прибыль. Прибыль, полученная от каждого предприятия, является функцией от вложенных в него средств X ($f(x)$) и задана в таблице «Прибыль предприятий от вложенных средств». Вложения кратны 1 тыс. ден. ед. Номера предприятий взять по вариантам.

Таблица 5.11

Прибыль предприятий от вложенных средств, тыс. ден. ед.

X тыс. ден. ед.	Номера предприятий									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,4	3	2,5	4,8	3,5	2,1	2,0	2,2	3,2	1,8
2	2,8	3,2	2,8	5,0	3,8	2,5	2,1	2,4	3,7	2,4
3	3,1	3,5	3,4	5,2	4,0	2,9	2,3	2,9	4,0	2,7
4	3,6	3,7	4,0	5,5	4,3	3,2	3,3	3,5	4,5	3,3
5	4,0	3,9	4,2	5,9	4,8	3,6	4,0	4,2	5,1	4,0

Варианты заданий

Номер варианта	Номера предприятий	Номер варианта	Номера предприятий	Номер варианта	Номера предприятий
1	1, 2, 3, 4	5	1, 8, 9, 10	9	1, 5, 6, 7
2	2, 3, 4, 5	6	5, 9, 10, 1	10	2, 7, 8, 9
3	3, 4, 5, 6	7	2, 6, 7, 10	11	3, 7, 8, 9
4	4, 5, 6, 7	8	2, 4, 6, 9	12	1, 3, 5, 6

Словарь употребляемых понятий и терминов

- 1. Статистическое моделирование** – численный метод решения математических задач, при котором анализируются процессы и явления, представляемые вероятностными характеристиками оценки соответствия и достоверности теоретических результатов данным наблюдений.
- 2. Структура лесотипологической модели хода роста таксационного показателя** – общий вид уравнения регрессии, сочетающий набор блоковых фиктивных переменных, кодирующих ТЛУ (типы леса), вид выбранной ростовой функции и показателя, характеризующие морфологию лесного полога (густоту, полноту долю участия древесной породы в составе древостоя).
- 3. Относительная густота древостоя** – число деревьев, выраженное в долях густоты древостоя, принятого за эталон. В качестве критерия эталонности принято отношение D_A/H_A (см/м), равное 1,0 в определённом возрасте древостоя (A , лет).
- 4. Классы высот** – градуированные шкалы возрастного изменения средних высот, соответствующие конкретному типу лесорастительных условий (типу леса). Для конкретного ТЛУ (типа леса) может быть принято несколько классов высот, выраженных средней высотой в условно принятом возрасте (H_{100} , H_{50} , H_{20}).
- 5. Строение древостоев** – распределение числа деревьев и других показателей (сумма площадей сечения, запас, биомасса стволов деревьев, коры, ветвей, хвои/листвы, корней) по классам толщины деревьев.
- 6. Типы лесорастительных условий** - совокупности однородных лесорастительных условий на покрытых и не покрытых лесом участках. Очевидно, что тип лесорастительных условий - понятие более широкое, нежели тип леса. Типы лесорастительных условий классифицируются по показателям богатства и влажности почвы (украинская школа).

7. **Типы леса** - участок леса или их совокупность, характеризующиеся общим типом лесорастительных условий, одинаковым составом древесных пород, количеством ярусов, аналогичной фауной, требующие одних и тех же лесохозяйственных мероприятий при равных экономических условиях (определение В. Н. Сукачёва).

8. **Коренные** типы леса развиваются в природе без влияния человека или природных катастроф. **Производные** типы леса сменяют коренные в результате воздействия этих факторов. Коренной и одноимённые производные типы образуют **серию типов леса**

9. **Биологическая продуктивность** - образование биомассы организмами, выражаемое потоками органического вещества и его потенциальной химической энергии на единицу площади за единицу времени. Понятие БП. применимо к растительным сообществам (фитоценозам), к их отдельным ярусам.

10. **Требовательность к влаге и почвам** – способность растений обеспечивать себя нужным количеством влаги и почвенного питания в различных лесорастительных условиях.

11. **Потребность во влаге элементах почвенного питания** – количество влаги и элементов питания, необходимое для нормальной жизни растения.

Контрольные вопросы и задания

1. Как кодировать типы лесорастительных условий и типы леса блоковыми фиктивными переменными?

2. Как формировать структуру регрессионных моделей роста древостоев разной полноты и густоты по типам леса и типам лесорастительных условий?

3. Приведите закономерности изменения таксационных показателей от возраста, полноты и густоты древостоев по типам леса.

4. Что является критерием относительной густоты древостоев в синхронно типологических моделях хода роста?
5. В чём принципиальное отличие бонитеровочной шкалы от шкалы лесотипологических классов высот древостоев?
6. В чём принципиальное отличие таблиц хода роста от нормативов роста строения и продуктивности древостоев по классам высот?
7. Приведите закономерности возрастного изменения числа деревьев в древостоях разной полноты относительной густоты по классам высот.
8. Приведите закономерности возрастного изменения среднего диаметра древостоев в насаждениях разной полноты относительной густоты по классам высот.
9. Приведите закономерности возрастного изменения среднего видового числа древостоев в насаждениях разной полноты относительной густоты по классам высот.
10. Приведите закономерности возрастного изменения запаса, среднего и текущего прироста в древостоях разной полноты относительной густоты по классам высот.
11. Приведите закономерности возрастного изменения строения древостоев по числу деревьев в древостоях разной относительной густоты, полноты и класса высот.
12. Как трансформируются кривые распределения числа деревьев в зависимости от относительной густоты древостоев в насаждениях разного возраста, полноты и класса высот?
13. Как изменяются с возрастом кривые разрядов высот в древостоях разной относительной густоты?

14. Как трансформируются кривые распределения суммы площадей сечения деревьев в зависимости от относительной густоты древостоев разного возраста, полноты и класса высот?

15. Как трансформируются кривые распределения древесного запаса деревьев в зависимости от относительной густоты древостоев разного возраста, полноты и класса высот?

16. Как формируется структура биологической продуктивности древостоев разной полноты и густоты по классам высот?

17. Какая роль отводится взаимосвязи отношения массы фракций фитомассы к объёму ствола деревьев в коре с высотой и толщиной деревьев?

18. Приведите содержание нормативов возрастной динамики структуры биомассы и углерода в древостоях разной относительной густоты, полноты, долевого участия породы в составе по классам высот?

19. Как трансформируются кривые распределения фракций фитомассы и углерода деревьев в зависимости от относительной густоты древостоев разного возраста, полноты и класса высот?

20. Как определить биоэнергетический потенциал древостоев на основе теплотворной способности древесины, предложенной Д.И. Менделеевым. Как провести моделирование роста морфометрических показателей элементов леса по типам леса и типам лесорастительных условий?

21. Как решается задача экологической оптимизации породного состава лесных культур по типам лесорастительных условий?

22. Какие условия и ограничения должны быть приняты при решении оптимизационной задачи на «БИОЭКОС» В.Г. Нестерова при целевой функции, обеспечивающей максимум продуктивности культур к возрасту спелости?

23. Как получить величину доступного запаса элементов почвенного питания (N, P, K) при решении оптимизационной задачи на «БИОЭКОС» в разных типах лесорастительных условий?

24. Как увязать закономерности текущего прироста по запасу по типам лесорастительных условий с определением доступного запаса элементов почвенного питания?

25. Как использовать программу «ХА» для получения оптимального породного состава лесных культур в соответствии с потребностями древесных пород в элементах почвенного питания и их наличия в тех или иных ТЛУ?

26. Из чего состоит задача линейного программирования?

27. Что такое целевая функция задачи линейного программирования?

28. Что называется, ограничением задачи математического программирования?

29. Какая задача математического программирования называется задачей математического программирования?

30. Сколько решений имеет задача линейного программирования?

31. Какая форма записи задачи линейного программирования называется исходной?

32. Сформулируйте общую постановку транспортной задачи?

33. Что означают переменные в транспортной задаче?

34. Какая транспортная задача называется закрытой, открытой?

35. Что представляет собой задача о назначениях?

36. Какие условия учитываются в задаче о назначениях?

37. Какие значения могут принимать переменные в задаче о назначениях?

38. Каков признак оптимальности полученного решения в задаче о назначениях?

39. Как определяется значение целевой функции в задаче о назначениях?

40. Что представляет собой задача выбора?

41. Какие условия учитываются в задаче выбора?

42. Что означают переменные задачи выбор?

43. Чем вызвана необходимость наложения на переменные условия целочисленности?

44. В чем особенность решения задачи целочисленного решения в процедуре «Поиск решения»?

45. В чем заключается задача оптимального раскроя?

46. Какие критерии оптимальности применяются в задачах о раскрое?

47. Что такое динамическое программирование?

48. Каким свойством обладает целевая функция задачи динамического программирования?

49. Сформулируйте общую постановку задачи динамического программирования.

50. Как называются целевые функции задачи динамического программирования?

51. Какие критерии оптимальности могут использоваться в постановке задачи динамического программирования?

52. Кем был сформулирован общий подход к решению задач динамического программирования?

53. Как формулируется принцип оптимальности Беллмана?

54. Как определяется число шагов (этапов) в задаче оптимального распределения инвестиций между предприятиями?

55. Что является шаговым управлением в задаче оптимального распределения инвестиций между предприятиями?

56. Какому условию должны удовлетворять переменные рассматриваемой задачи оптимального распределения инвестиций между предприятиями?

57. Как рассчитывается целевая функция в задаче оптимального распределения инвестиций между предприятиями?

58. Как определяется оптимальное значение целевой функции в задаче оптимального распределения инвестиций между предприятиями?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в учебном пособии материалы предназначены для решения проблем формализованного представления и моделирования процессов и явлений, происходящих на объектах лесного хозяйства и лесной промышленности и прежде всего с позиций комплексной оценки древесных ресурсов и возможностью управлять ими. Под комплексной оценкой древесных ресурсов понимается прежде всего выявление законов и закономерностей естественного формирования морфологической структуры лесных насаждений. Это прежде всего это касается динамики роста, строения, товарной и биологической продуктивности древостоев разного породного состава, возраста, полноты и густоты, приуроченных к разным лесорастительным условиям и типам леса.

Методические приемы моделирования нацелены на получение навыков разработки экологических нормативов динамики роста и продуктивности насаждений, которые составляют основу решения задач экологического обоснования оптимального породного состава максимально продуктивных насаждений в конкретных лесорастительных условиях, на оптимизацию режима управления древесными ресурсами от первого приема разреживаний при рубках ухода до проведения главной рубки. Показанные в пособии элементы воспроизводства насаждений на период оборота рубки должны быть основой лесоустroительного проектирования, стратегического планирования и лесоуправления в целом.

Приобретение навыков моделирования с разработкой элементов информационно-справочных систем нормативов комплексной оценки лесных ресурсов позволяет иметь исчерпывающие сведения для модернизации лесной отрасли и цифровой экономики региона РФ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Герасимов Ю.Ю., Хлюстов В.К. Математические методы в расчетах на ЭВМ: применение в лесоуправлении и экологии. Учебник для лесных вузов. – М.: МГУЛ, 2001 г.
2. Кузьмичёв В.В. Закономерности роста древостоев. Новосибирск: Наука, 1977. 160 с.
3. Кузьмичёв В.В. Закономерности динамики древостоев: принципы и модели. Новосибирск: Наука, 2013. -208 с.
4. Лямеборшай С.Х., Хлюстов В.К., Градусов В.М. Оптимизация выбора породного состава лесных культур по эколого-экономическим показателям // Вестник Саратовского госагроуниверситета имени Н.И.Вавилова. – 2014. – № 01. – С. 29–33.
5. Лядина Н.Г., Ермакова Е.А., Светлова Г.Н., Уразбахтина Л.В. Математические методы в экономике АПК. Нелинейное программирование и модели исследования операций: Практикум. М.: Изд-во РГАУ – МСХА имени К.А. Тимирязева, 2012.
6. Макаренко А.А. Строение древостоев. – Алма-Ата: Кайнар 1982. - 68 с.
7. Морозов Г.Ф. Учение о типах насаждений. Избр. тр. М.: Лесн. пром-сть, 1971, т. 2. 536 с.
8. Нестеров В. Г. Вопросы управления природой. - Москва: Лесная промышленность, 1981. - 264 с. Третьяков Н.В. Закон единства в строении насаждения. М.-Л., 1927. 113 с
9. Методы принятия управленческих решений. Линейное и дискретное программирование: практикум. / Н. Г. Лядина, Е. А. Ермакова, Г. Н. Светлова, Л.В. Уразбахтина. - Москва: РГАУ-МСХА им. К. А. Тимирязева, 2014.
10. Светлова Г.Н., Ермакова Е.А. Экономико-математические методы и модели. Учебно-методическое пособие. М.: Изд-во РГАУ – МСХА, 2016.

11. Хлюстов В.К. Древесный прирост и лесопользование. ЛТА, С.-Петербург, 1992. Депонир. во ВНИПИЭИ леспром 06.05.92, №2842-лб 92, 495 с.

12. Хлюстов В.К. Концепция научно-методического сопровождения инвентаризации лесов в XXI в. Матер. 3-й Междунар. научно-практич. конф.; Новосибирск, 29 ноября – 1 декабря 2012 г. – М. : ФГУП «Рослесинфорг», 2013: Государственный лесной реестр, государственная инвентаризация лесов и лесоустройство. Москва, 2013, с.28-33

13. Хлюстов В.К., Устинов М.М., Хлюстов Д.В. Информационно-справочная система комплексной оценки древесных лесных ресурсов. Известия Тимирязевской сельскохозяйственной академии. — 2013.— Вып. 2. С.148—166.

14. Хлюстов В.К., Устинов М.М., Хлюстов Д.В. Многомерные закономерности текущей актуализации таксационных показателей древостоев. Лесотаксационный справочник: учебное пособие, -М.: Издательство РГАУ-МСХА, 2013, - 141 с.

15. Хлюстов В.К. Оптимизация режима промежуточного и главного пользования лесом и возрастная динамика лесосек. Актуальные проблемы почвоведения, агрохимии и экологии. Сборник МСХА, 2004. С. 35-57

16. Хлюстов В.К. Разработка методических рекомендаций и нормативов актуализации таксационных показателей древостоев для основных лесобразующих пород по лесным районам. Шифр 23 - ИО. Заключительный отчёт об итогах научной работы по Государственному контракту № МГ-06-06/63к от 3 июля 2007. – 219 с.

17. Хлюстов В.К. Методическое пособие по выполнению курсовой работы учебной дисциплины Системный анализ и моделирование экосистем. – М.: Изд-во РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, 2010. – 177с.

18. Хлюстов В.К. Комплексная оценка и управление древесными ресурсами: модели-нормативы-технологии. Книга I. – М.: Изд-во РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, 2015. – 389 с.

19. Хлюстов В.К. Комплексная оценка и управление древесными ресурсами: модели-нормативы-технологии. Книга II. – М.: Изд-во РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, 2015. – 449 с.

20. Хлюстов В.К. Моделирование возрастной динамики строения древостоев регрессиями масштаба и формы кривых распределения. Доклады ТСХА, 2009, вып. 281, 153-155 с.

21. Хлюстов В.К. Новый способ моделирования возрастной динамики строения древостоев на примере культур лиственницы Сукачева / В.К. Хлюстов, Д.В. Хлюстов // Второе региональное совещание «Лиственничные леса Архангельской области, их использование и воспроизводство» 22-25 сентября 2008 года, Архангельский государственный технический университет. г.Архангельск, 2008. – 21-28 с.

22. Хлюстов В.К. Разработка методических рекомендаций и нормативов актуализации таксационных показателей древостоев для основных лесобразующих пород по лесным районам. Шифр 23 - ИО. Заключительный отчет об итогах научной работы по Государственному контракту № МГ-06-06/63к от 3 июля 2007. – 219 с.

23. Хлюстов В.К. Многомерная лесотипологическая шкала хода роста многоярусных древостоев пихты кавказской (*Abies Njrdmanniana* ZK). Материалы конференции «Вопросы экологии лесных экосистем». НИИГОР-ЛЕСЭКОЛ, Сочи 17-20 октября 2011. – с.152-156

24. Хлюстов В.К., Устинов М.М., Хлюстов Д.В. Автоматизированная система лесоводственно-таксационных нормативов для инвентаризации древостоев по элементам леса. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012613879. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 25 апреля 2012 г.

25. Хлюстов В.К., Устинов М.М., Хлюстов Д.В. Справочная система лесоводственно-таксационных нормативов для инвентаризации древостоев по элементам леса. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011615418, регистрация 12 июля 2011 г.

26. Хлюстов В.К., Александрова М.Ю. Лесотипологические модели и ход роста древостоев горных лесов Кавказа: Пихта кавказская (*Abies Nordmanniana* KZ). Изд.-во РГАУ-МСХА, М., 2013, 296 с.

27. Хлюстов В.К., Гаврилова О.И. Лесные культуры от семян до древостоев. Изд.-во РГАУ-МСХА, М., 2014, 233 с.

28. Хлюстов В.К., Токтасынов Ж.Н., Курмангожинов А.Ж. Возрастная динамика роста и продуктивности соснового элемента леса в древостоях разной полноты по группам типов леса. Материалы международной научно-практической конференции «Развитие «зеленой экономики» и сохранение биологического разнообразия» 8-10 октября 2013 г. Щучинск, 2013 с. 333-340

29. Хлюстов В.К., Устинов М.В. Ресурсно-экологическое районирование лесов Брянской области. Palmarium Academic Publishing. 2014. 194 с. ISBN 978-3-639-83234-1

30. Хлюстов В.К., Лебедев А.В. Экологическая типизация хода роста древостоев // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Лес. Экология. Природопользование. 2016. №4 (32). С. 5–18.

31. Хлюстов В.К., Мурачева, Л.С. Лесотипологическая шкала хода роста березовых древостоев Калининградской области / В.К. Хлюстов, Л.С. Мурачёва // Вестник Саратовского госагроун. им. Н.И. Вавилова – 2011 - № 6. – С. 42-45.

32. Хлюстов В.К., Лебедев А.В., Ефимов О.Е. Возрастная динамика биологической продуктивности сосновых древостоев по типам леса Костромской области. Лесные экосистемы в условиях изменения климата: биологическая продуктивность и дистанционный мониторинг: материалы международной конференции (14-15 окт. 2015 г.) / Отв. ред. проф. Э.А. Курбанов.

- Электрон. дан. - Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2015. - с. 77-84.

33. Хлюстов В.К., Лебедев А.В., Ефимов О.Е. Экобиоэнергетический потенциал сосняков Костромской области: Монография / В.К. Хлюстов, А.В. Лебедев, О.Е. Ефимов. М.: Изд-во РГАУ-МСХА, 2016. - 292 с.

34. Хлюстов В.К., Лебедев А.В., Устинов М.М. Лесотипологическое программирование оптимального режима лесопользования в конкретном древостое / В.К. Хлюстов, А.В. Лебедев, М.М. Устинов // Лесной вестник. – 2016. - №5. С. 78-84.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. РЕСУРСНО-ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЛЕСОВ РОССИИ	7
1.1. Комплексное лесное районирование субъектов РФ	7
1.2. Методические требования к разработке аналитических схем районирования	9
1.3. Статистическое обоснование типичности лесных районов	11
1.4. Факторизация ресурсно-экологических показателей лесничеств	14
1.5. Кластеризация лесничеств для составление карт-схем комплексного лесного районирования	24
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА, СТРОЕНИЯ И ПРОДУКТИВНОСТИ ДРЕВОСТОЕВ ...	31
2.1. Лесотипологические модели хода роста и продуктивности древостоев	31
2.2. Распределение частот по классам толщины деревьев	44
3. МЕТОДЫ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ВОСПРОИЗВОДСТВА ЛЕСОВ	68
3.1. Оптимизация породного состава лесов будущего	70
3.2. Оптимизация режима промежуточного и главного пользования лесом	79
4. ИНФОРМАЦИОННО - СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ТАКСАЦИИ ЛЕСА	100
4.1. Системный комплекс электронных нормативов для таксации насаждений	100
4.2. Информационно-справочная система нормативов комплексной оценки древесных ресурсов	108
5. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	121
5.1. Форма записи задачи линейного программирования	121
5.2. Программирование в приложении <i>MS Excel</i> : «Поиск решения»	123
5.3. Транспортная задача	135
5.4. Задача о назначении	140
5.5. Задача выбора	144
5.6. Целочисленное программирование	148
5.7. Задачи о раскрое	153
5.8. Динамическое программирование	161
5.9. Решение задачи оптимального распределения инвестиций	170
<i>Словарь употребляемых понятий и терминов</i>	<i>177</i>
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	<i>178</i>
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	184
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	185

Учебное пособие

Хлюстов Виталий Константинович

Светлова Галина Николаевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛЕСНЫХ
ЭКОСИСТЕМ**

Учебное пособие

Ответственный редактор Е.Е. Рытова

Подписано для размещения в Электронно-библиотечной
системе РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева 13.11. 2019 г.

Оригинал-макет подготовлен Издательством РГАУ-МСХА
127550, Москва, Тимирязевская ул., 44
Тел. 8 (499) 977-40-64