

Гидравлика и инженерная гидрология

Оригинальная статья

<https://doi.org/10.26897/1997-6011-2025-5-92-98>

УДК 532.546:519.6:544.014.4

**АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ МАССОПЕРЕНОСА
С РЕАКЦИЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ****Н.Н. Ивахненко^{1✉}, М.Ю. Бадекин², Д.М. Бенин³, Н.А. Коноплин⁴, И.А. Федоркина⁵**^{1,3,4} ФГБОУ ВО «Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева»;
127434, г. Москва, ул. Тимирязевская, 49, Россия² ФГБОУ ВО «Донецкий национальный университет»; 283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24, Россия⁵ Ордена Трудового Красного Знамени ФГБОУ ВПО «Московский технический университет связи и информатики»;
111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 8А, Россия¹ ivakhnenko_nn@rgau-msha.ru; SPIN-код: 5082-0613, Author ID: 836861² korund2002@list.ru; SPIN-код: 1447-7503, Author ID: 201633³ dbenin@rgau-msha.ru; SPIN-код: 6243-0567, Author ID: 708496⁴ konoplin@rgau-msha.ru; SPIN-код: 6797-4550, Author ID: 580233⁵ i.a.fedorkina@mtuci.ru; SPIN-code: 6043-9140, Author ID: 564671

Аннотация. Исследования посвящены анализу реактивного массопереноса в двухслойной пористой среде с пространственно-неоднородным распределением пористости. В работе рассматривается система, состоящая из двух областей: левой с постоянной пористостью и правой с переменной пористостью, описываемой заданным распределением. При условии малой скорости растворения минералов система сводится к стационарной постановке, что позволяет получить аналитические решения для концентрации и ее производной на границе раздела сред. Особое внимание уделено влиянию ключевых безразмерных параметров – чисел Пекле (Pe) и Дамкёлера (Da), определяющих динамику процесса. Установлено, что при $Pe \gg 1$ система выходит на стационарный режим, при котором концентрация стремится к пределу $1/(1+Da)$, а ее производная – к значению $-Da \cdot Pe/(1+Da)$. В случае $Da \ll 1$ концентрация и ее производная становятся независимыми от параметров массопереноса, что указывает на изменение механизма переноса в этом предельном режиме. Важную роль играет также обратная зависимость между числом Da и параметром α , характеризующим распределение пористости, что подчеркивает влияние неоднородности среды на устойчивость фронта растворения. Полученные аналитические решения подтверждены численными расчетами, демонстрируя высокую степень согласованности. Результаты работы имеют практическое значение для моделирования процессов кислотной обработки пластов, управления фильтрацией в нефтегазовых месторождениях и прогнозирования гидрогеологических процессов в неоднородных пористых средах.

Работа выполнена за счет средств Программы развития РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева в рамках Программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030».

Ключевые слова: пористая среда, реактивный массоперенос, фильтрация, число Пекле, число Дамкёлера, концентрация кислоты, неоднородность пористости, аналитическое решение, стационарный режим, фронт растворения

Формат цитирования: Ивахненко Н.Н., Бадекин М.Ю., Бенин Д.М., Коноплин Н.А., Федоркина И.А. Анализ процессов массопереноса с реакцией в неоднородных пористых средах // Природообустройство. 2025. № 5. С. 92-98. <https://doi.org/10.26897/1997-6011-2025-5-92-98>

ANALYSIS OF MASS TRANSFER PROCESSES WITH REACTION IN HETEROGENEOUS POROUS MEDIA

N.N. Ivakhnenko^{1✉}, M.Yu. Badekin², D.M. Benin³, N.A. Konoplin⁴, I.A. Fedorkin⁵

^{1,3,4}Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy", 127434, Moscow, Timiryazevskaya St., 49, Russia

²Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Donetsk National University", 283001, Donetsk, Universitetskaya St., 24, Russia

⁵Order of the Red Banner of Labor Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Moscow Technical University of Communications and Informatics", 111024, Moscow, Aviamotornaya St., 8A, Russia

¹ivakhnenko_nn@rgau-msha.ru; SPIN-код: 5082-0613, Author ID: 836861

²korund2002@list.ru; SPIN-код: 1447-7503, Author ID: 201633

³dbenin@rgau-msha.ru; SPIN-код: 6243-0567, Author ID: 708496

⁴konoplin@rgau-msha.ru; SPIN-код: 6797-4550, Author ID: 580233

⁵i.a.fedorkina@mtuci.ru; SPIN-code: 6043-9140, Author ID: 564671

Abstract. The study is devoted to the analysis of reactive mass transfer in a two-layer porous medium with a spatially inhomogeneous distribution of porosity. The paper considers a system consisting of two regions: the left one with constant porosity and the right one with variable porosity described by a given distribution. Under the condition of a low rate of mineral dissolution, the system is reduced to a stationary statement, which allows us to obtain analytical solutions for the concentration and its derivative at the interface between the media. Particular attention is paid to the influence of key dimensionless parameters – the Peclet (Pe) and Damköhler (Da) numbers, which determine the dynamics of the process. It is found that at $Pe \gg 1$, the system enters a stationary mode, at which the concentration tends to the limit $1/(1+Da)$, and its derivative – to the value $-Da \cdot Pe/(1+Da)$. In the case of $Da \ll 1$, the concentration and its derivative become independent of the mass transfer parameters which indicates a change in the transfer mechanism in this limiting mode. An important role is also played by the inverse relationship between the Da number and the parameter α , characterizing the distribution of porosity, which emphasizes the influence of the heterogeneity of the medium on the stability of the dissolution front. The obtained analytical solutions are confirmed by numerical calculations, demonstrating a high degree of consistency. The results of the work are of practical importance for modeling the processes of acid treatment of formations, filtration control in oil and gas fields and forecasting hydrogeological processes in heterogeneous porous media.

The work was carried out at the expense of the Development Program of the K.A. Timiryazev Russian State Agricultural Academy within the framework of the Strategic Academic Leadership Program "Priority 2030".

Keywords: porous medium, reactive mass transfer, filtration, Peclet number, Damkohler number, acid concentration, porosity heterogeneity, analytical solution, stationary mode, dissolution front

Citation format: Ivakhnenko N.N., Badekin M.Yu., Benin D.M., Konoplin N.A., Fedorkina I.A. Analysis of mass transfer processes with reaction in heterogeneous porous media // Prirodoobustrojstvo. 2025. № 5. P. 92-98. <https://doi.org/10.26897/1997-6011-2025-5-92-98>

Введение. Фильтрация жидкостей и газов в пористых средах представляет собой важную научную и практическую задачу, актуальную для нефтегазовой отрасли, гидрогеологии и химической технологии. Процессы массопереноса в неоднородных пористых структурах осложняются изменяющейся пористостью, химическими реакциями на границах раздела фаз и сложной динамикой течения [1-3]. Особый интерес вызывает моделирование реактивного массопереноса в системах с пространственно-неоднородными свойствами, где процессы фильтрации тесно связаны с химическим растворением породы [4, 5].

Современные подходы к моделированию таких процессов включают в себя как аналитические методы, основанные на решении дифференциальных уравнений фильтрации и переноса, так и численные алгоритмы, позволяющие учитывать сложную геометрию пористой среды [6-8]. В таких работах, как [9, 10], рассматриваются задачи стационарной фильтрации с учетом неоднородности пористых слоев, тогда как в исследованиях [11, 12] особое внимание уделяется неустойчивости фронта растворения и его влиянию на динамику течения. Важную роль играют также методы численного

моделирования включая алгоритмы решения многомерных задач фильтрации [13, 14] и применение параллельных вычислений для ускорения расчетов [15].

В данной работе исследуется процесс реактивного массопереноса в системе, состоящей из двух пористых сред с различным распределением пористости. Левая область характеризуется постоянной пористостью, тогда как в правой зоне пористость изменяется в соответствии с заданным распределением (1). При малой скорости растворения минералов система может быть описана в стационарной постановке, что приводит к уравнениям (2) и (3) с граничными условиями (6)-(9). Особенностью данной задачи является возможность аналитического решения для концентрации кислоты в левой области (17), которое затем используется для определения параметров на границе раздела сред.

Цель исследований: теоретическое и численное исследование распределения концентрации кислоты в двухслойной пористой среде с учетом неоднородности пористости и химического взаимодействия на границе раздела.

Особое внимание уделяется анализу влияния ключевых безразмерных параметров – чисел Пекле (18) и Дамкёлера (19) – на характер распределения концентрации и устойчивость фронта растворения. На основе полученных аналитических решений (21)-(23) выполняется оценка предельных режимов системы и их соответствия результатам численного моделирования.

Полученные решения позволяют не только описать стационарное распределение концентрации, но и выявить критические параметры, определяющие устойчивость процесса фильтрации в неоднородных пористых средах.

Материалы и методы исследований. Исследуемая область состоит из двух пористых сред с различным распределением пористости, что позволяет выделить две зоны. В левой зоне пористость постоянна, тогда как в правой она описывается следующим распределением:

$$\phi = \phi_0 + (\phi_f - \phi_0)e^{-\alpha(x-L_1)}, \quad (1)$$

где ϕ – пористость пористой среды; ϕ_0 – начальная пористость пористой среды в нерастворенной части правой области; ϕ_f – пористость пористой среды в левой области; L_1 – местоположение границы раздела между левой и правой областями; α – константа для L_1 , отражающая распределение пористости в частично растворенной части растворимых материалов в правой области.

Данная теоретическая задача может быть сведена к одномерной постановке при условии стационарного режима реактивного массопереноса. В случаях, когда скорость растворения

минералов или емкость системы достаточно малы (что характерно для многих реальных процессов химического растворения), временная зависимость в уравнениях переноса становится пренебрежимо малой. Таким образом, система реактивного массопереноса может рассматриваться как стационарная. При данных допущениях управляющие уравнения задачи принимают следующий вид:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \phi_f D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}; \quad (2)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \phi D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} - kSC, \quad (3)$$

где u – скорость фильтрации по Дарси в горизонтальном направлении, м/с; C – концентрация кислоты, кмоль/м³; D – коэффициент молекулярной диффузии кислоты, м²/с; k – константа скорости реакции растворения, м/с; S – удельная площадь реакционной поверхности (на единицу объема нерастворенного материала) в правой области, м⁻¹:

$$S = S_0 \frac{(\phi - \phi_0)}{\phi_f} = \frac{S_0}{\phi_f} (\phi_f - \phi_0) e^{-\alpha(x-L_1)}, \quad (4)$$

где s_0 – начальная удельная площадь поверхности, м⁻¹.

Подстановка уравнений (1) и (4) в (3) приводит к следующему уравнению:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = [\phi_0 + (\phi_f - \phi_0)e^{-\alpha(x-L_1)}] D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \alpha(\phi_f - \phi_0)e^{-\alpha(x-L_1)} D \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{kS_0}{\phi_f} (\phi_f - \phi_0) e^{-\alpha(x-L_1)} C. \quad (5)$$

Граничное условие задачи имеет следующий вид:

$$C(x) = C_0, \quad (6)$$

где C_0 – концентрация кислоты на входной границе (левая граница области).

Условия непрерывности массы и ее потока на границе раздела сред записываются следующим образом:

$$C(x)|_{x=L_1^-} = C(x)|_{x=L_1^+} \quad (7)$$

$$\left(\phi D \frac{\partial C(x)}{\partial x} \right) \Big|_{x=L_1^-} = \left(\phi D \frac{\partial C(x)}{\partial x} \right) \Big|_{x=L_1^+}. \quad (8)$$

С учетом (1) уравнение (8) можно переписать как

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \Big|_{x=L_1^-} = \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \Big|_{x=L_1^+}, \quad \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L_1^-} = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L_1^+}. \quad (9)$$

Результаты и их обсуждение. С учетом постоянства пористости в левой области рассматриваемой системы распределение концентрации в этой зоне допускает аналитическое решение через специальную методику замены граничных условий. Суть подхода основывается

на особенностях математической структуры уравнений задачи: поскольку (2) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, для однозначного определения его решения требуется задание двух граничных условий. При этом прямое аналитическое решение уравнения (3) оказывается невозможным, однако в точке границы раздела ($x = L_1$) оно должно выполняться автоматически. Важнейшее преимущество предлагаемой стратегии заключается в том, что решение уравнения (3) в точке контакта сред может быть выражено через уже известное аналитическое решение уравнения (2), что находит свое отражение в соотношениях (7) и (9). Для лучшего понимания механизма работы данного метода ниже приводится его детальное пошаговое описание.

Теоретическое решение уравнения (2) можно математически выразить как

$$C(x) = Ae^{\beta x} + B, \quad (10)$$

где A и B – неизвестные постоянные, подлежащие определению; β – параметр, определяемый следующим выражением:

$$\beta = \frac{u}{\phi_f D}. \quad (11)$$

Применение граничного условия из уравнения (6) приводит к соотношению:

$$A = C_0 - B. \quad (12)$$

Таким образом, уравнение (10) преобразуется к виду:

$$C(x) = C_0 e^{\beta x} + (1 - e^{\beta x}) B. \quad (13)$$

Используя предложенный метод подстановки условий сопряжения, подставляем (13) в (5) на границе раздела ($x = L_1$) для нахождения константы C , что дает уравнение:

$$-(\phi_f - \phi_0) Da \beta (C_0 e^{\beta L_1} - B e^{\beta L_1}) - k S_0 \frac{\phi_f - \phi_0}{\phi_f} (C_0 e^{\beta L_1} + B(1 - e^{\beta L_1})) = 0. \quad (14)$$

Очевидно, константу B можно определить из уравнения (14) следующим образом:

$$B = \frac{\frac{u\alpha}{kS_0} e^{\beta L_1} + e^{\beta L_1}}{\frac{u\alpha}{kS_0} e^{\beta L_1} + e^{\beta L_1} - 1} C_0. \quad (15)$$

Подстановка уравнения (15) в уравнение (12) дает следующее выражение:

$$A = \frac{-C_0}{\frac{u\alpha}{kS_0} e^{\beta L_1} + e^{\beta L_1} - 1}. \quad (16)$$

Итоговое решение дифференциального уравнения (2) принимает форму:

$$C(x) = \frac{-C_0 e^{\beta x_1}}{\left(\frac{u\alpha}{kS_0} + 1\right) e^{\beta L_1} - 1} + \frac{\left(\frac{u\alpha}{kS_0} + 1\right) e^{\beta L_1}}{\left(\frac{u\alpha}{kS_0} + 1\right) e^{\beta L_1} - 1} C_0 \quad (17)$$

Уравнение (17) можно привести к безразмерному виду, введя два ключевых параметра: число Пекле, характеризующее динамические свойства левой области, и число Дамкёлера, описывающее процессы в правой области:

$$Pe = \frac{uL_1}{\phi_f D}; \quad (18)$$

$$Da = \frac{kS_0}{u\alpha}, \quad (19)$$

где Pe – число Пекле; Da – число Дамкёлера.

Дополнительно потребуется определить следующие безразмерные параметры:

$$\bar{C}(\bar{x}) = \frac{C(x)}{C_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L_1}. \quad (20)$$

С помощью указанных критериев подобия уравнение (17) приводится к безразмерной форме:

$$\bar{C}(\bar{x}) = \frac{-e^{(Pe)\bar{x}}}{\left(1 + \frac{1}{Da}\right) e^{Pe} - 1} + \frac{\left(1 + \frac{1}{Da}\right) e^{Pe}}{\left(1 + \frac{1}{Da}\right) e^{Pe} - 1}. \quad (21)$$

На границе раздела между левой и правой областями получены следующие аналитические решения:

$$\bar{C}(\bar{x})|_{\bar{x}=1} = \frac{\frac{1}{Da} e^{Pe}}{\left(1 + \frac{1}{Da}\right) e^{Pe} - 1}; \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{C}(\bar{x})}{\partial \bar{x}}|_{\bar{x}=1} = \frac{-(Pe) e^{Pe}}{\left(1 + \frac{1}{Da}\right) e^{Pe} - 1}. \quad (23)$$

Анализ уравнений (22) и (23) позволяет выявить важные закономерности поведения системы при предельных значениях параметров. В случае, когда число Пекле значительно превышает единицу ($Pe \gg 1$), безразмерная концентрация на границе раздела стремится к пределу $1/(1+Da)$, в то время как ее производная асимптотически приближается к значению $-Da \cdot Pe/(1+Da)$. Эти соотношения демонстрируют, что при больших значениях Pe и фиксированном числе Дамкёлера Da система выходит на стационарный режим, при котором концентрация

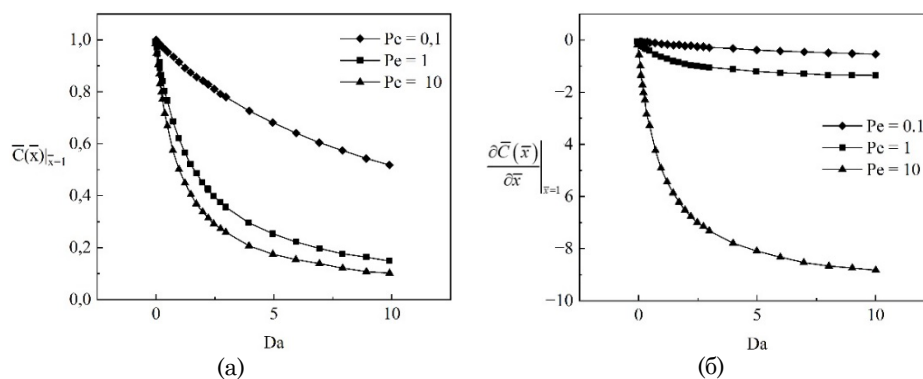


Рис. 1. Влияние числа Пекле на безразмерную концентрацию (а) и ее первую производную (б) на границе раздела левой и правой областей

Fig. 1. The effect of the Peclet number on the dimensionless concentration (a) and its first derivative (b) at the interface between the left and right regions

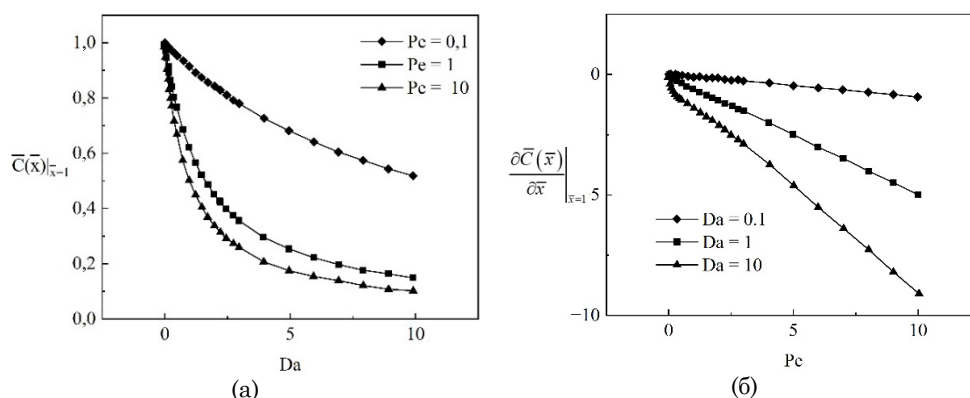


Рис. 2. Влияние числа Дамкёлера на безразмерную концентрацию (а) и ее первую производную на границе раздела левой и правой областей (б)

Fig. 2. The effect of the Damköhler number on the dimensionless concentration (a) and its first derivative at the interface between the left and right regions (b)

определяется ключевыми параметрами процесса массопереноса.

Особый интерес представляет случай малых значений числа Дамкёлера ($Da \ll 1$). В этом пределе как концентрация, так и ее производная стремятся к постоянным значениям, которые перестают зависеть от характеристик системы массопереноса. Это наблюдение имеет принципиальное значение для понимания механизмов формирования неустойчивости фронта растворения, особенно в системах с пространственно-неоднородным распределением пористости, характерным для правой области рассматриваемой системы.

Существенную роль в поведении системы играет обратная зависимость между числом Дамкёлера Da и параметром α , характеризующим распределение пористости. Эта связь приводит к тому, что значение α оказывает определяющее влияние как на предельные значения концентрации и ее производной на границе раздела, так и на положение самого фронта между областями с различными свойствами. С практической точки

зрения такая граница может рассматриваться как плоский референтный фронт при теоретическом анализе устойчивости системы, что особенно важно для моделирования процессов в геологических средах с неоднородной пористой структурой.

Результаты, представленные на рисунках 1 и 2, полностью подтверждают эти выводы, демонстрируя хорошее соответствие между аналитическими предсказаниями и численными расчетами.

Выводы

1. Разработана математическая модель реактивного массопереноса в двухслойной пористой среде с неоднородным распределением пористости. Показано, что при малой скорости растворения минералов система может быть описана в стационарной постановке. Это позволило получить аналитические решения для концентрации и ее производной на границе раздела сред.

2. Установлено, что поведение системы определяется безразмерными числами Пекле (Pe) и Дамкёлера (Da). При $Pe \gg 1$ концентрация

кислоты стремится к пределу $1/(1+Da)$, а ее производная – к значению $-Da \cdot Pe/(1+Da)$, что свидетельствует о выходе системы на стационарный режим. В случае $Da \ll 1$ концентрация и ее производная становятся независимыми от параметров массопереноса.

3. Выявлена обратная зависимость между числом Da и параметром α , характеризующим распределение пористости в правой области. Это указывает на критическую роль неоднородности пористой структуры в формировании устойчивости фронта растворения.

4. Аналитические решения подтверждены численными расчетами, демонстрируя хорошую согласованность. Это подтверждает адекватность

предложенной модели для описания процессов в реальных геологических средах.

5. Полученные результаты позволяют прогнозировать распределение концентрации в неоднородных пористых системах, что важно для оптимизации процессов кислотной обработки пластов, управления фильтрацией в нефтегазовых месторождениях и моделирования гидрогеологических процессов.

Таким образом, проведенные исследования расширяет понимание механизмов реактивного массопереноса в неоднородных пористых средах и предоставляет инструменты для анализа устойчивости фронта растворения в практических приложениях.

Список использованных источников

1. Богачев К.Ю. О пространственной аппроксимации методом подсеток для задачи фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде / К.Ю. Богачев, Н.С. Мельниченко // Вычислительные методы и программирование. 2008. Т. 9, № 3. С. 191-199. EDN: JUBEVT
2. Богачев К.Ю. Применение параллельного преобусловителя CPR к задаче фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде / К.Ю. Богачев, И.Г. Горелов // Вычислительные методы и программирование. – 2008. Т. 9, № 3. С. 184-190. EDN: JUBEVJ
3. Гальцев О.В. О численном моделировании задачи Маскета со свободной границей / О.В. Гальцев, О.А. Гальцева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2010. № 23(94). С. 59-67. EDN: NRASRT
4. Гальцев О.В. Неустойчивость Рэлея-Тейлора в задаче Маскета со свободной границей / О.В. Гальцев // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика 2012. № 5(124). С. 68-85. EDN: PCVSNF
5. Гальцев О.В. Численное решение усредненной модели совместного движения жидкостей различной плотности в пористых средах / О.В. Гальцев // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2012. № 17(136). С. 154-168. EDN: TAGBNF
6. Гальцев О.В. Математическое моделирование процесса фильтрации жидкостей в пористой среде различной геометрии / О.В. Гальцев, О.А. Гальцева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2015 № 23(220). С. 116-127. EDN: VKBJSF
7. Гальцева О.А. Численное решение задачи совместного движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пористой среде на микроскопическом уровне / О.А. Гальцева, О.В. Гальцев // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2014. № 25(196). С. 75-96. EDN: TQQQBB
8. Губайдуллин Д.А. Алгоритм решения трехмерных задач напорно-безнапорной стационарной фильтрации жидкости со сгущающимися участками сетки / Д.А. Губайдуллин, П.А. Мазуров, А.В. Цепяев // Вычислительные методы и программирование 2005. Т. 6, № 1. С. 217-225. EDN: HQVINT

References

1. Bogachev K.Yu. On spatial approximation by the sub-grid method for the problem of filtration of a viscous compressible fluid in a porous medium / K.Yu. Bogachev N.S. Melnichenko // Computational methods and programming. 2008. Vol. 9, No. 3. P. 191-199. EDN: JUBEVT
2. Bogachev K.Yu. Application of the parallel preconditioner CPR to the problem of filtration of a viscous compressible fluid in a porous medium / K.Yu. Bogachev I.G. Gorelov // Computational methods and programming. 2008. Vol. 9, No. 3. P. 184-190. EDN: JUBEVJ
3. Gal'tsev O.V. On Numerical Modeling of the Musket Problem with a Free Boundary / O.V. Gal'tsev, O.A. Gal'tseva // Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics. 2010. No. 23(94). P. 59-67. EDN: NRASRT
4. Gal'tsev O.V. Rayleigh-Taylor Instability in the Musket Problem with a Free Boundary / O.V. Gal'tsev // Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics. 2012. No. 5(124). P. 68-85. EDN: PCVSNF
5. Gal'tsev O.V. Numerical solution of the averaged model of joint motion of liquids of different densities in porous media / O.V. Gal'tsev // Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics. 2012. No. 17 (136). P. 154-168. EDN: TAGBNF
6. Gal'tsev O.V. Mathematical modeling of the process of liquid filtration in a porous medium of different geometry / O.V. Gal'tsev, O.A. Gal'tseva // Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics. – 2015. – No. 23 (220). – P. 116-127. EDN: VKBJSF
7. Galtseva O.A. Numerical solution of the problem of joint motion of two immiscible incompressible fluids in a porous medium at the microscopic level / O.A. Galtseva, O.V. Galtsev // Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics. 2014. No. 25 (196). P. 75-96. EDN: TQQQBB
8. Gubaydullin D.A. Algorithm for solving three-dimensional problems of pressure-free stationary filtration of liquid with thickening sections of the grid / D.A. Gubaydullin, P.A. Mazurov, A.V. Tsepaev // Computational methods and programming. 2005. Vol. 6, No. 1. P. 217-225. EDN: HQVINT
9. Gubkina E.V. Fluid filtration in an unbounded formation with an inclined aquiclude / E.V. Gubkina, V.N. Monakhov // Applied mechanics and technical physics. 2003. Vol. 44, No. 1 (257). P. 83-94. EDN: OOAPRT

9. Губкина Е.В. Фильтрация жидкости в неограниченном пласте с наклонным водоупором / Е.В. Губкина, В.Н. Монахов // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44, № 1(257). С. 83-94. EDN: OOAPRT

10. Елесин А.В. Учет априорной сравнительной информации в задачах идентификации коэффициента фильтрации / А.В. Елесин, А.Ш. Кадырова // Вычислительные методы и программирование. 2008. Т. 9, № 1. С. 10-15. EDN: JUBENR

11. Иванов М.И. Вычислительная модель фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах / М.И. Иванов, И.А. Кремер, Ю.М. Лаевский // Сибирский журнал вычислительной математики. 2021. Т. 24, № 2. С. 145-166. DOI: 10.15372/SJNM20210203. EDN: WGVDXN

12. Костин В.А. Об одной модели процесса нестационарной фильтрации в пористой среде / В.А. Костин, А.В. Костин // Насосы. Турбины. Системы. 2017. № 4(25). С. 65-69. EDN: YTBVNP

13. Равшанов Н. Математическая модель и численный алгоритм для исследования процесса фильтрации жидкости во взаимодействующих напорных слоях / Н. Равшанов, Э.Ш. Назирова, У. Орипжанова, С.М. Аминов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2020. № 1(25). С. 28-49. EDN: AVBJMB

14. Равшанов Н. Моделирование процесса фильтрации жидкости во взаимодействующих напорных пористых слоях / Н. Равшанов, У. Орипжанова // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2020. № 6(30). С. 93-115. EDN: OAWUEA

15. Равшанов Н. Численное моделирование фильтрации газа в неоднородной пористой среде для расчета газодинамических параметров процесса / Н. Равшанов, С. Аминов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2022. № 3(41). С. 48-66. EDN: NNYURM

10. Elesin A.V. Taking into account a priori comparative information in problems of filtration coefficient identification / A.V. Elesin A.Sh. Kadyrova // Computational methods and programming. 2008. Vol. 9, No. 1. P. 10-15. EDN: JUBENR

11. Ivanov M.I. Computational model of fluid filtration in fractured-porous media / M.I. Ivanov, I.A. Kremer, Yu.M. Laevsky // Siberian Journal of Computational Mathematics. 2021. Vol. 24, No. 2. P. 145-166. DOI: 10.15372/SJNM20210203. EDN: WGVDXN

12. Kostin V.A. On one model of the non-stationary filtration process in a porous medium / V.A. Kostin, A.V. Kostin // Pumps. Turbines. Systems. 2017. No. 4 (25). P. 65-69. EDN: YTBVNP

13. Mathematical model and numerical algorithm for studying the process of liquid filtration in interacting pressure layers / N. Ravshanov E.Sh. Nazirova, U. Oripzhanova, S.M. Aminov // Problems of Computational and Applied Mathematics. 2020. No. 1 (25). P. 28-49. EDN: AVBJMB

14. Ravshanov N. Modeling the process of liquid filtration in interacting pressure porous layers / N. Ravshanov, U. Oripzhanova // Problems of Computational and Applied Mathematics. – 2020. No. 6 (30). P. 93-115. EDN: OAWUEA

15. Ravshanov N. Numerical modeling of gas filtration in an inhomogeneous porous medium for calculating gas-dynamic parameters of the process / N. Ravshanov, S. Aminov // Problems of Computational and Applied Mathematics. 2022. No. 3 (41). P. 48-66. EDN: NNYURM

Об авторах

Наталья Николаевна Ивахненко, канд. физ.-мат. наук, доцент; SPIN-код: 5082-0613, Author ID: 836861; ivakhnenko_nn@rgau-msha.ru

Максим Юрьевич Бадекин, старший преподаватель; SPIN-код: 1447-7503, Author ID: 201633, korund2002@list.ru

Дмитрий Михайлович Бенин, канд. техн. наук, доцент; SPIN-код: 6243-0567, Author ID: 708496, dbenin@rgau-msha.ru

Николай Александрович Коноплин, канд. физ.-мат. наук, доцент; SPIN-код: 6797-4550, Author ID: 580233; konoplin@rgau-msha.ru

Ирина Анатольевна Федоркина, Ph.D. in Economics, Associate Professor; SPIN-code: 6043-9140, Author ID: 564671; i.a.fedorkina@mtuci.ru

About the Authors

Natalia N. Ivakhnenko, CSc (Physics-Math), Associate Professor; SPIN code: 5082-0613, Author ID: 836861; ivakhnenko_nn@rgau-msha.ru

Maksim Yu. Badekin, Senior Lecturer; SPIN code: 1447-7503, Author ID: 201633, korund2002@list.ru

Dmitry M. Benin, CSc (Eng), Associate Professor; SPIN code: 6243-0567, Author ID: 708496, dbenin@rgau-msha.ru

Nikolay A. Konoplin, CSc (Physics-Math), Associate Professor; SPIN code: 6797-4550, Author ID: 580233; konoplin@rgau-msha.ru

Irina A. Fedorkina, CSc (Econ), Associate Professor; SPIN-code: 6043-9140, Author ID: 564671; i.a.fedorkina@mtuci.ru

Критерии авторства / Authorship criteria

Ивахненко Н.Н., Бадекин М.Ю., Бенин Д.М., Коноплин Н.А., Федоркина И.А. выполнили исследование, на основании которых провели обобщение и написали рукопись, имеют на статью авторское право и несут ответственность за плагиат.

Конфликт интересов / Conflict of interests

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interests.

Вклад авторов / Authors' contribution

Все авторы сделали равный вклад в подготовку публикации / All the authors made an equal contribution to the preparation of the publication.

Статья поступила в редакцию / The article was received at the editorial office 28.08.2025

Одобрена после рецензирования / Approved after peer review 05.11.2025

Принята к публикации / Accepted for publication 05.11.2025

Ivakhnenko N.N., Badekin M.Yu., Benin D.M., Konoplin N.A., Fedorkina I.A. performed the research, on the basis of which they generalized and wrote the manuscript, they have the copyright for the article and are responsible for plagiarism.